

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FEIGENBAUM DÖNÜŞÜMÜ İÇİN GİRİŞ ZAMANLARI

ARİFE AYSUN KARAASLAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FEIGENBAUM DÖNÜŞÜMÜ İÇİN GİRİŞ ZAMANLARI

Arife Aysun KARAASLAN tarafından hazırlanan tez çalışması 14.01.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi

ÖNSÖZ

“Feigenbaum Dönüşümü İçin Giriş Zamanları” adlı tez çalışmam sırasında bilgilerini benimle paylaşıp yardım ve desteğini hiç eksik etmeyen, çalışmalarımda bana yol gösteren, akademik hayatımda örnek teşkil eden çok değerli hocam Prof. Dr. Vatan KARAKAYA’ ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezin ortaya çıkmasında yapmış olduğu katkılarından dolayı Prof. Dr. Akhtam DZHALİLOV’ a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, zorlukları aşmamda her zaman yanımda olan sevgili eşim Arş. Grv. Mehmet Fatih KARAASLAN’ a çok teşekkür ederim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi destekçilerim olan anneme, babama ve biricik kardeşime en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Ocak, 2013

Arife Aysun KARAASLAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
DİNAMİK SİSTEMLER	3
2.1 Dinamik Sistem Örnekleri	4
2.1.1 Finans Örneği	4
2.1.2 Ekoloji Örneği	5
2.2 Dinamik Sistemlerle İlgili Temel Kavramlar	6
2.2.1 İterasyon	6
2.2.2 Yörüngeler	7
2.2.3 Sabit Nokta	8
2.2.4 Grafik Analizi	10
2.2.5 Yörüğe Analizi	13
2.2.6 Faz Diyagramı	15
2.2.7 Sabit ve Periyodik Noktalar	16
2.2.7.1 Sabit Nokta Teoremi	16
2.2.7.2 Çekicilik ve İtıcilik	17
2.2.7.3 Periyodik Noktalar	23
2.3 Cantor Kümesi	25
BÖLÜM 3	

FEIGENBAUM DÖNÜŞÜMÜ.....	27
3.1 Feigenbaum Dönüşümü.....	27
3.2 Feigenbaum Dönüşümünün Değişmez Ölçüsü	35
3.3 Feigenbaum Dönüşümünün Giriş Zaman Fonksiyonları	36
BÖLÜM 4	
SONUÇ VE ÖNERİLER	45
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51

SİMGE LİSTESİ

C	Cantor Kümesi
$C^1[a,b]$	$[a,b]$ Kapalı Aralığında Sürekli ve Birinci Türevi Olan Fonksiyonlar
$\Delta_k^{(n)}$	n _inci Rankta k _ıncı Aralık
ϕ	Feigenbaum Dönüşümü
κ	Feigenbaum Çekicisi
μ	İnvaryant Ölçü
μ_0	Olasılık Ölçüsü
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$N_n^{(K)}$	n _inci Rankta K _ıncı Giriş Zamanı
$\overline{N}_n^{(K)}$	Normalize Giriş Zamanı
Ω	Örnek Uzay
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
σ	Sigma Cebiri
S^1	Birim Çember
τ_n	Kapalı Aralıklar Sistemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 $S(x) = \sin x'$ in sabit noktası	9
Şekil 2. 2 $C(x) = \cos x'$ in sabit noktası.....	9
Şekil 2. 3 Grafik Analizi	11
Şekil 2. 4 $F(x) = \sqrt{x}'$ in grafik analizi	12
Şekil 2. 5 $C(x) = \cos x'$ in grafik analizi.....	12
Şekil 2. 6a $F(x) = x^2 - 1.1'$ in grafik analizi.....	13
Şekil 2. 6b $F(x) = x^2 - 1.1'$ in grafik analizi.....	13
Şekil 2. 7a $F(x) = x^3'$ ün $ x < 1$ durumunda yörünge analizi	14
Şekil 2. 7b $F(x) = x^3'$ ün $ x > 1$ durumunda yörünge analizi.....	15
Şekil 2. 8 $F(x) = x^3'$ ün faz diyagramı.....	15
Şekil 2. 9 $F(x) = x^2'$ nin grafik analizi.....	18
Şekil 2. 10 $0 < F'(x_0) < 1$ ve $-1 < F'(x_0) < 0$ için grafik analizleri	19
Şekil 2. 11 $0 < F'(x_0) < 1$ ve $-1 < F'(x_0) < 0$ için faz portreleri.....	19
Şekil 2. 12 $F'(x_0) > 1$ ve $F'(x_0) < -1$ durumlarının grafik analizleri.....	20
Şekil 2. 13 $F'(x_0) > 1$ ve $F'(x_0) < -1$ durumları için faz portreleri.....	20
Şekil 2. 14 Ortalama Değer Teoremi	21
Şekil 2. 15 $F(x) = x^2 - 1$ için çekici 2-periyotlu devir	23
Şekil 2. 16 Cantor Kümesi.....	26
Şekil 3. 1 Feigenbaum dönüşümünün grafiği	28
Şekil 3. 2 Feigenbaum çekicisi	32
Şekil 3. 3 Feigenbaum dönüşümünün sabit noktası	33
Şekil 3. 4 $F_1(x)$ dağılım fonksiyonu	40
Şekil 3. 5 $F_n^{(1)}(t)$ ' nin grafiği	42
Şekil 3. 6 $F^{(1)}(t)$ grafiği	44
Şekil 4. 1 Feigenbaum dönüşümünün giriş zamanı	46

FEIGENBAUM DÖNÜŞÜMÜ İÇİN GİRİŞ ZAMANLARI

Arife Aysun KARAASLAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bu çalışma, dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özeti ve mevcut çalışmanın amacına yer verilmiştir.

İkinci bölümde dinamik sistemlere ait olan temel kavramlar belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde Feigenbaum dönüşümü ile ilgili temel tanım, teorem ve genel özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Feigenbaum dönüşümü ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, Feigenbaum dönüşümü, giriş zamanları, dağılım fonksiyonları

ENTRANCE TIMES FOR FEIGENBAUM MAP

Arife Aysun KARAASLAN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

This study is composed of four main sections. In the first section the summary of literature and the purpose of the study are given.

In the second chapter the basic concepts of dynamic systems indicated.

In the third section, the basic definition, theorem and general properties of Feigenbaum map are given.

In the fourth chapter, studies on the Feigenbaum map are given.

Keywords: Fixed point, Feigenbaum map, stable point, entrance times, distribution functions

1.1 Literatür Özeti

Dinamik sistemler bilim dalı, kararlı sistemlerin zamana bağlılığını tanımlayan bir matematik dalıdır. Newton (1687)' de yayınladığı kitabıyla klasik mekaniğin temelini yaratmıştır. O zamana kadar çözülememiş olan iki boyutlu problemi çözmüştür. Yani dünyanın güneş etrafındaki hareketini, birbirlerine uyguladıkları yer çekiminin kanununu tanımlamıştır. Newton' dan sonraki bilim adamları bunu üç boyuta yani güneş, dünya ve aydan oluşan sisteme taşımaya çalışmışlar, ancak varolan metotların yeterli olmadığını görmüşlerdir. Poincaré (1800)' lerin sonlarında bu tür problemlerin çözümleri için yeni yaklaşımlar geliştirmiştir. Lorenz (1963)' de yaptığı uygulamalarla çekicileri keşfetmiştir. Feigenbaum (1970)' li yılların başında düzenli bir durumdan karmaşıklığa geçişin halini incelemiştir. Yakın zamanlarda Mandelbrot yeni bir geometrik anlayış oluşturmuştur.

Dinamik sistemlerin çalışma alanlarından biri olan Feigenbaum dönüşümü ile ilgili yapılanlara ait bilgiler aşağıda verilmiştir.

Feigenbaum (1978)' de Feigenbaum fonksiyonel denklemini ortaya çıkarmıştır. Collet ve Eckmann (1980)' de aralıkların iterasyonlarını dinamik sistemler olarak incelemişlerdir. Campanino, Epstein ve Ruelle (1980)' de $\alpha = 0.39953528$ olarak Feigenbaum denkleminin çözümünün $1 - \text{const.}x^2$ gibi davranacağını göstermişlerdir. Campanino ve Epstein (1981)' de daha önceki yaptıkları çalışmanın ayrıntılarını vererek Feigenbaum dönüşümünün sabit noktasının varlığını incelemişlerdir. Eckmann, Epstein ve Wittwer (1984)' de $f^p(\lambda x) \equiv \lambda x$ tipten denklemler için sabit noktaları

alışmışlardır. Ardından Yang ve Zhang (1985)' de ikinci tipten Feigenbaum fonksiyonel denklemini ileri sürmüşlerdir.

Dzhalilov (2004)' de giriş zamanlarını çember için çalışmıştır. Frisch, Khanin ve Matsumoto (2005)' de Feigenbaum ekicisinin termodinamik biçimini göstermişler ve fonksiyonun kuvvet serisinin bazı ilk terimlerini vermişlerdir. Berg (2008)' de Feigenbaum denkleminin parçalı lineer çözümünü yapmıştır. Robledo ve Moyano (2009)' da Feigenbaum ekicisinin dinamiklerinden bahsetmişlerdir. Dzhalilov, Karakaya ve Şimşek (2012)' de farklı bir yaklaşım yaparak Feigenbaum dönüşümünün spectral davranışını çalışmışlardır.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, belirlenen $\Delta_k^{(n)}$ aralıkları dışında, Feigenbaum dönüşümünün sabit noktasının çok yakınında bir nokta aldığımızda bu noktanın ranklara giriş zamanları arasındaki ilişkinin tespiti hedeflenmiştir.

1.3 Hipotez

Feigenbaum dönüşümün genel tanımı, özellikleri ve aralıklar sisteminin oluşumu verilmiştir. Belirli bir rankta herhangi bir $\Delta_k^{(n)}$ aralığından alınan bir noktanın aynı ranktaki diğer aralıklar arası geçiş rotasyonu ifade edilmiştir.

BÖLÜM 2

DİNAMİK SİSTEMLER

Dinamik sistemler, hareketli süreçleri anlamaya çalışan matematiğin bir dalıdır. Bu tür süreçler tüm bilim dallarında ortaya çıkar. Mesela, yıldızlar ve galaksilerin gökyüzündeki hareketi dinamik bir sistem olup, binlerce bilim adamı tarafından yüzyıllardır araştırılmaktadır. Borsa da hava durumu gibi zamanla değişen başka bir sistemdir. Kimyasal değişimlerin olması, populasyonların artış ve azalışı ile basit bir sarkacın hareketi dinamik sistemlerin kimya, biyoloji ve fizikteki klasik örnekleridir. Bu durumda dinamik sistemlerle hayatımızın pek çok alanında karşılaşırız.

Bir bilim adamı bir dinamik sistem ile ne yapmayı ister? Sistem zaman içinde hareket ettiği veya değiştiği için, bilim adamı sistemin nerede başladığını, nereye kadar gideceğini tahmin etmek ister. Hava yarın yağmurlu mu olacak, güneşli mi? İki kimyasal maddenin bir tüpte karıştırılması sonucunda patlama oluşur mu? Bu tipteki sorulara cevap bulmak ister.

Açık olarak bazı dinamik sistemler tahmin edilebilirken bazıları edilemez. Güneşin yarın yine doğacağını, bir fincan kahveye krema eklenince kimyasal reaksiyonun patlama ile sonuçlanmayacağını biliriz. Diğer yandan bir aylık hava durumunu şimdiden tahmin etmek imkansızdır. Bu durumun meteorolojik sistemlerde mevcut olan değişkenlerden kaynaklandığını söyleyebiliriz. 20. yy matematiğinin önemli keşiflerinden biri de çok basit sistemler, hatta sadece bir değişkene bağlı olan sistemlerdir. Bunlar bir şelale kadar hırçınca, bir kasırga kadar şiddetli ve düzensiz davranabilirler. Dikkatimizden kaçan çok küçük bir sebep çok büyük etkiler meydana getirebilir. Bir sistemin başlangıç durumunun yaklaşık olarak bilinmesi bir sonraki durumu belirlemede bize yardımcı

olabilir. Fakat başlangıçtaki küçük farklılıklar ileride büyük bir hataya sebep olur ve tahmin etmek imkansız hale gelir.

2.1 Dinamik Sistem Örnekleri

2.1.1 Finans Örneği

(Bankaya %10 faizle n yıllığına yatırılan 1000 TL)

Olayları tekrarlamak, bir önceki işlemdeki çıktıyı bir sonraki işlem için girdi olarak kullanmak iterasyon süreci olarak adlandırılır. O zaman bizim örneğimiz de iteratif sürecin veya dinamik sistemin basit bir örneğidir. Basit olarak her yılın sonunda paranın %10' unun eklendiğini düşünelim. n _inci yılın sonunda bankada biriken parayı A_n ile gösterebiliriz. Problemimiz n yıl için verilen değerlerle A_n ' e karar vermektir. Biliyoruz ki A_0 başlangıç miktarı 1000 TL' dir. Bir yıl sonra bu miktara %10' u eklenir ve yeni bakiye elde edilir. Yani,

$$A_1 = A_0 + 0.1A_0 = 1.1A_0$$

Buradan $A_1 = 1100$ TL olarak bulunur. Benzer şekilde ikinci yılın sonunda aynı işlem yapılırsa elde edilen miktar,

$$A_2 = A_1 + 0.1A_1 = 1.1A_1 = (1.1)^2 A_0$$

olur ve $A_2 = 1210$ TL olarak bulunur. Devam edilirse,

$$A_3 = 1.1A_2 = (1.1)^3 A_0$$

$$A_4 = 1.1A_3 = (1.1)^4 A_0$$

$\vdots$

$$A_n = 1.1A_{n-1} = (1.1)^n A_0$$

olduğu görülür. Böylece bir önceki yılın dengesini bilirsek A_n ' in miktarına karar verebiliriz.

$F(x) = 1.1x$ fonksiyonu tanımlandığı taktirde birikmiş bakiye, bu fonksiyonun tekrarlı uygulamasıyla elde edilir.

$$A_1 = F(A_0)$$

$$A_2 = F(A_1)$$

$$A_3 = F(A_2)$$

Burada ardışık bakiyeyi elde etmek için F' yi tekrar tekrar kullanıp,

$$A_2 = F(F(A_0)) = FoF(A_0)$$

$$A_3 = F(F(F(A_0))) = FoFoF(A_0)$$

şeklinde yazarak daha ayrıntılı bir şekilde gösterebiliriz. $F(x) = 1.1x$ olduğu için;

$$F(F(x)) = (1.1)^2 x$$

$$F(F(F(x))) = (1.1)^3 x$$

elde edilir ve genel olarak fonksiyonun n . iterasyonu $\underbrace{Fo...oF}_n(x) = (1.1)^n x$ şeklindedir.

Böylece A_n ' i bulmak için sadece $(1.1)^n$ ile A_0 çarpımını hesaplamak yeterlidir.

