

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FARK DENKLEMLERİ

Onur ÖNAY

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÇİZELGE LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. ARDIŞIK TEKRAR İŞLEMLERİ	2
3. FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BAZI TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3.1 Bazı Önemli Teoremler	4
4. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ	9
4.1 Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri Üzerine Örnekler	16
4.2 Birinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Kararlılıkları.....	23
4.2.1 Denge Noktası	23
5. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ.....	30
5.1 İkinci Mertebeden Homojen Olmayan Lineer Fark Denklemleri.....	39
5.2 Üreten Fonksiyonlar	44
6. ÇÖZÜMLERİN LİMİT ALMA DAVRANIŞLARI	48
7. N. MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ	54
8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	66
KAYNAKLAR	67
İNTERNET KAYNAKLARI	68
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGE LİSTESİ

N	Doğal sayılar
$\prod$	Çarpım sembolü
∇	Geri fark operatörü
Δ	İleri fark operatörü
E	Kaydırma operatörü
Z^+	Pozitif tam sayılar
$\Re$	Reel sayılar
$\sum$	Toplam sembolü

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4.1.1 Zaman artıkça kahvenin sıcaklığı azalarak oda sıcaklığına yaklaşır	18
Şekil 4.1.2 Ödemenin zamana göre değişimi ve faizin etkisi	19
Şekil 4.2.1.1 Denge noktası $x^* = 1$ noktasıdır	24
Şekil 4.2.1.2 x^* karalıdır	25
Şekil 4.2.1.3 x^* noktası kararsızdır	26
Şekil 4.2.1.4 x^* noktası asimtotik kararlı	26
Şekil 4.2.1.5 x^* global asimtotik kararlı	27

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 5.1	31
Tablo 5.1.1	40
Tablo 7.1	64

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, danışmanım Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL ‘ e, tüm YTÜ matematik bölümü öğretim üyelerine, matematik alanında beni bu seviyeye getiren Dumlupınar Üniversitesi matematik bölümü öğretim üyelerine ve her zaman yanımda olan aileme ayrıca burs vererek destek olan TÜBİTAK ‘a teşekkür ederim.

ÖZET

Günlük hayatta; mühendislik, kimya, fizik, biyoloji alanındaki genetik, radyasyondaki kuantum, ekonomi, olasılık teorisi gibi birçok bilim alanında karşılaşılan matematiksel problemleri çözmek için fark denklemleri kullanılmaktadır. Bu çalışmada, lineer fark denklemleri incelenmiştir. Çalışma fark denklemleri konusunda genel bilgiler vererek başlamıştır. İlerleyen kısımlarda; birinci mertebeden lineer fark denklemleri, ikinci mertebeden lineer fark denklemleri ve n . merteben lineer fark denklemleri hakkında bilgiler verilmiştir. Bu tezde, çözüm yöntemleri gösterilmiştir ve örnekler verilmiştir. Fark denklemlerinin kararlılıklarıyla ilgili tanımlar ve teoremler verilmiştir. Ayrıca lineer fark denklemlerinin özellikleri ve uygulamaları anlatılmıştır.

Anahtar kelimeler: Fark Denklemleri, Lineer Fark Denklemleri, Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri, İkinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri, N . Mertebeden Lineer Fark Denklemleri

ABSTRACT

Difference equations were used solving mathematical problems which we met in the field of several sciences such as engineering, chemistry, physics, genetics in biology, quanta in radiation, economics, probability theory, in daily life. Linear difference equations were investigated in this study. This work started with given general information about difference equations. In the following sections; it is given information about, first order linear difference equations, second order linear difference equations and n^{th} order linear difference equations. In this thesis, methods of the solutions were shown and examples were given. Definitions and theorems about stability of difference equations were given. Also, properties and applications of linear difference equations were given.

Keywords: Difference Equations, Linear Difference Equations, First Order Linear Difference Equations, Second Order Linear Difference Equations, N^{th} Order Linear Difference Equations

1. GİRİŞ

Fark denklemleri; mühendislik, kimya, fizik, biyolojideki genetik, radyasyondaki kuantum, ekonomi gibi birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Fark denklemlerinin teorisi, diferansiyel denklemlerin teorisine çok büyük benzerlik göstermektedir. Fark denklemlerinin incelenmesi, diferansiyel denklemlere kıyasla daha yeni bir kavramdır. 20. yy da, genetik ve radyasyondaki kuantum gibi bilimin çeşitli dallarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik ifadeleri dışında ifadelere ihtiyaç duyulduğunu göstermiştir. Diferansiyel denklemlerde karşılaşılan süreksizlik durumları, fark denklemleri ile kaldırılmak istenmektedir (Çatal, Ocak 2004).

Eğitimde öncelik, diferansiyel denklemlere verilmektedir. Eğitimde öncelik fark denklemlerine verilmelidir. Çünkü öğrencilere fark denklemleri teorisini kavratmak için daha az ön bilgi gerekir ve bu teori eğitimin devamı için lineer cebir ile birlikte kuvvetli bir alt yapı oluşturur. Fark denklemleri teorisinden sonra, diferansiyel denklemler teorisi daha kolay öğretilir (Akın ve Bulgak, 1998).

Sonlu fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamıştır. 1825 yılından önce lineer fark denklemleri incelenmemiştir. 1885 yılında Poincaré ile lineer fark denklem teorisine girilmiştir (Çatal, Ocak 2004).

Bu çalışma, sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk üç bölümü, giriş ve genel bilgiler oluşturmaktadır. Dördüncü bölümde, birinci mertebeden lineer fark denklemleri ve kararlılık hakkında bilgi verilmiştir. Beşinci bölümde, ikinci mertebeden lineer fark denklemleri incelenmiştir. Altıncı bölümde, fark denklemlerinin limit alma davranışları; yedinci bölümde, n. mertebeden lineer fark denklemleri incelenmiştir. Son bölümde de, sonuçlar ve öneriler verilmektedir.

2. ARDIŞIK TEKRAR İŞLEMLERİ

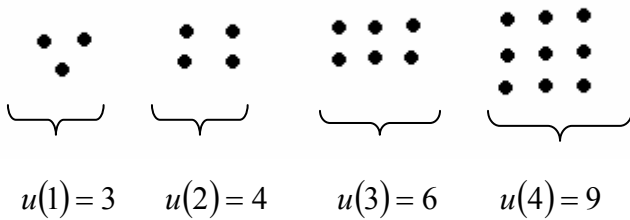
Ardışık tekrar işleminde; bir önceki adımda bulunan değer, bir sonraki adımda kullanılarak yeni bir değer elde edilmektedir. Bu şekilde devam eden işleme “ardışık tekrar işlemi ” denir. Fark denklemlerinde, ardışık tekrar işlemleri kullanılarak istenilen bir terimin değeri bulunabilir.

Örneğin, $k \in N$ olmak üzere $u(k)$ bilinmeyen fonksiyon olsun. $u(1)=1$, $u(2)=3$, $u(3)=6$ şeklinde verilsin. Terimler arasındaki ilişkiden, $u(k)$ terimi için $u(k-1)$ terimine k eklenerek, $u(k)=u(k-1)+k$ denklemi elde edilir. Bu ifadeye fark denklemi (veya ardışık tekrar bağıntısı*) denir.

Örnek 2.1: $u(k)=u(k-1)+(k-1)$, $k \geq 2$ şeklinde fark denklemi verilsin. $u(1)=3$ değeri biliniyorken, $u(2)=?$, $u(3)=?$, $u(4)=?$ değerleri,

$$\begin{array}{lll} u(2)=u(1)+(2-1) & u(3)=u(2)+(3-1) & u(4)=u(3)+(4-1) \\ u(2)=3+(1) & u(3)=4+(2) & u(4)=6+(3) \\ u(2)=4 & u(3)=6 & u(4)=9 \end{array}$$

olarak hesaplanır. Yukarıdaki örnekte verilen fark denklemi noktalarla gösterilerek aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.



Bu şekil yardımıyla da noktaların sistematik şekilde arttığı görülür ve sonraki adımlardaki nokta sayıları fark denklemi yardımıyla bulunabilir.

*Difference Equations 1, (<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/> ...)

3. FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Aşağıdaki ifadelerde;

$N = \{0, 1, \dots\}$, sıfırın dahil olduğu doğal sayılar kümesi,

$N(a) = \{a, a+1, \dots\}$, $a \in N$

$N(a, b-1) = \{a, a+1, \dots, b-1\}$, $a < b-1 < \infty$, $a, b \in N$

şeklinde tanımlanır. Bu üç kümeden herhangi biri $\bar{N}$ ifadesi ile gösterilmiştir.

$k, k+1 \in \bar{N}$ olmak üzere $f(k)$, $f(k+1)$ fonksiyonları için $Ef(k) = f(k+1)$ şeklinde tanımlanan E ye “kaydırma operatörü” denir. $m \in Z^+$ ve $k, k+m \in \bar{N}$ olmak üzere $E^m f(k) = E[E^{m-1} f(k)] = f(k+m)$ dir. Δ ve ∇ operatörlerine sırasıyla ileri fark operatörü ve geri fark operatörü denir. $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$ ve $\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$ şeklinde tanımlanır. Yüksek mertebeden fark, $m \in Z^+$ olmak üzere $\Delta^m f(k) = \Delta[\Delta^{m-1} f(k)]$ şeklinde tanımlanır.

I birim operatördür. $\Delta = E - I$ şeklinde yazılabilir. $m \in Z^+$ olmak üzere,

$$\Delta^m f(k) = (E - I)^m f(k) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} E^{m-i} f(k), \quad E^0 = I \quad (3.1)$$

$$E^m f(k) = (I + \Delta)^m f(k) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \Delta^i f(k), \quad \Delta^0 = I \quad (3.2)$$

olarak yazılabilir.

Fark denklemleri, bağımsız değişken $k \in \bar{N}$ ve bilinmeyen $u(k)$ olmak üzere fonksiyonel denklem formunda;

$$f(k, u(k), u(k+1), \dots, u(k+n)) = 0 \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.3) denklemi,

$$g(k, u(k), \Delta u(k), \dots, \Delta^n u(k)) = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

(3.3) fark denkleminin mertebesi, en büyük ve en küçük argümanın farkı ile tanımlanır.

Örneğin, $u(k+1) = u(k) + k$ denklemi; $(k+1) - k = 1$ olduğundan birinci mertebededir.

$2u(k+3) + u(k+2) + 5u(k+1) = 0$ denklemi; $(k+3) - (k+1) = 2$ olduğundan ikinci mertebededir. $u(k+9) = 3k^2 + 1$ denklemi; sıfırıncı mertebededir.

(3.3) denklemine, $\sum_{i=0}^n a_i(k)u(k+i) = b(k)$ formunda ise lineer fark denklemi denir.

$b(k) = 0$ ise (3.3) denklemine, homojen lineer fark denklemi, en az bir tane $k \in \bar{N}$ için $b(k) \neq 0$ oluyor ise homojen olmayan lineer fark denklemi denir.

Fark denklemlerinde kullanılan, bilinmeyen fonksiyon $u(k)$; bazı kaynaklarda alt indisli olarak u_k şeklinde kullanılmaktadır. Bu çalışmada $u(k)$ şeklinde kullanılmıştır.

3.1 Bazı Önemli Teoremler

Teorem (Ayrık Ortalama Değer Teoremi): $u(k)$, $N(a, b)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\Delta u(c) \leq \frac{u(b) - u(a)}{b - a} \leq \nabla u(c) \quad (3.1.1)$$

veya

$$\Delta u(c) \geq \frac{u(b) - u(a)}{b - a} \geq \nabla u(c) \quad (3.1.2)$$

olacak şekilde $c \in N(a+1, b-1)$ sayısı vardır (Agarval, 2000).

İspat: $f(k)$, $N(a, b)$ aralığında bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon $c \in N(a+1, b-1)$ noktasında maksimum değerini alsın. Bu durumda $k \in N(0, b-c)$ olmak üzere $f(c) \geq f(c+k)$ ve $k \in N(0, c-a)$ olmak üzere $f(c) \geq f(c-k)$ dır.

Buradan $f(c-k) - f(c) \leq 0 \leq f(c) - f(c+k)$ yazılır.

Burada $k \in N(0, \min\{b-c, c-a\})$ dir. Benzer olarak $c \in N(a+1, b-1)$ noktasında $f(k)$ minimum değerini alsın. Böylece $f(c-k) - f(c) \geq 0 \geq f(c) - f(c+k)$ dır.

Burada $k \in N(0, \min\{b-c, c-a\})$ dir.

$g(k)$, $N(a, b)$ de üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon ve $g(a) = g(b)$ olsun. $g(k)$, herhangi bir $c \in N(a+1, b-1)$ noktasında maksimum veya minimum değerini alsın. Eğer $g(k)$ sabit ise $N(a+1, b-1)$ nin herhangi bir noktasını alabilir.

$$v(k) = u(k) - \frac{u(b) - u(a)}{b-a} k$$

olacak şekilde $N(a, b)$ üzerinde, $v(k)$ yardımcı fonksiyonu tanımlansın.

$$v(a) = u(a) - \frac{u(b) - u(a)}{b-a} a = \frac{bu(a) - au(b)}{b-a}$$

$$v(b) = u(b) - \frac{u(b) - u(a)}{b-a} b = \frac{bu(a) - au(b)}{b-a}$$

olarak elde edilir. Böylece;

$$\left[u(c-k) - \frac{u(b) - u(a)}{b-a} (c-k) \right] - \left[u(c) - \frac{u(b) - u(a)}{b-a} c \right] \leq (\geq) 0 \leq (\geq) \\ \left[u(c) - \frac{u(b) - u(a)}{b-a} c \right] - \left[u(c+k) - \frac{u(b) - u(a)}{b-a} (c+k) \right]$$

olacak şekilde $c \in N(a+1, b-1)$ vardır. Burada $k \in N(0, \min\{b-c, c-a\})$ dir. Burada eşitliklerin sağında ve solunda parantezler açılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$u(c-k) - u(c) + \frac{u(b) - u(a)}{b-a} (k) \leq (\geq) 0 \leq (\geq) u(c) - u(c+k) + \frac{u(b) - u(a)}{b-a} (k)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
u(c-k)-u(c) &\leq (\geq) -\frac{u(b)-u(a)}{b-a}(k) \leq (\geq) u(c)-u(c+k) \\
\frac{u(c-k)-u(c)}{k} &\leq (\geq) -\frac{u(b)-u(a)}{b-a} \leq (\geq) \frac{u(c)-u(c+k)}{k} \\
\frac{u(c+k)-u(c)}{k} &\leq (\geq) \frac{u(b)-u(a)}{b-a} \leq (\geq) \frac{u(c)-u(c-k)}{k}
\end{aligned}$$

$k \in N(1, \min\{b-c, c-a\})$ dır. Özel olarak $k=1$ seçilirse,

$$u(c+1)-u(c) \leq (\geq) \frac{u(b)-u(a)}{b-a} \leq (\geq) u(c)-u(c-1)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$\Delta u(c) \leq (\geq) \frac{u(b)-u(a)}{b-a} \leq (\geq) \nabla u(c)$$

Sonuç: $N(a, b)$ de bir $u(k)$ fonksiyonu tanımlansın, $M = \max \{ |\Delta u(k)| : k \in N(a, b-1) \}$ olmak üzere,

$$\left| \frac{u(b)-u(a)}{b-a} \right| \leq M$$

dır (Agarval, 2000).

Lemma (Çarpım Formülü): $u(k)$ ve $v(k)$, $N(a)$ üzerinde tanımlansın. $\forall k \in N(a)$ için,

$$\Delta[u(k)v(k)] = u(k+1)\Delta v(k) + v(k)\Delta u(k) = v(k+1)\Delta u(k) + u(k)\Delta v(k) \quad (3.1.3)$$

ve

$$\sum_{l=a}^{k-1} u(l)\Delta v(l) = u(l)v(l) \Big|_{l=a}^k - \sum_{l=a}^{k-1} \Delta u(l)v(l+1) \quad (3.1.4)$$

dır (Agarval, 2000).

Teorem(Ayrık Taylor Formülü): $u(k)$, $N(a)$ üzerinde tanımlansın. $\forall k \in N(a)$ ve $n \geq 1$ için,

$$u(k) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(k-a)^{(i)}}{i!} \Delta^i u(a) + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=a}^{k-n} (k-l-1)^{(n-1)} \Delta^n u(l) \quad (3.1.5)$$

dır (Agarval, 2000).

Tümevarım yöntemiyle ispat yapılabilir.

$n = 1$ için;

$$u(k) = u(a) + \sum_{l=a}^{k-1} \Delta u(l)$$

$$\sum_{l=a}^{k-1} \Delta u(l) = \Delta u(a) + \Delta u(a+1) + \Delta u(a+2) + \dots + \Delta u(k-2) + \Delta u(k-1)$$

$$\sum_{l=a}^{k-1} \Delta u(l) = [u(a+1) - u(a)] + [u(a+2) - u(a+1)] + [u(a+3) - u(a+2)] + \dots + [u(k-1) - u(k-2)] + [u(k) - u(k-1)]$$

$$\sum_{l=a}^{k-1} \Delta u(l) = u(k) - u(a)$$

$$u(k) = u(a) + u(k) - u(a) = u(k)$$

$n = 1$ için doğruluğu gösterilmiştir.

$n = m$ için;

$$u(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(k-a)^{(i)}}{i!} \Delta^i u(a) + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{l=a}^{k-m} (k-l-1)^{(m-1)} \Delta^m u(l)$$

dır.

Faktöriyel fonksiyonlarının bazı özellikleri verilsin.

$m \in \mathbb{Z}^+$, olmak üzere,

$$x^{(m)} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(m-1)h)$$

$$x = m, \quad h = 1 \Rightarrow m^{(m)} = m(m-1)(m-2)\dots(1) = m!$$

$$x^{(-m)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+mh)}$$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$\Delta^m f(x) = \left(\underbrace{\Delta \Delta \dots \Delta}_{m \text{ tan } e} \right) f(x)$$

$$\Delta x^{(m)} = m x^{(m-1)} \Delta x$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x} x^{(m)} = m x^{(m-1)}$$

dir.

$$\sum_{l=a}^{k-m} (k-l-1)^{(m-1)} \Delta^m u(l) = -\frac{1}{m} \sum_{l=a}^{k-m} \Delta_l (k-l)^{(m)} \Delta^m u(l) \quad (3.1.6)$$

dir. Burada,

$$\sum_{l=a}^{k-m} (k-l-1)^{(m-1)} \Delta^m u(l) \Rightarrow (k-l-1)^{(m-1)} = \Delta v(l), \quad \Delta^m u(l) = u(l)$$

$$(k-l-1)^{(m-1)} = \Delta v(l) \Rightarrow v(l) = -\frac{1}{m} \{(k-l)^{(m)}\}$$

dir.

$$\sum_{l=a}^{k-m} (k-l-1)^{(m-1)} \Delta^m u(l) = -\frac{1}{m} \{(k-1)^{(m)}\} \Delta^m u(l) \Big|_{l=a}^{k-m+1} + \frac{1}{m} \sum_{l=a}^{k-m} (k-l-1)^{(m)} \Delta^{(m+1)} u(l)$$

bulunur.

4. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

Birinci mertebeden lineer homojen fark denklemi;

$$u(k+1) = a(k)u(k), \quad u(k_0) = u(0), \quad k \geq k_0 \geq 0 \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Benzer olarak, birinci mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemi;

$$u(k+1) = a(k)u(k) + g(k), \quad u(k_0) = u(0), \quad k \geq k_0 \geq 0 \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. (4.1) ve (4.2) denklemlerinde $a(k) \neq 0$ dır ve $a(k)$, $g(k)$; $k \geq k_0 \geq 0$ olmak üzere reel değerli fonksiyonlardır. (4.1) lineer homojen fark denklemi, basit iterasyon ile;

$$\begin{aligned} u(k_0+1) &= a(k_0)u(k_0) = a(k_0)u(0), \\ u(k_0+2) &= a(k_0+1)u(k_0+1) = a(k_0+1)a(k_0)u(0), \\ u(k_0+3) &= a(k_0+2)u(k_0+2) = a(k_0+2)a(k_0+1)a(k_0)u(0), \\ &\dots \\ u(k) &= a(k-1)a(k-2)\dots a(k_0)u(0) \end{aligned}$$

şeklinde çözülebilir. Bu çözüm,

$$u(k) = \left[\prod_{i=k_0}^{k-1} a(i) \right] u(0) \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Homojen olmayan (4.2) fark denkleminin çözümü de;

$$\begin{aligned} u(k_0+1) &= a(k_0)u(k_0) + g(k_0), \\ u(k_0+2) &= a(k_0+1)u(k_0+1) + g(k_0+1), \\ &= a(k_0+1)a(k_0)u(0) + a(k_0+1)g(k_0) + g(k_0+1) \end{aligned}$$

şeklindeki işlemlere devam edilerek,

$$u(k) = \left[\prod_{i=k_0}^{k-1} a(i) \right] u(0) + \sum_{r=k_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) \quad (4.4)$$

şeklinde genel bir denklem elde edilir ve bu çözüm tektir. (4.4) denkleminin doğruluğu tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir (Elaydi, 2005).

$k = 1$ için;

$$u(1) = u(0)$$

dır.

$k = n$ için;

$$u(n) = \left[\prod_{i=k_0}^{n-1} a(i) \right] u(0) + \sum_{r=k_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r)$$

denkleminin doğru olduğu kabul edilsin.

$k = n + 1$ için doğruluğu gösterilsin. (4.2) denkleminde, (4.4) ile

$$\begin{aligned} u(n+1) &= a(n) \left[\prod_{i=k_0}^{n-1} a(i) \right] u(0) + \sum_{r=k_0}^{n-1} \left[a(n) \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) + g(n) \\ &= \left[\prod_{i=k_0}^n a(i) \right] u(0) + \sum_{r=k_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^n a(i) \right] g(r) + \left(\prod_{i=n+1}^n a(i) \right) g(n) \\ &= \left[\prod_{i=k_0}^n a(i) \right] u(0) + \sum_{r=k_0}^n \left[\prod_{i=r+1}^n a(i) \right] g(r) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $\prod_{i=n+1}^n a(i) = 1$ ve $\sum_{i=n+1}^n a(i) = 0$ olduğu kabul edilir. Böylece

$\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için (4.4) denklemi sağlanmıştır.

Eğer (4.2) denkleminde $a(k)$ fonksiyonu sabit ise, (4.2) homojen olmayan fark denklemi;

$$u(k+1) = au(k) + g(k), \quad u(0) = u_0 \quad (4.5)$$

ile ifade edilir. (4.5) denkleminin çözümü için, (4.4) denklemi uygulanılarak,

$$u(k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} a(i) \right] u(0) + \sum_{r=0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r)$$

$$\left[\prod_{i=0}^{k-1} a(i) \right] = a(0)a(1)\dots a(k-1) = a^k, \quad (a \text{ sabit sayı}) \quad (4.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) &= \prod_{i=0+1}^{k-1} a(i) g(0) + \prod_{i=1+1}^{k-1} a(i) g(1) + \dots + \prod_{i=k-1+1}^{k-1} a(i) g(k-1) \\ &= a^{k-1} g(0) + a^{k-2} g(1) + \dots + a^0 g(k-1), \quad (a \text{ sabit sayı}) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} a^{k-r-1} g(r) \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) denklemlerinden, (4.5) denkleminin çözümü;

$$u(k) = a^k u_0 + \sum_{r=0}^{k-1} a^{k-r-1} g(r) \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.1: $u(k+1) = (k+1)u(k) + 2^k(k+1)!, \quad u(0) = 1, \quad k > 0$

denklemini, birinci mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemdir. Çözümü için; (4.4) denklemini kullanılır. (4.4) denklemini yazılıp soruya uygulansın. Denkleminde,

$$u(0) = 1,$$

$$a(i) = (i+1),$$

$$g(r) = 2^r(r+1)!$$

dir.

$$u(k) = \left[\prod_{i=k_0}^{k-1} a(i) \right] u(0) + \sum_{r=k_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r)$$

$$u(k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} (i+1) \right] u(0) + \sum_{r=0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} (i+1) \right] 2^r (r+1)!$$

dır. Burada;

$$\prod_{i=0}^{k-1} (i+1) = 1.2.3 \dots (k-1)(k) = k!$$

$$\prod_{i=r+1}^{k-1} (i+1) = (r+2)(r+3)(r+4) \dots (k-2)(k-1)(k)$$

$$\left[\prod_{i=r+1}^{k-1} (i+1) \right] (r+1)! = k!$$

dır. Bulunan değerler (4.4) denkleminde yerine yazılarak $u(k)$ değeri,

$$u(k) = k! + \sum_{r=0}^{k-1} k! 2^r$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} (a^n - 1)/(a - 1), & a \neq 1 \text{ ise} \\ n, & a = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

$$u(k) = k! + \sum_{r=0}^{k-1} k! 2^r = k! \left(1 + \sum_{r=0}^{k-1} 2^r \right)$$

$$u(k) = k! \left(1 + \frac{(2^k - 1)}{2 - 1} \right)$$

$$u(k) = (k!)(2^k)$$

çözümü elde edilir.

Eğer (4.2) denklemindeki $a(k)$ ve $g(k)$ fonksiyonları sabit ise homojen olmayan fark denklemi,

$$u(k+1) = nu(k) + c$$

veya

$$u(k) = nu(k-1) + c \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. n ve c sabit olmak üzere, (4.9) denklemine birinci mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemi denir. Eğer c sabit olmasaydı, (4.9) denklemi sabit katsayılı lineer fark denklemi olmazdı. Ayrıca (4.9) denklemi $c \neq 0$ olduğu için, homojen olmayan fark denklemdir. Eğer $c = 0$ ise;

$$u(k) = nu(k-1) \quad (4.10)$$

denklemine, homojen lineer fark denklemi denir. Ardışık tekrar işlemleri ile bu denklemin çözümü

$$u(k) = nu(k-1), \quad u(k-1) = nu(k-2), \quad u(k-2) = nu(k-3), \dots$$

olmak üzere,

$$u(k) = nu(k-1) = n(nu(k-2)) = n^2(nu(k-3)) = \dots = n^{k-1}u(1)$$

dır. Yani denklem,

$$u(k) = n^{k-1}u(1) \quad (4.11)$$

şeklini alır. n sabit olmak üzere (4.11) denklemi, (4.10) denkleminin çözümüdür. (4.9) denklemi;

$$\begin{aligned} u(k) &= n(nu(k-2) + c) + c = n^2u(k-2) + nc + c \\ &= n^2(nu(k-3) + c) + nc + c = n^3u(k-3) + n^2c + nc + c \\ &= \dots \\ &= n^{k-1}u(1) + n^{k-2}c + n^{k-3}c + \dots + nc + c \end{aligned}$$

$$= n^{k-1}u(1) + c(1 + n + n^2 + \dots + n^{k-2}) \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\sum_{i=1}^{\infty} n^{i-1} = 1 + n + n^2 + \dots + n^{k-1} + \dots \text{ geometrik serisinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi;}$$

$$S_k = 1 + n + n^2 + \dots + n^{k-1} = \frac{1-n^k}{1-n} \text{ dir. } |n| < 1 \text{ için } \lim_{k \rightarrow \infty} n^k = 0 \text{ olduğundan } \sum_{i=1}^{\infty} n^{i-1} = \frac{1}{1-n} \text{ dir.}$$

O halde,

$$1 + n + n^2 + \dots + n^{k-2} = \frac{(n^{k-1} - 1)}{n - 1}$$

dır. Bulunan bu ifade (4.12) denkleminde yerine yazılarak,

$$u(k) = n^{k-1}u(1) + c \frac{(n^{k-1} - 1)}{n - 1} \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.13) denklemi, (4.9) denkleminin çözümüdür.

(4.13) denklemi $n \neq 1$ içindir. $n = 1$ olduğu durumlar için özel olarak incelenmelidir.

$n = 1$ için (4.9) denklemi;

$$u(k) = u(k-1) + c \quad (4.14)$$

dır. Ardışık tekrar işlemleriyle (4.14) denklemi;

$$u(k) = u(k-1) + c = (u(k-2) + c) + c = u(k-2) + 2c = u(k-3) + 3c = \dots = u(1) + (k-1)c$$

$$u(k) = u(1) + (k-1)c \quad (4.15)$$

şeklinde elde edilir. (4.15) denklemi, (4.14) denkleminin çözümüdür.

$u(k)$ ları, $u(1), u(2), \dots$ şeklinde yazmak yerine, $u(0), u(1), u(2), \dots$ olarak yazarsak, yani diziler $u(0)$ teriminden yazılmaya başlanırsa, (4.9) denkleminin çözümü;

$$u(k) = n^k u(0) + c \frac{(n^k - 1)}{n - 1}, \quad n \neq 1 \quad (4.16)$$

dır.

(4.14) denkleminin çözümü;

$$u(k) = u(0) + kc \quad (4.17)$$

dir.

Örnek 4.2: $u(k) = 2u(k-1) + 1$ fark denkleminin $u(0) = 10$ olmak üzere çözümü bulunmak istensin.

Verilen denklem (4.9) formunda olup sabit katsayılı homojen olmayan fark denklemdir. Çözümü (4.16) denkleminde verildiği gibi;

$$u(k) = n^k u(0) + c \frac{(n^k - 1)}{n - 1}$$

şeklindedir. Bu denklemde $n = 2$, $c = 1$ dir. O halde çözüm;

$$u(k) = 2^k u(0) + 1 \left(\frac{2^k - 1}{2 - 1} \right) = 2^k \cdot 10 + 2^k - 1 = 11 \cdot 2^k - 1$$

olarak elde edilir.

$u(k) = 11 \cdot 2^k - 1$ çözümüne; $u(0) = 10$ için verilen $u(k) = 2u(k-1) + 1$ fark denkleminin özel çözümü denir.

$u(0) = 10$ değerinin kullanılmamış haldeki, yani $u(k) = 2^k u(0) + 2^k - 1$ çözümüne, genel çözüm denir.

4.1 Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri Üzerine Örnekler

Fark denklemleri günlük hayatta birçok problemin modellenip çözülmesinde kullanılabilir. Bunlarla ilgili örneklerden bazıları aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.1.1: Fark denklemleriyle ilgili örneklerden biri, sıcaklık değişiminin modellenmesidir. Sabit sıcaklıktaki bir odada, bir bardak çayın soğuması veya bir bardak limonatanın ısınması gibi sıcaklık değişimi olaylarının modellenmesidir. $T(0)$ çay veya limonatanın başlangıç sıcaklığını gösterebilir. S odanın sabit sıcaklığını, $T(n)$ içeceğin n birim zaman sonraki sıcaklığını gösterebilir. Bir birim zamandaki sıcaklık değişimi;

$$T(n+1) - T(n) = k(T(n) - S) \quad (4.1.1)$$

ile verilir. k cisme bağlı sabittir. $n = 0, 1, 2, \dots$ dir.