2.1.2 Ekoloji Örneği

Nesiller boyunca büyüyen veya küçülen bir türün nüfusunun davranışına dair bir tahmin yürüttüğümüzü varsayalım. Yaşayan n _inci nesli P_n ile gösterelim. n büyüdükçe P_n ' in nasıl değişeceği sorusunun cevabını bulmaya çalışalım. P_n sıfıra gidip türler yok olur mu yoksa P_n sınırsızca büyüüp bir nüfus patlamasıyla mı karşılaşılır?

r , ekolojik durumlara bağlı bir sabit olmak üzere $P_{n+1} = rP_n$ şeklinde olsun. Böylece P_0 başlangıç değeri verildiğinde popülasyonun durumu şu şekilde gösterilebilir:

$$P_1 = rP_0$$

$$P_2 = rP_1 = r^2 P_0$$

$$P_3 = rP_2 = r^3 P_0$$

$$\vdots$$

$$P_n = rP_{n-1} = r^n P_0$$

Popülasyonun davranışı iterasyon yoluyla ifade edilebilir. Bu durumda fonksiyon $F(x) = rx$ olsun. Böylece,

$$P_n = \underbrace{Fo...oF}_n(P_0) = r^n P_0$$

yazılır. Burada popülasyonun nihai kaderinin r' ye bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer $r > 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için r^n sonsuza gider ve kontrol edilemez bir popülasyon büyümesiyle karşılaşılır. $r < 1$ ise r^n sıfıra gider ve türün soyu tükenmeye başlar. Son olarak $r = 1$ durumunda $P_n = P_0$ olur. Bu durumda popülasyonda bir değişiklik olmaz. Böylece herhangi bir r değeri için türün kaderini belirleme amacımıza ulaşmış oluruz. Elbette bu basitleştirilmiş model büyük ölçüde gerçek dışıdır. Gerçek yaşam popülasyonları çok daha karmaşık bir yapıya sahiptir. Örneğin, popülasyonlar hiçbir zaman sonsuza yaklaşamaz. Buna çözüm bulabilmek için modele popülasyonun aşırı kalabalık olma ihtimali eklenebilir (Devaney [1]).

2.2 Dinamik Sistemlerle İlgili Temel Kavramlar

2.2.1 İterasyon

Bir fonksiyonun iterasyonu, bir önceki uygulamanın çıktısını bir sonraki için girdi olarak kullanıp fonksiyonun tekrarlı olarak hesaplanması demektir.

Bir F fonksiyonu için, $F^2(x) = F(F(x))$, F fonksiyonunun 2. iterasyonudur. F fonksiyonunun 3. iterasyonu $F^3(x) = F(F(F(x)))$ şeklindedir. Genellikle, n . iterasyon $F^n(x)$ ile ifade edilir (Devaney [1]). Örneğin, $F(x) = x^2 + 1$ olsun. O halde,

$$F^2(x) = (x^2 + 1)^2 + 1$$

$$F^3(x) = ((x^2 + 1)^2 + 1)^2 + 1$$

elde edilir. Benzer şekilde $F(x) = \sqrt{x}$ olduğunda,

$$F^2(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$F^3(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$$

bulunur. Burada fark edilmesi gereken önemli şeylerden biri, $F^n(x)$ ' in F' nin n _inci mertebeden kuvveti olmadığıdır. Aksine, $F^n(x)$, F' nin x değeri için n . iterasyondur (Scheinerman [2]).

2.2.2 Yörüngeler

Verilen $x_0 \in \mathbb{R}$ başlangıç noktası için $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_n = F^n(x_0), \dots$ dizilişine x_0 başlangıç noktasının F fonksiyonu altındaki yörüngesi denir (Arrowsmith ve Place [3]).

Örneğin, $F(x) = \sqrt{x}$ ve $x_0 = 256$ ise x_0 noktasının yörüngesindeki ilk beş nokta;

$$\begin{aligned}x_0 &= 256 \\x_1 &= \sqrt{256} = 16 \\x_2 &= \sqrt{16} = 4 \\x_3 &= \sqrt{4} = 2 \\x_4 &= \sqrt{2} = 1.41\dots\end{aligned}$$

Başka bir örnek olarak, $S(x) = \sin x$ fonksiyonunu alırsak (burada x derece cinsinden değil radyan cinsindendir) $x_0 = 123$ başlangıç noktası için yörünge;

$$\begin{aligned}x_0 &= 123 \\x_1 &= -0.4599\dots \\x_2 &= -0.4438\dots \\&\vdots \\x_{300} &= -0.0975\dots \\x_{301} &= -0.0974\dots \\&\vdots\end{aligned}$$

şeklindedir. Yörünge gittikçe 0 ' a yakınsama eğilimindedir.

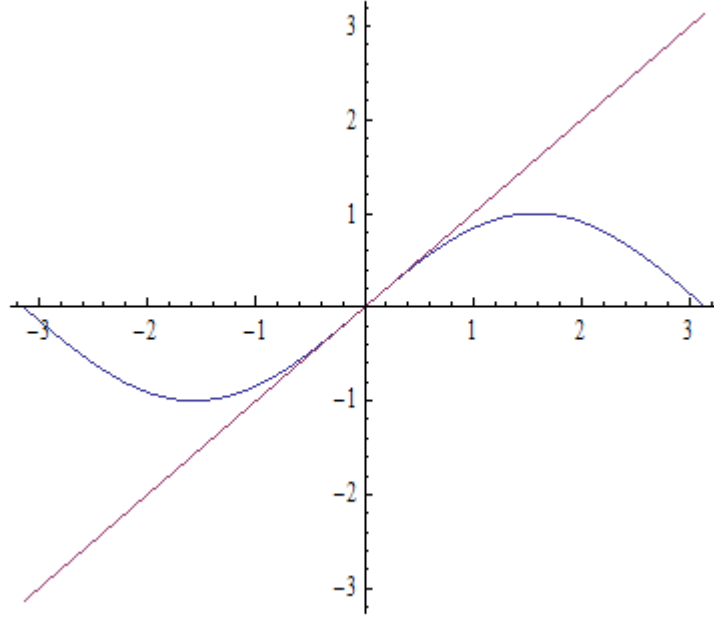
$C(x) = \cos x$ olsun. O halde $x_0 = 123$ başlangıç noktasının yörüngesi

$$\begin{aligned}
x_0 &= 123 \\
x_1 &= -0.8879... \\
x_2 &= 0.6309... \\
&\vdots \\
x_{50} &= 0.739085... \\
x_{51} &= 0.739085... \\
x_{52} &= 0.739085... \\
&\vdots
\end{aligned}$$

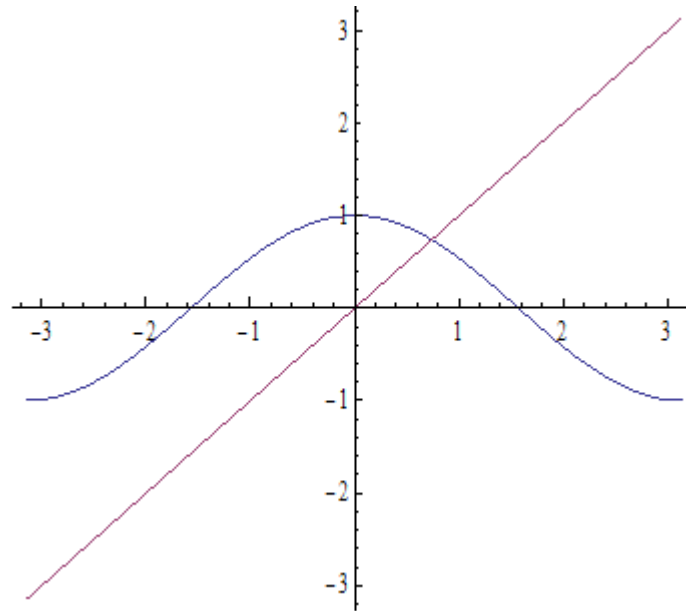
olur. Birkaç iterasyondan sonra yörüngenin 0.739085 noktasında durduğu görülür.

2.2.3 Sabit Nokta

Dinamik sistemde yörüngenin çok farklı tipleri vardır. Şüphesiz ki yörüngenin en önemli tipi sabit noktadır. $F(x_0) = x_0$ denklemini sağlayan x_0 noktaları F fonksiyonunun sabit noktalarıdır (Brin ve Stuck [4]). x_0 , F fonksiyonunun sabit noktası olmak üzere $F^2(x_0) = F(F(x_0)) = F(x_0) = x_0$ olup genellikle $F^n(x_0) = x_0$ 'dır (Hasselblatt vd. [5]). Bu yüzden sabit noktanın yörüngesi sabit bir $x_0, x_0, x_0, \dots$ dizisidir. Sabit nokta hareket etmez. Örneğin, $F(x) = x^2$ fonksiyonunun sabit noktaları 0 ve 1 iken $F(x) = x^3$ fonksiyonunun tüm sabit noktaları 0, 1 ve -1 'dir. Sabit noktalar, $F(x) = x$ denkleminin çözümünden elde edilir. Böylece $F(x) = x^2 - x - 4$ fonksiyonunun sabit noktaları $x^2 - x - 4 = x$ denkleminin çözülmesiyle $1 \pm \sqrt{5}$ olarak bulunur (Devaney [1]). Sabit noktalar, aynı zamanda $y = x$ doğrusu ile fonksiyon grafiğinin kesişimi incelenerek geometrik olarak bulunabilir. Örneğin, Şekil 2.1' de gösterildiği gibi $y = x$ ile $S(x) = \sin x$ fonksiyonunun kesiştiği tek nokta olan $x_0 = 0$ noktası $S(x) = \sin x$ fonksiyonunun tek sabit noktasıdır. Benzer şekilde, Şekil 2.2' de gösterildiği gibi $C(x) = \cos x$ fonksiyonunun sabit noktası 0.739085....'dir.



Şekil 2. 1 $x = 0$, $S(x) = \sin x$ fonksiyonun sabit noktasıdır.



Şekil 2. 2 0.739085, $C(x) = \cos x$ fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Yörünge'nin bir diğer önemli türü periyodik yörünge ya da devirdir. Bazı $n > 0$ için $F^n(x_0) = x_0$ oluyorsa x_0 noktası periyodiktir (Preston [6]). $F^n(x_0) = x_0$ olan en küçük n sayısına yörünge'nin asal periyodu denir. x_0 periyodik nokta ve n asal periyot olmak üzere, x_0 noktasının yörüngesi sadece tekrarlanan sayılar dizisinden oluşur.

$$x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), \dots$$

şeklindedir (Scheinerman [2]). Örneğin, $F(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu, başlangıç noktası $x_0 = 0$ olmak üzere 2–devirli bir asal periyoda sahiptir. $F(0) = -1$ ve $F(-1) = 0$ ’dır. Bu nedenle $x_0 = 0$ noktasının yörüngesinin

$$0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

olduğu görülür. 0 ve -1 noktalarının 2–devir oluşturduğu söylenebilir.

Benzer şekilde, $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ fonksiyonu için, $x_0 = 0$ başlangıç noktası 3 asal periyotludur veya 3–devirli bir yörüngeye sahiptir. $F(0) = 1$, $F(1) = 2$ ve $F(2) = 0$ ’dır. Yörünge $0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ şeklindedir (Devaney [1]).

2.2.4 Grafik Analizi

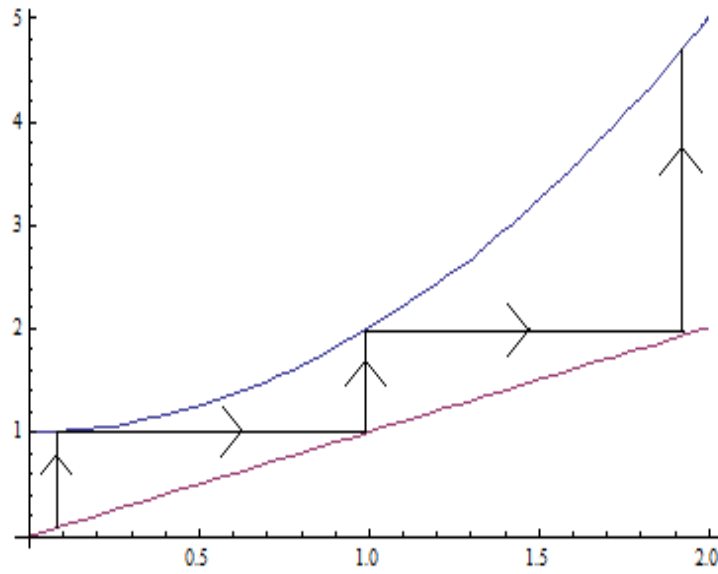
İlk olarak bir boyutlu dönüşümlerin grafiklerini anlamak için geometrik bir süreç ele alalım. Grafik analizi olarak adlandırılan bu süreç, çoğu durumda yörüngelerin davranışlarının belirlenmesinde bir fonksiyonun grafiğinin kullanılmasına olanak sağlar.

Diyelim ki bir F fonksiyonunun grafiğinin verilen bir x_0 noktasındaki yörüngesini göstermek istiyoruz. İlk olarak F fonksiyonunun grafiği ile $y = x$ köşegen doğrusunu karşılaştırırız. Bildiğimiz gibi fonksiyon ile köşegen doğrusunun kesişme noktaları bize F fonksiyonunun sabit noktalarını verir. x_0 noktasının yörüngesini bulmak için, x –eksenindeki x_0 noktasından hareketle köşegen üzerindeki (x_0, x_0) noktası ile başlanır. Buradan ilk olarak F fonksiyonunun grafiğine dikey bir doğru çizilir. Bu doğru grafik ile kesiştiğinde, $(x_0, F(x_0))$ noktasına ulaşırız. Daha sonra bu noktadan köşegen doğrusuna yatay bir doğru çizilir. $y = x$ üzerinde y –koordinatı $F(x_0)$ ve x –koordinatı $F(x_0)$ olan noktaya ulaşırız. Böylece köşegen doğrusu üzerindeki x –koordinatı $F(x_0)$ olan nokta, x_0 ’ın yörüngesinin bir sonraki noktasıdır. Bu şekilde sürece devam edilir. Köşegen doğrusu üzerindeki $(F(x_0), F(x_0))$ noktasından grafiğe dikey bir doğru çizilir; bu doğru $(F(x_0), F^2(x_0))$ noktasını verir. Ardından $y = x$ e

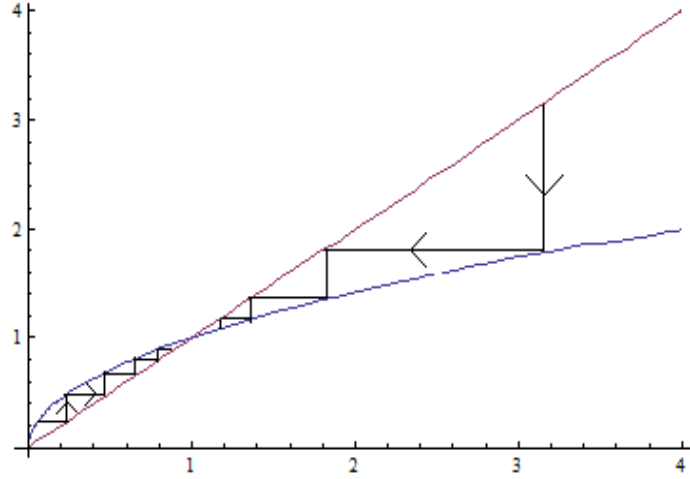
izilecek yatay doğru ile köşegen doğrusu zerindeki $(F^2(x_0), F^2(x_0))$ noktasına ulaşılır ki bu da yörüngedeki bir sonraki noktadır (Devaney [1]).

x_0 noktasının yörüngesini geometrik olarak göstermek için, sürece bu şekilde devam edilir. İlk önce köşegen doğrusundan grafiğe dikey bir çizgi çizilir, ardından yatay bir doğru ile grafikten köşegen doğrusuna geri dönülür. Sonuçta oluşan “merdiven” ya da “rmcek ağı” x_0 noktasının yörüngesinin açıklayıcı bir resmi olur.