(4.1.1) denkleminin “Newton’un soğuma kanunu^{*}” denir. Bu denklemden, sabit birim zamanda sıcaklık değişiminin çevrenin sıcaklığı ile nesnenin sıcaklığı arasındaki farka bağlı olduğu söylenebilir. Sıcaklık farkı büyükse, soğuma (veya ısınma) hızı, sıcaklık farkı daha küçük olana göre daha hızlıdır. S sıcaklığı bilinirse ve k sabitini bulmak için yeterli bilgi verilirse, (4.1.1) denklemi birinci mertebeden fark denklemi olarak yazılıp çözülebilir.

Örneğin, başlangıç sıcaklığı $90^\circ C$ olan bir bardak kahve, $20^\circ C$ sabit sıcaklıktaki odada bırakılsın. Üç dakika sonra kahvenin sıcaklığı $75^\circ C$ ye düşsün. 10 dakika sonra kahvenin sıcaklığı ne olur? (Birim zamanda kahvenin düzenli soğuduğu kabul edilsin.)

Burada; $T(n)$, n dakika sonra kahvenin sıcaklığı; $S = 20^\circ C$ odanın sıcaklığı olsun. Kahvenin başlangıç sıcaklığı $T(0) = 90^\circ C$ dir. Üç dakikada $90 - 75 = 15^\circ C$ soğuyorsa ve birim zamanda düzenli soğuduğu için bir dakikada $5^\circ C$ soğur. $T(1) = 85$ olur. Bu veriler denklemde yerine yazıldığında,

$$T(1) - T(0) = k(T(0) - 20)$$

^{*} Difference Equations to Differential Equations, Section 1.4, Difference Equations, Copyright © by Dan Sloughter 2000, (<http://math.furman.edu/> ...)

$$85 - 90 = k(90 - 20)$$

$$k \cong -0,07$$

bulunur. Buradan, denklem yeniden yazılarak çözüldüğünde,

$$T(n+1) - T(n) = (-0,07)(T(n) - 20)$$

$$T(n+1) = 0,93T(n) + 1,4$$

denkleme ulaşılır. Bulunan bu denklem birinci mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemdir. Bu denklemin çözümü (4.16) denklemdir.

$$u(k) = n^k u(0) + c \frac{(n^k - 1)}{n - 1}, \quad n \neq 1,$$

$$n = 0,93$$

$$c = 1,4$$

olup,

$$T(n) = (0,93)^n T(0) + 1,4 \left(\frac{0,93^n - 1}{0,93 - 1} \right)$$

$$T(n) = 90(0,93)^n - 20((0,93)^n - 1)$$

$$T(n) = (70)(0,93)^n + 20$$

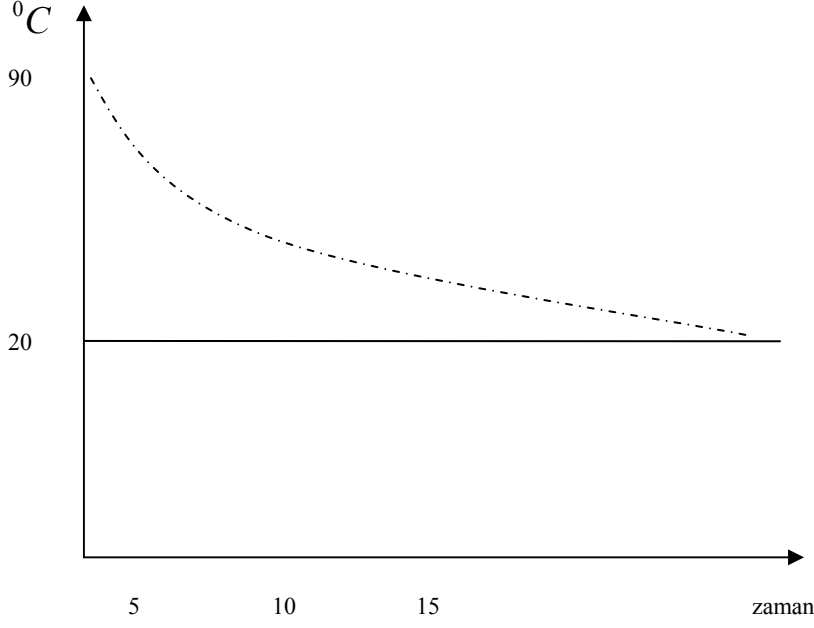
denklemini elde edilir. 10 dakika sonra kahvenin sıcaklığı,

$$T(10) = (70)(0,93)^{10} + 20 \cong 53,8 \text{ } ^\circ C$$

dır. Kahve verilen koşullar altında 10 dakika sonra yaklaşık $53,8 \text{ } ^\circ C$ sıcaklığına ulaşıyor.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (70)(0,93)^n + 20 = 20$$

Yani zaman arttıkça kahvenin sıcaklığı azalarak oda sıcaklığına yaklaşır. Bu sonuç grafiksel olarak Şekil 4.1.1 de verilmektedir.



Şekil 4.1.1 Zaman artıkça kahvenin sıcaklığı azalarak oda sıcaklığına yaklaşır.

Örnek 4.1.2: Fark denklemlerin günlük hayatta uygulamasıyla ilgili diğer bir örnek, faizle alınan paranın geri ödenmesiyle ilgili problemdir. Bu örnekte bir bankadan alınan paranın faiziyle geri ödenmesi incelensin.

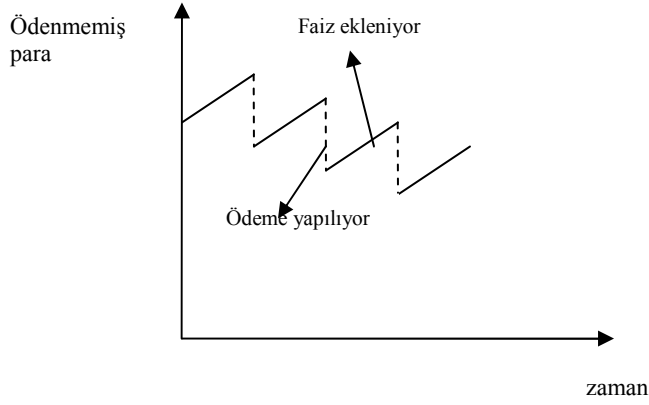
Bu tip problemlerde yıllık faiz oranının, ödeme sıklığının ve paranın alındığı dönemin bilinmesi gereklidir. Para geri ödenirken tekrar ek olarak para alınmadığı kabul edilerek denklem kurulur. Denklem kurulurken çeşitli parametreler kullanılır. Bunlar;

$u(n)$; n ödeme sonunda kalan borç,

k ; faiz çarpanı,

c ; taksit miktarı,

olsun. Bu çeşit problemlerde ödemenin zamana göre değişimi ve faizin etkisi grafik olarak Şekil 4.1.2 de gösterildiği gibidir.



Şekil 4.1.2 * Ödemenin zamana göre değişimi ve faizin etkisi.

Problem sayısal verilerle gösterilirse;

Bir bankadan yıllık %36 faiz oranıyla 1000TL para alınsın. Bu para 15 ayda ödenmek istensin. Aylık ödeme miktarı nedir?

$u(n) = n$ ay sonra kalan borç

$u(0) = 1000$ TL

$c =$ aylık ödenen para

olarak tanımlansın. Yıllık faiz oranı %36 olduğu için, aylık faiz oranı yaklaşık %3 olarak kabul edilir.

Fark denklemi kurulurken kullanılan mantık; bir sonraki aya kalan borç, bir önceki aydan kalan borca %3 faiz eklenip, aylık ödenen taksit çıkarıldıktan sonra kalan miktar kadar olacaktır. Bu ifadeler matematiksel olarak;

$$u(n) = u(n-1) + \frac{3}{100}u(n-1) - c$$

$$u(n) = (1,03)u(n-1) - c$$

denklemleri ile ifade edilir. Bu denklem, homojen olmayan birinci mertebeden fark denklemidir. Çözümü (4.16) denkleminde;

$$u(n) = (1,03)^n u(0) - c \left(\frac{(1,03)^n - 1}{1,03 - 1} \right)$$

* Difference Equations 1, (<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/> ...)

$$u(n) = (1,03)^n 1000 - c \left(\frac{(1,03^n - 1)}{0,03} \right)$$

şeklinde elde edilir. 15 ay sonra borcun tamamı ödeneceği için $u(15) = 0$ dır. Buradan;

$$u(15) = (1,03)^{15} 1000 - c \left(\frac{(1,03^{15} - 1)}{0,03} \right) = 0$$

$$c = \frac{(1,03)^{15} (1000)(0,03)}{(1,03^{15} - 1)} \cong 83,76 \text{ TL}$$

bulunur. Yani, aylık yaklaşık 83,76TL para geri ödenecektir.

Örnek 4.1.3: (Hardy-Weingberg Kanunu): Bir insanın boyu, saç rengi, vb. karakteristik özellikleri, biri anneden, biri babadan alınan bir çift gen ile belirlenir. Her gen, dominant (D ile gösterilir) veya resesif (R ile gösterilir) olmak üzere iki formda bulunur. Kişi karakterine göre dominant (DD), resesif (RR), hibrit (RD veya DR) olabilir.

k . nesilde dominant, hibrit, resesif oranları; $p(k)$, $q(k)$, $r(k)$ olsun. Burada $p(k) + q(k) + r(k) = 1$, $p(k) \geq 0$, $q(k) \geq 0$, $r(k) \geq 0$, dır. Bu nesilde bireylerin genlerinin rasgele olduğu kabul edilsin. Yani;

$p(k+1) = (k+1)$. nesildeki DD (dominant) birey olasılığı= (bireyin babasından D genini alma olasılığı) $\times$ (bireyin annesinden D genini alma olasılığı)

Babadan D gelmesi için;

- i) Baba DD olup $p(k)$ gelebilir.
- ii) Baba DR veya RD olup $\frac{1}{2}q(k)$ gelebilir.

Anneden D gelmesi için;

- i) Anne DD olup $p(k)$ gelebilir.
- ii) Anne DR veya RD olup $\frac{1}{2}q(k)$ gelebilir.

Bu olasılıklardan;

$$p(k+1) = \left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right) \left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right)$$

$$p(k+1) = \left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right)^2$$

elde edilir.

Benzer şekilde hibrit bir birey için;

Babadan D geliyorsa;

- i) Baba DD olup $p(k)$ gelebilir.
- ii) Baba DR veya RD olup $\frac{1}{2}q(k)$ gelebilir.

Anneden R geliyorsa;

- i) Anne DR (veya RD) olup $\frac{1}{2}q(k)$ gelebilir.
- ii) Anne RR olup $r(k)$ gelebilir.

Veya anne ile babadan gelen genler yer değiştirebilir. Yani babadan R, anneden D gelebilir.

Bu durumda,

$$q(k+1) = 2 \left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right) \left(r(k) + \frac{1}{2}q(k) \right)$$

denklemini elde edilir.

Resesif olan birey için;

Babadan R gelmesi için;

- i) Baba RR olup $r(k)$ gelebilir.
- ii) Baba DR veya RD olup $\frac{1}{2}q(k)$ gelebilir.

Anneden R gelmesi için;

- i) Anne RR olup $r(k)$ gelebilir.
- ii) Anne DR veya RD olup $\frac{1}{2}q(k)$ gelebilir.

Bu olasılıklardan;

$$r(k+1) = \left(r(k) + \frac{1}{2}q(k) \right) \left(r(k) + \frac{1}{2}q(k) \right)$$

$$r(k+1) = \left(r(k) + \frac{1}{2}q(k) \right)^2$$

elde edilir. Bu denklemler birinci mertebeden lineer fark denklemleridir. $(k+1)$. terimleri toplanırsa;

$$p(k+1) + q(k+1) + r(k+1) = \left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) + \frac{1}{2}q(k) + r(k) \right)^2 = 1$$

elde edilir. Denklemler $(k+2)$. terim için;

$$\begin{aligned} p(k+2) &= \left(p(k+1) + \frac{1}{2}q(k+1) \right)^2 = \left(\left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right)^2 + \left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right) \left(r(k) + \frac{1}{2}q(k) \right) \right)^2 \\ &= \left(\left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right) \left(\left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right) + \frac{1}{2}q(k) + r(k) \right) \right)^2 \\ &= \left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right)^2 (p(k) + q(k) + r(k))^2 \\ &= \left(p(k) + \frac{1}{2}q(k) \right)^2 \\ &= p(k+1) \end{aligned}$$

dır. Yani; $p(k+2) = p(k+1)$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
q(k+2) &= 2 \left(p(k+1) + \frac{1}{2} q(k+1) \right) \left(r(k+1) + \frac{1}{2} q(k+1) \right) \\
&= 2 \left(\left(p(k) + \frac{1}{2} q(k) \right)^2 + \left(p(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \right) \left(\left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right)^2 + \left(p(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \right) \\
&= 2 \left(\left(p(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \left(p(k) + \frac{1}{2} q(k) + \frac{1}{2} q(k) + r(k) \right) \right) \left(\left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) + \frac{1}{2} q(k) + p(k) \right) \right) \\
&= 2 \left(p(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) = q(k+1)
\end{aligned}$$

Yani $q(k+2) = q(k+1)$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
r(k+2) &= \left(r(k+1) + \frac{1}{2} q(k+1) \right)^2 = \left(\left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right)^2 + \left(p(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \right)^2 \\
&= \left(\left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) \left(\left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right) + \left(\frac{1}{2} q(k) + p(k) \right) \right) \right)^2 \\
&= \left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right)^2 (p(k) + q(k) + r(k))^2 \\
&= \left(r(k) + \frac{1}{2} q(k) \right)^2 \\
&= r(k+1)
\end{aligned}$$

Yani $r(k+2) = r(k+1)$ elde edilir.

Böylece $(k+2)$. nesilde dominant, hibrit ve resesif oranı $(k+1)$. nesil ile aynıdır. Bu şekilde karakteristikleri rasgele eşleşen popülasyonların dominant, hibrit ve resesif oranı ilk nesilden sonra değişmez olduğu gösterilir.

4.2 Birinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Kararlılıkları

4.2.1 Denge Noktası

Fark denklemi;

$$u(k+1) = f(u(k)) \quad (4.2.1.1)$$

şeklinde yazılabilir.

f fonksiyonun tanım bölgesindeki bir x^* noktası, eğer fonksiyonun sabit noktası ise, diğer bir deyişle, $f(x^*) = x^*$ ise, x^* noktasına, (4.2.1.1) denkleminin denge noktası denir. Grafikselle olarak da denge noktası; f fonksiyonun grafiği ile, $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktadır (Elaydi, 2005).

Örnek (4.2.1.1): $u(k+1) = 2 - u(k)$ denkleminin denge noktası nedir?