şekil 2.3 grafik analizinin tipik bir uygulamasını gösterir. Örneğin, şekil 2.4’ de $F(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafik analizi çizilmiştir. Herhangi bir pozitif x_0 noktası, F fonksiyonu ile köşegen doğrusunun keşişme noktasına giden bir merdiven meydana getirir. Bu nokta elbette ki $x=1$ ’deki sabit noktadır.

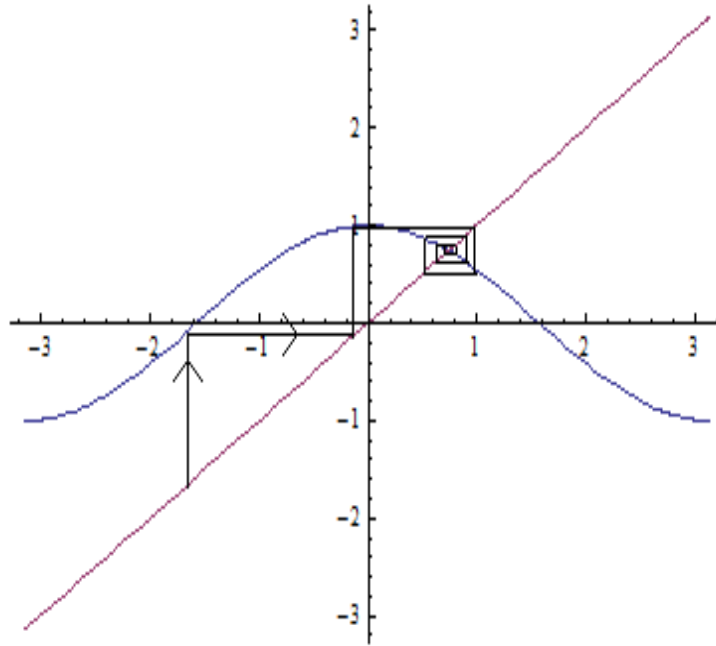


şekil 2. 3 Grafik Analizi



Şekil 2. 4 $F(x) = \sqrt{x}$ ' in grafik analizi

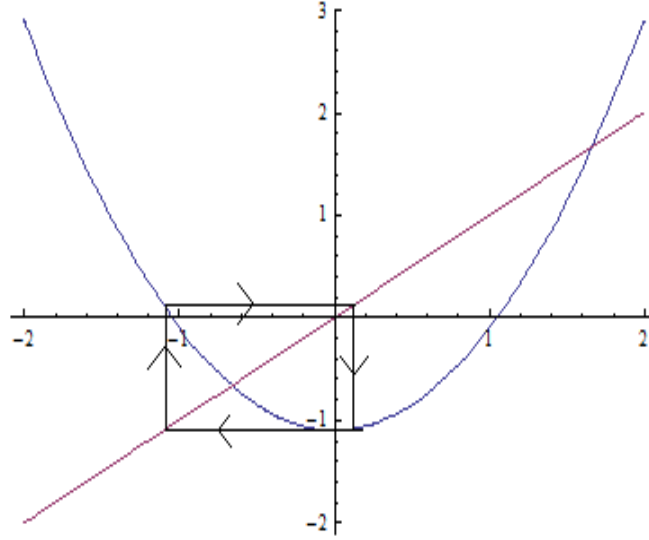
Şekil 2. 5' de $C(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. Bu durumda herhangi bir yörünge yine $C(x)$ fonksiyonu ile köşegen doğrusunun kesişme noktasına gider. Bu nokta yaklaşık olarak 0.73908... (radyan) olarak verilir.



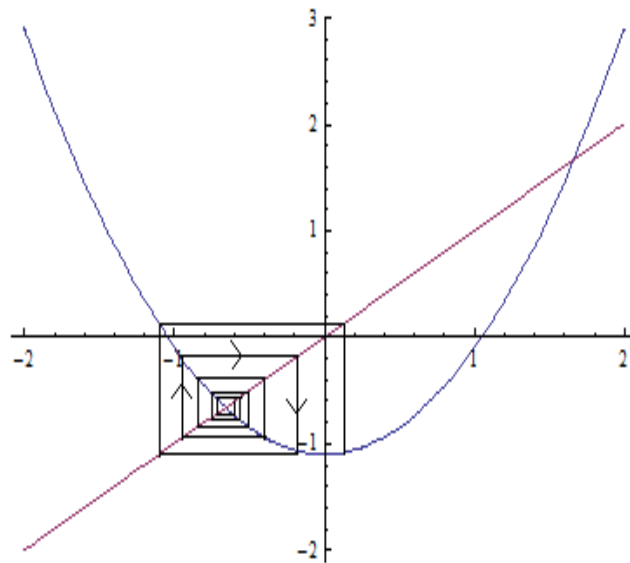
Şekil 2. 5 $C(x) = \cos x$ ' in grafik analizi

F' ' nin periyodik noktaları $F^n(x_0) = x_0$ eşitliğini sağlar. Bunun anlamı, grafik analizi ile üretilen doğru parçaları aslında köşegen doğrusu üzerinde (x_0, x_0) ' a dönüşür; böylelikle grafik analizinde kapalı bir "devir" oluşur. Şekil 2.6a' da görüldüğü gibi

$F(x) = x^2 - 1.1$ fonksiyonu grafik analizi ile üretilmiş kare şeklinde gösterilen 2 – devirli yörüngeyi ortaya çıkarır. Şekil 2.6b’ de görülür ki birçok yörünge devir eğilimindedir. Bu 2 – devir açık olarak hesaplanabilir.



Şekil 2. 6a $F(x) = x^2 - 1.1$ ’ in grafik analizi

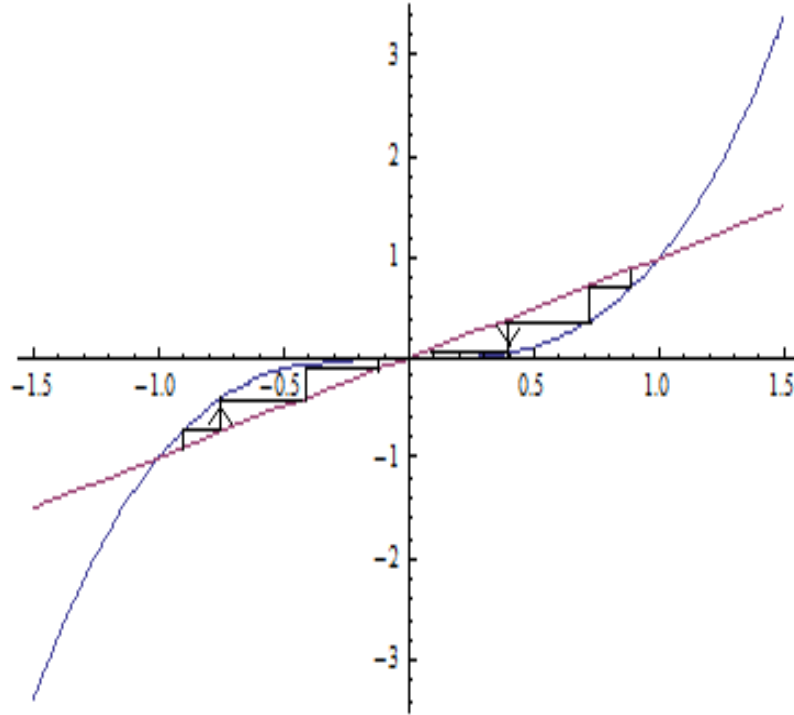


Şekil 2. 6b $F(x) = x^2 - 1.1$ ’ in grafik analizi

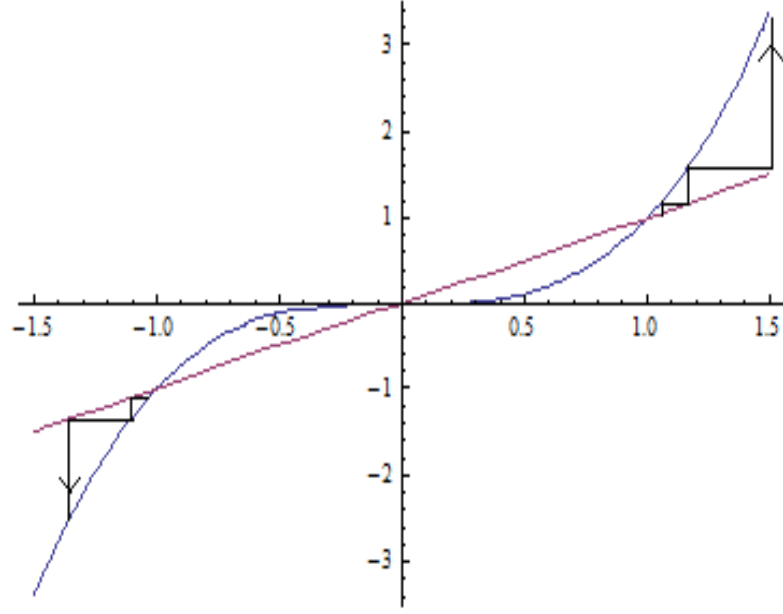
2.2.5 Yörünge Analizi

Bazen grafik analizi, bir dinamik sistemin tüm yörünge hareketlerinin tanımlanmasına imkan verir. Örneğin, $F(x) = x^3$ fonksiyonunu göz önüne alalım. F' nin grafiği,

fonksiyonun 0, 1 ve -1 olmak üzere üç tane sabit noktası olduğunu gösterir. Bu noktalar $x^3 = x$, ya da $x^3 - x = 0$ eşitliklerinin çözümleridir. Grafik analizi aşağıdaki yörünge hareketini yazmamıza olanak sağlar. Eğer $|x_0| < 1$ ise Şekil 2. 7a' daki gibi x_0 ' ın yörüngesi sıfıra gitme eğilimi göstermektedir. Diğer taraftan, $|x_0| > 1$ ise Şekil 2. 7b' deki gibi x_0 ' ın yörüngesi $\mp\infty$ ' a gitme eğilimindedir.



Şekil 2. 7a $F(x) = x^3$ ' ün $|x| < 1$ durumunda yörünge analizi



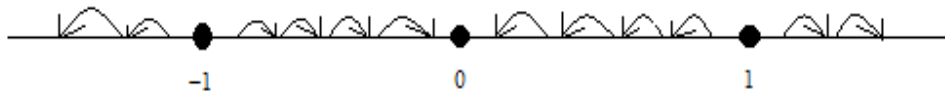
Şekil 2. 7b $F(x) = x^3$ ' ün $|x| > 1$ durumunda yörünge analizi

$F(x) = x^3$ ' ün yörünge analizi **a.** $|x| < 1$, **b.** $|x| > 1$.

2.2.6 Faz Diyagramı

Bir dinamik sistemin bütün yörüngelerini tanımlamanın kısa ve öz bir yolu da faz diyagramlarıdır. Faz diyagramı, yörüngelerin reel doğrudaki resmidir. Tek boyutlu durumda faz diyagramı, grafik analizinden daha fazla bilgi vermez. Bunun yanında iki boyutta, grafik analizini uzatmak mümkün olmadığında, yörünge hareketini tanımlamak için sadece faz diyagramına güvenilir.

Faz diyagramında sabit noktalar büyük noktalarla, yörünge boyunca olan dinamikler oklarla gösterilecektir. Bilindiği gibi $F(x) = x^3$ fonksiyonunun sabit noktaları $0, \pm 1$ ' dir. $|x_0| < 1$ ise $F^n(x_0) \rightarrow 0$; $|x_0| > 1$ ise $F^n(x_0) \rightarrow \pm\infty$ ' dur. Şekil 2.8' de bu fonksiyonun faz diyagramı gösterilmiştir (Devaney [1]).



Şekil 2. 8 $F(x) = x^3$ ' ün faz diyagramı

2.2.7 Sabit ve Periyodik Noktalar

Sabit noktalar ve devirler, dinamik bir sistemin en önemli çeşitleri arasında yer alır. Bundan dolayı bu noktaları kolayca bulabilmek çok önemlidir.

2.2.7.1 Sabit Nokta Teoremi

Sabit noktaları bulmaya yönelik en kolay kriterlerden biri aşağıdaki önemli bulgunun doğrudan bir sonucudur.

Tanım 2.1 $B \subset \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in B$ olsun. g fonksiyonunun a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyleki $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$ olmasıdır.

Teorem 2.1 (Ara Değer Teoremi) $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. y_0 ' in $F(a)$ ve $F(b)$ arasında olduğunu kabul edelim. Buna göre $[a, b]$ aralığında $F(x_0) = y_0$ olacak şekilde bir x_0 vardır.

Açık bir şekilde ifade edilirse, bu teorem sürekli bir fonksiyonun $[a, b]$ aralığında $F(a)$ ve $F(b)$ arasında kalan tüm değerleri aldığını gösterir. Hemen bunun bir sonucu olarak şunu verelim:

Teorem 2.2 (Sabit Nokta Teoremi) $F: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman F fonksiyonu için $[a, b]$ ' de sabit bir nokta vardır.

Notlar:

1. Bu teorem, F için $[a, b]$ ' de en az bir sabit noktanın olduğunu gösterir ki bu sabit nokta daha fazla da olabilir. Örneğin, herhangi bir $[a, b]$ aralığındaki tüm noktalar, birim fonksiyon olan $F(x) = x$ ile belirlenir.

2. Bu teoremde birkaç önemli hipotez vardır. Bunlardan ilki süreklilik olup diğeri ise F ' nin $[a, b]$ aralığını yine kendine götürmesidir. Bunlardan birinin bozulması, sabit noktası olmayan bir fonksiyon verebilir.

3. Aynı zamanda $[a, b]$ aralığının kapalı olması önemlidir. Örneğin, $F(x) = x^2$ fonksiyonu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ aralığını yine aralık içerisine götürür. Fakat bu açık aralıkta hiçbir sabit nokta yoktur $\left(0 \text{ sabit noktası, } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ aralığının dışında bulunur}\right)$.

4. Sabit nokta teoremi, en az bir sabit noktanın olduğunu göstermesine rağmen bu noktanın doğrudan bulunabilmesi için herhangi bir yöntem vermez. Bununla birlikte uygulamada sık sık sabit noktanın kesin olarak nerede olduğunu bilmemiz gerekmez. Sadece bu sabit noktanın belirli bir aralıkta olduğunu bilmemiz çoğu zaman amaçlarımız için yeterlidir.

Sabit nokta teoreminin ispatı, $H(x) = F(x) - x'$ e ara değer teoreminin uygulanması sonucu çıkar. Bu fonksiyon sürekli olup

$$H(a) = F(a) - a \geq 0$$

$$H(b) = F(b) - b \leq 0$$

ifadesini sağlar. Dolayısıyla $[a, b]$ aralığında $H(c) = 0$ olacak şekilde bir c vardır. Bu c değeri, $F(c) - c = 0'$ ı sağladığından sabit noktamız olur.