$u(k+1) = 2 - u(k)$ denkleminde $f(u(k)) = 2 - u(k)$ dır. Burada;

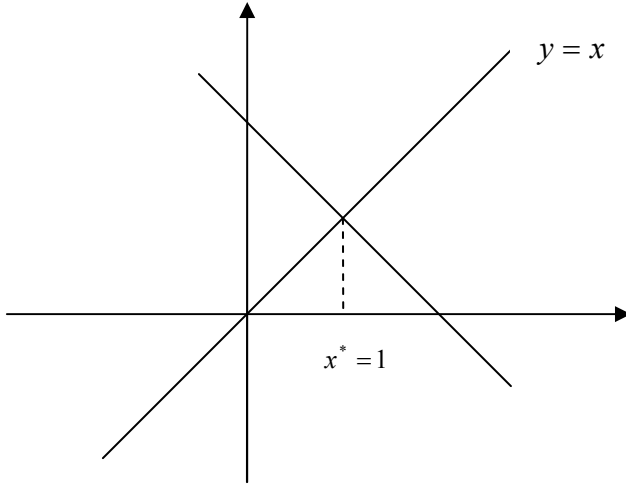
$$f(u) = 2 - u$$

$$f(x^*) = x^* \text{ olması için,}$$

$$2 - u = u$$

$$u = 1$$

dır. Yani denge noktası $x^* = 1$ noktasıdır. Bu grafik olarak, Şekil 4.2.1.1 de gösterilmektedir.



Şekil 4.2.1.1 Denge noktası $x^* = 1$ noktasıdır

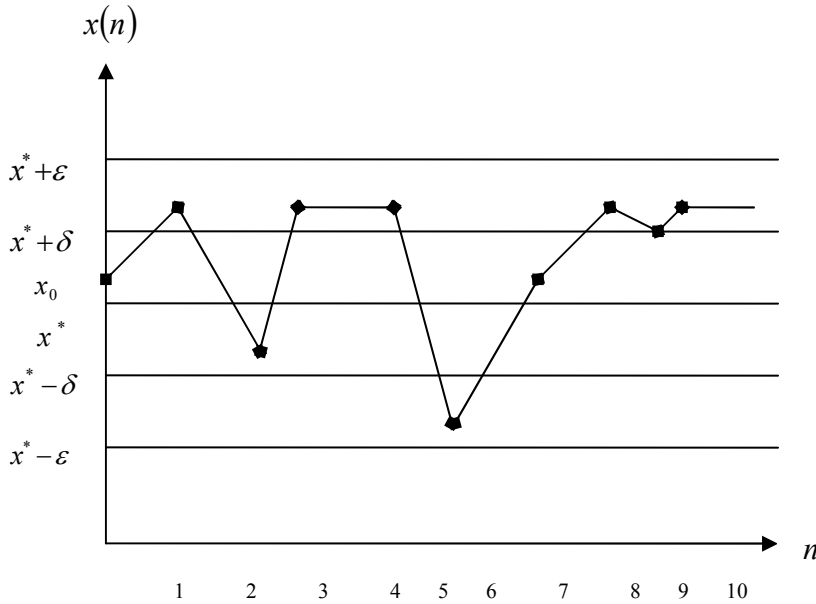
Fark denklemlerinin, çözümü bazen bir denge noktası olmayabilir. Ancak birkaç iterasyondan sonra denge noktasına ulaşılabilir. Diğer bir deyişle, dengede olmayan bir durum, sonlu zaman içinde denge durumuna ulaşabilir. Bu durum aşağıdaki tanımla ifade edilebilir.

Tanım: x , f nin tanım bölgesine ait nokta olsun. $f^r(x) = x^*$ ve $f^{r-1}(x) \neq x^*$ olacak şekilde, bir r pozitif tamsayısı ve (4.2.1.1) denkleminin x^* denge noktası varsa, x e “son denge noktası” denir (Elaydi, 2005).

Tanım: (a) Verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_0 - x^*| < \delta$ ifadesini sağlayan $\delta > 0$ sayısının var olması $\forall n > 0$ için $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ eşitsizliğini gerektiriyorsa, (4.2.1.1) denkleminin, x^* denge noktasının kararlı olduğu söylenir (Şekil 4.2.1.2). Kararlı olmayan x^* denge noktasına, kararsız denir (Şekil 4.2.1.3).

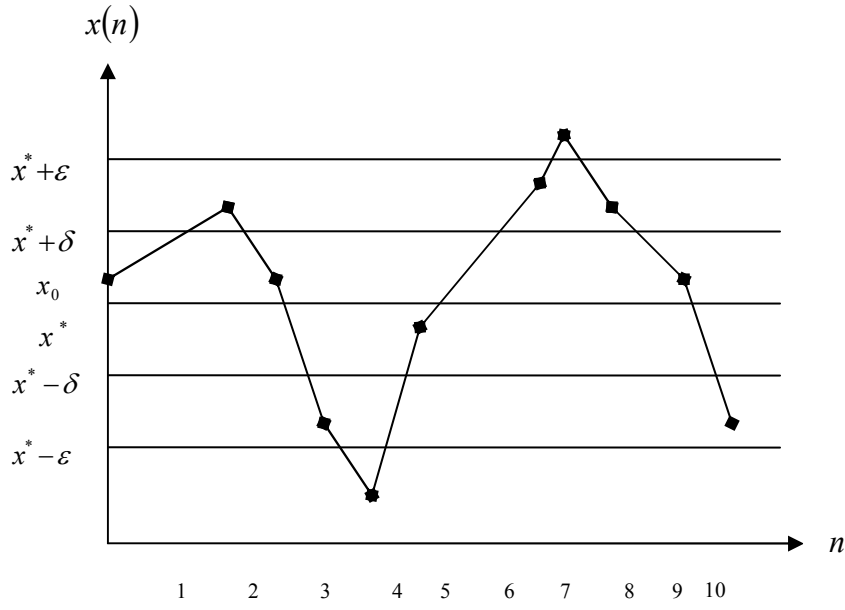
(b) x^* noktasına; $|x(0) - x^*| < \eta$ ifadesi $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ olmasını sağlayan, bir $\eta > 0$ sayısı varsa, çekicidir denir. Eğer $\eta = \infty$ ise, x^* noktasına global çekici denir.

(c) Eğer x^* noktası kararlı ve çekici ise, buna asimtotik kararlı denge noktası denir (Şekil 4.2.1.4). Eğer $\eta = \infty$ ise, x^* noktasına global asimtotik kararlıdır denir (Şekil 4.2.1.5). (Elaydi, 2005)

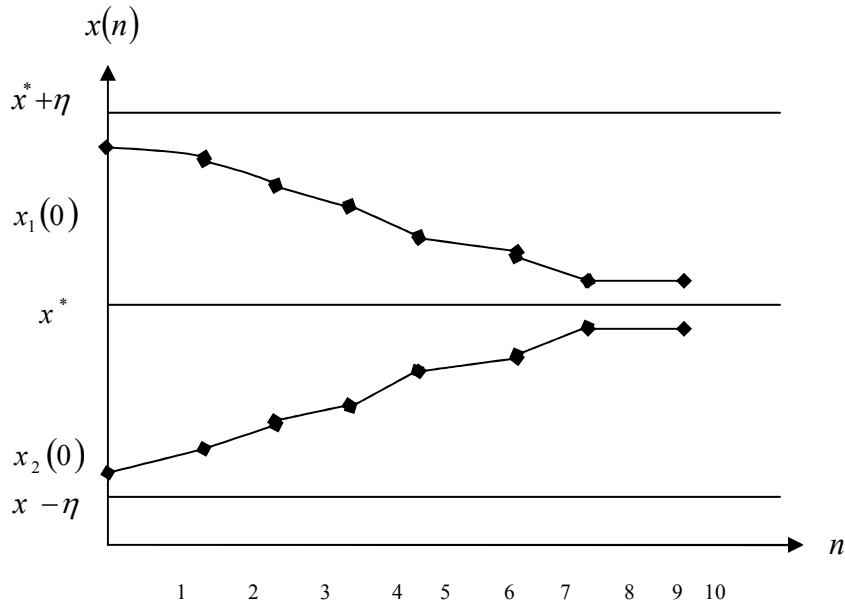


Şekil 4.2.1.2 (Elaydi, 2005): x^* kararlıdır.

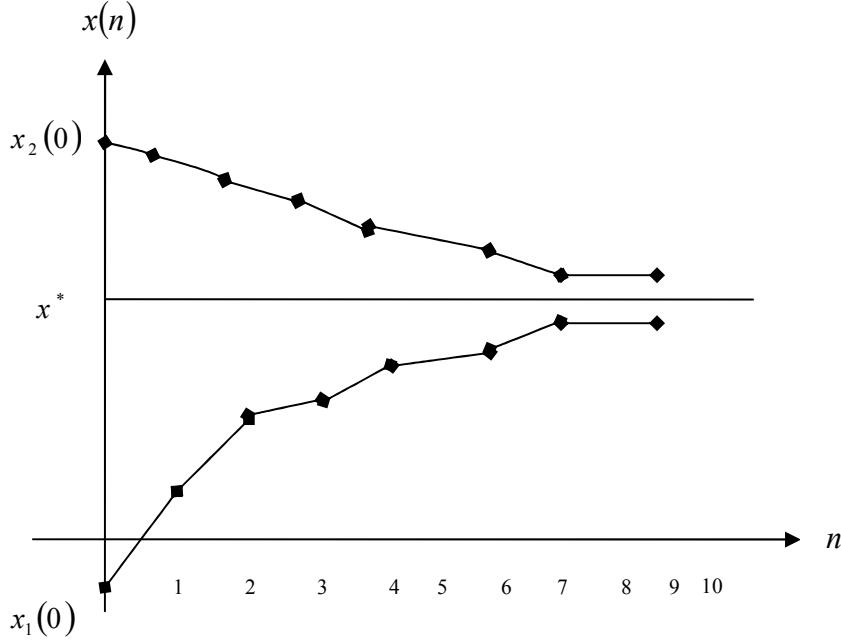
* eventually equilibrium (fixed) point



Şekil 4.2.1.3 (Elaydi, 2005): x^* noktası kararsızdır.



Şekil 4.2.1.4 (Elaydi, 2005): x^* noktası asimtotik kararlı



Şekil 4.2.1.5 (Elaydi, 2005): x^* global asimtotik kararlı

Teorem: x^* , $u(k+1) = f(u(k))$ fark denkleminin denge noktası olsun. Burada f , x^* noktasında sürekli türevlenebilirdir. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- (i) Eğer $|f'(x^*)| < 1$ ise, x^* asimtotik kararlıdır.
- (ii) Eğer $|f'(x^*)| > 1$ ise, x^* kararsızdır. (Elaydi, 2005)

İspat: (i) $|f'(x^*)| < M < 1$ olduğu kabul edilsin. $\forall x \in J$ için $|f'(x)| \leq M < 1$ olacak şekilde x^* ı içeren $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ aralığı vardır. Aksi halde yeterince büyük n için, her bir $I_n = \left(x^* - \frac{1}{n}, x^* + \frac{1}{n}\right)$ açık aralığında, $|f'(x_n)| > M$ olacak şekilde bir $x_n \in I_n$ noktası vardır. $n \rightarrow \infty$ iken, $x_n \rightarrow x^*$ dir. f' sürekli fonksiyon olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(x^*)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f'(x_n)| = |f'(x^*)| < M$$

olup, bu çelişkidir. Böylece ifade ispatlanır. $x(0) \in J$ için,

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|$$

vardır. Ortalama Değer Teoreminden,

$$|f(x(0)) - f(x^*)| = |f'(\xi)| |x(0) - x^*|$$

olacak şekilde $x(0)$ ve x^* arasında ξ vardır. Buradan,

$$|f(x(0)) - x^*| \leq M |x(0) - x^*|$$

elde edilir. Böylece,

$$|x(1) - x^*| \leq M |x(0) - x^*| \quad (4.2.1.2)$$

dır. $M < 1$ olduğundan, (4.2.1.2) eşitsizliği, $x(1)$ in, x^* a, $x(0)$ dan daha yakın olduğunu gösterir. Sonuç olarak $x(1) \in J$ dir. Tümevarımla,

$$|x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*|$$

dır. $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ olsun. Böylece $|x(0) - x^*| < \delta$, $\forall n > 0$ için $|x(n) - x^*| < \varepsilon$

eşitsizliğini gerektirir. Bu sonuç kararlılığı ifade eder. Ek olarak, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = 0$ dır.

Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ dır. Asimtotik kararlı olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem: $u(k+1) = f(u(k))$ fark denkleminin x^* denge noktası için, $f'(x^*) = 1$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- (i) Eğer $f''(x^*) \neq 0$ ise, x^* kararsızdır.
- (ii) Eğer $f''(x^*) = 0$ ve $f'''(x^*) > 0$ ise, x^* kararsızdır.
- (iii) Eğer $f''(x^*) = 0$ ve $f'''(x^*) < 0$ ise, x^* asimtotik kararlıdır. (Elaydi, 2005)

Teorem: $u(k+1) = f(u(k))$ fark denkleminin x^* denge noktası için, $f'(x^*) = -1$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- (i) Eğer $Sf(x^*) < 0$ ise, x^* asimtotik kararlıdır.
- (ii) Eğer $Sf(x^*) > 0$ ise, x^* kararsızdır. (Elaydi, 2005)

Burada, $Sf(x)$ ifadesi; bir f fonksiyonunun Schwarzian türevidir. Bu ifade;

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2$$

şeklinde tanımlanır. $f'(x^*) = -1$ olduğunda,

$$Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2} (f''(x^*))^2$$

olarak ifade edilir. (Elaydi, 2005)

5. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

İkinci mertebeden lineer fark denklemleri, birinci mertebeden lineer fark denklemlerine göre daha gelişmiş problemlerle ilgilenir. a ve b sabitler, $k \geq 2$ olmak üzere,

$$u(k) = au(k-1) + bu(k-2) \quad (5.1)$$

denklemine sabit katsayılı ikinci mertebeden homojen lineer fark denklemi denir. Dördüncü bölümde bahsedildiği gibi $u(k) = nu(k-1)$ formundaki birinci mertebeden denklemin çözümü $u(k) = n^k u(0)$ olduğundan, (5.1) denkleminin çözümünün de A ve m sabitler olmak üzere $u(k) = Am^k$ şeklinde olduğu varsayalım. $u(k) = Am^k$, (5.1) denkleminde yerine konulduğunda,

$$u(k) = Am^k, \quad u(k-1) = Am^{(k-1)}, \quad u(k-2) = Am^{(k-2)}$$

$$Am^k = Aam^{(k-1)} + Abm^{(k-2)}$$

$$Am^{(k-2)}(m^2 - am - b) = 0$$

elde edilir. Eğer $m = 0$ veya $A = 0$ ise $u(k) = 0$ olacaktır. Buda (5.1) denkleminin aşıkâr çözüme sahip olması demektir.

Eğer $m \neq 0$ ve $A \neq 0$ ise; $m^2 - am - b = 0$ dır. Bu denkleme, (5.1) denkleminin yardımcı denklemi denir. Bu yardımcı denklemin reel veya karmaşık iki kökü vardır. Kökler;

$$m_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$m_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

formülleri yardımı ile bulunur*. Elde edilen kökler arasında üç durum söz konusudur.

- 1) Birinci durum, $m_1 \neq m_2$ olması durumudur.
- 2) İkinci durum, $m_1 = m_2$ olması durumudur.
- 3) Üçüncü durum, köklerin karmaşık sayı olması durumudur.

* Difference Equations 2, (<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/> ...)