2.2.7.2 Çekicilik ve İtıcilik

İki tane önemli ve birbirinden farklı olan sabit nokta çeşitleri çekici ve itici sabit noktalardır. Öncelikle bu kavramların altında yatan düşünceye örnek olarak $F(x) = x^2$ biçimindeki kare fonksiyonu verilsin. Bu dönüşümün 0 ve 1' de olmak üzere iki tane sabit noktası vardır. Bu noktaların civarındaki yörüngelerin ne olduğuna dikkat edelim. Eğer $|x_0| < 1$ olacak şekilde herhangi bir x_0 seçersek; o takdirde x_0' ın yörüngesi hızlı bir şekilde sifıra yaklaşır. Örneğin, 0.1' in yörüngesi

$$0.1, 0.01, 0.0001, 0.00000001, \dots$$

şeklindedir. Aslında $0 \leq x_0 < 1$ şartını sağlayan herhangi bir x_0 noktası, her ne kadar 1' e yakın olsa da 1' den uzak ve 0' a yakın bir yörüngenin oluşumuna yol açar. Örneğin, 0.9' un yörüngesi

0.9, 0.81, 0.6561, 0.430467..., 0.185302..., 0.034336..., 0.00117....

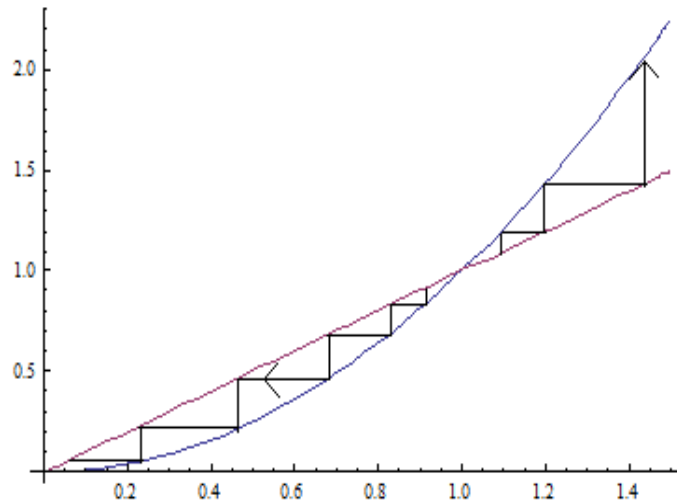
biçimindedir. Daha doğrusu eğer $0 \leq x_0 < 1$ ise o zaman $n \rightarrow \infty$ iken $F^n(x_0) \rightarrow 0$ olur.

Diğer taraftan eğer $x_0 > 1$ ise bu takdirde yörünge 1' den uzaklaşır. Örneğin, 1.1' in yörüngesi

1.1, 1.21, 1.4641, 2.1436..., 4.5950..., 21.114..., 445.79....

olur. Bu nedenle $x_0 > 1$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $F^n(x_0) \rightarrow \infty$ olur ve dolayısıyla yörünge, 1' den uzağa gitme eğilimi gösterir.

Açıkça söylemek gerekirse, 1' e yakın noktaların 1' den uzağa giden itici yörüngeleri varken 0' a yakın noktaların ise 0 için çekici yörüngeleri vardır. Bu fonksiyonun grafik analizi, Şekil 2.9' daki gibi iki çeşit sabit nokta arasındaki fark açık bir şekilde gösterilmektedir.



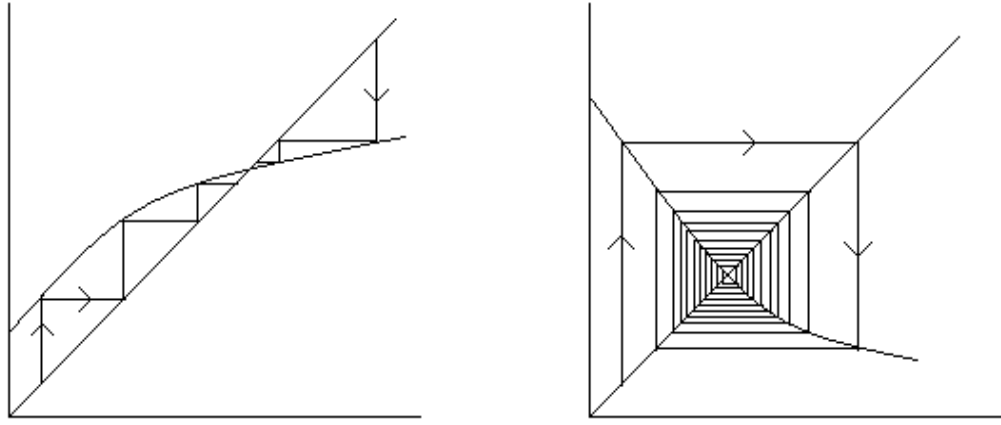
Şekil 2. 9 $F(x) = x^2$ ' nin grafik analizi

Şekil 2.9 için 0 çekici bir sabit nokta iken 1 ise itici bir sabit noktadır.

Türev, bir fonksiyonun grafiğine teğet doğrunun eğimini verdiğiinden fonksiyonların için çekici ve itici sabit noktaları ayırmamızı sağlar.

Tanım 2.2 x_0 , F için sabit bir nokta olsun. O zaman $|F'(x_0)| < 1$ ise x_0 çekici bir sabit noktadır. $|F'(x_0)| > 1$ ise x_0 noktası, itici bir sabit noktadır. Son olarak da $|F'(x_0)| = 1$ ise sabit nokta nötr veya farksız olarak adlandırılır (Hasselblatt vd. [5]).

Bu terimlere uygun geometrik mantık, grafik analizi ile sağlanır. $|F'(x_0)| < 1$ iken $0 < F'(x_0) < 1$ ve $-1 < F'(x_0) < 0$ durumlarının grafik analizleri ve faz portrelerini inceleyelim:

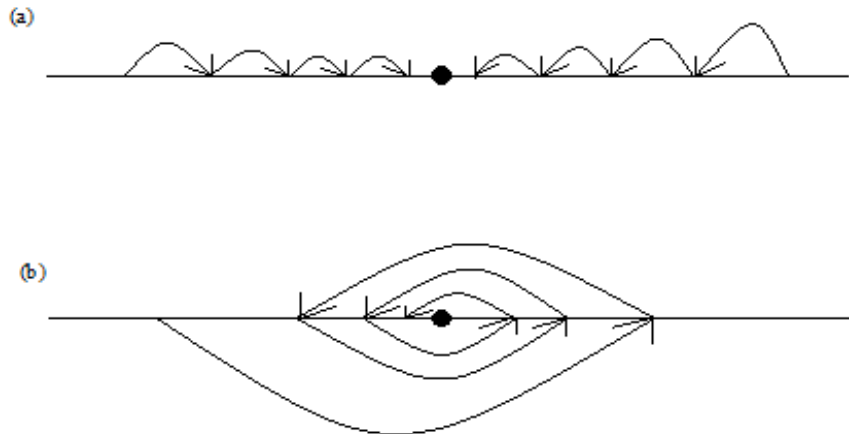


(a) $0 < F'(x_0) < 1$

(b) $-1 < F'(x_0) < 0$

Şekil 2.10 $0 < F'(x_0) < 1$ ve $-1 < F'(x_0) < 0$ için grafik analizleri

Şekil 2.10' daki her bir durum için x_0 , çekici bir sabit noktadır.

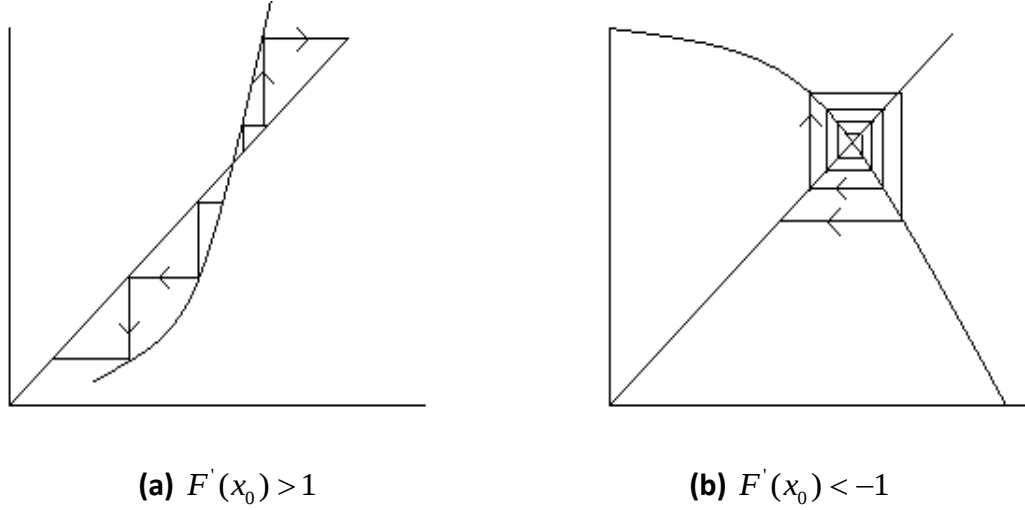


(a) $0 < F'(x_0) < 1$, (b) $-1 < F'(x_0) < 0$

Şekil 2.11 $0 < F'(x_0) < 1$ ve $-1 < F'(x_0) < 0$ için faz portreleri

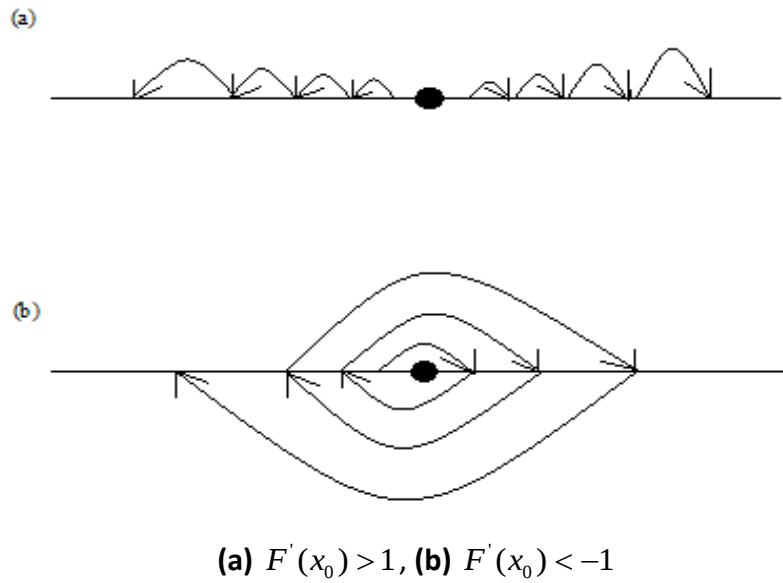
Şekil 2.11' de çekici bir sabit noktanın civarındaki olası faz portreleri görülmektedir.

Diğer taraftan $|F'(x_0)| > 1$ iken $F'(x_0) > 1$ ve $F'(x_0) < -1$ durumlarının grafik analizleri ve faz portrelerini inceleyelim:



Şekil 2. 12 $F'(x_0) > 1$ ve $F'(x_0) < -1$ durumlarının grafik analizleri

Şekil 2.12' de her iki durumda x_0 , itici bir sabit noktadır.



Şekil 2. 13 $F'(x_0) > 1$ ve $F'(x_0) < -1$ durumlarının faz portreleri

Şekil 2.13' de itici bir sabit noktanın civarındaki faz portreleri görülmektedir.

Peki bu neden doğru?

Şekil 2.10 ve Şekil 2.12' deki grafik analizleri, $F'(x_0)$ ' in büyüklüğünün x_0 ' in çekici mi yoksa itici mi olduğunu belirlemedeki iddiamızın doğruluğu için net bir kanıttır. Fakat bunun doğruluğunu ve özellikle de teğet doğrularının eğimlerinin ne zaman kesişim noktaları olan ± 1 ' e yakın olduğunu nereden biliyoruz?

Bunun cevabı, matematiğin en önemli teoremlerinden biri olan ortalama değer teoremi ile bulunur.

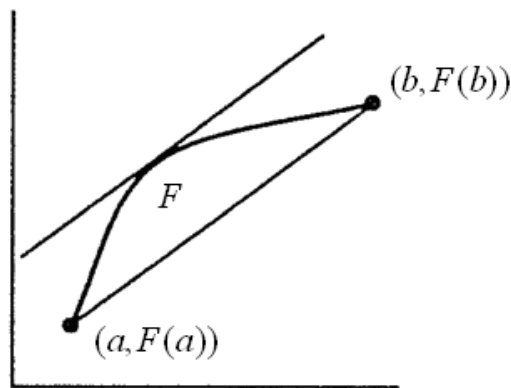
Ortalama değer teoreminde; F , $a \leq x \leq b$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğunda a ve b arasında öyle bir c sayısı vardır ki

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

ifadesi sağlanır. Bu teoremin içeriği, en iyi geometrik olarak gösterilir. Buna göre

$$M = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

ifadesi, F' nin grafiğinde bulunan $(a, F(a))$ ve $(b, F(b))$ noktalarını birleştiren düz bir doğrunun eğimidir. Bundan dolayı teorem açık bir şekilde, F' nin $a \leq x \leq b$ aralığında diferensiyellenebilir olması halinde a ve b arasındaki bazı c sabitlerinin varolup teğet doğrusunun eğimi olan $F'(c)$ ' nin kesinlikle M' ye eşit olduğunu söylemektedir. Bu da Şekil 2.14' de geometrik olarak gösterilmektedir.



Şekil 2. 14 Ortalama Değer Teoremi

c' deki teğet doğrusunun eğimi olan $F'(c)$, M' ye eşittir.

Amaçlarımız açısından ortalama değer teoreminin önemi, onun şu iki sonucundan gelir:

Teorem 2.3 (Çekici Sabit Nokta Teoremi) x_0, F için çekici bir sabit nokta olsun. O zaman içinde x_0' ı içeren ve şu şartı sağlayan bir I aralığı vardır: $x \in I$ ise o halde tüm n ' ler için $F^n(x) \in I$ ve ayrıca $n \rightarrow \infty$ iken $F^n(x) \rightarrow x_0$ olur.

İspat

$|F'(x_0)| < 1$ olduğundan bir $\lambda > 0$ sayısı vardır öyle ki $|F'(x_0)| < \lambda < 1$ ' dir.

$\forall x \in I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var olsun. I aralığında herhangi bir nokta p olsun. Ortalama değer teoreminden,

$$\frac{|F(p) - F(x_0)|}{|p - x_0|} < \lambda \Rightarrow |F(p) - F(x_0)| < \lambda |p - x_0| \text{ olur.}$$

x_0 sabit nokta olduğundan $|F(p) - x_0| < \lambda |p - x_0|$ ' dir.

$0 < \lambda < 1$ olduğundan $F(p)$ ile x_0 arasındaki uzaklık p ile x_0 arasındaki uzaklıktan daha küçüktür.

$F(p)$ ile $F(x_0)$ arasında yine bir iterasyon süreci yaparsak,

$$\begin{aligned} |F^2(p) - x_0| &= |F^2(p) - F(x_0)| < \lambda |F(p) - F(x_0)| \\ &< \lambda^2 |p - x_0|. \end{aligned}$$

$\lambda < 1$ olduğundan $\lambda^2 < \lambda$ olur. Böylece $F^2(p)$ ve x_0 noktaları $F(p)$ ile x_0 noktalarından daha yakındır.

İterasyon sürecini n defa ilerletirsek;

$$|F^n(p) - x_0| < \lambda^n |p - x_0| \text{ olur.}$$

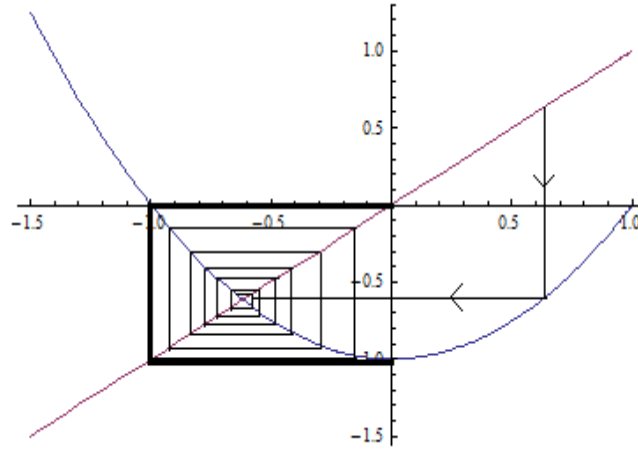
$n \rightarrow \infty$ iken $\lambda^n \rightarrow 0$ olur. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken $F^n(p) \rightarrow x_0$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.4 (İtici Sabit Nokta Teoremi) x_0, F için itici bir sabit nokta olsun. O zaman içinde x_0' ı içeren ve şu şartı sağlayan bir I aralığı vardır: $x \in I$ ve $x \neq x_0$ ise bu takdirde bir $n > 0$ tamsayısı vardır öyle ki $F^n(x) \notin I$ ' dir.

2.2.7.3 Periyodik Noktalar

Sabit noktalarda olduğu gibi periyodik noktalar da aynı zamanda çekici, itici veya nötr olarak sınıflandırılabilir.

Bir örnekle başlayalım. $F(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu, yörüngesi $0, -1, 0, -1, \dots$ olan 2-periyodlu devri çekicidir. Şekil 2.15' deki grafik analizi, bu devirin çekici olması gerektiğini gösteriyor.



Şekil 2. 15 $F(x) = x^2 - 1$ için çekici 2-periyodlu bir devir

n -periyodlu bir x_0 periyodik noktasının çekici mi yoksa itici mi olduğunu belirlemek için F^n 'nin x_0 'daki türevini hesaplamalıyız. F^n 'nin, F 'nin n -inci kuvveti değil de n . iterasyonu olduğunu hatırlarsak; bu durumda zincir kuralının kullanılması gerektiğini görürüz. Biliyoruz ki F ve G diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise bileşke fonksiyonunun türevi,

$$(F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$$

olur. Özellikle

$$\begin{aligned} (F^2)'(x_0) &= F'(F(x_0)) \cdot F'(x_0) \\ &= F'(x_1) \cdot F'(x_0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (F^3)'(x_0) &= F'(F^2(x_0)) \cdot (F^2)'(x_0) \\ &= F'(x_2) \cdot F'(x_1) \cdot F'(x_0) \end{aligned}$$

olur. Zincir kuralını $n-1$ defa uygularsak şunu buluruz:

Devir Boyunca Zincir Kuralı; $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, F için n -periyodlu devir üzerinde ve $x_i = F^i(x_0)$ olsun. O zaman

$$(F^n)'(x_0) = F'(x_{n-1}) \dots F'(x_1) \cdot F'(x_0)$$

olur (Alligood vd. [7]).

Bu formülün bize, F^n 'nin x_0 'daki türevinin basit bir şekilde F' 'nin yörünge üzerinde bulunan tüm noktalardaki türevlerin çarpımını gösterdiğine dikkat edelim. Bu da bizi ilk önce F' 'nin formülünü hesaplamak zorunda bırakmaz. Tek bulmamız gereken, F' 'nin türevi ve ardından sırasıyla $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ 'in türevdeki değerini yerine koyarak bu sayıları birlikte çarpmaktır. Şayet n çok büyükse bizi birçok cebirsel işlem yapmaktan kurtarır. Örneğin, yukarıda $F(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu için 0 ve -1 'de 2 -devirli olduğunu gördük ki burada $(F^2)'(0) = 0$ 'dır. Bunu, ilk olarak F^2 'nin formülünü bularak ve daha sonra da 0 'daki diferensiyelini alarak hesaplarız. Fakat $F'(x) = 2x$ olduğundan oldukça kolay bir şekilde $F'(0) = 0$ ve $F'(-1) = -2$ buluruz ve bu yüzden bir devir boyunca zincir kuralından yine $(F^2)'(0) = -2 \cdot 0 = 0$ olarak bulunur. Benzer şekilde $(F^2)'(-1) = -2 \cdot 0 = 0$ 'dır. Bu örnekte $(F^2)'(0) = (F^2)'(-1)$ olması aşağıda belirtilen sonuçtan dolayı tesadüf değildir.

Sonuç 2.1 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, F için n -devir üzerinde olsun. Bu taktirde,

$$(F^n)'(x_0) = (F^n)'(x_1) = \dots = (F^n)'(x_{n-1})$$

olur.

Başlangıç değeri olarak hangi nokta olursa olsun devir üzerindeki noktalar kesinlikle aynı olduğundan bu sonuç, bir devir boyunca zincir kuralından hemen çıkar.

Örnek 2.1 $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ olsun. $F(0)=1$, $F(1)=2$ ve $F(2)=0$ olduğundan 0

noktası, periyodu 3 olan bir devir üzerindedir. $F'(x) = -3x + \frac{5}{2}$ olduğundan buradan

$F'(0) = \frac{5}{2}$, $F'(1) = -\frac{1}{2}$ ve $F'(2) = -\frac{7}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}(F^3)'(0) &= F'(2) \cdot F'(1) \cdot F'(0) \\ &= \left(-\frac{7}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{35}{8} > 1\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle bu devir iticidir.

2.3 Cantor Kümesi

Burada Cantor kümesinin inşasını inceleyeceğiz. Bu kümeyi inşa etmek için $0 \leq x \leq 1$

aralığı ile başlayalım. Burada ortadaki üçlü olan $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ açık aralığını atalım. Geriye

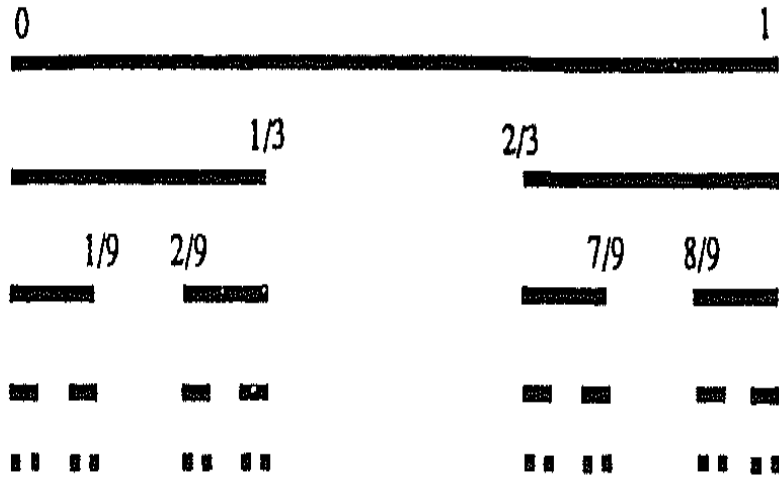
kalan kapalı aralıkların her biri başlangıçta aldığımız aralığın üçte bir uzunluğuna sahiptir. Sonra geriye kalan bu kapalı aralıklara tekrar aynı işlemi uygulayalım. Bunun

manası $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ aralığından $\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9}$ açık aralığını ve $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ aralığından da

$\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$ açık aralığını atmaktır. Şimdi 4 tane kapalı aralığımız var ve her biri ilk

aralığımızın $\frac{2}{3}$ 'ü kadar uzunluğa sahiptir.

Bu süreci devamlı tekrarlayalım. Her durumda bir önceki durumdan kalma kapalı aralıkların orta üçlülerini atalım. Geriye kalan limit kümesi Cantor kümesidir. Bunu C ile gösterelim.



Şekil 2. 16 Cantor Kümesi

$C_0 = [0, 1] \Rightarrow 2^0 = 1$ tane kapalı aralık var.

$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow 2^1 = 2$ tane kapalı aralık var.

$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \Rightarrow 2^2 = 4$ tane kapalı aralık var.

$\vdots$

$C_n \Rightarrow 2^n$ tane kapalı aralık var.

Cantor kümesi kapalı aralıkları noktaya indirgeyecek şekilde oluşturulmuştur. $2^n - 1$ tane uzaklaştırılan açık aralık var. $2^n - 1$ açık aralığı $\frac{1}{3^n}$ kuralı ile attık (Devaney [1]).

FEIGENBAUM DÖNÜŞÜMÜ

3.1 Feigenbaum Dönüşümü

$\phi: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

- 1) $\phi(x) = \phi(-x)$,
- 2) $\phi(0)=1$,
- 3) $\phi''(x) < 0$.

Ayrıca,

$$\phi(x) = -\alpha^{-1}\phi(\phi(\alpha x)). \quad (3.1)$$

Yani $\phi^2(\alpha x) = -\alpha\phi(x)$ fonksiyon eşitliği sağlansın (Campanino vd. [8]).

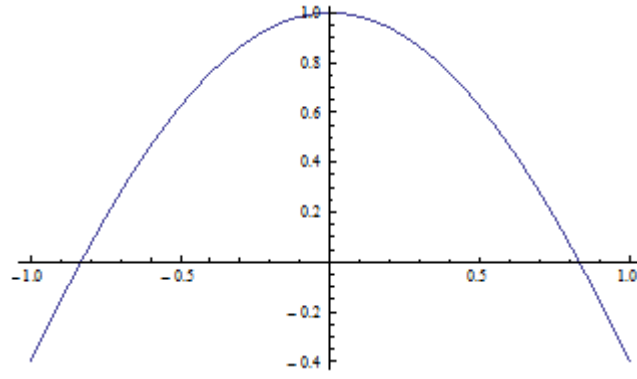
Burada $\alpha = -\phi(1)'$ dir. $\phi(x)$; x^2 ' nin analitik bir fonksiyonudur (Campanino ve Epstein [9]). ϕ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığının bazı komşuluklarında türeyebilir ve kuvvet serisinin bazı ilk terimleri şöyledir:

$$\phi(x) = 1 - 1.5276....x^2 + 0.1048....x^4 + 0.0267....x^6 - 0.003527....x^8 +$$

(Frisch vd. [10]).

$\alpha = -\phi(1)$ sabitinin değeri yaklaşık olarak 0.39953528' e eşittir (Campanino vd. [8]).

Tanım 3.1 ϕ fonksiyonu Feigenbaum dönüşümü olarak adlandırılır.



Şekil 3. 1 Feigenbaum dönüşümünün grafiği

Şekil 3.1' de ϕ Feigenbaum dönüşümünün grafiği görülmektedir.

Yang ve Zhang (1985) ikinci tipten Feigenbaum fonksiyonel denklemini ileri sürdü:

$$\begin{cases} f^2(\lambda x) = \lambda f(x) \\ f(0) = 1, 0 \leq f(x) \leq 1, x \in [0,1] \end{cases}$$

burada $\lambda \in (0,1)$ dir (Huang vd. [11]) .

Tanım 3.2 Tek modlu bir ϕ dönüşümü p _inci mertebeden Feigenbaum fonksiyonel denklemini sağlarsa;

$$\begin{cases} \phi^p(-\alpha x) = -\alpha \phi(x) \\ \phi(0) = 1, -1 \leq \phi(x) \leq 1. \end{cases}$$

olur. Burada $\alpha \in (-1,0) \cup (0,1)$, $x \in [-1,1]$ olmak üzere p _inci mertebeden Feigenbaum dönüşümü ($p \geq 2$) olarak adlandırılır.

Lemma 3.1 Her bir $n \geq 1$ için;

$$\phi(x) = (-1)^n \alpha^{-n} \underbrace{\phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi}_{2^n \text{ defa}}(\alpha^n x) = (-1)^n \alpha^{-n} \phi^{2^n}(\alpha^n x) \quad (3.2)$$

Burada $\phi^n(x)$; $\phi(x)$ dönüşümünün n . iterasyonunu ifade eder.

İspat

İspatı tümevarım yoluyla yapalım:

$n = 1$ için Feigenbaum dönüşümünün tanımından $\phi(x) = (-1)\alpha^{-1}\phi^2(\alpha x)$ ' dir.

$n = k$ için doğru olsun. $\phi(x) = (-1)^k \alpha^{-k} \phi^{2^k}(\alpha^k x)$ ' dir.

$n = k + 1$ için doğru mu?

$\phi^{2^k}(\alpha^k x) = (-1)^k \alpha^k \phi(x)$ ifadesinin her iki tarafını $-\alpha$ ile çarparsak;

$$-\alpha \phi^{2^k}(\alpha^k x) = (-1)^{k+1} \alpha^{k+1} \phi(x) \Rightarrow \left(\phi^{2^k}\right)^2(\alpha^{k+1} x) = (-1)^{k+1} \alpha^{k+1} \phi(x)$$

$\phi^{2^{k+1}}(\alpha^{k+1} x) = (-1)^{k+1} \alpha^{k+1} \phi(x)$ ' dir.

Kapalı aralıklar sistemimizin oluşumunu incelersek;

n rank sayıları, k ranklardaki aralık sayıları olmak üzere aralıklar $\Delta_k^{(n)}$ şeklinde olsun.

Dönüşümümüzde ilk aralığı $[-\alpha, \alpha]$ olarak alalım. Yani birinci rankta $[-\alpha, \alpha]$ aralığı ile başlayalım.

$$\phi: [-\alpha, \alpha] \rightarrow [\phi(\alpha), 1]$$

$n = 1$ için ;

$$k = 0 \text{ iken } \Delta_0^{(1)} = [-\alpha, \alpha],$$

$$k = 1 \text{ iken } \Delta_1^{(1)} = \phi(\Delta_0^{(1)}) = \phi([-\alpha, \alpha]) = [\phi(\alpha), 1],$$

$k = 2$ iken

$$\Delta_2^{(1)} = \phi(\Delta_1^{(1)}) = \phi([\phi(\alpha), 1]) = [-\alpha, \alpha^2] \left(\begin{array}{l} \phi(\phi(\alpha)) = \phi^2(\alpha) = \phi(\alpha.1) = -\alpha \underset{-\alpha}{\phi(1)} = \alpha^2 \end{array} \right)$$

elde edilir. $k = 2$ olması durumunda $[-\alpha, \alpha]$ aralığının alt kümesi olacak şekilde bir kapalı aralık oluşur. Diğer bir ifadeyle yeni bir rank oluşmaya başlar. Yeni bir rank oluşmaya başladığında aralıkların ϕ dönüşümü altındaki iterasyonunu durduruyoruz. Bu durumda birinci rankta ayrık iki tane aralık oluşur ve $k = 1$ halinden sonra iterasyon süreci sonlandırılır.