Örnek olarak, bir tavşan ailesi ele alınsın. Tavşanlar hızlı üreyen hayvanlardır. Bir çift tavşanın, doğduktan iki ay sonra yeni yavru yaptığını ve her çift tavşan, yeni bir çift için, her ay yeni bir yavru yapabildiği kabul edilsin. Yeni doğmuş bir çift tavşan ile başladığı kabul edilsin. n ay sonra kaç tane tavşan olur? Bu soru ikinci mertebeden fark denklemi yardımı ile çözülecektir. Bu kurgulanan problemdeki ay ile tavşan çifti sayısının ilk birkaç aydaki ilişkisi aşağıdaki Tablo 5.1 ile özetlenebilir.

Tablo 5.1 *

Ay	1	2	3	4	5	6
Çift Sayısı $u(k)$	1	1	2	3	5	8

Tablodan görüldüğü gibi birinci ay yeni doğmuş bir çift tavşan vardır. Her yeni doğmuş tavşan iki ay sonra doğurduğu için, bu çift üçüncü ayda doğurur. Bu yüzden ilk iki ayda bir çift tavşan vardır. Dördüncü ayda, her çift her ay yeni yavru yaptığı için, üçüncü ayda birinci çift bir tane daha doğurur. Üçüncü ayda iki tavşan olduğundan ve yeni bir yavru daha doğduğundan dördüncü ayda toplam üç çift tavşan vardır. Beşinci ayda, dördüncü aydan iki yeni doğum olduğundan beş çift olacaktır. Üreme bu şekilde devam edecektir.

Bu tablodaki $u(k)$ dizisi, 13. yy.da yaşayan matematikçi Leonardo Fibonacci ile bilinir. Bu dizide önceki iki terim toplanarak, sonraki terim elde edilir* .

Yukarıda belirtildiği gibi dizide, önceki iki terimin toplamı sonraki terimi vermektedir. Bu durum fark denklemi ile ifade edilirse;

$$u(k) = u(k-1) + u(k-2)$$

şeklinde bir denklem bulunur. Bu denklem $k - (k-2) = 2$ den, ikinci mertebeden lineer fark denklemidir.

* Difference Equations 2, (<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/> ...)

Örnek 5.1: $u(k) = u(k-1) + 5u(k-2)$ fark denklemi verilsin. $u(1) = 3$, $u(2) = 8$ ise $u(3)$ ve $u(4)$ nedir?

$$u(3) = u(2) + 5u(1)$$

$$u(3) = 8 + 5 \cdot 3 = 23$$

$$u(4) = u(3) + 5u(2)$$

$$u(4) = 23 + 5 \cdot 8 = 63$$

(5.1) denkleminin, yardımcı denkleminin m_1 ve m_2 köklerinin, karşılaşılan üç durumu incelensin.

1. Durum: $m_1 \neq m_2$ ise, yani birbirinden farklı iki kök varsa çözümün $u(k) = Am_1^k$ ve $u(k) = Bm_2^k$ olduğu kabul edilir. Burada A ve B sabitlerdir. Am_1^k ve Bm_2^k , (5.1) denkleminin çözümleri ise denklemi sağlar. O halde,

$$Am_1^k = aAm_1^{(k-1)} + bAm_1^{(k-2)}$$

$$Bm_2^k = aBm_2^{(k-1)} + bBm_2^{(k-2)}$$

dır. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa;

$$Am_1^k + Bm_2^k = a(Am_1^{(k-1)} + Bm_2^{(k-1)}) + b(Am_1^{(k-2)} + Bm_2^{(k-2)})$$

dır. Buradan, $Am_1^k + Bm_2^k$ toplamının (5.1) denklemini sağladığı görülür. Böylece,

$$u(k) = au(k-1) + bu(k-2)$$

denkleminin genel çözümü;

$$u(k) = Am_1^k + Bm_2^k$$

şeklinde olup, burada $m_1 \neq m_2$ ve A , B keyfi sabitlerdir.

Örnek 5.2: $u(k) = -5u(k-2)$ fark denklemi verilsin. $u(1) = 2$, $u(2) = 5$ olmak üzere genel ve özel çözümü bulunmak istensin.

Denklem $u(k) + 5u(k-2) = 0$ şeklindedir ve $u(k) = Am^k$ şeklinde bir çözümünün olduğu kabul edilsin. O halde,

$$Am^k + 5Am^{(k-2)} = 0$$

$$Am^{(k-2)}(m^2 + 5) = 0$$

dır. Aşıkâr çözümünün olmadığı düşünülürse, yardımcı denklem;

$$m^2 + 5 = 0$$

dır. Bu denklemden kökler,

$$m^2 = -5$$

$$m_1 = \sqrt{5}i, m_2 = -\sqrt{5}i$$

bulunur. Kökler $m_1 \neq m_2$ olduğu için, genel çözüm;

$$u(k) = A(\sqrt{5}i)^k + B(-\sqrt{5}i)^k$$

şeklindedir. $u(1) = 2$, $u(2) = 5$ şartlarını kullanarak, özel çözüm bulmak için;

$$u(1) = 2$$

$$u(1) = A(\sqrt{5}i)^1 + B(-\sqrt{5}i)^1 = 2$$

$$A - B = \frac{2}{\sqrt{5}i} \quad (5.2)$$

$$u(2) = 5$$

$$u(2) = A(\sqrt{5}i)^2 + B(-\sqrt{5}i)^2 = 5$$

$$-5A - 5B = 5 \Rightarrow A + B = -1 \quad (5.3)$$

dır. (5.2) ve (5.3) den,

$$2A = \frac{2}{\sqrt{5}i} - 1 \Rightarrow A = \frac{2 - \sqrt{5}i}{2\sqrt{5}i}$$

dır. Bulunan A değeri (5.2) veya (5.3) denklemlerinde yazılırsa,

$$B = -1 - \frac{2 - \sqrt{5}i}{2\sqrt{5}i} = \frac{-2\sqrt{5}i - 2 + \sqrt{5}i}{2\sqrt{5}i} = \frac{-\sqrt{5}i - 2}{2\sqrt{5}i}$$

değeri bulunur. Bu bilgiler kullanılarak,

$$u(k) = \left(\frac{2 - \sqrt{5}i}{2\sqrt{5}i} \right) (\sqrt{5}i)^k + \left(\frac{-2 - \sqrt{5}i}{2\sqrt{5}i} \right) (-\sqrt{5}i)^k$$

özel çözümü bulunur.

2. Durum: $m_1 = m_2$ olsun. Yani bir birine eşit iki kök var olsun. Bu durumda genel çözümde aynı iki kökün toplamı olacaktır.

$$u(k) = Am_1^k + Bm_1^k = m_1^k (A + B) = m_1^k C, \quad C = A + B$$

dir. $u(k) = au(k-1) + bu(k-2)$ denkleminin bir diğer çözümü $u(k) = Dkm_1^k$ dir. Bu aşağıda gösterilecektir.

Eşit kök durumunda genel çözüm Cm_1^k ve Dkm_1^k nin toplamıyla elde edilir. Bu durum aşağıda gösterilecektir.

Eğer $u(k) = Dkm_1^k$ ise $u(k-1) = D(k-1)m_1^{k-1}$, $u(k-2) = D(k-2)m_1^{k-2}$ dir. Dkm_1^k çözüm ise denklemi sağlayacağından, denklemde yerine yazıldığında denklemi sıfır yapar.

$$u(k) = au(k-1) + bu(k-2) \Rightarrow Dkm_1^k = aD(k-1)m_1^{k-1} + bD(k-2)m_1^{k-2}$$

$$Dkm_1^k - aD(k-1)m_1^{k-1} - bD(k-2)m_1^{k-2} = 0$$

$$\begin{aligned} Dm_1^{(k-2)} [km_1^2 - (k-1)am_1 - (k-2)b] &= \\ = Dm_1^{(k-2)} [k(m_1^2 - am_1 - b) + am_1 + 2b] &= Dm_1^{(k-2)} (am_1 + 2b) = 0 \end{aligned}$$

Bu eşitlik sağlanır. Çünkü $m_1^2 - am_1 - b = 0$ dır. Bu yardımcı denklem iki eşit kökten oluştuğu için diskriminant $\Delta = a^2 + 4b = 0$ ve $m_1 = \frac{a}{2}$ olur.

$$u(k) - au(k-1) - bu(k-2) = Dm_1^{(k-2)} \left(a \left(\frac{a}{2} \right) + 2b \right) = Dm_1^{(k-2)} \left(\frac{a^2}{2} + 2b \right) = \frac{1}{2} Dm_1^{(k-2)} (a^2 + 4b) = 0$$

dır. Çünkü $a^2 + 4b = 0$ dır. Böylece Dkm_1^k nin bir çözüm olduğu gösterildi.

Cm_1^k ve Dkm_1^k çözümlerinin toplamı da çözümdür. Yani $Cm_1^k + Dkm_1^k$ toplamı da çözümdür. Gerçekten,

$$Cm_1^k = aCm_1^{k-1} + bCm_1^{k-2}$$

$$Dkm_1^k = aD(k-1)m_1^{k-1} + bD(k-2)m_1^{k-2}$$

dır. Bu denklemler toplanırlarsa;

$$Cm_1^k + Dkm_1^k = a(Cm_1^{k-1} + D(k-1)m_1^{k-1}) + b(Cm_1^{k-2} + D(k-2)m_1^{k-2})$$

elde edilir. Böylece $Cm_1^k + Dkm_1^k$ toplamının denklemi sağladığı dolayısıyla çözüm olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç olarak,

$$u(k) = au(k-1) + bu(k-2)$$

denkleminin kökler eşit olduğu zaman çözümü;

$$u(k) = Cm_1^k + Dkm_1^k$$

dır. C, D keyfi sabitlerdir.

Örnek 5.3: $u(k) + 8u(k-1) + 16u(k-2) = 0$ denklemi çözülmek istensin.

Yardımcı denklem oluşturulur. Kökler elde edilip çözüme ulaşılır. Çözümün $u(k) = Am^k$ olduğu kabul edilerek,

$$Am^k + 8Am^{(k-1)} + 16Am^{(k-2)} = 0$$

$$Am^{(k-2)}(m^2 + 8m + 16) = 0$$

$$(m^2 + 8m + 16) = 0$$

yardımcı denkleminde,

$$m_1 = \frac{-8 + \sqrt{0}}{2} = -4, \quad m_2 = \frac{-8 - \sqrt{0}}{2} = -4$$

$$m_1 = m_2 = -4$$

kökleri bulunur. Birbirine eşit iki kök olduğundan çözüm;

$$u(k) = Cm_1^k + Dkm_1^k$$

dır. Buradan verilen denklemin genel çözümü,

$$u(k) = C(-4)^k + Dk(-4)^k$$

$$u(k) = (-4)^k (C + Dk) \quad (5.4)$$

dır.

Eğer $u(1) = 1$, $u(2) = 4$ koşulları verilirse bir özel çözüm bulunabilir. Özel çözüm için,

$$u(1) = 1 \Rightarrow -4(C + D) = 1 \Rightarrow C + D = -\frac{1}{4} \quad (5.5)$$

$$u(2) = 4 \Rightarrow 16(C + 2D) = 4 \Rightarrow C + 2D = \frac{1}{4} \quad (5.6)$$

hesaplanır. (5.5) ve (5.6) denklemlerinden $D = \frac{2}{4}$, $C = -\frac{3}{4}$ değerleri elde edilir. Bu değerler

(5.4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$u(k) = (-4)^k \left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{4}k \right) \quad (5.7)$$

özel çözümü bulunur. (5.7) özel çözümünden yararlanarak $u(k)$ nın istenilen değeri bulunur.

Örneğin $k = 10$ için $u(k)$ değeri;

$$k = 10 \Rightarrow u(10) = (-4)^{10} \left(\frac{-3}{4} + \frac{20}{4} \right) = (-4)^{10} \left(\frac{17}{4} \right) = 4456450$$

olarak hesaplanır.

3. Durum: m_1 ve m_2 köklerinin karmaşık sayı olması durumunda ise,

$$u(k) + au(k-1) + bu(k-2) = 0$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer fark denklemi için, $u(k) = Am^k$ çözüm olduğundan,

$$u(k) = Am^k, \quad u(k-1) = Am^{(k-1)}, \quad u(k-2) = Am^{(k-2)}$$

dır. İkinci mertebeden lineer fark denkleminde yerine yazıldığında,

$$Am^k + Aam^{(k-1)} + Abm^{(k-2)} = 0$$

$$Am^{(k-2)}(m^2 + am + b) = 0$$

elde edilir.

$$m^2 + am + b = 0$$

yardımcı denkleminden m_1 ve m_2 köklerinin,

$$m_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

şeklinde karmaşık sayı olduğu varsayalım. $a, b \in \mathfrak{R}$ dır. Kökler birbirlerinin eşlenikleridir.

Yani $m_1 = \overline{m_2}$ dır. Buradan,

$$m_1 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{b} \left[-\frac{a}{2\sqrt{b}} - i \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\sqrt{b}} \right)^2} \right]$$

$$m_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{b} \left[-\frac{a}{2\sqrt{b}} + i \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\sqrt{b}} \right)^2} \right]$$

$$b > 0, \left| \frac{a}{2\sqrt{b}} \right| < 1 \text{ dır. } \frac{-a}{2\sqrt{b}} = \cos \varphi \text{ ve } \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\sqrt{b}} \right)^2} = \sin \varphi \text{ dönüşümü yapılırsa,}$$

$$m_1 = \sqrt{b} (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$m_2 = \sqrt{b} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

şeklinde olur. Bu köklerin k . kuvvetleri alınır,

$$(m_1)^k = (\sqrt{b})^k (\cos k\varphi - i \sin k\varphi)$$

$$(m_2)^k = (\sqrt{b})^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$$

elde edilir. $u(k) + au(k-1) + bu(k-2) = 0$ denkleminin genel çözümü;

$$u(k) = A(m_1)^k + B(m_2)^k$$

$$u(k) = A(\sqrt{b})^k (\cos k\varphi - i \sin k\varphi) + B(\sqrt{b})^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$$

$$u(k) = \alpha(\sqrt{b})^k (\cos k\varphi) + \beta(\sqrt{b})^k (\sin k\varphi)$$

olarak elde edilir.

Bu çözüm,

$$u(k) = (\sqrt{b})^k (\alpha(\cos k\varphi) + \beta(\sin k\varphi))$$

$$\alpha = A + B, \beta = i(B - A)$$

$$\cos \omega = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \sin \omega = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \omega = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{ olsun.}$$

$$u(k) = (\sqrt{b})^k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \omega (\cos k\varphi) + \sin \omega (\sin k\varphi))$$

$$u(k) = (\sqrt{b})^k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(k\varphi - \omega)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

5.1 İkinci Mertebeden Homojen Olmayan Lineer Fark Denklemleri

$u(k) + au(k-1) + bu(k-2) = 0$ formundaki denklemlerin ikinci mertebeden homojen lineer fark denklemleri olduğu belirtilmişti.

$$u(k) + au(k-1) + bu(k-2) = f(k) \quad (5.8)$$

şeklindeki denklem ikinci mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemdir. $f(k)$; k nın bir fonksiyonudur. İkinci mertebeden homojen olmayan fark denklemlerinin çözümünün genel çözümü;

$$u(k) = (\text{homojen kısmın genel çözümü}) + (\text{tüm denklemin bir özel çözümü})$$

şeklindedir.

Denklemin özel çözümü, $f(k)$ fonksiyonunun durumuna göre denklem modeli koyarak bir eşitlik oluşturulur. Bu eşitlikten özel çözüme ulaşılır. $f(k)$ nın durumuna göre seçilebilecek bazı denklemler Tablo 5.1.1 de verilmiştir.

Tablo 5.1.1 *

$f(k)$	özel çözüm modeli
Sabit fonksiyon ise	a
k	$a + bk$
k^2	$a + bk + ck^2$
n^k	an^k (veya bazı özel durumlarda akn^k alınır)

Örnek 5.1.1: $2u(k) - 7u(k-1) + 6u(k-2) = 3$ denklemini çözmek için,

önce verilen denklemin,

$$2u(k) - 7u(k-1) + 6u(k-2) = 0$$

homojen denklemini çözülür. Yardımcı denklem ve kökler,

$$2m^2 - 7m + 6 = 0$$

$$m_1 = \frac{7 + \sqrt{49 - 48}}{4} = 2$$

$$m_2 = \frac{7 - \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{3}{2}$$

dır. Bulunan kökler yardımıyla homojen kısmın çözümü;

$$u(k) = A(2)^k + B\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

şeklindedir. Denklemin sağ tarafında $f(k) = 3$ sabit fonksiyon olduğundan tablodaki birinci durum söz konusudur. Yani; çözüm olarak, $u(k) = a$ kabul edilerek,

$$u(k) = a, u(k-1) = a, u(k-2) = a$$

$$2a - 7a + 6a = 3$$

* Difference Equations 2, (<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/> ...)

$$a = 3$$

$$u(k) = 3$$

özel çözümü bulunur. Böylece, genel çözüm; homojen denklemin genel çözümüyle, homojen olmayan denklemin özel çözümünün toplamından,

$$u(k) = A(2)^k + B\left(\frac{3}{2}\right)^k + 3$$

şeklinde bulunur.

Örnek 5.1.2: $2u(k) - 7u(k-1) + 6u(k-2) = k$ denklemini çözmek istensin.

Homojen kısmın çözümü;

$$u(k) = A(2)^k + B\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

dır. Denklemin sağ tarafı $f(k) = k$ olduğundan tablodaki ikinci durum söz konusudur. Yani, çözüm olarak $u(k) = a + bk$ kabul edilerek,

$$u(k) = a + bk, \quad u(k-1) = a + b(k-1), \quad u(k-2) = a + b(k-2)$$

$$2(a + bk) - 7(a + b(k-1)) + 6(a + b(k-2)) = k$$

$$2a + 2bk - 7a - 7bk + 7b + 6a + 6bk - 12b = k$$

$$a - 5b + bk = k$$

$$bk = k \Rightarrow b = 1$$

$$a - 5b = 0 \Rightarrow a = 5$$

bulunur. Buradan, özel çözüm;

$$u(k) = 5 + k$$

olur. Böylece genel çözüm;

$$u(k) = A(2)^k + B\left(\frac{3}{2}\right)^k + (5 + k)$$

olarak elde edilir.

Örnek 5.1.3: $2u(k) - 7u(k-1) + 6u(k-2) = 3^k$ denklemini çözmek için,

önce homojen kısmın çözümü;

$$u(k) = A(2)^k + B\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

bulunur. Denklemin sağ tarafı $f(k) = 3^k$ olduğundan tablodaki dördüncü durum söz konusudur. Yani, çözüm olarak $u(k) = a3^k$ kabul edilerek,

$$u(k) = a3^k, u(k-1) = a3^{(k-1)}, u(k-2) = a3^{(k-2)}$$

$$2a3^k - 7a3^{(k-1)} + 6a3^{(k-2)} = 3^k$$

$$3^{(k-2)}(18a - 21a + 6a) = 3^k$$

$$18a - 21a + 6a = 9$$

$$3a = 9$$

$$a = 3$$

bulunur. Buradan özel çözüm;

$$u(k) = 3(3^k) = 3^{k+1}$$

olur. Böylece genel çözüm;

$$u(k) = A(2)^k + B\left(\frac{3}{2}\right)^k + 3^{k+1}$$

olarak elde edilir.

Örnek 5.1.4: $2u(k) - 7u(k-1) + 6u(k-2) = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ denkleminin genel çözümünü bulabilmek

için önce;

homojen kısmın çözümü;

$$u(k) = A(2)^k + B\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

şeklinde elde edilir. Denklemin sağ tarafı $f(k) = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ dır. Fakat özel çözüm için

$u(k) = a\left(\frac{3}{2}\right)^k$ alınırsa, a nın değeri bulunamaz. Çünkü $B\left(\frac{3}{2}\right)^k$ homojen kısmında bir

çözümüdür. Bu durumda tablodaki dördüncü durumun özel hali uygulanır. Yani; çözüm

olarak $u(k) = ak\left(\frac{3}{2}\right)^k$ kabul edilerek,

$$u(k) = ak\left(\frac{3}{2}\right)^k, \quad u(k-1) = a(k-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-1)}, \quad u(k-2) = a(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-2)}$$

$$2ak\left(\frac{3}{2}\right)^k - 7a(k-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-1)} + 6a(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-2)} = \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-2)} \left(2ak\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7a(k-1)\left(\frac{3}{2}\right) + 6a(k-2) \right) = \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$2ak\frac{9}{4} - 7a(k-1)\frac{3}{2} + 6a(k-2) = \frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{2}ak - \frac{21}{2}ak + \frac{21}{2}a + 6ak - 12a = \frac{9}{4}$$

$$-\frac{3}{2}a = \frac{9}{4}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

bulunur. Böylece özel çözüm;

$$u(k) = k\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

dır. Buradan genel çözüm;

$$u(k) = A(2)^k + B\left(\frac{3}{2}\right)^k - \frac{3k}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

olarak elde edilir.

Genel olarak; $f(k)$ ya göre bir çözüm seçmek zordur. Bu kural her zaman uygulanamayabilir. Bunun için daha genel bir yöntem olan “üreten fonksiyonlar*” kullanılabılır.

5.2 Üreten Fonksiyonlar

Bu yöntem homojen denklemleri de homojen olmayan denklemleri de çözmek için kullanılabılır. Bir $G(x)$ fonksiyonu belirlenir. Bu fonksiyona “üreten fonksiyon” denir.

Homojen denklemler için üreten fonksiyon,

$$G(x) = u(0) + u(1)x + u(2)x^2 + u(3)x^3 + \dots$$

şeklinde tanımlanır. Denklemden de görüldüğü gibi $G(x)$; katsayıları $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, . . . elemanlarının oluşturduğu kuvvet serisinden oluşur ve fark denkleminin çözülmesinde kullanılır**.

Örnek 5.2.1: $u(k) = 3u(k-1) - 2u(k-2)$, $k \geq 2$, $u(0) = 2$, $u(1) = 3$ denklemini çözmek için,

$$u(k) = 3u(k-1) - 2u(k-2)$$

$$u(2) = 3u(1) - 2u(0)$$

$$u(3) = 3u(2) - 2u(1)$$

$$u(4) = 3u(3) - 2u(2)$$

yazılabilir. Buradan,

$$G(x) = u(0) + u(1)x + u(2)x^2 + u(3)x^3 + \dots$$

* Generating Functions

** Difference Equations 2, (<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/> ...)

$$G(x) = 2 + 3x + (3u(1) - 2u(0))x^2 + (3u(2) - 2u(1))x^3 + \dots$$

$$G(x) = 2 + 3x + 3u(1)x^2 - 2u(0)x^2 + 3u(2)x^3 - 2u(1)x^3 + \dots$$

$$G(x) = 2 + 3x + 3x(u(1)x + u(2)x^2 + \dots) - 2x^2(u(0) + u(1)x + u(2)x^2 + \dots)$$

$$G(x) = 2 + 3x + 3x(G(x) - u(0)) - 2x^2(G(x))$$

$$G(x) = 2 + 3x + 3x(G(x) - 2) - 2x^2(G(x))$$

$$G(x) = 2 - 3x + 3xG(x) - 2x^2(G(x))$$

$$G(x) = \frac{2 - 3x}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{2 - 3x}{(2x - 1)(x - 1)}$$

$$\frac{2 - 3x}{(2x - 1)(x - 1)} \equiv \frac{A}{(2x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)} = \frac{Ax - A + 2Bx - B}{(2x - 1)(x - 1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = -2 \\ A + 2B = -3 \end{array} \right\} A = -1, B = -1$$

bulunur. Yani;

$$\frac{2 - 3x}{(2x - 1)(x - 1)} = \frac{1}{(1 - 2x)} + \frac{1}{(1 - x)}$$

dır.

$$\frac{1}{(1 - 2x)} \text{ ve } \frac{1}{(1 - x)}, \text{ Maclaurain serisine açıldığında,}$$

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$(1 - 2x)^{-1} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots$$

elde edilir. Bunlar $G(x)$ de yazıldığında,

$$G(x) = \frac{1}{(1 - 2x)} + \frac{1}{(1 - x)}$$

$$G(x) = (1 + 1) + (2x + x) + (2^2 x^2 + x^2) + (2^3 x^3 + x^3) + \dots$$

$$G(x) = 2 + 3x + (2^2 + 1)x^2 + (2^3 + 1)x^3 + \dots$$

elde edilir. $G(x)$ in k . terimi $u(k)x^k = (2^k + 1)x^k$ olduğundan, x^k nin katsayısı, fark denkleminin çözümü $u(k)$ yi verir. Buradan da genel çözüm,

$$u(k) = 2^k + 1$$

olarak bulunur.

Homojen olmayan denklemler için yöntem aşağıdaki örnekte verildiği gibi uygulanır.

Örnek 5.2.2: $u(k) + u(k-1) - 6u(k-2) = k$, $k \geq 2$, $u(0) = 0$, $u(1) = 2$ denklemini çözebilmek için üreten fonksiyon,

$$G(x) = u(0) + u(1)x + u(2)x^2 + u(3)x^3 + \dots$$

şeklinde seçilsin. Denklemdaki katsayılar yardımıyla $(1 + x - 6x^2)$ elde edilir.

$$u(k) + u(k-1) - 6u(k-2) = k$$

denklemden; $u(2) = 0$, $u(3) = 15$ olarak bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned} (1 + x - 6x^2)G(x) &= (1 + x - 6x^2)(u(0) + u(1)x + u(2)x^2 + u(3)x^3 + \dots) \\ &= (u(0) + u(1)x + u(2)x^2 + \dots) + (u(0)x + u(1)x^2 + u(2)x^3 + \dots) + (-6u(0)x^2 - 6u(1)x^3 - 6u(2)x^4 + \dots) \\ &= u(0) + (u(1) + u(0))x + (u(2) + u(1) - 6u(0))x^2 + (u(2) - 6u(1) + u(3))x^3 + \dots \\ &= 0 + (2 + 0)x + (0 + 2 - 0)x^2 + (0 - 12 + 15)x^3 + \dots \\ &= 2x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \dots \\ (1 + x - 6x^2)G(x) &= 2x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \dots \\ (1 + x - 6x^2)G(x) &= 2x + x(2x + 3x^2 + 4x^3 \dots) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

olduğundan,

$$(1+x-6x^2)G(x) = 2x + x \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right) = x + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$(1+3x)(1-2x)G(x) = \frac{x(1-x)^2 + x}{(1-x)^2}$$

$$G(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x}{(1+3x)(1-2x)(1-x)^2} \equiv \frac{A}{(1+3x)} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{(1-x)^2} + \frac{D}{1-x}$$

$$G(x) \equiv \frac{A(1-2x)(1-x)^2 + B(1+3x)(1-x)^2 + C(1+3x)(1-2x) + D(1-x)(1+3x)(1-2x)}{(1+3x)(1-2x)(1-x)^2}$$

dır. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra;

$$G(x) \equiv \frac{(A+B+C+D) + (-4A+B+C)x + (5A-5B-6C-7D)x^2 + (-2A+3B+6D)x^3}{(1+3x)(1-2x)(1-x)^2}$$

$$A+B+C+D=0$$

$$-4A+B+C=2$$

$$5A-5B-6C-7D=-2$$

$$-2A+3B+6D=1$$

$$A = -\frac{5}{16}, B = 1, C = -\frac{1}{4}, D = -\frac{7}{16}$$

bulunur. Buradan,

$$G(x) = \frac{-5}{16(1+3x)} + \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{4(1-x)^2} - \frac{7}{16(1-x)}$$

$$G(x) = \frac{-5}{16}(1-3x+(-3x)^2+\dots) + (1+2x+(2x)^2+\dots) - \frac{1}{4}(1+2x+3x^2+\dots) - \frac{7}{16}(1+x+x^2+\dots)$$

$$u(k) = \frac{1}{16}[-5(-3)^k + 16(2^k) - 4(k+1) - 7]$$

elde edilir. k . terimin katsayısı verilen denklemin genel çözümünü verir.

6. ÇÖZÜMLERİN LİMİT ALMA DAVRANIŞLARI

$$u(k+2) + p_1 u(k+1) + p_2 u(k) = 0 \quad (6.1)$$

şeklinde ikinci mertebeden lineer homojen fark denklemi ele alınsın. (6.1) denkleminin karakteristik köklerinin λ_1 ve λ_2 olduğu kabul edilsin. Bu köklere göre aşağıda verilen farklı durumlar söz konusudur.

1. Durum: λ_1 ve λ_2 ayrık iki reel kök ise $u_1(k) = \lambda_1^k$ ve $u_2(k) = \lambda_2^k$, (6.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümüdür. Eğer $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ise $u_1(k)$ e baskın (dominant) çözüm, λ_1 e baskın (dominant) karakteristik kök denir. Tersi durumda $u_2(k)$ e baskın (dominant) çözüm, λ_2 e baskın (dominant) karakteristik kök denir. (6.1) denkleminin genel çözümü $u(k) = a_1 \lambda_1^k + a_2 \lambda_2^k$ dir.

$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$u(k) = a_1 \lambda_1^k + a_2 \lambda_2^k = \lambda_1^k \left(a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \right)$$

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$$

olduğundan

$$k \rightarrow \infty \text{ iken } \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \rightarrow 0 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak; $\lim_{k \rightarrow \infty} u(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_1 \lambda_1^k$ olduğu görülür. Böylece, genel çözümün limit alma davranışının, baskın çözümün davranışına göre belirlendiği gösterilmiştir (Elaydi, 2005).

λ_1 in değerine bağlı olarak aşağıdaki altı farklı durum söz konusudur.

1) $\lambda_1 > 1$ ise $\{a_1 \lambda_1^k\}$ dizisi, ∞ a ıraksar. Sistem kararsızdır.

2) $\lambda_1 = 1$ ise $\{a_1 \lambda_1^k\}$ dizisi, sabit dizidir.

3) $0 < \lambda_1 < 1$ ise $\{a_1 \lambda_1^k\}$ dizisi, sıfıra monoton azalır. Sistem kararlıdır.

4) $-1 < \lambda_1 < 0$ ise $\{a_1 \lambda_1^k\}$ dizisi, sıfır etrafında salınım yapar. Yani işaret değiştirir. Sıfıra yakınsar. Sistem kararlıdır.

5) $\lambda_1 = -1$ ise $\{a_1 \lambda_1^k\}$ dizisi, a_1 ve $-a_1$ değerleri arasında salınım yapar.

6) $\lambda_1 < -1$ ise $\{a_1 \lambda_1^k\}$ dizisi salınım yapar ama büyüklüğünde artar. Sistem kararsızdır. (Elaydi, 2005).