İkinci rankta ilk aralığımız olarak $[-\alpha^2, \alpha^2]$ aralığı ile başlanır.

$n = 2$ için ;

$$k = 0 \text{ iken } \Delta_0^{(2)} = [-\alpha^2, \alpha^2],$$

$$k = 1 \text{ iken } \Delta_1^{(2)} = \phi(\Delta_0^{(2)}) = [\phi(\alpha^2), 1],$$

$$k = 2 \text{ iken } \Delta_2^{(2)} = \phi(\Delta_1^{(2)}) = [-\alpha, -\alpha\phi(\alpha)],$$

$$k = 3 \text{ iken } \Delta_3^{(2)} = \phi(\Delta_2^{(2)}) = [\phi(\alpha), \phi(-\alpha\phi(\alpha))],$$

$$k = 4 \text{ iken } \Delta_4^{(2)} = \phi(\Delta_3^{(2)}) = [-\alpha^3, \alpha^2]$$

olur. $k = 4$ olması durumunda $[-\alpha^2, \alpha^2]$ aralığının alt kümesi olacak şekilde bir kapalı aralık oluşur. Yeni bir rank oluşmaya başlar. Yeni bir rank oluşmaya başladığında aralıkların ϕ dönüşümü altındaki iterasyonunu kesiyoruz. Bu durumda ikinci rankta ayrık 4 tane aralık oluşur ve $k = 3$ durumundan sonra iterasyon sonlandırılır.

Bu şekilde devam edilirse;

1. rankta $\Delta_0^{(1)} = [-\alpha, \alpha]$ olmak üzere $2 = 2^1$ tane ayrık aralıklar oluşur.

$$(\Delta_0^{(1)}, \Delta_1^{(1)})$$

2. rankta $\Delta_0^{(2)} = [-\alpha^2, \alpha^2]$ olmak üzere $4 = 2^2$ tane ayrık aralıklar oluşur.

$$(\Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)})$$

3. rankta $\Delta_0^{(3)} = [-\alpha^3, \alpha^3]$ olmak üzere $8 = 2^3$ tane ayrık aralıklar oluşur.

$$(\Delta_0^{(3)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_2^{(3)}, \Delta_3^{(3)}, \Delta_4^{(3)}, \Delta_5^{(3)}, \Delta_6^{(3)}, \Delta_7^{(3)})$$

⋮

n . rankta $\Delta_0^{(n)} = [-\alpha^n, \alpha^n]$ olmak üzere 2^n tane ayrık aralıklar oluşur.

$$(\Delta_0^{(n)}, \Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \Delta_3^{(n)}, \dots, \Delta_{2^n-1}^{(n)})$$

Şimdi bu kapalı aralıklar sistemini tanımlayalım:

$$\tau_n = \{\Delta_k^{(n)} : 0 \leq k \leq 2^n - 1\}, n \geq 1.$$

$$\Delta_0^{(n)} = [-\alpha^n, \alpha^n] \text{ ve } \Delta_k^{(n)} = \phi^k(\Delta_0^{(n)}), k \geq 1.$$

Teorem 3.1 $\Delta_k^{(n)}$ aralıkları aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1) 0 \leq k_1, k_2 < 2^n, k_1 \neq k_2 \text{ için } \Delta_{k_1}^{(n)} \cap \Delta_{k_2}^{(n)} = \emptyset;$$

$$2) \Delta_{2^n}^{(n)} \subset \Delta_0^{(n)};$$

$$3) \Delta_k^{(n-1)} \supset \Delta_k^{(n)} \cup \Delta_{k+2^{n-1}}^{(n)};$$

$$4) \Delta_{2k}^{(n+1)} = -\alpha \Delta_k^{(n)}, 0 \leq k < 2^n;$$

$$5) \max_{0 \leq k < 2^n} |\Delta_k^{(n)}| = |\Delta_0^{(n)}|;$$

$$6) \min_{0 \leq k < 2^n} |\Delta_k^{(n)}| = |\Delta_1^{(n)}|$$

burada $|\Delta|$; Δ aralığının uzunluğunu belirtir.

Yukarıdaki özellikler $\Delta_k^{(n)}$ aralıkların ikili temsilini gerektirir. $k = \sum_{j=0}^{n-1} e_j 2^j$, $e_j = 0, 1$ olsun.

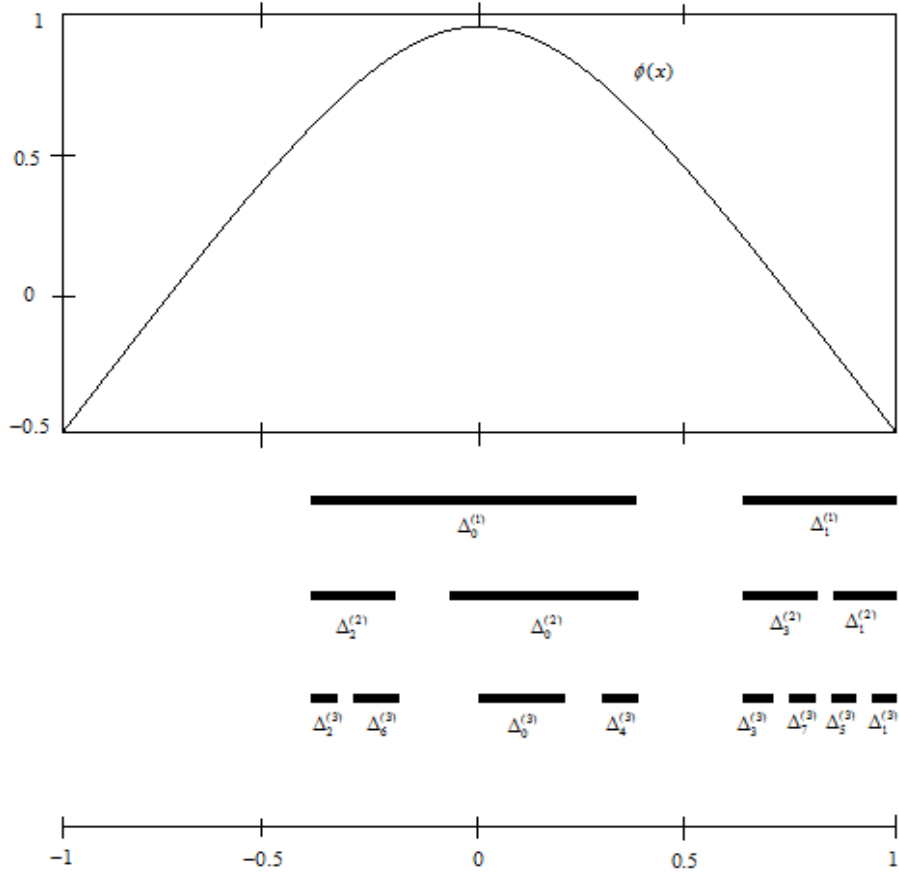
O zaman $(e_0, \dots, e_{n-1})$ dizisini $\Delta_k^{(n)}$ aralıklarının sembolik kodu olarak kullanabiliriz.

$\Delta_k^{(n)} = \Delta_{e_0, \dots, e_{n-1}}^{(n)}$. Feigenbaum çekicisini tanımlayabiliriz:

Tanım 3.3 $\kappa = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Delta_k^{(n)}$ kümesi Feigenbaum çekicisi olarak adlandırılır (Frisch vd.

[10]).

κ kümesi bütün sonsuz ikili dizilerin kümesine $(e_0, \dots, e_n, \dots)$ izomorftur. Böyle diziler κ üzerinde sembolik koordinat sistemi olarak düşünülebilir. Bu yeni koordinat sisteminde ϕ dönüşümü $(1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ dizisinin ikili eklemesi gibi davranır. Topolojik olarak κ kümesi bir Cantor kümesidir.



Şekil 3. 2 Feigenbaum çekicisi

κ kümesi, $[-1,1]$ aralığındaki sayılabilir pek çok başlangıç noktası için çekicidir. $m \rightarrow \infty$ iken $dist(\phi^n(x), \kappa) \rightarrow 0$ 'dır. Teorem 3.1' den $\phi(\kappa) = \kappa$ 'dır. Yani κ , ϕ dönüşümünün değişmez kümesidir (Dzhalilov vd. [12]).

Tanım 3.4 $f:[a,b] \rightarrow [a,b]$, $C^1[a,b]$ sınıfından bir fonksiyon ve x_0 , f fonksiyonunun sabit noktası olsun. Yani $f(x_0) = x_0$ 'dır. Eğer $|f'(x_0)| > 1$ ise x_0 noktasına kararsız sabit nokta, $|f'(x_0)| < 1$ ise x_0 noktasına kararlı sabit nokta adı verilir (Collet ve Eckmann [13]).

Tanım 3.5 $f:[a,b] \rightarrow [a,b]$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f^p(x_0) = x_0$ ve $f^s(x_0) \neq x_0$, $1 \leq s \leq p-1$ ise $x = x_0$ noktası p periyotlu bir periyodik nokta olarak adlandırılır.

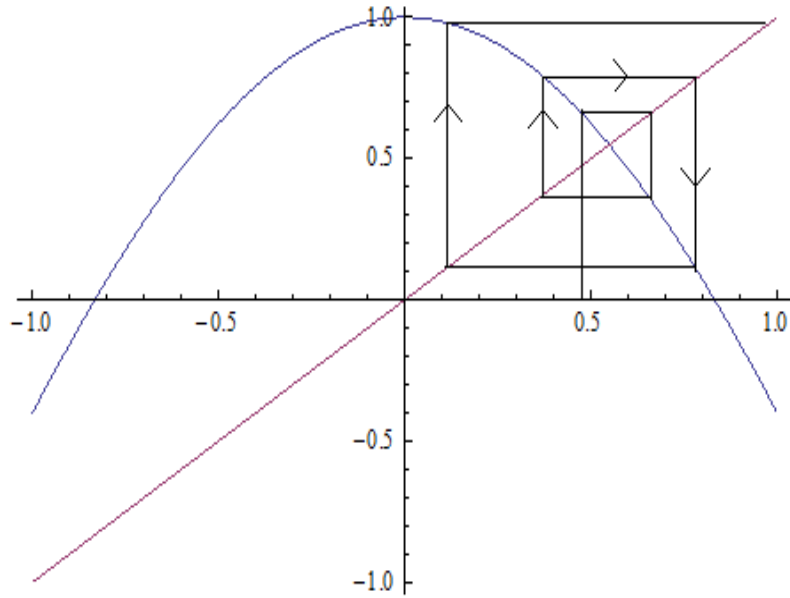
$$\left| \frac{df^p(x)}{dx} \right|_{x=x_0} < 1 \text{ ise } x_0 \text{ noktası kararlı periyodik nokta,}$$

$$\left| \frac{df^p(x)}{dx} \right|_{x=x_0} > 1 \text{ ise } x_0 \text{ noktası kararsız periyodik noktadır.}$$

$\Delta_0^{(1)} = [-\alpha, \alpha]$, $\Delta_1^{(1)} = [\phi(\alpha), 1]$ aralıkları ile $\phi(\alpha) > \alpha$ olduğunu düşünürsek;

$\Delta_0^{(1)} = [-\alpha, \alpha]$ ve $\Delta_1^{(1)} = [\phi(\alpha), 1]$ aralıkları arasında ϕ dönüşümünün bir tek $x_0^{(0)}$

kararsız sabit noktası vardır. Hatta $\phi'(x_0^{(0)}) < -1$ ' dir.



Şekil 3. 3 Feigenbaum dönüşümünün sabit noktası

ϕ fonksiyonunun grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği nokta bize $x_0^{(0)}$ sabit noktasını verir. Sabit nokta yaklaşık olarak 0.549308' dir. Fonksiyonun grafiği incelendiğinde $\alpha < x_0^{(0)} < \phi(\alpha)$ ' dir. $[0,1]$ aralığında ϕ dönüşümü azalan olduğundan $\phi'(x) < 0$ ' dir. Yatay ve dikey doğrularla bakıldığında $x_0^{(0)}$ noktası kararsızdır. Yani $|\phi'(x_0^{(0)})| > 1$ ' dir. ϕ dönüşümü $[0,1]$ aralığında azalan olduğundan $\phi'(x_0^{(0)}) < 0$ ' dir. Bu durumda $\phi'(x_0^{(0)}) < -1$ diyebiliriz.

Lemma 3.2 $x_0^{(n)} = (-1)^n \alpha^n x_0^{(0)}$ noktaları Feigenbaum dönüşümü ϕ' nin 2^n periyotlu kararsız periyodik noktalarıdır.

İspat

Önce $\phi^{2^n}(x_0^{(n)}) = x_0^{(n)}$ olduğunu göstereceğiz. $x_0^{(n)} = (-1)^n \alpha^n x_0^{(0)}$ değerini yerine koyup

Lemma 3.1' i kullanarak $\phi^{2^n}((-1)^n \alpha^n x_0^{(0)})'$ i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\phi^{2^n}((-1)^n \alpha^n x_0^{(0)}) &= \phi^{2^n}(\alpha^n x_0^{(0)}) = (-1)^n \alpha^n \phi(x_0^{(0)}) \\ &= (-1)^n \alpha^n x_0^{(0)} \\ &= x_0^{(n)}.\end{aligned}$$

Bu $x_0^{(n)}$ noktasının 2^n periyotlu bir periyodik nokta olduğunu gösterir. Şimdi bu $x_0^{(n)}$ noktasının kararsızlığını inceleyelim:

(3.2) denkleminde eşitliğin her iki yanının x' e göre türevini alalım:

$$\phi'(x) = (-1)^n \alpha^{-n} \alpha^n \frac{d\phi^{2^n}(y)}{dy} \Big|_{y=\alpha^n x} = (-1)^n \frac{d\phi^{2^n}(y)}{dy} \Big|_{y=\alpha^n x} \quad (3.3)$$

(3.3) denkleminde x noktası yerine $x_0^{(0)}$ noktasını alırsak;

$$\frac{d\phi^{2^n}(y)}{dy} \Big|_{y=\alpha^n x_0^{(0)}} = (-1)^n \phi'(x_0^{(0)})' \text{ dır.}$$

$\phi'(x_0^{(0)}) < -1$ olduğundan;

$$\left| \frac{d\phi^{2^n}(y)}{dy} \Big|_{y=\alpha^n x_0^{(0)}} \right| = |(-1)^n \phi'(x_0^{(0)})| = |\phi'(x_0^{(0)})| > 1$$

olur. Bu da bize $x_0^{(n)} = (-1)^n \alpha^n x_0^{(0)}$ noktasının 2^n periyotlu kararsız bir periyodik nokta olduğunu gösterir.

3.2 Feigenbaum Dönüşümünün Değişmez Ölçüsü

Tanım 3.6 H , boş olmayan bir X kümesinin alt kümelerinin topluluğu olsun. Eğer H aşağıdaki koşulları sağlarsa H' ye X üzerinde bir cebirdir denir.

- 1) $X \in H$
- 2) $\forall A \in H$ için $A^c = X \setminus A \in H$
- 3) $k=1,2,\dots,n$ ve $A_k \in H$ için $\bigcup_{k=1}^n A_k \in H$.