2. Durum: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olduğu durumda, (6.1) denkleminin genel çözümü, $u(k) = (a_1 + a_2 k) \lambda^k$ şeklindedir. Eğer $\lambda \geq 1$ ise monoton olarak, eğer $\lambda \leq -1$ ise salınım yaparak, $u(k)$ çözümü ıraksar. $|\lambda| < 1$ olduğunda;

$\lim_{k \rightarrow \infty} k \lambda^k = \infty \cdot 0$ belirsizliği

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\frac{1}{\lambda^k}} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüşür. Buradan,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{-\ln \lambda}{\lambda^k}} = 0$$

bulunur.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \lambda^k = 0$$

olduğu için $|\lambda| < 1$ olduğunda çözüm sıfıra yakınsar.

3. Durum: λ_1 ve λ_2 kökleri karmaşık sayılar ise, $\beta \neq 0$ olmak üzere $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olsun. (6.1) denkleminin çözümü;

$$u(k) = ar^k \cos(k\theta - \omega)$$

şeklinde verilir. Burada,

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

dır. Kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğundan, $u(k)$ çözümü de salınımlıdır. $u(k)$, karakteristik köklerin durumuna göre üç farklı şekilde salınım yapar.

- 1) $r > 1$ ise λ_1 ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olup birim çemberin dışındadır. $u(k)$ salınım yapar ama büyüklüğünde artar. Sistem kararsızdır.
- 2) $r = 1$ ise λ_1 ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olup birim çemberin üzerindedir. $u(k)$ salınım yapar ama büyüklüğünde sabittir.
- 3) $r < 1$ ise λ_1 ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olup birim çemberin içindedir. $u(k)$ çözümü salınım yapar ama $k \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsar. Sistem kararlıdır. (Elaydi, 2005)

Teorem(6.1): Aşağıdaki durumlar doğrudur.

- i) (6.1) denkleminin tüm çözümlerinin sıfır civarında salınımlı olması için gerek ve yeter koşul karakteristik denklemin pozitif reel kökünün olmamasıdır.
- ii) (6.1) denkleminin tüm çözümlerinin sıfıra yakınsaması için, yani sıfır çözüm asimtotik kararlı olması için, gerek ve yeter koşul $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ olmasıdır. (Elaydi, 2005)

(6.1) denkleminin homojen olmaması durumunda, $M \neq 0$ olduğu ve sabit sayı olmak üzere,

$$u(k+2) + p_1 u(k+1) + p_2 u(k) = M \quad (6.2)$$

şeklinde homojen olmayan lineer ikinci mertebeden fark denklemdir. (6.1) homojen denkleminin tersine, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $u(k) = 0$, (6.2) denkleminin çözümü değildir. Çözüm olarak denge noktası veya $u(k) = u^*$ çözümü vardır. (6.2) denkleminde;

$$u^* + p_1 u^* + p_2 u^* = M$$

$$u^* = \frac{M}{1 + p_1 + p_2} \quad (6.3)$$

elde edilir. Böylece $u_p(k) = u^*$, (6.2) denkleminin bir özel çözümüdür. (6.2) denkleminin genel çözümü de,

$$u(k) = u^* + u_c(k)$$

dır.

$u(k) \rightarrow u^*$ olması için gerek ve yeter koşul $k \rightarrow \infty$ olduğunda $u_c(k) \rightarrow 0$ olmasıdır. $u(k)$ nın, u^* etrafında salınımlı olması için gerek ve yeter koşul $u_c(k)$ nın, sıfır etrafında salınımlı olmasıdır. Bu anlatılan özellikler aşağıdaki teoremde özetlenmiştir. (Elaydi, 2005)

Teorem(6.2): Aşağıdaki durumlar doğrudur.

- i) Homojen olmayan (6.2) denkleminin tüm çözümlerinin, u^* denge çözümü etrafında salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (6.1) homojen denkleminin hiçbir karakteristik kökünün pozitif reel sayı olmamasıdır.
- ii) (6.2) denkleminin tüm çözümlerinin $k \rightarrow \infty$ olduğunda u^* a yakınsaması için gerek ve yeter koşul λ_1 ve λ_2 , (6.1) homojen denkleminin karakteristik kökleri olmak üzere $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ olmasıdır. (Elaydi, 2005).

Teorem(6.1) ve Teorem(6.2) teoremlerinde, ikinci mertebeden fark denklemlerinin asimtotik kararlılığı altında, gerek ve yeter koşullar veriliyor. (6.1) veya (6.2) denklemlerinde p_1 ve p_2 katsayılarının değerlerine bağlı olarak kararlılık konusunda belirli kriterlere ihtiyaç duyulabilir. İhtiyaç duyulan bu kriterler aşağıdaki sonuca götürür.

Teorem(6.3):

$$1 + p_1 + p_2 > 0, 1 - p_1 + p_2 > 0, 1 - p_2 > 0 \quad (6.4)$$

ifadeleri, (6.1) ve (6.2) denklemlerinin denge noktasının (çözümünün) asimtotik kararlı, yani çözümlerin u^* a yakınsaması için gerek ve yeter koşullardır. (Elaydi, 2005)

İspat: (6.1) veya (6.2) denklemlerinin, denge noktasının, asimtotik kararlı olduğu kabul edilsin. Teorem(6.1) ve Teorem(6.2) kullanılarak, $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$ karakteristik denkleminin, λ_1 ve λ_2 kökleri, birim çemberin içindedir. Yani $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ dir.

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \quad (6.5)$$

dir. İncelenecek iki durum vardır.

1. Durum: $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$, yani λ_1, λ_2 nin reel kökler olması durumudur. $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olduğundan (6.5) den,

$$-2 < -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 \Rightarrow -2 + p_1 < \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1 \quad (6.6)$$

bulunur. Bezer olarak diğer eşitlikte,

$$-2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1 \quad (6.7)$$

elde edilir. (6.6) eşitsizliğindeki, ikinci eşitsizliğin karesi alınır,

$$1 + p_1 + p_2 > 0 \quad (6.8)$$

elde edilir. (6.7) eşitsizliğindeki, birinci eşitsizliğin karesi alınır,

$$1 - p_1 + p_2 > 0 \quad (6.9)$$

elde edilir. $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ olduğundan, (6.6) eşitsizliğinin ikinci eşitsizliğinden ve (6.7) eşitsizliğinin birinci eşitsizliğinden,

$$2 + p_1 > 0 \quad \text{ve} \quad 2 - p_1 > 0 \quad \text{veya} \quad |p_1| < 2$$

dır. Buradan;

$$\sqrt{p_1^2 - 4p_2} \Rightarrow p_1^2 - 4p_2 \geq 0 \Rightarrow p_1^2 \geq 4p_2 \Rightarrow \frac{p_1^2}{4} \geq p_2$$

$$p_2 \leq \frac{p_1^2}{4} < 1 \Rightarrow 1 - p_2 > 0$$

elde edilir. Böylece, birinci durum için (6.4) koşulları gösterilmiş oldu.

2. Durum: $p_1^2 - 4p_2 < 0$, yani λ_1, λ_2 köklerinin karmaşık sayı olması durumudur. Bu durumda,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p_1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4p_2 - p_1^2}$$

dır. $p_1^2 < 4p_2$ olduğundan, $-2\sqrt{p_2} < p_1 < 2\sqrt{p_2}$ dır. Buradan, $|\lambda_1|^2 = \frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2}{4} - \frac{p_1^2}{4} = p_2$ bulunur. $|\lambda_1| < 1$ olduğundan, $0 < p_2 < 1$ dir.

(6.4) eşitsizliklerinin, ilk iki eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için, $x \in (0,1)$ için $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x} > 0$ olduğu gösterilmelidir. $f(0) = 1$ ve $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ dir. Böylece $x = 1$, $x \in (0,1)$ için azalan $f(x)$ in, lokal minimumdur. Bu durumda $\forall x \in (0,1)$ için $f(x) > 0$ dır.

Böylece gerek koşulun ispatı tamamlanmıştır. Tersine durumda gösterilerek ispat tamamlanır.

7. N. MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

n. merteben homojen olmayan lineer fark denklemi,

$$u(k+n) + p_1(k)u(k+n-1) + \dots + p_n(k)u(k) = g(k) \quad (7.1)$$

şeklindedir. $p_i(k)$ ve $g(k)$, $\forall k \geq k_0$ için reel değerli fonksiyonlardır ve $p_n(k) \neq 0$ dır. Eğer $g(k) = 0$ ise (7.1) denkleminde homojen denklem denir. (7.1) denklemi,

$$u(k+n) = -p_1(k)u(k+n-1) - \dots - p_n(k)u(k) + g(k) \quad (7.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (7.2) denkleminde $k = 0$ alındığında,

$$u(n) = -p_1(0)u(n-1) - \dots - p_n(0)u(0) + g(0)$$

elde edilir. $u(n)$ hesaplandıktan sonra, (7.2) denkleminde $k = 1$ alınarak,

$$u(n+1) = -p_1(1)u(n) - p_2(1)u(n-1) - \dots - p_n(1)u(1) + g(1)$$

elde edilir. Bu işlem devam ettirilerek, $k \geq n$ için $u(k)$ yi hesaplamak mümkündür. Bir $\{u(k)\}_{n_0}^{\infty}$ (veya $u(k)$ ile de ifade edilebilir) dizisi (7.1) denklemini sağlıyor ise denklemin çözümüdür. Eğer denklem için başlangıç değerleri verilirse,

$$u(k+n) + p_1(k)u(k+n-1) + \dots + p_n(k)u(k) = g(k) \quad (7.3)$$

$$u(k_0) = a_0, u(k_0+1) = a_1, u(k_0+2) = a_2, \dots, u(k_0+n-1) = a_{n-1} \quad (7.4)$$

şeklinde başlangıç değer problemiyle karşılaşılr. Burada a_i ler reel sayılardır.

Teorem(7.1): (7.3) ve (7.4) denklemleriyle verilen başlangıç değer probleminin çözümü $u(k)$ vardır ve tektir. (Elaydi, 2005)

$$u(k+n) + p_1(k)u(k+n-1) + \dots + p_n(k)u(k) = 0 \quad (7.5)$$

denkleminde n. mertebeden lineer homojen fark denklemi denir.

Tanım(7.1): Hepsı birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_r$ sabitler olmak üzere, $n \geq n_0$ için;

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \dots + a_r f_r(n) = 0 \quad (7.6)$$

olacak şekildeki $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdırlar denir.

Eğer $n \geq n_0$ için;

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \dots + a_r f_r(n) = 0$$

olduğunda $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ ise $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonlarına lineer bağımsızdırlar denir. (Elaydi, 2005)

Tanım(7.2): (7.5) denkleminin n lineer bağımsız çözümünün kümesine, çözümlerin temel kümesi denir (Elaydi, 2005).

Tanım(7.3): Çözümlerin lineer bağımsızlıklarını kontrol etmek için *Casoratian* $W(k)$ yöntemi kullanılır. Bu yöntem diferansiyel denklemlerdeki *Wronskian* a benzer. $u_1(k), u_2(k), \dots, u_r(k)$ çözümlerinin *Casoratian* $W(k)$ ni aşağıdaki gibi verilir (Elaydi, 2005).

$$W(k) = \det \begin{pmatrix} u_1(k) & u_2(k) & \dots & u_r(k) \\ u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_r(k+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1(k+r-1) & u_2(k+r-1) & \dots & u_r(k+r-1) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Abel Lemması: Abel Lemması, *Casoratian* $W(k)$ nın hesaplanmasında kullanılan ve çözümlerin lineer bağımsızlığının kontrol edilmesinde etkili olan bir formüldür. $u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)$; (7.5) in çözümleri ve $W(k)$ bu çözümlerin *Casoratian* ni olsun. $k \geq k_0$ için;

$$W(k) = (-1)^{n(k-k_0)} \left(\prod_{i=k_0}^{k-1} p_n(i) \right) W(k_0) \quad (7.8)$$

dır (Elaydi, 2005).

İspat: (7.7) formülünden,

$$W(k+1) = \det \begin{pmatrix} u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ u_1(k+2) & u_2(k+2) & \dots & u_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1(k+n) & u_2(k+n) & \dots & u_n(k+n) \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

(7.5) formülünü kullanarak,

$$u_i(k+n) = -p_1(k)u_i(k+n-1) - p_2(k)u_i(k+n-2) - \dots - p_n(k)u_i(k)$$

$$u_i(k+n) = -p_n(k)u_i(k) - (p_1(k)u_i(k+n-1) + p_2(k)u_i(k+n-2) + \dots + p_{n-1}(k)u_i(k+1))$$

denklemini elde edilebilir. Bu eşitlik, (7.9) da yerine konulursa,

$$W(k+1) = \det \begin{pmatrix} u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ u_1(k+2) & u_2(k+2) & \dots & u_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -p_n(k)u_1(k) & -p_n(k)u_2(k) & \dots & -p_n(k)u_n(k) \\ -(p_1(k)u_1(k+n-1) & -(p_1(k)u_2(k+n-1) & \dots & -(p_1(k)u_n(k+n-1) \\ +p_2(k)u_1(k+n-2) & +p_2(k)u_2(k+n-2) & \dots & +p_2(k)u_n(k+n-2) \\ +\dots+ & +\dots+ & \dots & +\dots+ \\ +p_{n-1}(k)u_1(k+1) & +p_{n-1}(k)u_2(k+1) & \dots & +p_{n-1}(k)u_n(k+1) \end{pmatrix}$$

determinantı elde edilir. Determinantın özelliğinden dolayı;

$$W(k+1) = \det \begin{pmatrix} u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ u_1(k+2) & u_2(k+2) & \dots & u_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -p_n(k)u_1(k) & -p_n(k)u_2(k) & \dots & -p_n(k)u_n(k) \end{pmatrix} +$$

$$+ \det \begin{pmatrix} u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ u_1(k+2) & u_2(k+2) & \dots & u_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -p_1(k)u_1(k+n-1) & -p_1(k)u_2(k+n-1) & \dots & -p_1(k)u_n(k+n-1) \end{pmatrix} +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \det \begin{pmatrix} u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ u_1(k+2) & u_2(k+2) & \dots & u_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -p_{n-1}(k)u_1(k+1) & -p_{n-1}(k)u_2(k+1) & \dots & -p_{n-1}(k)u_n(k+1) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan;

$$W(k+1) = \det \begin{pmatrix} u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ u_1(k+2) & u_2(k+2) & \dots & u_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -p_n(k)u_1(k) & -p_n(k)u_2(k) & \dots & -p_n(k)u_n(k) \end{pmatrix} + 0$$

yazılır. Determinantın özelliğinden dolayı,

$$W(k+1) = (-p_n(k)) \det \begin{pmatrix} u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ u_1(k+2) & u_2(k+2) & \dots & u_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1(k) & u_2(k) & \dots & u_n(k) \end{pmatrix}$$

$$W(k+1) = (-p_n(k))(-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix} u_1(k) & u_2(k) & \dots & u_n(k) \\ u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1(k+n-1) & u_2(k+n-1) & \dots & u_n(k+n-1) \end{pmatrix}$$

$$W(k+1) = (-1)^k (p_n(k)) \det \begin{pmatrix} u_1(k) & u_2(k) & \dots & u_n(k) \\ u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1(k+n-1) & u_2(k+n-1) & \dots & u_n(k+n-1) \end{pmatrix}$$

$$W(k+1) = (-1)^n p_n(k) W(k) \quad (7.10)$$

bulunur. (7.10) denklemi birinci mertebeden fark denklemi olduğu için (4.3) yardımıyla çözüldüğünde

$$W(k) = \left[\prod_{i=k_0}^{k-1} (-1)^n p_n(i) \right] W(k_0) = (-1)^{n(k-k_0)} \left[\prod_{i=k_0}^{k-1} p_n(i) \right] W(k_0)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç: $\forall k \geq k_0$ için $p_n(k) \neq 0$ olduğu kabul edilsin. $\forall k \geq k_0$ için *Casoratian* $W(k) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $W(k_0) \neq 0$ olmasıdır (Elaydi, 2005).