Tanım 3.7 H , boş olmayan bir X kümesinin alt kümelerinin topluluğu olsun. Eğer H aşağıdaki koşulları sağlarsa H' ye X üzerinde bir σ cebri denir.

- 1) $X \in H$
- 2) $\forall A \in H$ için $A^c = X \setminus A \in H$
- 3) $k \in \mathbb{N}$ ve $A_k \in H$ olmak üzere $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in H$.

Tanım 3.8 $X \neq \emptyset$ ve H , X üzerinde bir σ cebri ise (X, H) ikilisine ölçülebilir uzay, H' nin elemanlarına da ölçülebilir kümeler denir.

(X, H) ölçülebilir uzay, $\mu: H \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ bir fonksiyonu,

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$
- 2) $\forall E \in H$ için $\mu(E) \geq 0$
- 3) H' nin her ayrık (E_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

koşullarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna H üzerinde bir ölçü denir (Aliprantis ve Burkinshaw [14]).

Tanım 3.9 (X, H) ölçülebilir uzay ve μ , H üzerinde bir ölçü olmak üzere (X, H, μ) bir ölçü uzayıdır.

Tanım 3.10 H, T σ cebirleri olmak üzere (X, H) ve (Y, T) iki ölçülebilir uzay olsun. Her bir $E \in T$ için $f^{-1}(E) \in H$ ise $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ölçülebilirdir. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ölçülebilir ise $f: (X, H) \rightarrow (Y, T)$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.11 (X, H, μ) bir ölçü uzayı olsun. $\mu(X) = 1$ ise μ' ye olasılık ölçüsü denir ve (X, H, μ) olasılık uzayı olarak adlandırılır. Burada X örnek uzay, H 'nin elemanları da olaylardır (Broer ve Takens [15]).

(X, H) ölçülebilir uzay ve $f: X \rightarrow X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun.

Tanım 3.12 Bir μ ölçüsü, herhangi bir $B \in H$ için;

$$\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

oluyorsa μ' ye f dönüşümünün değişmez ölçüsü denir (Cornfeld vd. [16]).

f dönüşümü birebir ise $\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu(f(B))$ olur (Ott [17]).

Teorem 3.2 $\phi: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ Feigenbaum dönüşümü olsun. κ Feigenbaum çekicisi üzerinde bir tek ϕ -değişmez olasılık ölçüsü μ_0 mevcuttur; yani $\mu_0(\kappa) = 1$ ' dir (Alligood vd. [7]).

3.3 Feigenbaum Dönüşümünün Giriş Zaman Fonksiyonları

Feigenbaum dönüşümü ϕ' yi düşünelim. ϕ dönüşümünün kritik noktası $x_0 = 0$ ' dir.

Yani $\phi'(0) = 0$ ' dir. $\Delta_0^{(n)} = [-\alpha^n, \alpha^n]$, $x_0 = 0$ noktasının n . rankta esas komşuluğu olsun.

n . rankın herhangi bir $\Delta_s^{(n)}$, $0 \leq s < 2^n$ aralığı ϕ^{2^n-s} dönüşümü altında $\Delta_0^{(n)}$ ' in içine

eşlenir. Yani $\phi^{2^n-s}(\Delta_s^{(n)}) = \Delta_n^{(2^n)} \subset \Delta_0^{(n)}$ dir. Diğer taraftan Teorem 3.2' den

$$\mu(\Delta_s^{(n)}) = \frac{1}{2^n}, s = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1 \text{ dir.}$$

Lemma 3.3 $[-1, 1]$ kapalı aralığının ölçülebilir bir alt kümesi A ve $A \cap \Delta_i^{(n)} = \emptyset$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$ olsun. Bu durumda $\mu_0(A) = 0$ ' dir.

İspat

Her bir $0 \leq i \leq 2^n - 1$ için $A \cap \Delta_i^{(n)} = \emptyset$ ise $\kappa = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Delta_k^{(n)}$ olduğundan $A \cap \kappa = \emptyset$ ' dir.

Ancak Teorem 3.2' de $\mu_0(\kappa) = 1$ olduğunu belirtmiştik. O halde $\mu_0([-1,1] \setminus \kappa) = 0$ ' dir.

$A \cap \kappa = \emptyset$ olduğundan $A \subset [-1,1] \setminus \kappa$ olup $\mu_0(A) = 0$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Feigenbaum dönüşümü ϕ' nin giriş zaman fonksiyonlarının tanımına geçelim.

Dönüşümlerin bir dizisini düşünersek;

$N_n^{(K)} : [-1,1] \rightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $K = 0, 1, 2, \dots$ ve $N_n^{(0)}(x) = 0$ verilsin.

i) $x \in \{\Delta_k^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq k \leq 2^n - 1\}$ ise

$$N_n^{(K)}(x) = \min \left\{ j : j > N_n^{(K-1)}(x) \mid \phi^j(x) \in \Delta_0^{(n)} \right\},$$

ii) x , ϕ' nin periyodik noktası ise $N_n^{(K)}(x) = +\infty$

olur (Agarwal [18]).

Tanım 3.13 $N_n^{(K)}(x)$; $\Delta_0^{(n)}$ içindeki x ' in K _ıncı giriş zamanı olarak adlandırılır.

Tanım 3.14 $N_n^{(K)}(x)$ fonksiyonları ϕ Feigenbaum dönüşümünün K _ıncı giriş zaman fonksiyonları olarak adlandırılır.

Bu tanımı biraz irdelersek;

$n = 1$ ve $x \in \Delta_0^{(1)}$ durumunda;

$K = 0$ için $N_1^{(0)}(x) = 0$.

$K = 1$ için,

$$N_1^{(1)}(x) = \min \left\{ j : j > N_1^{(0)}(x) \mid \phi^j(x) \in \Delta_0^{(1)} \right\}$$

$$N_1^{(1)}(x) = \min \left\{ j : j > 0 \mid \phi^j(x) \in \Delta_0^{(1)} \right\}$$

$$N_1^{(1)}(x) = \min \left\{ j : j = 1, 2, 3, \dots \mid \phi^j(x) \in \Delta_0^{(1)} \right\}$$

$$N_1^{(1)}(x) = 2.$$

$\Delta_0^{(1)}$ aralığından aldığımız herhangi bir x noktasının $\Delta_0^{(1)}$ aralığına ilk kez giriş zamanı 2^n ' dir.

$K = 2$ için,

$$N_1^{(2)}(x) = \min \left\{ j : j > N_1^{(1)}(x) \mid \phi^j(x) \in \Delta_0^{(1)} \right\}$$

$$N_1^{(2)}(x) = \min \left\{ j : j > 2 \mid \phi^j(x) \in \Delta_0^{(1)} \right\}$$

$$N_1^{(2)}(x) = \min \left\{ j : j = 3, \dots \mid \phi^j(x) \in \Delta_0^{(1)} \right\}$$

$$N_1^{(2)}(x) = 4.$$

$\Delta_0^{(1)}$ aralığından alınan herhangi bir x noktasının $\Delta_0^{(1)}$ aralığına ikinci kez giriş zamanı 4^n ' tür.

Bu şekilde devam edildiğinde 1. rankta $N_1^{(1)} = 2, N_1^{(2)} = 4, N_1^{(3)} = 6, \dots$ olur.

Benzer işlem diğer ranklar için de yapılırsa;

$$2. \text{ rankta } N_2^{(1)} = 4, N_2^{(2)} = 8, N_2^{(3)} = 12, \dots$$

$$3. \text{ rankta } N_3^{(1)} = 8, N_3^{(2)} = 16, N_3^{(3)} = 24, \dots$$

$\vdots$

şeklinde devam eder.

$$N_n^{(2)}(x) = N_n^{(1)}(x) + 2^n \text{ ' dir.}$$

$$N_n^{(1)}(x) \text{ ' in tanımından } \phi^{N_n^{(1)}(x)}(x) \in \Delta_0^{(n)} \text{ ' dir.}$$

$$\text{Buradan } \phi^{N_n^{(1)}(x)+2^n}(x) = \phi^{2^n} \left(\phi^{N_n^{(1)}(x)}(x) \right) \in \Delta_0^{(n)} \text{ ve } N_n^{(K)}(x) = N_n^{(K-1)}(x) + 2^n, K \geq 2 \text{ ' dir.}$$

$$N_n^{(K)}(x) = N_n^{(K-1)}(x) + 2^n, K \geq 2$$

$$N_n^{(K-1)}(x) = N_n^{(K-2)}(x) + 2^n, K \geq 2$$

$\vdots$

$$N_n^{(2)}(x) = N_n^{(1)}(x) + 2^n, K \geq 2$$

ifadeleri taraf tarafa toplandığında $N_n^{(K)}(x) = N_n^{(1)}(x) + (K-1)2^n$ eşitliği sağlanır.

Şimdi normalleştirilmiş giriş zaman fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\overline{N}_n^{(K)}(x) = \frac{N_n^{(K)}(x)}{K2^n}, \quad n \geq 1, \quad K \geq 1.$$

Tanım 3.15 Ω örnek uzay, S olayların σ cebri ve (Ω, S) üzerinde olasılık ölçüsü P olmak üzere (Ω, S, P) olasılık uzayı olsun. f' nin dağılım fonksiyonu $F_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$x \rightarrow F_f(x) = P(f \leq x)$ şeklinde ifade edilir. Burada sağ taraf x' e eşit veya x' den daha küçük değerler alan f' nin olasılık değerlerini temsil eder (Koralov ve Sinai [19]).

F_f dağılım fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 \leq F_f(x) \leq 1$.

(ii) $x \leq y$ iken $F_f(x) \leq F_f(y)$.

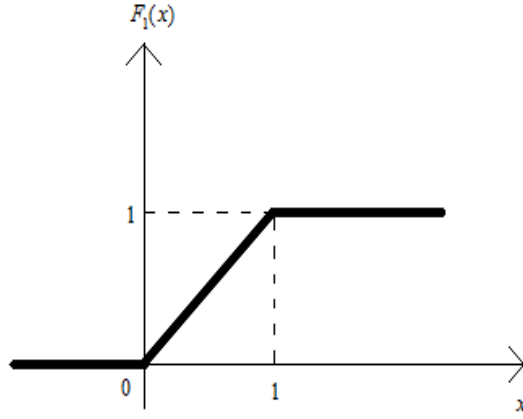
(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} F_f(x) = 1$.

(iv) F_f sağdan süreklidir, yani her bir $x \in \mathbb{R}$ için $F_f(x) = \lim_{h \downarrow 0} F_f(x+h)$.

(v) $F_f, \mathbb{R}$ üzerinde monoton artan fonksiyondur.

Örnek 3.1 $0 \leq F(x) \leq 1$ ifadesine uygun olarak $\mathbb{R}$ üzerinde azalmayan $F(x)$ fonksiyonu şu şekilde tanımlanır (Taylor [20]):

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$



Şekil 3. 4 $F_1(x)$ dağılım fonksiyonu

$\overline{N}_n^{(K)}(x)$ ' in dağılım fonksiyonlarının tanımını verelim:

$$F_n^{(K)}(t) = \mu_0 \left\{ x : x \in S^1, \overline{N}_n^{(K)}(x) \leq t \right\}, t \in \mathbb{R}^1 \quad (3.4)$$

(Dzhalilov [21]).

Giriş zamanlarının dağılım fonksiyonları üzerindeki başlıca sonuçları formülize edelim.

Teorem 3.3 ϕ Feigenbaum dönüşümünün ilk giriş zamanının dağılım fonksiyonu $F_n^{(1)}$ olsun. Bu durumda;

$$1) \text{ Bütün } t \in \mathbb{R}^1 \text{ için, sonlu bir limit mevcuttur ve } \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(1)}(t) = F^{(1)}(t) \text{ ' dir.} \quad (3.5)$$

$$2) t \leq 0 \text{ ise } F^{(1)}(t) \equiv 0;$$

$$t \in [0,1] \text{ ise } F^{(1)}(t) \equiv t;$$

$$t \geq 1 \text{ ise } F^{(1)}(t) \equiv 1.$$

İspat

Teorem (3.1) ve $N_n^{(1)}(t)$ ' nin tanımından,

$$x \in \Delta_s^{(n)}, 0 \leq s < 2^n \text{ ise } N_n^{(1)}(x) = 2^n - s \quad (3.6)$$

ve

$$x \in [-1, 1] \setminus \bigcup_{s=0}^{2^n-1} \Delta_s^{(n)} \text{ ise } N_n^{(1)}(x) \geq 2^n + 1' \text{ dir.} \quad (3.7)$$

(3.6)' yı açık şekilde yazarsak;

$$x \in \Delta_0^{(n)} \text{ ise } N_n^{(1)}(x) = 2^n ,$$

$$x \in \Delta_1^{(n)} \text{ ise } N_n^{(1)}(x) = 2^n - 1,$$

$\vdots$

$$x \in \Delta_{2^n-1}^{(n)} \text{ ise } N_n^{(1)}(x) = 1. \quad (3.8)$$

Şimdi $\mu_0 \{N_n^{(1)}(x) = m\}$, $m = 1, 2, \dots$ hesaplayalım. Teorem 3.2' deki iddiayı ve (3.6), (3.7), (3.8)' i kullanarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$1) \mu_0 \{N_n^{(1)}(x) = m\} = \mu \left\{ \Delta_{2^n-m}^{(n)} \right\} = \frac{1}{2^n}, \quad 1 \leq m \leq 2^n \quad (3.9)$$

$$2) \mu_0 \{N_n^{(1)}(x) > 2^n\} = \mu_0 \left\{ [-1, 1] \setminus \bigcup_{s=0}^{2^n-1} \Delta_s^{(n)} \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Bu ifadelerden sonra $\mu_0 \left\{ \overline{N}_n^{(1)}(x) = \frac{m}{2^n} \right\}$ elde edilebilir.

(3.9), (3.10) ve $\overline{N}_n^{(1)}(t)$ tanımı yardımıyla,

$$\mu_0 \left\{ \overline{N}_n^{(1)}(x) = \frac{m}{2^n} \right\}, \quad 1 \leq m \leq 2^n, \quad (3.11)$$

ve

$$\mu_0 \left\{ \overline{N}_n^{(1)}(x) > 1 \right\} = 0, \quad (3.12)$$

$$\mu_0 \left\{ \overline{N}_n^{(1)}(x) \leq 0 \right\} = 0. \quad (3.13)$$

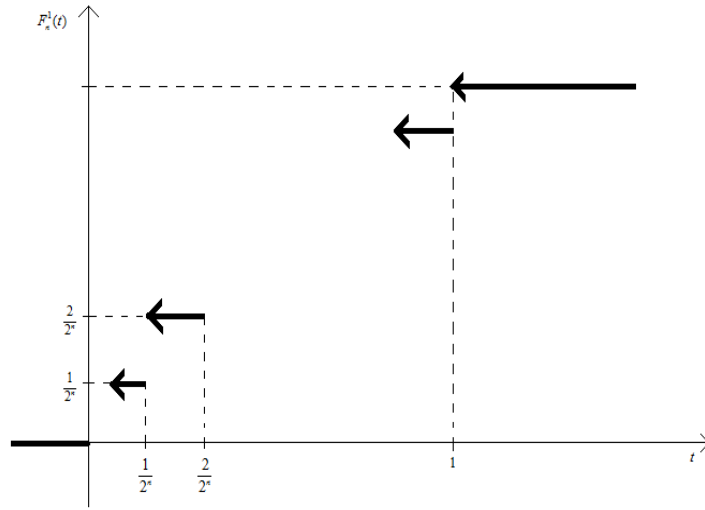
$F_n^{(1)}(t)$ fonksiyonunu düşünelim.

(3.11), (3.12), (3.13) ve $F_n^{(1)}(t)$ tanımıyla;

$$t \leq 0 \text{ ise } F_n^{(1)}(t) \equiv 0;$$

$$t \geq 1 \text{ ise } F_n^{(1)}(t) \equiv 1;$$

$$\frac{K-1}{2^n} \leq t \leq \frac{K}{2^n}, \quad 1 \leq K \leq 2^n \text{ ise } F_n^{(1)}(t) \equiv \frac{K}{2^n}. \quad (3.14)$$



Şekil 3. 5 $F_n^{(1)}(t)$ ' nin grafiği

Benzer şekilde $F_{n+m}^{(1)}(t)$, $m \geq 1$ bulunabilir:

$$t \leq 0 \text{ ise } F_{n+m}^{(1)}(t) \equiv 0;$$

$$t \geq 1 \text{ ise } F_{n+m}^{(1)}(t) \equiv 1;$$

$$\frac{K-1}{2^{n+m}} \leq t \leq \frac{K}{2^{n+m}}, \quad 1 \leq K \leq 2^{n+m} \text{ ise } F_{n+m}^{(1)}(t) \equiv \frac{K}{2^{n+m}}. \quad (3.15)$$

Burada şunu belirtmeliyiz:

A) $F_n^{(1)}(t)$ parçalı sürekli ve $[-1,1]$ aralığı üzerinde artan;

B) Her $n \geq 1$ için $F_n^{(1)}(t) \equiv 0$, $t \leq 0$ ve $F_n^{(1)}(t) \equiv 1$, $t \geq 1$.

$|F_{n+m}^{(1)}(t) - F_n^{(1)}(t)|$ farkını inceleyelim:

$$\frac{K}{2^n} = \frac{K2^m}{2^{n+m}}, \quad 1 \leq K \leq 2^n. \quad (3.16)$$

$$\text{Her } 1 \leq K \leq 2^n \text{ için } F_{n+m}^{(1)}\left(\frac{K2^n}{2^{n+m}}\right) = \frac{K2^m}{2^{n+m}} = \frac{K}{2^n} = F_n^{(1)}\left(\frac{K}{2^n}\right).$$

Son ifade ile A) ve B)'yi kullanarak,

$$t \notin [0,1] \text{ ve her bir } t \in \left[\frac{K-1}{2^n}, \frac{K}{2^n}\right] \text{ için;}$$

$$\left|F_{n+m}^{(1)}(t) - F_n^{(1)}(t)\right| \leq \left|F_n^{(1)}\left(\frac{K}{2^n}\right) - F_n^{(1)}\left(\frac{K-1}{2^n}\right)\right| = \left|\frac{K}{2^n} - \frac{K-1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}. \quad (3.17)$$

Yukarıdaki ifadeden,

$$\text{Her } t \in \mathbb{R}^1 \text{ için } \left|F_{n+m}^{(1)}(t) - F_n^{(1)}(t)\right| \leq \frac{1}{2^n}. \quad (3.18)$$

Son ilişki ile $\{F_n^{(1)}(t), n=1,2,\dots\}$ fonksiyon dizisi esastır. Böylece,

Her $t \in \mathbb{R}^1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(1)}(t) = F^{(1)}(t)$ limiti mevcuttur.

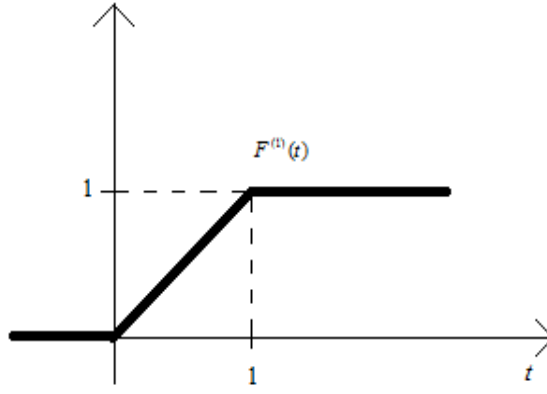
$$t \leq 0 \text{ ise } F^{(1)}(t) \equiv 0,$$

$$t \geq 1 \text{ ise } F^{(1)}(t) \equiv 1,$$

$$t = \frac{K}{2^n}, \quad 1 \leq K \leq 2^n \text{ ise } F^{(1)}(t) \equiv t.$$

olur. $\left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$ kümesi $[0,1]$ üzerinde yoğun ve $F^{(1)}(t)$ sürekli olduğundan

limit fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için $F^{(1)}(t) \equiv t'$ dir.



Şekil 3. 6 $F^{(1)}(t)$ ' nin grafiği

Teorem 3.4 $\overline{N}_n^{(K)}(x)$ ' nin dağılım fonksiyonu $F_n^{(K)}(t)$ olsun. Bu durumda;

1) Bütün $t \in \mathbb{R}^1$ için, sonlu bir limit mevcuttur ve $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(K)}(t) = F^{(K)}(t)$ ' dir.

2) Bütün $t \in \mathbb{R}^1$ için, $F^K(t) = F^{(1)}((K-1)(t-1))$ ' dir. (3.19)

İspat

$$\overline{N}_n^{(K)}(x) = \frac{N_n^{(K)}(x)}{(K-1)2^n} = \frac{N_n^{(1)}(x)}{(K-1)2^n} + 1 = \frac{1}{(K-1)} N_n^{(1)}(x) + 1, \text{ her } x \in [-1, 1].$$

$F_n^{(K)}(t)$ dağılım fonksiyonunu düşünersek,

$$F_n^{(K)}(t) = \mu_0 \left\{ \overline{N}_n^{(K)}(x) \leq t \right\} = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{1}{K-1} \overline{N}_n^{(1)}(x) \leq t \right\} = \mu_0 \left\{ \overline{N}_n^{(1)}(x) \leq (K-1)(t-1) \right\}$$

Son ifadede $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse,

Her $t \in \mathbb{R}^1$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(K)}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0 \left\{ \overline{N}_n^{(1)}(x) \leq (K-1)(t-1) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(1)}((K-1)(t-1)) = F^{(1)}((K-1)(t-1)). \end{aligned}$$

Böylece $F^K(t) = F^{(1)}((K-1)(t-1))$, $t \in \mathbb{R}^1$ olur.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Önceki bölümde herhangi bir rankta $\Delta_0^{(n)}$ ' dan aldığımız bir x noktasına ϕ Feigenbaum dönüşümü uygulandığında, x noktasının ranklardaki $\Delta_k^{(n)}$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$ aralıkları içinde gezindiğini ve bu aralıklardan dışarı kaçmadığını gördük. Diğer bir ifadeyle alınan nokta aralıklar arasında kısır bir döngüye giriyor. Eğer bu aralıkların dışında, değeri 0.549308 olan sabit noktanın çok yakın civarında bir x noktası aldığımızda bu noktanın gidişatını, bizim için belirli olan $\Delta_k^{(n)}$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$ aralıklarına giriş zamanını ve bu giriş zamanları arasında bir kural olup olmadığını inceleyeceğiz.

Öncelikle sabit noktanın çok yakın civarında 0.5494 noktasını alalım. Bu noktanın her bir rankta $\Delta_0^{(n)}$ aralıklarının kaç iterasyon sonra düşeceğine bakalım:

(i) 1. rankta 0.5494 noktası $\Delta_0^{(1)} = [-\alpha, \alpha] = [-0.39953528, 0.39953528]$ aralığına 17. iterasyonda düşer.

{0.5494, 0.549162, 0.549543, 0.548932, 0.54991, 0.548344, 0.550851, 0.546835, 0.553261, 0.542959, 0.559422, 0.532981, 0.575102, 0.507146, 0.614477, 0.439512, 0.709011, 0.26173}

0.709011,0.261731,0.895855,-0.146144,0.967421,-0.318709,0.845942,
-0.0306489,0.998565,-0.396035,0.763084,0.150883,0.965278,-0.313433,0.850965,
-0.042074,0.997296,-0.392861,0.766823,0.142987,0.968812,-0.322135,0.842637,
-0.0231573,0.999181,-0.397576,0.761259,0.154727,0.963489,-0.309035,0.855089,
-0.0514898,0.995951,-0.389497,0.770754,0.134655,0.972336,-0.330829,0.834097,
-0.00388856}

(vi) 6. rankta 0.5494 noktası $\Delta_0^{(6)} = [-\alpha^6, \alpha^6] = [-0.00406753, 0.00406753]$ aralığına
55. iterasyonda düşer.

{0.5494,0.549162,0.549543,0.548932,0.54991,0.548344,0.550851,0.546835,
0.553261,0.542959,0.559422,0.532981,0.575102,0.507146,0.614477,0.439512,
0.709011,0.261731,0.895855,-0.146144,0.967421,-0.318709,0.845942,
-0.0306489,0.998565,-0.396035,0.763084,0.150883,0.965278,-0.313433,0.850965,
-0.042074,0.997296,-0.392861,0.766823,0.142987,0.968812,-0.322135,0.842637,
-0.0231573,0.999181,-0.397576,0.761259,0.154727,0.963489,-0.309035,0.855089,
-0.0514898,0.995951,-0.389497,0.770754,0.134655,0.972336,-0.330829,0.834097,
-0.00388856}

(vii) 7. rankta 0.5494 noktası $\Delta_0^{(7)} = [-\alpha^7, \alpha^7] = [-0.00162512, 0.00162512]$ aralığına
119. iterasyonda düşer.

{0.5494,0.549162,0.549543,0.548932,0.54991,0.548344,0.550851,0.546835,
0.553261,0.542959,0.559422,0.532981,0.575102,0.507146,0.614477,0.439512,
0.709011,0.261731,0.895855,-0.146144,0.967421,-0.318709,0.845942,
-0.0306489,0.998565,-0.396035,0.763084,0.150883,0.965278,-0.313433,0.850965,
-0.042074,0.997296,-0.392861,0.766823,0.142987,0.968812,-0.322135,0.842637,
-0.0231573,0.999181,-0.397576,0.761259,0.154727,0.963489,-0.309035,0.855089,
-0.0514898,0.995951,-0.389497,0.770754,0.770754,0.134655,0.972336,

-0.330829,0.834097,-0.00388856,0.999977,-0.399569,0.758888,0.15971,0.961104,
-0.303177,0.860494,-0.0638747,0.993769,-0.384048,0.777053,0.121235,0.97757,
-0.343772,0.820977,0.0254485,0.999011,-0.39715,0.761764,0.153664,0.963988,
-0.310261,0.853945,-0.0488737,0.996352,-0.3905,0.769586,0.137134,0.97131,
-0.328295,0.836609,-0.0095418,0.999861,-0.399279,0.759234,0.158983,0.961456,
-0.304043,0.859702,-0.0620562,0.994119,-0.384921,0.77605,0.123378,0.976771,
-0.341793,0.823014,0.0209146,0.999332,-0.397954,0.76081,0.155671,0.963043,
-0.307939,0.856108,-0.0538209,0.995576,-0.388561,0.771843,0.132341,0.973278,
-0.333155,0.831776,0.00132584}

Baktığımızda iterasyonlar,

17
19
23
39
55
55
119
⋮

şeklinde devam ediyor. Hatta daha ileriki ranklarda oldukça fazla yığılmalar oluyor. Başlarda giriş zamanları arasında bir düzen varmış gibi görünse de daha sonra böyle bir düzene ulaşamıyor. Bunun en büyük nedeni,

$$\phi(x) = 1 - 1.5276 \dots x^2 + 0.1048 \dots x^4 + 0.0267 \dots x^6 - 0.003527 \dots x^8 + \dots$$

Feigenbaum dönüşümümüzün katsayılarının net bir şekilde bilinmediğindendir. Sonraki çalışmalarda ϕ dönüşümümüzün daha hassas bir açılımı elde edildiğinde daha doğru sonuçlara ulaşılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Devaney, R.L., (1992). A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Perseus Books Publishing.
- [2] Scheinerman, E.R., (1995). Invitation to Dynamical Systems, Prentice Hall, New Jersey.
- [3] Arrowsmith, D.K. ve Place, C.M., (1990). An Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press.
- [4] Brin, M. ve Stuck, G., (2002). Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press.
- [5] Preston, C., (1983). Iterates of Maps on an Interval, Springer, Physics., Berlin.
- [6] Hasselblatt, B., Broer H.W. ve Takens, F., (2010). Hand Book of Dynamical Systems, Elsevier.
- [7] Alligood, K.T., Sauer, T.D. ve Yorke, J.A., (1996). Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Springer.
- [8] Campanino, M., Epstein, H. ve Ruelle, D., (1980). "On Feigenbaum's Functional Equation", Topology, 21(2): 125-129.
- [9] Campanino, M. ve Epstein, H., (1981). "On the Existence of Feigenbaum's Fixed Point", Commun. Math. Phys., 79: 261-302.
- [10] Frisch, U., Khanin, K. ve Matsumoto, T., (2005). "Multifractality of the Feigenbaum Attractor and Fractional Derivatives", Journal of Statistical Physics., 121: 671-695.
- [11] Huang, G., Wang, L. ve Liano, G., (2009). "A Note on the Unimodal Feigenbaum's Maps", International Journal of Modern Physics B, 23(14): 3101-3111.
- [12] Dzhililov, A., Karakaya, V. ve Şimşek, N., (2012). "On the Behaviour of the Spectral Characteristic of Feigenbaum's Map", P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 4(4): 259-270.
- [13] Collet, P. ve Eckmann, J.P., (1980). Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhäuser.

- [14] Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1998). Principles of Real Analysis, Third Edition, Academic Press, California.
- [15] Broer, H. ve Takens, F., (2011). Dynamical Systems and Chaos, Springer.
- [16] Cornfeld, I.P., Fomin, S.V. ve Sinai, Ya.G., (1982). Ergodic Theory, Springer, New York.
- [17] Ott, E., (1993). Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, Canada.
- [18] Agarwal, R.P., (1995). Dynamical Systems and Applications, World Scientific Publishing.
- [19] Koralov, L.B. ve Sinai, Y.G., (2007). Theory of Probability and Random Processes, Second Edition, Springer, Verlag Berlin Heidelberg.
- [20] Taylor, J.C., (1997). An Introduction to Measure and Probability, Springer, New York.
- [21] Dzhililov, A.A., (2004). "Limiting Laws for Entrance Times of Critical Mappings of a Circle", Theoretical and Mathematical Physics, 138(2): 190-207.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Arife Aysun KARAASLAN
Doğum Tarihi ve Yeri : 16.05.1988-Şanlıurfa
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : karaaslan.aysun@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Mamak Anadolu Lisesi	2006

YAYINLARI

Bildiri

1. Karaaslan A.A., Karakaya V., (2012). *On Some New Paranormed Sequence Spaces of Non-Absolute Type* International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2012). Piriştine, Kosova