Bu sonuca göre; *Casoratian*, ya $\forall k \geq k_0$ için sıfır olur veya herhangi $k \geq k_0$ için asla sıfır olmaz. Böylece $\forall k \in Z^+$ için $W(k) \neq 0$ olduğuna bakmak yerine sadece $W(0) \neq 0$ olduğuna bakmak gereklidir (Elaydi, 2005).

Çözümlerin lineer bağımsızlıkları ve *Casoratian* i arasındaki ilişkiye bakılsın. Bunun için, eğer n çözümün *Casoratian* $W(k)$ i asla sıfır değilse, bu çözümlerin kümesinin bir temel küme olduğu gösterilir.

$u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)$; (7.5) in çözümleri olsun. $a_1, a_2, \dots, a_r$ sabitleri ve $k_0 \in Z^+$ olmak üzere, $\forall k \geq k_0$ için;

$$a_1 u_1(k) + a_2 u_2(k) + \dots + a_n u_n(k) = 0 \quad (7.11)$$

olduğu kabul edilsin. Buradan, $n-1$ denklem,

$$\begin{aligned} a_1 u_1(k+1) + a_2 u_2(k+1) + \dots + a_n u_n(k+1) &= 0 \\ &\vdots \\ a_1 u_1(k+n-1) + a_2 u_2(k+n-1) + \dots + a_n u_n(k+n-1) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde türetilir. Bu sistem,

$$U(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) & u_2(k) & \dots & u_n(k) \\ u_1(k+1) & u_2(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1(k+n-1) & u_2(k+n-1) & \dots & u_n(k+n-1) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$U(k)\varepsilon = 0 \quad (7.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. (7.12) nin sadece aşıkâr çözümü (yani $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$) olması için gerek ve yeter şart $U(k)$ matrisinin regüler (yani $\forall k \geq k_0$ için $\det U(k) = W(k) \neq 0$) olmasıdır (Elaydi, 2005).

Teorem(7.2): (7.5) denkleminin $u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)$ çözümlerinin kümesi bir temel küme olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ için *Casoratian* $W(k_0) \neq 0$ olmasıdır (Elaydi, 2005).

Teorem(7.3):(Temel Teorem) Eğer $\forall k \geq k_0$ için $p_n(k) \neq 0$ ise, (7.5) denkleminin, $k \geq k_0$ için çözümlerinin temel kümesi vardır (Elaydi, 2005).

Lemma: $u_1(k), u_2(k)$; (7.5) denkleminin iki çözümü olsun. Bu durumda ;

i) $u(k) = u_1(k) + u_2(k)$, (7.5) denkleminin çözümü olur.

ii) Herhangi bir a sabiti için, $\bar{u}(k) = au_1(k)$; (7.5) denkleminin çözümü olur.(Elaydi, 2005)

Üst Üste Ekleme (Superposition) Prensibi: Eğer $u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)$, (7.5) denkleminin çözümleri ise,

$$u(k) = a_1 u_1(k) + a_2 u_2(k) + \dots + a_n u_n(k)$$

de (7.5) denkleminin çözümüdür (Elaydi, 2005).

Tanım(7.4): $\{u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)\}$; (7.5) denkleminin çözümlerinin temel kümesi olsun. (7.5) denkleminin genel çözümü,

$$u(k) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(k), \quad (\text{keyfi } a_i \text{ sabitleri için})$$

şeklindedir.

(7.5) de verilen n. mertebeden homojen fark denklemi,

$$u(k+n) + p_1(k)u(k+n-1) + \dots + p_n(k)u(k) = 0$$

dır. Eğer p_i ler sabit ve $p_n \neq 0$ ise bu denkleme sabit katsayılı lineer homojen fark denklemi denir. Bu denklem;

$$u(k+n) + p_1 u(k+n-1) + \dots + p_n u(k) = 0 \quad (7.13)$$

şeklindedir. λ karmaşık sayı olmak üzere, (7.13) denkleminin çözümlerinin λ^k şeklinde oldukları kabul edilsin. Çözüm olduğu için denklemi sağlar. Buradan,

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0 \quad (7.14)$$

denklemi elde edilir. (7.14) denklemine, (7.13) denkleminin karakteristik denklemi denir. λ köklerine de karakteristik kök denir. $p_n \neq 0$ olduğundan karakteristik köklerin hiçbirisi sıfır değildir. İki durum vardır.

1. Durum: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ karakteristik kökleri ayrık olsun. $\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$ kümesinin çözümlerin temel kümesi olduğu gösterilecektir. Bunun için, $W(k)$, çözümlerin *Casoratian* ı olmak üzere, $W(0) \neq 0$ olduğunu (teorem(7.2) den) göstermek yeterlidir.

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

(7.15) ifadesine *Vandermonde determinantı* denir. (7.15) determinanı,

$$W(0) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad (7.16)$$

şeklinde gösterilebilir. Tüm λ_i ler ayrık olduğundan $W(0) \neq 0$ dır. Böylece $\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$, (7.13) denkleminin çözümünün temel kümesidir. Sonuç olarak (7.13) denkleminin genel çözümü;

$$u(k) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^k \quad (7.17)$$

şeklindedir. Burada a_i bir karmaşık sayıdır (Elaydi, 2005).

2. Durum: $m_1, m_2, \dots, m_t$ kuvvetleri olmak üzere, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$; ayrık karakteristik kökler olsun. Burada $\sum_{i=1}^t m_i = n$ dır. (7.13) denklemi,

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_t)^{m_t} u(k) = 0 \quad (7.18)$$

dır. Bu denklemin genel çözümü,

$$u(k) = \sum_{i=1}^t \lambda_i^k (a_{i0} + a_{i1}k + a_{i2}k^2 + \dots + a_{i,m_i-1}k^{m_i-1})$$

dır (Elaydi, 2005).

Örnek(7.1):

$$u(k+3) - 6u(k+2) + 12u(k+1) - 8u(k) = 0$$

$$u(0) = 2, u(1) = 5, u(2) = 4$$

şeklinde verilen denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

dır. Karakteristik denklemin kökleri,

$$(\lambda - 2)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

dır. Bu durumda genel çözüm;

$$u(k) = (a_0 + a_1 k + a_2 k^2) 2^k$$

olarak bulunur. Buradan,

$$u(0) = a_0 = 2$$

$$u(1) = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 5$$

$$u(2) = 4a_0 + 8a_1 + 16a_2 = 4$$

dır. Bu değerler, denklemde yerine konup gerekli işlemler yapıldığında,

$$2a_1 + 2a_2 = 1$$

$$2a_1 + 4a_2 = -1$$

$$a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = -1$$

sonuçları bulunur. Böylece denklemin çözümü;

$$u(k) = \left(2 + \frac{3}{2}k - k^2 \right) 2^k$$

dır.

n . mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemi,

$$u(k+n) + p_1(k)u(k+n-1) + \dots + p_n(k)u(k) = g(k) \quad (7.18)$$

şeklinde dir. Burada $\forall k \geq k_0$ için $p_n(k) \neq 0$ dir. $g(k)$; denklemin uygulandığı yere göre farklı isimler alabilir.

n . mertebeden lineer homojen olmayan denklemlerde, homojen denklemlerin tersine iki çözümün toplamı veya çarpımı denklemin çözümü olmaz (Elaydi, 2005).

Teorem(7.4): Eğer $u_1(k)$ ve $u_2(k)$, (7.18) nın çözümü ise, $u(k) = u_1(k) - u_2(k)$ denklemi,

$$u(k+n) + p_1(k)u(k+n-1) + \dots + p_n(k)u(k) = 0 \quad (7.19)$$

homojen denkleminin bir çözümüdür (Elaydi, 2005).

(7.19) homojen fark denkleminin genel çözümü, (7.18) homojen olmayan fark denkleminin tamamlayıcı çözümüdür. Bu çözüm $u_c(k)$ ile gösterilsin. (7.18) homojen olmayan fark denkleminin çözümüne özel çözüm denir ve $u_p(k)$ ile gösterilsin.

Teorem(7.5): (7.18) denkleminin herhangi bir çözümü $u(k)$,

$$u(k) = u_p(k) + \sum_{i=1}^n a_i u_i(k)$$

şeklindedir. Bu denklemde,

$$\{u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)\} \quad (7.20)$$

(7.19) homojen denkleminin çözümlerinin temel kümesidir (Elaydi, 2005).

$$u(k+n) + p_1 u(k+n-1) + \dots + p_n u(k) = g(k) \quad (7.21)$$

şeklinde verilen denklemlere, sabit katsayılı homojen olmayan fark denklemi denir. Bu tür denklemlerin çözümü; $u_p(k)$ özel çözümü bulunurken, basitliği sebebiyle belirsiz katsayılar yöntemi kullanılabilir. Belirsiz katsayılar yönteminde; bir özel çözüm çeşidi seçilip, fark denkleminde yerine yazılarak çözüm yapılır. Fakat $g(k)$ tamamen keyfi ise bu yöntem etkili olmaz. Eğer $g(k)$, bazı özel terimlerden veya bu terimlerin lineer kombinasyonundan oluşuyorsa özel çözümünü bulunması için bu yöntem kullanılabilir.

$g(k)$ ya göre seçilebilecek $u_p(k)$ özel çözüm çeşitleri Tablo(7.1) de verilmektedir.

Tablo 7.1 (Elaydi, 2005)

$g(k)$	$u_p(k)$
a^k	ca^k
k^n	$c_0 + c_1k + \dots + c_nk^n$
$k^n a^k$	$c_0a^k + c_1ka^k + \dots + c_nk^n a^k$
$\sin(\beta k), \cos(\beta k)$	$c_1 \sin(\beta k) + c_2 \cos(\beta k)$
$a^k \sin(\beta k), a^k \cos(\beta k)$	$(c_1 \sin(\beta k) + c_2 \cos(\beta k))a^k$
$a^k k^n \sin(\beta k), a^k k^n \cos(\beta k)$	$((c_0 + c_1k + \dots + c_nk^n)a^k \sin(\beta k))$ $+ ((d_0 + d_1k + \dots + d_nk^n)a^k \cos(\beta k))$

Tablo(7.1) dan seçilen uygun fonksiyon, (7.21) denkleminde uygun işlemler yapılarak yerine yazılır. Sabitlerin değeri bulunarak denklem çözülür.

Örnek(7.2): $u(k+2) - 4u(k+1) + 3u(k) = (-4k + 8k^2)5^k$ denklemi çözülmek istensin.

$$u(k+2) - 4u(k+1) + 3u(k) = 0$$

denkleminin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

dir. Bu denklemden karakteristik kökler bulunur. Karakteristik kökler,

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

olarak elde edilir.

$$u_c(k) = c_1 3^k + c_2 1^k = c_1 3^k + c_2$$

olarak bulunur. Verilen denklemde;

$$g(k) = (-4k + 8k^2)5^k$$

olduğu için, Tablo (7.1) den,

$$u_p(k) = (a_0 + a_1k + a_2k^2)5^k$$

şeklinde seçilerek, denklemde yerine yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} u_p(k+2) &= (a_0 + a_1(k+2) + a_2(k+2)^2)5^{k+2} \\ u_p(k+2) &= (a_0 + a_1(k+2) + a_2(k^2 + 4k + 4))5^{k+2} \\ u_p(k+2) &= (25a_0 + 50a_1 + 100a_2 + (25a_1 + 100a_2)k + 25a_2k^2)5^k \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} u_p(k+1) &= (a_0 + a_1(k+1) + a_2(k+1)^2)5^{k+1} \\ u_p(k+1) &= (a_0 + a_1(k+1) + a_2(k^2 + 2k + 1))5^{k+1} \\ u_p(k+1) &= (5a_0 + 5a_1 + 5a_2 + (5a_1 + 10a_2)k + 5a_2k^2)5^k \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$u_p(k) = (a_0 + a_1k + a_2k^2)5^k \quad (7.24)$$

elde edilir. (7.22), (7.23), (7.24) denklemleri, verilen denklemde yerlerine yazılarak,

$$(8a_0 + 30a_1 + 80a_2 + (8a_1 + 60a_2)k + 8a_2k^2)5^k = (-4k + 8k^2)5^k \quad (7.25)$$

elde edilir. (7.25) denkleminde,

$$8a_0 + 30a_1 + 80a_2 = 0$$

$$8a_1 + 60a_2 = -4$$

$$8a_2 = 8$$

$$a_2 = 1, a_1 = -8, a_0 = 20$$

bulunur. $u_p(k)$ çözümünde yerine yazıldığında,

$$u_p(k) = (20 - 8k + k^2)5^k$$

dır. Buradan genel çözüm,

$$u(k) = u_c(k) + u_p(k)$$

$$u(k) = c_1 3^k + c_2 + (20 - 8k + k^2)5^k$$

bulunur.

8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde, lineer fark denklemleri incelenmiştir. Konunun içeriğinden de görüldüğü gibi, fark denklemleri, diferansiyel denklemlerle büyük benzerlik göstermektedir. Birçok diferansiyel denklem, fark denklemleri kullanılarak kolay bir şekilde çözülebilmektedir. Bunun için fark denklemlerinin özelliklerini ve uygulamalarını desteklemek amacıyla sayısal örnekler verilmiştir. Fark denklemleri kullanılarak, diferansiyel denklemlerdeki süreksizlik durumları kaldırılabilmektedir.

Geçmişte bu konunun gelişmesine katkıda bulunmuş bilim insanlarına teşekkür eder, gelecekte bu konu üzerine çalışma yapacak bilim insanlarına başarılar dilerim.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., (2000), Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, Second Edition Revised and Expanded, Marcel Dekker Inc., New York.

Akın, Ö. ve Bulgak, H., (1998), Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi, Konya.

Aşkar, L., (Eylül 1999), Sonlu Fark Denklemlerinde Yakınsaklık ve Kararlılık Problemleri, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı.

Balcı, M., (1997) Matematik Analiz 2, Balcı Yayınları, Ankara.

Çağal, B., (2000) Sayısal Analiz, Birsen Yayınevi, İstanbul.

Çatal, S., (Ocak 2004) “Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü”, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi, 6(1): 129-138.

Elaydi, S., (2005), An Introduction to Difference Equations Third Edition, Springer, New York.

Spiegel, M. R., (1971) Schaum’s Outline of Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations, Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill Inc., New York.

İNTERNET KAYNAKLARI

Difference Equations 1, (<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/> ...)

Difference Equations 2, (<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/> ...)

Difference Equations to Differential Equations, Section 1.4, Difference Equations, Copyright © by Dan Slougher 2000, (<http://math.furman.edu/> ...)

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	1985	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	2000-2003	Fahrettin Kerim Gökay Anadolu Lisesi
Lisans	2003-2007	Dumlupınar Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2007- 2009	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı