

ÖNSÖZ

Değişmeli olmayan geometri, son yıllarda matematik ve fizikte ilgi çekici konulardan biri haline gelmiştir. Bu çalışmada kuantum süper düzlemden alınan kuantum süper vektörlerin toplamının da bir kuantum süper vektör olması için toplanan vektörlerin bileşenlerinin sağlaması gereken şartlar ortaya konmuş ve oluşan yapının diferansiyel geometrisi incelenmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında, tez konusunu bana veren, çalışmalar esnasında beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ocak, 2013

İshak AYDIN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT.....	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL BİLGİLER.....	3
2.1 Ön Bilgiler.....	3
BÖLÜM 3	
KUANTUM SÜPER VEKTÖRLERİN TOPLAMI.....	9
3.1 Kuantum Süper Düzlem ve Hopf Cebiri Yapısına Kısa Bir Bakış	9
3.2 Toplama İşleminin Tanımlanması.....	11
3.3 Matris Temsilleri	12
3.4 Hopf Cebiri Yapısı	13
BÖLÜM 4	
KUANTUM SÜPER VEKTÖRLERİN TOPLAMI ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP.....	16
4.1 Diferansiyel Cebir	16
4.1.1 Kovaryantlık	17

4.1.2	Diferansiyel Hopf Cebiri	22
4.2	A Üzerine Cartan-Maurer 1-formları	22
4.2.1	1-formların Hopf Cebiri Yapısı	26
4.3	Kısmi Türevler	27
BÖLÜM 5		
	$\mathcal{R}$ -MATRİS YAKLAŞIMI.....	31
5.1	Kuantum Süper Düzlem İçin $\mathcal{R}$ -Matrisi	31
5.2	Toplam Vektörler İçin $\mathcal{R}$ -Matrisi	32
BÖLÜM 6		
	SONUÇ VE ÖNERİLER.....	34
	KAYNAKLAR	35
	ÖZGEÇMİŞ	36

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
d	Dış diferansiyel operatörü
$\deg(f)$	f fonksiyonunun derecesi
$R_q(1,1)$	İki boyutlu kuantum süper düzlem üzerindeki polinomların cebiri
S_A	A cebiri üzerindeki eş-ters operatörü
ε_A	A cebiri üzerindeki eş-birim operatörü
Δ_A	A cebiri üzerindeki eş-çarpım operatörü
$\otimes$	Tensör çarpım
∂	Kısmi türev operatörü
$\wedge$	Dış çarpım

ÖZET

KUANTUM SÜPER VEKTÖRLERİN TOPLAMI VE DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

İshak AYDIN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Bu çalışmada, iki kuantum süper vektörün toplamı göz önüne alınmış ve toplam vektörünün bir kuantum süper vektör olması için gerekli şartlar araştırılmıştır. Elde edilen yapının bir Hopf cebiri yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, bu yapının diferansiyel geometrisi kurulmuştur. Son olarak, elde edilen yapılar, uygun bir $\mathcal{R}$ -matrisi verilerek, tekrar ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kuantum süper düzlem, kuantum süper vektör, q-deformasyon, Hopf cebiri, diferansiyel hesap

ABSTRACT

ADDITION OF QUANTUM SUPER VECTORS AND IT'S DIFFERENTIAL GEOMETRY

İshak AYDIN

Department of Mathematics
MSc. Thesis

Advisor: Assist. Prof. Dr. Salih ÇELİK

In this study, the addition of two quantum super vectors was considered and the necessary conditions were investigated for the addition to be a quantum super vector. It's shown that the obtained structure has a Hopf algebra structure. After then, differential geometry of this structure was set up. Finally, the obtained structures were get again with a convenient $\mathcal{R}$ -matrix.

Key Words: Quantum super plane, quantum super vector, q-deformation, Hopf algebra, differential calculus

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kuantum grupları, grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Daha tam olarak, bir kuantum grubu, bir grubun deformasyonu olup deformasyon parametresinin özel değer(ler)i için ele alınan grup ile özdeşleşir. Kuantum grubu terminolojisi, ilk kez 1986 da V. Drinfeld[1] tarafından kullanılmıştır. Daha sonra da kuantum süper gruba genelleştirilmiştir. Kuantum süper düzlemi ise 1989 yılında Manin[2] tanımlamıştır.

Kuantum (süper) düzlemin ve kuantum (süper) grupların diferansiyel geometrisini inşa etmek için oldukça zahmetli çalışmalar yapılmıştır. Koordinat fonksiyonlarıyla onların diferansiyelleri arasındaki değişimleri bulmak, 1-formları ve kısmi türevlerin bağıntılarını elde etmek gibi amaçlarla Woronowicz[3], Wess ve Zumino[4], Çelik[6] ve Soni[8] gibi isimler diferansiyel hesaba yön vermişlerdir.

1.2 Tezin Amacı

Kuantum süper düzlem fikri ortaya atıldığından beri birçok çalışma yapılmış olmasına rağmen kuantum süper vektörlerin toplamı tanımlanmamıştır. Bu çalışmada, iki farklı kuantum süper vektörün toplamının yine bir kuantum süper vektör olmasını talep ediyoruz. Bunun için toplanan vektörlerin bileşenleri üzerine ne gibi şartlar yüklemek gerektiğini, nedenlerini ve sonuçlarını araştıracağız. Bu amaçla uygun bir toplama işlemini tanımlayarak elde edilen yapının diferansiyel geometrisini kurmaya çalışacağız. Son olarak da bulduğumuz komutasyon bağıntılarını koruyan yeni bir matris bulmak için uğraşacağız.

1.3 Hipotez

Kuantum süper düzlemden herhangi iki kuantum süper vektör alıp, bunların toplamının da kuantum süper vektör olması için toplam vektörünün bileşenleri arasında sağlanması gereken deformasyon parametresine bağlı komutasyon bağıntılarını bulmaya çalışacağız. Bu vektörlerin toplamının bir kuantum süper vektör olmasını talep ederek çalışmamıza başlayacağız. Bu anlatılanları, kullanacağımız temel bilgilerin kısa bir özetini inceledikten sonra, üçüncü bölümde uygulayacağız.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

2.1 Ön Bilgiler

Bu bölümde, ileride kullanılacak bazı kavramlar, bütünlük açısından burada tanıtılacaktır.

Tanım 2.1 Üzerinde toplama ve çarpma tanımlanmış bir R kümesine, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir birimli **halka** denir.

1. $(R, +)$ bir değişmeli grup.
2. Her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$
3. Her $a \in R$ için $a1 = 1a$ olacak şekilde $1 \in R$ elamanı mevcut.
4. Her $a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$

Eğer her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R 'ye değişmeli halka denir.

Tanım 2.2 $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Eğer

$$\varphi: R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a.x, \quad (\varphi: M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x.a)$$

şeklinde tanımlanan tasvir aşağıdaki şartları sağlarsa, M 'ye bir **sol (sağ) R -modül**, kısaca sol (sağ) modül, φ tasvirine de sol (sağ) R -modül M 'nin **yapı tasviri** adı verilir:

$$\forall a, b \in R \text{ ve } \forall x, y \in M \text{ için,}$$

$$\text{i) } a(x + y) = ax + ay, \quad ((x + y)a = xa + ya)$$

$$\text{ii) } (a + b)x = ax + bx, \quad (x(a + b) = xa + xb)$$

$$\text{iii) } (ab)x = a(bx), \quad (x(ab) = (xa)b)$$

$$\text{iv) } 1_R x = x, \quad (x1_R = x)$$

Eğer M hem sağ hem sol R -modül ise M 'ye kısaca **modül** denir. Ek olarak R halkası bir cisim ise, M modülüne **vektör** uzayı veya bir **lineer uzay** denir.

Tanım 2.3 V ve W , K üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere,

$$T: V \mapsto W$$

tasviri, her $v_1, v_2 \in V$ ve $a, b \in K$ için

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)$$

şartını sağlarsa, bir **lineer** tasvir adını alır.

Tanım 2.4 U, V ve W , K üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasviri aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa φ ye bir **bi-lineer** tasvir denir.

$u, u' \in U; v, v' \in V$ ve $\lambda, \mu \in K$ için,

$$i) \quad \varphi(\lambda u + \mu u', v) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u', v),$$

$$ii) \quad \varphi(u, \lambda v + \mu v') = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, v').$$

Kabul edelim ki U , m – boyutlu ve V , n – boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere

$\{\vec{u}_i\}_{i=1}^m$, U nun ve $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$, V nin taban elemanlarının kümesidir. Bu takdirde $1 \leq i \leq m$

ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere mn tane (i, j) indisi mevcut olduğundan bu indis çiftleri W

daki bir $\{\vec{w}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca,

$\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasviri, $\vec{x} = x^i \vec{u}_i$ ve $\vec{y} = y^j \vec{v}_j$ olmak üzere

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x^i y^j \vec{w}_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. Aşikâr olarak φ , bir bi-lineer tasvirdir ve $\varphi(U \times V) \subseteq W$ (görüntü)

kümesi, $\{\vec{w}_{ij}\}$ tabanını ihtiva eder. Dolayısıyla φ , W uzayını gerer.

Sonuç olarak, U ve V iki vektör uzayı olmak üzere bir W vektör uzayı için aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa W uzayına, U ve V uzaylarının **tensör** çarpımı denir ve sembolik olarak $U \otimes V$ ile gösterilir.

i) $\varphi(U \times V), W$ yı gerer.

ii) $\Psi : U \times V \rightarrow W_I$ herhangi bir bi-lineer tasvir ise $\Psi = \Phi \circ \varphi$ olacak şekilde bir

$\Phi : W \rightarrow W_I$ lineer tasviri mevcuttur.

Tanım 2.5 $T_1 : U_1 \mapsto V_1, T_2 : U_2 \mapsto V_2$, birer lineer tasvir olsun. Bu takdirde, $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için

$$\Phi : U_1 \otimes U_2 \mapsto V_1 \otimes V_2, \quad \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan tasvir lineerdir. Buradaki Φ 'ye T_1 ve T_2 'nin **tensor çarpımı** denir ve $\Phi = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 A bir küme ve K bir cisim olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa A 'ya K üzerinde bir **cebiri** denir.

i) A , toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır.

ii) A , toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte K üzerinde bir vektör uzayıdır.

iii) Her $a, b \in A$ ve her $\lambda \in K$ için

$$(\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$$

Tanım 2.7 G bir grup ve K bir cisim olsun. A ile G 'den K 'ya olan fonksiyonların kümesini gösterelim. Yani

$$A = \text{Map}(G, K) = \{f \mid f : G \mapsto K\}$$

olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa, A bir K -**cebiri** olur.

$$(1) (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

$$(2) (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(3) (fg)(x) = f(x)g(x), \quad f, g \in A, \quad \alpha \in K, \quad x \in G.$$

Eğer bir lineer $T : A \rightarrow A$ tasviri

$$T(f.g) = T(f).T(g)$$

eşitliğini de sağlarsa, T 'ye bir **lineer homomorfizm** veya **cebiri homomorfizmi** denir.

Bir K -cebiri (basitlik için sadece cebiri diyeceğiz), genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. Bir cebiri, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K -vektör uzayı olarak düşünülür:

$$\mu: A \otimes A \rightarrow A, \mu(a \otimes b) = a.b, \\ \eta: K \rightarrow A, \eta(k) = k.I.$$

Burada I, A 'nın birim elamanıdır. Bu tasvirler için

$$\begin{aligned} \mu \circ (\text{id} \otimes \mu) &= \mu \circ (\mu \otimes \text{id}) \quad (\text{birleşme}) \\ \mu \circ (\text{id} \otimes \eta) &= \mu \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{birim}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

özellikleri geçerlidir. (birleşme) aksiyomu, μ çarpma tasvirinin birleşme özelliğini ifade ederken, (birim) aksiyomu, $\eta(1)$ 'in A 'nın hem sağ hem de sol birim elmanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan (A, μ, η) üçlüsüne bir **cebiri** diyeceğiz.

Eğer $A = \text{Map}(G, K)$ ve $A \otimes A = \text{Map}(G \times G, K)$ olduğunu kabul edersek, G deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmleri tanımlayabiliriz. Her $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} \Delta: A &\rightarrow A \otimes A, \Delta f(x \otimes y) = f(x.y), \\ \varepsilon: A &\rightarrow K, \varepsilon(f) = f(e). \end{aligned}$$

Burada e , G nin birim elamanıdır. Δ 'ya cebirin bir **eş-çarpması** ve ε tasvirine de cebirin **eş-birimi** denmektedir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla μ ve η tasvirleri için verilen (birleşme) ve (birim) özelliklerine (denklem (2.1)) dual olan özelliklere sahiptir. Yani

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta &= (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta \quad (\text{eş-birleşme}) \\ \mu \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta &= \text{id} = \mu \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad (\text{eş-birim}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dır.

Tanım 2.8 Genel olarak, K üzerindeki bir lineer A uzayına, yukarıda tanımlanan μ, η, Δ K -lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-kocebiri** (kısaca **kocebiri**) denir.

Tanım 2.9 A lineer uzayına $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$ K -lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-bicebiri** (kısaca **bicebiri**) denir.

Tanım 2.10 [Abe,9] $f \in A, x \in G$ için

$$S: A \rightarrow A, Sf(x) = f(x^{-1})$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\mu \circ (\text{id} \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes \text{id})\Delta \quad (2.3)$$

özelliğini sağlayan bir S cebir antihomomorfizm (**eş-ters**) ile $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısına bir **Hopf** cebiri denir. Bundan sonra, kısalığı bakımından bir Hopf cebiri için, $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısını değil sadece A 'yı kullanacağız.

Eğer A bir **süper Hopf** cebiri ise, $A \otimes A$ 'daki çarpma

$$(X \otimes Y)(Z \otimes W) = (-1)^{\deg(Y)\deg(Z)}(XZ \otimes YW) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\deg(f) = \begin{cases} 0, & f \text{ çift dereceden} \\ 1, & f \text{ tek dereceden} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde dir.

Burada, çift dereceden elemanlar her elemanla komut edebilen elemanlar, tek dereceden elemanlar ise kendi aralarında anti-komutatif ve kareleri sıfır olan elemanlardır.

Tanım 2.11 C , bir kocebiri olsun. Eğer bir lineer M uzayı ve bir lineer

$$\Psi : M \rightarrow M \otimes C$$

tasviri için aşağıdaki diyagramlar komutatif ise (M, Ψ) ikilisine bir sağ C – komodül denir. Bir sol C – komodül de benzer şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{array}{ccc} M \otimes K & \xleftarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & M \otimes C \\ & \nwarrow \cong & \uparrow \psi \\ & & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\psi \otimes \text{id}} & M \otimes C \\ \uparrow \text{id} \otimes \Delta & & \uparrow \psi \\ M \otimes C & \xleftarrow{\psi} & M \end{array}$$

Bir bimodülün tanımı için aşağıdaki açıklamalara ihtiyaç vardır:

B , bir bicebir ve M de

$$\varphi_M : M \otimes B \rightarrow M, \quad \varphi_M(m \otimes x) = mx$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte bir sağ B – modül olsun. Bu durumda,

$$\varphi_{M \otimes B} : (M \otimes B) \otimes B \rightarrow M \otimes B,$$

$$\varphi_{M \otimes B}(m \otimes x \otimes y) = \sum_{(y)} my_{(1)} \otimes xy_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte, $M \otimes B$ de bir sağ B -modül olur. Buna ek olarak,

$$\Psi_M : M \rightarrow M \otimes B$$

K -lineer yapı dönüşümü ile birlikte M bir B -komodül ise,

$$\Psi_{M \otimes B} : M \otimes B \rightarrow (M \otimes B) \otimes B,$$

$$\Psi_{M \otimes B}(m \otimes x) = \sum_{(m)(x)} m_{(0)} \otimes x_{(1)} \otimes m_{(1)}x_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B$$

şeklinde tanımlanan K -lineer yapı dönüşümüyle birlikte $M \otimes B$ bir B -komodül olur.

Bu durumda bir bimodülün tanımını şu şekilde verebiliriz:

Tanım 2.12 Eğer M , hem sağ B -modül ve hem de B -komodül olmak üzere aşağıdaki koşul sağlanırsa M 'ye bir B -**bimodül** denir:

- φ_M 'nin bir sağ B -komodül homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart Ψ_M 'nin bir sağ B -modül homomorfizmi olmasıdır.

BÖLÜM 3

KUANTUM SÜPER VEKTÖRLERİN TOPLAMI

Bu bölümde kuantum süper düzleme ait iki vektörün toplamı ele alınacak ve bu toplamın sonucunda elde edilen yapının da bir kuantum süper vektör olması için gerekli şartlar araştırılacaktır.

3.1 Kuantum Süper Düzlem ve Hopf Cebiri Yapısına Kısa Bir Bakış

Tanım 3.1 $K\{x, \theta\}$ bir serbest cebir olsun. Manin[2] kuantum süper düzlemi; x, θ koordinat fonksiyonları için, $q \neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere;

$$x\theta = q\theta x, \theta^2 = 0 \quad (3.1)$$

bağıntıları ile tanımlanmıştır.

Aslında, kuantum süper düzlem;

I_q , $x\theta - q\theta x$ ve θ^2 elamanlarıyla oluşturulmuş, $K\{x, \theta\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere;

$$K_q[x, \theta] = K\{x, \theta\}/I_q$$

bölüm cebiri olarak tanımlanır.

Kompleks sayılar üzerindeki bu cebir polinomların cebiridir. Bu cebiri $Fun(Rq(1,1))$ ile göstereceğiz. Bu cebir $q \rightarrow 1$ limitinde değişmeli olur ve $C[x, \theta]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür. $Fun(Rq(1,1))$ cebirine birim elemanın eklenmesiyle elde edilen cebiri A ile göstereceğiz.

Aşağıda verilen kuantum düzlemin Hopf cebir yapısı ile ilgili bağıntılar Çelik[5]' ten alınmıştır.

Kabul edelim ki x ' in tersi mevcut, yani

$$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$$

olsun. Bu durumda A cebiri üzerindeki bir cebir homomorfizmi olan $\Delta_A: A \rightarrow A \otimes A$ eş-çarpımının koordinat fonksiyonları üzerine etkisi şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}\Delta_A(x) &= x \otimes x \\ \Delta_A(\theta) &= x \otimes \theta + \theta \otimes x\end{aligned}\tag{3.2}$$

Bu tasvir,

$$(id \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A = (\Delta_A \otimes id) \circ \Delta_A\tag{3.3}$$

şeklindeki eş-birleşme özelliğine sahiptir ve (3.1) bağıntılarını korur.

A cebiri üzerindeki eş-birim ve eş-ters tasvirleri ise şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\varepsilon_A: A \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varepsilon_A(x) = 1, \quad \varepsilon_A(\theta) = 0\tag{3.4}$$

$$S_A: A \rightarrow A, \quad S_A(x) = x^{-1}, \quad S_A(\theta) = -x^{-1}\theta x^{-1}\tag{3.5}$$

Bu tasvirler,

$$\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta_A = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A,$$

$$\mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta_A = \varepsilon_A = \mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta_A$$

özelliklerini sağlar ve (3.1) kuadratik bağıntılarını korur. Netice itibariyle A cebiri, bir süper Hopf cebiri yapısına sahiptir.

Tanım 3.2 Kuantum süper vektör;

bileşenleri x ve θ olan ve bileşenleri arasında (3.1) kuadratik bağıntıları korunan vektöre bir kuantum süper vektör denir[2]. Eğer X , bir kuantum süper vektör ise,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \text{ yazacağız.}$$

Bu kısa önbilgilerden sonra orijinal kısımlara geçebiliriz.

3.2 Toplama İşleminin Tanımlanması: Bu çalışmanın esas problemi olan, iki kuantum süper vektörün toplamının hangi şartlarda bir kuantum süper vektör olacağı burada incelenecektir:

$X' = \begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix}$ ve $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ \theta'' \end{pmatrix}$, birer kuantum süper vektör olsun. Yani hem x', θ' ve hem de x'', θ'' (3.1) bağıntılarını sağlasın. Bu iki kuantum süper vektörün toplamı için

$$X''' = X' + X'' = \begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ \theta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x'' \\ \theta' + \theta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''' \\ \theta''' \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad X = \frac{1}{2}X''' \quad (3.6)$$

yazalım. Hedefimiz X ile gösterilen toplam vektörünün hangi durumlarda bir kuantum süper vektör olacağını araştırmaktır. Bu aşağıdaki önermeyle verilmiştir.

Önerme 3.3 Eğer $x', \theta', x'', \theta''$ koordinat fonksiyonları arasında

$$\begin{aligned} x'x'' &= x''x' \\ x'\theta'' &= q\theta''x' \\ \theta'x'' &= q^{-1}x''\theta' \\ \theta'\theta'' &= -\theta''\theta' \end{aligned} \quad (3.7)$$

bağıntıları sağlanırsa X vektörü, bir kuantum süper vektördür.

İspat: İstenileni elde etmek için (3.1) deki iki bağıntının gerçekleştiğini göstereceğiz.

Burada, $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$, $\theta = \frac{1}{2}(\theta' + \theta'')$ olup,

$$\begin{aligned} x\theta &= \frac{1}{4}(x' + x'')(\theta' + \theta'') \\ &= \frac{1}{4}(x'\theta' + x'\theta'' + x''\theta' + x''\theta'') \\ &= \frac{1}{4}(q\theta'x' + q\theta''x' + q\theta'x'' + q\theta''x'') \\ &= q\frac{1}{4}(\theta' + \theta'')(x' + x'') \\ &= q\theta x \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \theta^2 &= \frac{1}{4}(\theta' + \theta'')(\theta' + \theta'') \\ &= \frac{1}{4}(\theta'^2 + \theta'\theta'' + \theta''\theta' + \theta''^2) \end{aligned}$$

$$= 0$$

elde ederiz.

Öyleyse, (3.1) bağıntıları sağlanmıştır ve dolayısıyla X vektörü bir kuantum süper vektördür.

Not 1: Hiç şüphe yoktur ki

$$x'\theta'' + x''\theta' = q\theta''x' + q\theta'x''$$

denklemini korunacak şekilde daha genel bağıntılar tanımlamak da mümkündür. Fakat süper Hopf cebiri yapısına ulaşmak ve geometriyi kurmak için (3.7) bağıntılarını kullanacağız. Diğer durumlarda, süper Hopf cebiri yapısını kurmak ve geometrik yapıya ulaşmak oldukça zor olmuştur ve başka bir çalışmaya bırakılmıştır.

3.3 Matris Temsilleri:

$x', \theta', x'', \theta''$ koordinat fonksiyonlarına yüklediğimiz (3.7) bağıntı sistemini sağlayan bazı matris temsilleri şu şekildedir:

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \theta' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x'' = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta'' = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Bu temsiller (3.1) ve (3.7) ile verilen bağıntıları sağlar. Örneğin;

$$x'\theta' = \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta'x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$x'\theta' = q\theta'x' \text{ ve}$$

$$\theta'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

dır.

Benzer şekilde

$$x'x'' = \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$x''x' = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$x'x'' = x''x'$$

eşitliği de doğrulanır. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Ayrıca;

$$x = \frac{1}{2}(x' + x'') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\lambda + 1)q & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \frac{1}{2}(\theta' + \theta'') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan;

$$x\theta = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & (1 - \lambda^2)q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = q\theta x$$

eşitliği de görülmektedir.

3.4 Hopf cebiri yapısı:

Bu kısımda, kurduğumuz yapının süper Hopf cebiri yapısını inceleyeceğiz;

1) $\Delta_A: A \rightarrow A \otimes A$ eş-çarpım tasvirinin x ve θ koordinat fonksiyonlarına etkisi

$$\begin{aligned} \Delta_A(x) &= \Delta_A\left(\frac{1}{2}(x' + x'')\right) = \frac{1}{2}(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\ \Delta_A(\theta) &= \Delta_A\left(\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')\right) = \frac{1}{2}(x' \otimes \theta' + \theta' \otimes x' + x'' \otimes \theta'' + \theta'' \otimes x'') \end{aligned} \quad (3.8)$$

dir. Bunlar (3.1) de verilen komutasyon bağıntılarını korur. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \Delta_A(x\theta) &= \Delta_A\left(\frac{1}{2}(x' + x'')\right) \Delta\left(\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')\right) \\ &= \frac{1}{2}(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \frac{1}{2}(x' \otimes \theta' + \theta' \otimes x' + x'' \otimes \theta'' + \theta'' \otimes x'') \\ &= \frac{1}{4}(x'^2 \otimes x' \theta' + x' \theta' \otimes x'^2 + x' x'' \otimes x' \theta'' + x' \theta'' \otimes x' x'' + x'' x' \otimes x'' \theta' + \\ &\quad x'' \theta' \otimes x'' x' + x''^2 \otimes x'' \theta'' + x'' \theta'' \otimes x''^2) \\ &= \frac{1}{4}(x'^2 \otimes q\theta' x' + q\theta' x' \otimes x'^2 + x'' x' \otimes q\theta'' x' + q\theta'' x' \otimes x'' x' + \\ &\quad x' x'' \otimes q\theta' x'' + q\theta' x'' \otimes x' x'' + x''^2 \otimes q\theta'' x'' + q\theta'' x'' \otimes x''^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q \frac{1}{2} (x' \otimes \theta' + \theta' \otimes x' + x'' \otimes \theta'' + \theta'' \otimes x'') \frac{1}{2} (x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\
&= q \Delta_A (\theta x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\Delta_A (\theta^2) = 0$$

olduğu gösterilebilir.

Bu işlemlerde sırasıyla eş-çarpım tasvirinin lineerliği ve (3.7) ile verilen komutasyon bağıntıları kullanılmıştır. Şimdi de (3.3) eş-birleşme özelliğinin sağlandığını x için göstereyim:

$$\begin{aligned}
(\Delta_A \otimes id) \circ \Delta_A (x) &= (\Delta_A \otimes id) \left(\frac{1}{2} (x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \right) \\
&= \frac{1}{2} \Delta_A (x') \otimes id(x') + \Delta_A (x'') \otimes id(x'') \\
&= \frac{1}{2} (x' \otimes x' \otimes x' + x'' \otimes x'' \otimes x'') \\
&= \frac{1}{2} id(x') \otimes \Delta_A (x') + id(x'') \otimes \Delta_A (x'') \\
&= (id \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A (x)
\end{aligned}$$

θ için de benzer işlemler yapılabilir.

2) $\varepsilon_A: A \rightarrow \mathbb{C}$ eş-birim tasvirinin x ve θ 'ya etkisi şu şekildedir;

$$\varepsilon_A(x) = \varepsilon_A \left(\frac{1}{2} (x' + x'') \right) = 1, \quad \varepsilon_A(\theta) = \varepsilon_A \left(\frac{1}{2} (\theta' + \theta'') \right) = 0 \quad (3.9)$$

Eş-birim tasvirinin bir cebir homomorfizmi olmasından yararlanılarak (3.1) komutasyon bağıntılarının korunduğu ve $\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta_A = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A$ eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

3) $S_A: A \rightarrow A$ eş-ters tasvirinin x ve θ 'ya etkisi

$$\begin{aligned}
S_A(x) &= S_A \left(\frac{1}{2} (x' + x'') \right) = \frac{1}{2} \{S_A(x') + S_A(x'')\} = \frac{1}{2} (x'^{-1} + x''^{-1}) \\
S_A(\theta) &= S_A \left(\frac{1}{2} (\theta' + \theta'') \right) = \frac{1}{2} (-x'^{-1} \theta' x'^{-1} - x''^{-1} \theta'' x''^{-1})
\end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklindedir. Bu tasvirin de $\mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta_A = \varepsilon_A = \mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta_A$ eşitliğini sağladığı x ve θ koordinat fonksiyonları için ayrı ayrı gösterilebilir.

Tanımlanmış olan eş-çarpım, eş-birim ve eş-ters tasvirleriyle A cebiri bir süper Hopf Cebiri yapısına sahip olur.

Not 2: Bundan sonraki bölümlerde, işlemlerde kolaylık sağlaması amacıyla (3.6) eşitliğindeki " $\frac{1}{2}$ " yi göz ardı ederek;

$$x = x' + x'' \quad \text{ve} \quad \theta = \theta' + \theta'' \quad (3.11)$$

alacağız.

BÖLÜM 4

KUANTUM SÜPER VEKTÖRLERİN TOPLAMI ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümdeki amacımız, bir önceki bölümde verdiğimiz toplama işlemi ile A Hopf cebirinin bir diferansiyel cebirini elde etmektir. Bunu elde etmek için koordinat fonksiyonlarının diferansiyellerini alıp, üzerlerine yeni yapılar kuracağız. Önce diferansiyel d operatörünün özelliklerini verelim. d operatörü, A 'nın jeneratörlerini diferansiyellerine dönüştüren bir operatördür ve şu şekilde tanımlıdır;

$$d: A \rightarrow dA, \quad a \mapsto da, \quad a \in \{x', \theta', x'', \theta''\}$$

Bu d operatörü;

$$d \wedge d = d^2 = 0 \quad (\text{nilpotentlik}) \tag{4.1}$$

ve

$$d(fg) = d(f)g + (-1)^{\deg(f)}fd(g) \quad (\text{Leibniz}) \tag{4.2}$$

özelliklerine sahiptir.

4.1 Diferansiyel Cebir

Bilindiği üzere klasik diferansiyel hesapta fonksiyonlar, diferansiyellerle değişme özelliğine sahiptir. Cebirsel açıdan, 1-formların uzayı 1.mertebeden diferansiyellerle oluşturulmuş düzgün fonksiyonların cebiri üzerinde bir serbest bi-modüldür ve komutatiflik, sağ ve sol yapıların birbirine nasıl bağlandığını gösterir.

A cebiri değişmeli olmadığından, koordinat fonksiyonları ile onların diferansiyellerinin de değişmeli olmayacağı beklenir. O halde diferansiyel hesabı oluşturmak amacıyla, önce koordinat fonksiyonlarıyla onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntılarını bulmak gerekir. Daha sonra oluşan yapının Hopf cebir yapısını kurmak önemli bir problemidir, bu problemi aşmak için Çelik [6] kovaryantlığı tanımlamış ve kuantum süper düzlemin bileşenleri ile onların diferansiyelleri arasında sağlanan q -komutasyon bağıntılarını

$$\begin{aligned}
x dx &= dx x \\
x d\theta &= q d\theta x \\
\theta dx &= -q^{-1} dx \theta \\
\theta d\theta &= d\theta \theta \\
dx d\theta &= q d\theta dx \\
(dx)^2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde elde etmiştir.

4.1.1 Kovaryantlık

Sol ve sağ-kovaryant bimodül tanımlarıyla başlayalım.

Tanım 4.1 Sağ-Kovaryant Bimodül

Ω, A Hopf cebiri üzerinde bir bimodül olsun. Bir Δ^R tasviri;

$$\Delta^R: \Omega \rightarrow \Omega \otimes A, \quad \Delta^R(da) = (d \otimes id) \Delta_A(a), \quad \forall a \in A$$

şeklinde tanımlanmıştır. Kolayca gösterilebilir ki, her $a_1, b_1 \in A$ ve $\rho_1, \rho_2 \in \Omega$ için,

$$\Delta^R(a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2) = \Delta_A(a_1) \Delta^R(\rho_1) + \Delta_A(a_2) \Delta^R(\rho_2) \tag{4.4}$$

olmak üzere Δ^R tasviri bir lineer homomorfizmdir. Eğer,

$$\begin{aligned}
(\Delta_A \otimes id) \circ \Delta^R &= (id \otimes \Delta_A) \circ \Delta^R, \\
(id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta^R &= id
\end{aligned} \tag{4.5}$$

özellikleri mevcut ise (Ω, Δ^R) ikilisine bir sağ-kovaryant bimodül denir.

Tanım 4.2 Sol-Kovaryant Bimodül

Ω, A Hopf cebiri üzerinde bir bimodül olsun. Bir Δ^L tasviri;

$$\Delta^L : \Omega \rightarrow A \otimes \Omega, \Delta^L(da) = (\tau \otimes d) \Delta_A(a), \forall a \in A \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada

$$\tau(a) = (-1)^{\deg(a)} a$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Her $a_1, b_1 \in A$ ve $\rho_1, \rho_2 \in \Omega$ için,

$$\Delta^L(a_1\rho_1 + a_2\rho_2) = \Delta_A(a_1) \Delta^L(\rho_1) + \Delta_A(a_2) \Delta^L(\rho_2)$$

olmak üzere, Δ^L tasviri bir lineer homomorfizmdir. Eğer,

$$\begin{aligned} (\Delta_A \otimes id) \circ \Delta^L &= (id \otimes \Delta_A) \circ \Delta^L \\ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta^L &= id \end{aligned} \quad (4.7)$$

özellikleri mevcut ise (Ω, Δ^L) ikilisine bir sol-kovaryant bimodül denir.

Önerme 4.1 Toplanan vektörlerin bileşenleri olan koordinat fonksiyonları ile koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları:

$$\begin{aligned} x' dx'' &= dx'' x' \\ x'' dx' &= dx' x'' \\ x' d\theta'' &= q d\theta'' x' \\ x'' d\theta' &= q d\theta' x'' \\ \theta' dx'' &= -q^{-1} dx'' \theta' \\ \theta'' dx' &= -q^{-1} dx' \theta'' \\ \theta' d\theta'' &= d\theta'' \theta' \\ \theta'' d\theta' &= d\theta' \theta'' \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklindedir.

İspat: Sağlanması gereken, muhtemel komutasyon bağıntıları;

$$\begin{aligned} x' dx'' &= A_1 dx'' x' \\ x'' dx' &= A_2 dx' x'' \\ x' d\theta'' &= F_{11} d\theta'' x' + F_{12} dx' \theta'' \\ x'' d\theta' &= F_{21} d\theta' x'' + F_{22} dx'' \theta' \\ \theta' dx'' &= G_{11} dx'' \theta' + G_{12} d\theta' x'' \\ \theta'' dx' &= G_{21} dx' \theta'' + G_{22} d\theta'' x' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta' d\theta'' &= B_1 d\theta'' \theta' \\ \theta'' d\theta' &= B_2 d\theta' \theta''\end{aligned}\tag{4.9}$$

şeklindedir.

Buradaki A_i, B_i, F_{ij}, G_{ij} katsayıları, q deformasyon parametresine bağlıdır ve onları belirleme işi komutatif olmayan diferansiyel hesabın kovaryantlık metodu kullanılarak yapılabilir[6].

Δ^R nin birinci dereceden diferansiyellere etkisi;

$$\begin{aligned}\Delta^R(dx) &= (d \otimes id) \Delta_A(x' + x'') \\ &= (d \otimes id)(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\ &= dx' \otimes x' + dx'' \otimes x''\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\Delta^R(d\theta) &= (d \otimes id) \Delta_A(\theta' + \theta'') \\ &= (d \otimes id)(x' \otimes \theta' + \theta' \otimes x' + x'' \otimes \theta'' + \theta'' \otimes x'') \\ &= dx' \otimes \theta' + d\theta' \otimes x' + dx'' \otimes \theta'' + d\theta'' \otimes x''\end{aligned}\tag{4.11}$$

olarak bulunur.

(4.9) denklem sisteminin çözümüne ulaşmak için, Δ^R tasvirini (4.3) bağıntılarına uygularız, örneğin (4.3) deki ilk bağıntıya uygularsak,

$$\Delta^R(xdx) = \Delta^R(dx x)$$

eşitliği, (4.10) ile

$$(x' \otimes x' + x'' \otimes x'')(dx' \otimes x' + dx'' \otimes x'') = (dx' \otimes x' + dx'' \otimes x'')(x' \otimes x' + x'' \otimes x'')\tag{4.12}$$

şeklinde yazılır. Burada, parantezler dağıtıldıktan sonra (4.9)'daki 1. ve 2. eşitlikler yerine yazılıp, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$A_1 dx'' x' + A_2 dx' x'' = (dx'' x' + dx' x'')\tag{4.13}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten, bir çözüm olarak;

$$A_1 = A_2 = 1$$

buluruz. Benzer işlemler (4.3)'deki diğer bağıntılara uygulanarak, (4.9) sisteminin bir özel çözümü,

$$A_1 = A_2 = 1$$

$$F_{11} = q, \quad F_{12} = 0, \quad F_{21} = q, \quad F_{22} = 0,$$

$$G_{11} = -q^{-1}, \quad G_{12} = 0, \quad G_{21} = -q^{-1}, \quad G_{22} = 0$$

$$B_1 = B_2 = 1 \tag{4.14}$$

olarak elde edilir.

Δ^L 'nin birinci dereceden diferansiyellere etkisi;

$$\begin{aligned} \Delta^L (dx) &= (\tau \otimes d) \Delta_A (x' + x'') \\ &= (\tau \otimes d)(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\ &= x' \otimes dx' + x'' \otimes dx'' \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \Delta^L (d\theta) &= (\tau \otimes d) \Delta_A (\theta' + \theta'') \\ &= (\tau \otimes d)(x' \otimes \theta' + \theta' \otimes x' + x'' \otimes \theta'' + \theta'' \otimes x'') \\ &= x' \otimes d\theta' - \theta' \otimes dx' + x'' \otimes d\theta'' - \theta'' \otimes dx'' \end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklindedir.

Şimdi de Δ^L tasvirini, (4.3) bağıntılarından ikincisine uygulayalım:

$$\begin{aligned} \Delta^L (xd\theta) &= q \Delta^L (d\theta x) \\ \Delta^L (xd\theta) &= (x' \otimes x' + x'' \otimes x'')(x' \otimes d\theta' - \theta' \otimes dx' + x'' \otimes d\theta'' - \theta'' \otimes dx'') \\ q \Delta^L (d\theta x) &= q(x' \otimes d\theta' - \theta' \otimes dx' + x'' \otimes d\theta'' - \theta'' \otimes dx'')(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \end{aligned}$$

yazılır. Burada da uygun yerlerde (4.9) bağıntıları kullanılarak, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} F_{11}d\theta''x' + F_{12}dx'\theta'' &= qd\theta''x' \\ F_{21}d\theta'x'' + F_{22}dx''\theta' &= qd\theta'x'' \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde eldir. Burada ise;

$$F_{11} = q = F_{21}, \quad F_{12} = 0 = F_{22}$$

çözümü tutarlılık göstermektedir. Benzer işlemler (4.3) deki diğer bağıntılara da uygulanarak,

$$A_1 = A_2 = 1$$

$$\begin{aligned}
F_{11} &= q = F_{21}, & F_{12} &= 0 = F_{22} \\
G_{11} &= -q^{-1}, & G_{12} &= 0, & G_{21} &= -q^{-1}, & G_{22} &= 0 \\
B_1 &= B_2 = 1
\end{aligned} \tag{4.18}$$

çözümü elde edilir ki bu önceki çözümle tamamen aynıdır.

$dx', dx'', d\theta', d\theta''$ diferansiyellerinin birbirleriyle komutasyonlarını elde etmek için yukarıda bulduğumuz bağıntılara d diferansiyel operatörünü uyguluyoruz.

Örneğin, $x'd\theta'' - qd\theta''x' = 0$ bağıntısına d operatörü uygulanırsa,

$$dx'd\theta'' + x'd^2\theta'' - qd^2\theta''x' - (-1)^{\deg(d\theta'')}qd\theta''dx' = 0, \quad \deg(d\theta'') = 0,$$

olup d operatörünün nilpotentlik ve Leibniz (4.2) özellikleri göz önünde bulundurulduğunda

$$dx'd\theta'' = qd\theta''dx' \tag{4.19}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle,

$$\begin{aligned}
dx'dx'' &= -dx''dx' \\
dx''d\theta' &= qd\theta'dx'' \\
d\theta'd\theta'' &= d\theta''d\theta'
\end{aligned} \tag{4.20}$$

bağıntıları elde edilir.

Bulduğumuz tüm bağıntıları toplarsak,

$$\begin{aligned}
x'dx'' &= dx''x' \\
x''dx' &= dx'x'' \\
x'd\theta'' &= qd\theta''x' \\
x''d\theta' &= qd\theta'x'' \\
\theta'dx'' &= -q^{-1}dx''\theta' \\
\theta''dx' &= -q^{-1}dx'\theta'' \\
\theta'd\theta'' &= d\theta''\theta' \\
\theta''d\theta' &= d\theta'\theta'' \\
dx'dx'' &= -dx''dx' \\
dx'd\theta'' &= qd\theta''dx' \\
dx''d\theta' &= qd\theta'dx'' \\
d\theta'd\theta'' &= d\theta''d\theta'
\end{aligned} \tag{4.21}$$

komutasyon bağıntılarını elde etmiş oluruz.

4.1.2 Diferansiyel Hopf Cebiri: (4.21) bağıntılarına sahip diferansiyel cebir, aşağıda tanımlanan yapılarla birlikte bir Hopf cebiri yapısına sahip olur;

$$\begin{aligned}
 1) \Delta_\Omega: \Omega &\rightarrow \Omega \otimes \Omega, \quad \Delta_\Omega = \Delta^L + \Delta^R, \quad \Delta_\Omega|_A = \Delta_A \\
 \Delta_\Omega(dx) &= x' \otimes dx' + x'' \otimes dx'' + dx' \otimes x' + dx'' \otimes x'' \\
 \Delta_\Omega(d\theta) &= dx' \otimes \theta' + d\theta' \otimes x' + dx'' \otimes \theta'' + d\theta'' \otimes x'' + x' \otimes d\theta' - \theta' \otimes dx' + \\
 &\quad x'' \otimes d\theta'' - \theta'' \otimes dx''
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
 2) \varepsilon_\Omega: \Omega &\rightarrow \mathbb{C}, \quad \varepsilon_\Omega \circ d = d \circ \varepsilon_A, \quad \varepsilon_\Omega|_A = \varepsilon_A \\
 \varepsilon_\Omega(dx) &= 0, \quad \varepsilon_\Omega(d\theta) = 0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 3) S_\Omega: \Omega &\rightarrow \Omega, \quad S_\Omega \circ d = d \circ S_A, \quad S_\Omega|_A = S_A \\
 S_\Omega(dx) &= -x'^{-1} dx' x'^{-1} - x''^{-1} dx'' x''^{-1} \\
 S_\Omega(d\theta) &= -x'^{-1} d\theta' x'^{-1} + 2x'^{-1} dx' x'^{-1} \theta' x'^{-1} - x''^{-1} d\theta'' x''^{-1} \\
 &\quad + 2x''^{-1} dx'' x''^{-1} \theta'' x''^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Bu tasvirlerin (4.3) bağıntılarını koruduğu ve eş-birleşme, eş-birim, eş-ters özelliklerini sağladığı gösterilebilir.

Elde ettiğimiz $(\Omega, \Delta_\Omega, \varepsilon_\Omega, S_\Omega)$ yapısına *Diferansiyel Hopf Cebiri* denir.

4.2 A Üzerine Cartan-Maurer 1-formları

Bu kısımda, Cartan-Maurer 1-formlarını tanımlayacağız ve gerekli komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

Woronowicz[3]; Cartan-Maurer 1-formlarını, eş-çarpım tasvirinin A 'nın jeneratörlerine etkisini kullanarak şu şekilde tanımlamıştır:

$$w_{x_k} = \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(x_k), \quad x_k \in \{x, \theta\} \tag{4.25}$$

Bu formül yardımıyla bize gerekli olan 1-formları bulalım:

$$\begin{aligned}
 w_{x'} &= \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(x') \\
 &= \mu \circ (d \otimes S)(x' \otimes x')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu(dx' \otimes S(x')) \\
&= \mu(dx' \otimes x'^{-1}) \\
&= dx' x'^{-1}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Benzer şekilde,

$$w_{x''} = dx'' x''^{-1} \tag{4.27}$$

Buradan (3.8) bağıntısını kullanarak,

$$\begin{aligned}
w_x &= \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(x) \\
&= \mu \circ (d \otimes S)(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\
&= \mu(dx' \otimes x'^{-1} + dx'' \otimes x''^{-1}) \\
&= dx' x'^{-1} + dx'' x''^{-1} \\
&= w_{x'} + w_{x''}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

buluruz. Benzer işlemlerle,

$$w_{\theta'} = -dx' x'^{-1} \theta' x'^{-1} + d\theta' x'^{-1} \tag{4.29}$$

$$w_{\theta''} = -dx'' x''^{-1} \theta'' x''^{-1} + d\theta'' x''^{-1} \tag{4.30}$$

$$w_\theta = w_{\theta'} + w_{\theta''} \tag{4.31}$$

elde edilir.

Önerme 4.2 Cartan-Maurer 1-formlarının, cebirin jeneratörleriyle komutasyonları aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
x' w_{x''} &= w_{x''} x' \\
x'' w_{x'} &= w_{x'} x'' \\
x' w_{\theta''} &= q w_{\theta''} x' \\
x'' w_{\theta'} &= q w_{\theta'} x'' \\
\theta' w_{x''} &= -w_{x''} \theta' \\
\theta'' w_{x'} &= -w_{x'} \theta'' \\
\theta' w_{\theta''} &= q w_{\theta''} \theta' \\
\theta'' w_{\theta'} &= q w_{\theta'} \theta''
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Görüldüğü gibi bu bağıntılar $q \rightarrow 1$ limitinde klasiktir. Ayrıca 1. ve 2. vektörlerin elemanları için simetriktir.

İspat: Bu bağıntılar; (4.21) bağıntıları kullanılarak elde edilir. Gerçekten, örneğin

$$\begin{aligned}
 x'w_{x''} &= x'dx''x''^{-1} \\
 &= dx''x'x''^{-1} \\
 &= dx''x''^{-1}x' \\
 &= w_{x''}x'
 \end{aligned}$$

dir. Burada sırasıyla (4.27), (4.21), (3.7) ve tekrar (4.27) bağıntıları kullanılmıştır. Diğer eşitlikler de benzer yollarla gösterilebilir.

(4.32) bağıntıları, d operatörü uygulanarak kontrol edilebilir, yalnız bu esnada w_{x_k} ($x_k \in \{x', x''\}$) 1-formları tek olduğundan, Leibniz özelliği göz ardı edilmemelidir. Örnek olarak, (4.32) bağıntılarından ilkinin gösterelim,

$$d(x'w_{x''} - w_{x''}x') = dx'w_{x''} + x'dw_{x''} - dw_{x''}x' - (-1)^{\deg w_{x''}}w_{x''}dx'$$

Burada $\deg w_{x''} = 1$ ve $dw_{x''} = 0$ değerleri yerine yazılırsa,

$$d(x'w_{x''} - q^{-1}w_{x''}x') = dx'w_{x''} + w_{x''}dx'$$

$$w_{x''} = dx''x''^{-1} \text{ ve } dx'dx'' = -dx''dx' \text{ (4.21) olduğundan}$$

$$d(x'w_{x''} - q^{-1}w_{x''}x') = 0$$

olduğu görülür.

Önerme 4.3 Diferansiyellerin, Cartan-Maurer 1-formlarıyla komutasyonları;

$$\begin{aligned}
 dx'w_{x''} &= -w_{x''}dx' \\
 dx''w_{x'} &= -w_{x'}dx'' \\
 d\theta''w_{x'} &= w_{x'}d\theta'' \\
 d\theta'w_{x''} &= w_{x''}d\theta' \\
 d\theta'w_{\theta''} &= qw_{\theta''}d\theta' \\
 d\theta''w_{\theta'} &= qw_{\theta'}d\theta'' \\
 dx'w_{\theta''} &= qw_{\theta''}dx' \\
 dx''w_{\theta'} &= qw_{\theta'}dx''
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

şeklindedir.

İspat: Bu önermeyi ispatlamak zor değildir. Örneğin, dördüncü bağıntı; (4.27),(4.21) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}
d\theta'w_{x''} &= d\theta'(dx''x''^{-1}) \\
&= q^{-1}dx''d\theta'x''^{-1} \\
&= dx''x''^{-1}d\theta' \\
&= w_{x''}d\theta'
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir. Diğerleri de benzer yollarla gösterilebilir.

(4.33) bağıntılarını da d operatörünü uygulayarak kontrol etmek mümkündür.

Önerme 4.4 Cartan-Maurer 1-formlarının birbiriyle komutasyonları;

$$\begin{aligned}
w_{x'}w_{x''} &= -w_{x''}w_{x'} \\
w_{\theta'}w_{\theta''} &= w_{\theta''}w_{\theta'} \\
w_{x'}w_{\theta''} &= w_{\theta''}w_{x'} \\
w_{x''}w_{\theta'} &= w_{\theta'}w_{x''}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

şeklindedir.

(4.32), (4.33) ve (4.34) bağıntıları $w_x = w_{x'} + w_{x''}$ ve $w_y = w_{\theta'} + w_{\theta''}$ eşitlikleri ile birlikte kullanılarak,

$$\begin{aligned}
xw_x &= (x' + x'')(w_{x'} + w_{x''}) \\
&= x'w_{x'} + x''w_{x'} + x'w_{x''} + x''w_{x''} \\
&= (w_{x'} + w_{x''})(x' + x'') \\
&= w_x x
\end{aligned}$$

elde edilir. Bunu yaparken 3. satırda (4.32) bağıntıları uygun yerlerde kullanılmıştır. Tamamen benzer yollarla,

$$\begin{aligned}
xw_x &= w_x x \\
xw_\theta &= qw_\theta x \\
\theta w_\theta &= qw_\theta \theta \\
\theta w_x &= -w_x \theta \\
dxw_x &= 0 = -w_x dx \\
d\theta w_x &= w_x d\theta \\
d\theta w_\theta &= qw_\theta d\theta \\
dxw_\theta &= qw_\theta dx \\
(w_x)^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$w_x w_\theta = w_\theta w_x \quad (4.35)$$

elde edilir. Bu bağıntılar ise Çelik' in bulduğu bağıntıların aynısıdır[7]. Uyumluluk yine d operatörü uygulanarak kontrol edilebilir.

w_x, w_θ elemanlarıyla oluşan cebiri W ile göstereceğiz.

4.2.1 1-formların Hopf Cebiri Yapısı

A ve Ω üzerindeki Hopf cebiri yapıları, W 'ya bir Hopf cebiri yapısı kazandırır. Bu aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

1) $\Delta_W: W \rightarrow W \otimes W$, nın W 'nin elemanlarına etkisi, eğer

$\Delta_W \big|_A = \Delta_A$ ve $\Delta_W \big|_\Omega = \Delta_\Omega$ olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \Delta_W(w_x) &= \Delta_W(w_{x'} + w_{x''}) \\ &= \Delta_W(dx' x'^{-1} + dx'' x''^{-1}) \\ &= \Delta_W(dx') \Delta_W(x'^{-1}) + \Delta_W(dx'') \Delta_W(x''^{-1}) \\ &= (x' \otimes dx' + dx' \otimes x')(x'^{-1} \otimes x'^{-1}) + (x'' \otimes dx'' + dx'' \otimes x'')(x''^{-1} \otimes x''^{-1}) \\ &= 1 \otimes dx' x'^{-1} + dx' x'^{-1} \otimes 1 + 1 \otimes dx'' x''^{-1} + dx'' x''^{-1} \otimes 1 \\ &= 1 \otimes w_{x'} + w_{x'} \otimes 1 + 1 \otimes w_{x''} + w_{x''} \otimes 1, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \Delta_W(w_\theta) &= \Delta_W(w_{\theta'} + w_{\theta''}) \\ &= w_{\theta'} \otimes 1 + 1 \otimes w_{\theta'} + w_{\theta''} \otimes 1 + 1 \otimes w_{\theta''} \end{aligned} \quad (4.37)$$

elde edilir.

2) $\varepsilon_W: W \rightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon_W \big|_A = \varepsilon_A$, $\varepsilon_W \big|_\Omega = \varepsilon_\Omega$ şeklinde tanımlanan eş-birimin etkisi,

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(w_x) &= \varepsilon_W(w_{x'} + w_{x''}) \\ &= \varepsilon_W(dx' x'^{-1} + dx'' x''^{-1}) \\ &= \varepsilon_W(dx') \varepsilon_W(x'^{-1}) + \varepsilon_W(dx'') \varepsilon_W(x''^{-1}) \\ &= 0.1 + 0.1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\varepsilon_W(w_\theta) = \varepsilon_W(w_{\theta'} + w_{\theta''})$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_W(-dx'x'^{-1}\theta'x'^{-1} + d\theta'x'^{-1} - dx''x''^{-1}\theta''x''^{-1} + d\theta''x''^{-1}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

şeklindedir.

$$3) S_W : W \rightarrow W, \quad S_W|_A = S_A, \quad S_W|_\Omega = S_\Omega, \text{ eş-tersin etkisi,}$$

$$S_W(w_x) = -w_{x'} - w_{x''} \tag{4.40}$$

$$S_W(w_\theta) = -w_{\theta'} - w_{\theta''} \tag{4.41}$$

olarak belirlenir.

Bu tasvirler,

$(id \otimes \Delta_W) \circ \Delta_W = (\Delta_W \otimes id) \circ \Delta_W$, $\mu \circ (\varepsilon_W \otimes id) \circ \Delta_W = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_W) \circ \Delta_W$ ve $\mu \circ (S_W \otimes id) \circ \Delta_W = \varepsilon_W = \mu \circ (id \otimes S_W) \circ \Delta_W$ özdeşliklerini korur. Ayrıca, bu tasvirler, (4.35) bağıntılarını korur. Dolayısıyla, $(W, \Delta_W, \varepsilon_W, S_W)$ yapısı bir Hopf cebiri yapısına sahiptir.

4.3 Kısmi Türevler

Bu kısımda, cebirin koordinat fonksiyonlarının kısmi türevlerinin; koordinat fonksiyonları, bunların diferansiyelleri ve kısmi türevlerin kendi aralarında sağlanan q-komutasyon bağıntıları ortaya konacaktır.

İlk olarak, koordinat fonksiyonları ile onların kısmi türevleri arasındaki bağıntıları elde edeceğiz. Ancak, önce bazı bilinen yapıları vermemiz gerekiyor[7].

f , A cebiri üzerinde tanımlanmış keyfi bir fonksiyon olsun. d dış türev operatörü,

$$df = (dx\partial_x + d\theta\partial_\theta)f \tag{4.42}$$

şeklinde tanımlanır. Kısmi türevlerin koordinat fonksiyonlarıyla bağıntılarını bulabilmek için f yerine sırasıyla xf ve θf yazarak Leibniz kuralı uygulanır. Açık olarak bir tanesini verelim:

$$\begin{aligned}
d(xf) &= (dx)f + x(df) \\
&= (dx)f + x(dx\partial_x + d\theta\partial_\theta)f \\
&= (dx)f + (dxx\partial_x + qd\theta x\partial_\theta)f \\
&= (dx(1 + x\partial_x) + d\theta(qx\partial_\theta))f
\end{aligned}$$

$$= (dx\partial_x + d\theta\partial_\theta)(xf)$$

eşitliğinde diferansiyellerin katsayıları eşitlenerek,

$$\partial_x x = 1 + x\partial_x, \quad \partial_\theta x = qx\partial_\theta$$

bulunur. Bu işlemlerde (4.3) bağıntıları kullanılmıştır.

Lemma 4.1 [Çelik,7] Kısmi türevlerin koordinat fonksiyonları ile değişimleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned}\partial_x x &= 1 + x\partial_x \\ \partial_\theta x &= qx\partial_\theta \\ \partial_x \theta &= q^{-1}\theta\partial_x \\ \partial_\theta \theta &= 1 - \theta\partial_\theta\end{aligned}\tag{4.43}$$

Lemma 4.2 [Çelik,7] Kısmi türev operatörlerinin diferansiyellerle değişimleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned}\partial_x dx &= dx\partial_x \\ \partial_x d\theta &= q^{-1}d\theta\partial_x \\ \partial_\theta dx &= -qdx\partial_\theta \\ \partial_\theta d\theta &= d\theta\partial_\theta\end{aligned}\tag{4.45}$$

Lemma 4.3 [Çelik,7] Kısmi türevlerin kendi aralarındaki bağıntılar ise d operatörünün nilpotentlik şartından,

$$\partial_x \partial_\theta = q\partial_\theta \partial_x \quad \text{ve} \quad \partial_\theta^2 = 0\tag{4.46}$$

şeklinde ve kısmi türevlerin d operatörü ile bağıntıları ise,

$$\partial_x d = d\partial_x, \quad \partial_\theta d = -d\partial_\theta\tag{4.47}$$

şeklindedir.

Önerme 4.5 Şimdi, $x = x' + x''$ ve $\theta = \theta' + \theta''$ için bağıntıları verebiliriz:

$$\lambda = e^{2\pi i/3} \text{ ve } \partial_x = \partial_{x'} + \partial_{x''}, \partial_\theta = \partial_{\theta'} + \partial_{\theta''}\tag{4.48}$$

olmak üzere,

$$\partial_{x'} x'' = \lambda^{-1} + x'' \partial_{x'}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{x''}x' &= \lambda + x'\partial_{x''} \\
\partial_{x'}\theta'' &= q^{-1}\theta''\partial_{x'} \\
\partial_{x''}\theta' &= q^{-1}\theta'\partial_{x''} \\
\partial_{\theta'}x'' &= qx''\partial_{\theta'} \\
\partial_{\theta''}x' &= qx'\partial_{\theta''} \\
\partial_{\theta'}\theta'' &= \lambda^{-1} - \theta''\partial_{\theta'} \\
\partial_{\theta''}\theta' &= \lambda - \theta'\partial_{\theta''} \\
\partial_{x'}dx'' &= dx''\partial_{x'} \\
\partial_{x''}dx' &= dx'\partial_{x''} \\
\partial_{x'}d\theta'' &= q^{-1}d\theta''\partial_{x'} \\
\partial_{x''}d\theta' &= q^{-1}d\theta'\partial_{x''} \\
\partial_{\theta'}dx'' &= -qdx''\partial_{\theta'} \\
\partial_{\theta''}dx' &= -qdx'\partial_{\theta''} \\
\partial_{\theta'}d\theta'' &= d\theta''\partial_{\theta'} \\
\partial_{\theta''}d\theta' &= d\theta'\partial_{\theta''} \\
\partial_{x'}\partial_{x''} &= \partial_{x''}\partial_{x'} \\
\partial_{x'}\partial_{\theta''} &= q\partial_{\theta''}\partial_{x'} \\
\partial_{x''}\partial_{\theta'} &= q\partial_{\theta'}\partial_{x''} \\
\partial_{\theta'}\partial_{\theta''} &= -\partial_{\theta''}\partial_{\theta'}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

şeklinde. Gerçekten, bu bağıntılar, (4.43), (4.45) ve (4.46) bağıntılarıyla tam uyumludur. Birkaç tanesini gösterelim:

$$\begin{aligned}
\partial_x x &= (\partial_{x'} + \partial_{x''})(x' + x'') \\
&= \partial_{x'}x' + \partial_{x'}x'' + \partial_{x''}x' + \partial_{x''}x'' \\
&= 1 + x'\partial_{x'} + \lambda^{-1} + x''\partial_{x'} + \lambda + x'\partial_{x''} + 1 + x''\partial_{x''} \\
&= 2 + \lambda^{-1} + \lambda + x'\partial_{x'} + x''\partial_{x'} + x'\partial_{x''} + x''\partial_{x''} \\
&= 1 + (x' + x'')(\partial_{x'} + \partial_{x''}) \\
&= 1 + x\partial_x
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada, $\lambda^{-1} + \lambda = -1$ eşitliğine dikkat edilmelidir.

Bir diğer bağıntı için,

$$\begin{aligned}
\partial_x \theta &= (\partial_{x'} + \partial_{x''})(\theta' + \theta'') \\
&= \partial_{x'}\theta' + \partial_{x'}\theta'' + \partial_{x''}\theta' + \partial_{x''}\theta''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-1}\theta'\partial_{x'} + q^{-1}\theta''\partial_{x'} + q^{-1}\theta'\partial_{x''} + q^{-1}\theta''\partial_{x''} \\
&= q^{-1}(\theta' + \theta'')(\partial_{x'} + \partial_{x''}) \\
&= q^{-1}\theta\partial_x
\end{aligned}$$

dir. Başka bir tanesi ise,

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= (\partial_{x'} + \partial_{x''})(dx' + dx'') \\
&= \partial_{x'}dx' + \partial_{x'}dx'' + \partial_{x''}dx' + \partial_{x''}dx'' \\
&= dx'\partial_{x'} + dx''\partial_{x'} + dx'\partial_{x''} + dx''\partial_{x''} \\
&= (dx' + dx'')(\partial_{x'} + \partial_{x''}) \\
&= dx\partial_x
\end{aligned}$$

dir.

$\mathcal{R}$ -MATRİS YAKLAŞIMI

Kuantum süper düzlemi oluşturan (3.1) komutasyon bağıntısı uygun bir $\mathcal{R}$ matrisi kullanılarak da elde edilebilir. Bu bölümde öncelikle kuantum süper düzlem için kullanılan $\mathcal{R}$ -matrisi ele alınacak, daha sonra kurmuş olduğumuz toplam vektörleri için de uygun bir $\mathcal{R}$ -matrisi verilecektir.

5.1 Kuantum Süper Düzlem İçin $\mathcal{R}$ -Matrisi

Kuantum süper düzlemin q -komutatıflık bağıntısını koruyan $\mathcal{R}$ matrisi;

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir[10]. Bu matris ile

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \text{ ve } \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

düzlemin bileşenleri olan x ve θ arasındaki komutasyon bağıntısı; $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}\mathcal{P}$ olmak üzere

$$X \otimes X = q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X \otimes X) \tag{5.1}$$

ile verilir.

5.2 Toplam Vektörleri İçin $\mathcal{R}$ -Matrisi

Burada, toplam vektörünün de bir kuantum süper vektör olması için (3.7) 'de verilen bağıntıları koruyacak uygun bir $\mathcal{R}$ -matrisi vereceğiz. Bunu yaparken toplam vektörünün (5.1) bağıntısını korumasına da dikkat edeceğiz. Aşağıdaki önermeyle uygun bir $\mathcal{R}$ -matrisi verilmiştir.

Önerme 5.1 Eğer $X' = \begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix}$ ve $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ \theta'' \end{pmatrix}$ birer kuantum süper vektör olmak üzere

$$\mathcal{R}'(X'' \otimes X') = \mathcal{R}^{-1}(X' \otimes X'') \quad (5.2)$$

bağıntısı sağlanırsa $X = \frac{1}{2}(X' + X'')$ toplam vektörü de bir kuantum süper vektördür.

Burada,

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-2} - 1 & q & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{pmatrix}$$

dir.

$$\text{İspat: } X'' \otimes X' = \begin{pmatrix} x''x' \\ x''\theta' \\ \theta''x' \\ \theta''\theta' \end{pmatrix}, X' \otimes X'' = \begin{pmatrix} x'x'' \\ x'\theta'' \\ \theta'x'' \\ \theta'\theta'' \end{pmatrix} \text{ ve } \mathcal{R}^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} - q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

matrisleri (5.2) denkleminde yerine yazılıp, matrisler çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} q^{-1}x''x' \\ (q^{-2} - 1)x''\theta' + q\theta''x' \\ q^{-1}x''\theta' \\ -q\theta''\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-1}x'x'' \\ x'\theta'' + (q^{-1} - q)\theta'x'' \\ \theta'x'' \\ q\theta'\theta'' \end{pmatrix}$$

elde edilir. Matris eşitliğinden, karşılıklı elemanlar eşitlenerek:

$$x'x'' = x''x'$$

$$x'\theta'' = q\theta''x'$$

$$\theta'x'' = q^{-1}x''\theta'$$

$$\theta'\theta'' = -\theta''\theta'$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar 3.bölümde ortaya konan (3.7) bağıntıları ile aynıdır.

Daha önce de gösterdiğimiz gibi toplam vektörü bir kuantum süper vektör olur.

Ayrıca 1. ve 2. vektörlerin bileşenleri arasında yukarıdaki bağıntılar olduğunda $X = X' + X''$ toplam vektörünün bir kuantum süper vektör olduğu (5.1) denkleminde şu şekilde kontrol edilebilir:

$$\begin{aligned}
X \otimes X &= q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X \otimes X) \\
&\Rightarrow (X' + X'') \otimes (X' + X'') = q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X' + X'') \otimes (X' + X'') \\
&\Rightarrow X' \otimes X' + X' \otimes X'' + X'' \otimes X' + X'' \otimes X'' \\
&= q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X' \otimes X' + X' \otimes X'' + X'' \otimes X' + X'' \otimes X'')
\end{aligned}$$

Burada X' ve X'' birer kuantum süper vektör olduğundan $X' \otimes X' = q^{-1} \hat{\mathcal{R}} X' \otimes X'$ ve $X'' \otimes X'' = q^{-1} \hat{\mathcal{R}} X'' \otimes X''$ eşitlikleri birbirini götürceğinden, bağıntı

$$\Rightarrow X' \otimes X'' + X'' \otimes X' = q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X' \otimes X'' + X'' \otimes X')$$

şekline dönüşür. Matrisler yerlerine yazılıp sağ taraftaki çarpma işlemi de yapılırsa;

$$\begin{pmatrix} x'x'' + x''x' \\ x'\theta'' + x''\theta' \\ \theta'x'' + \theta''x' \\ \theta'\theta'' + \theta''\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''x' + x'x'' \\ q^{-1}(\theta'x'' + \theta''x') + (1 - q^2)(x'\theta'' + x''\theta') \\ q^{-1}(x'\theta'' + x''\theta') \\ -q^2(\theta''\theta' + \theta'\theta'') \end{pmatrix}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında istenilene ulaşılır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kuantum süper vektörlerin toplamının da bir kuantum süper vektör olması için toplanan vektörlerin bileşenleri arasında sağlanması gereken şartlar üzerinde çalışıldı. Ortaya konan şartları sağlayan matris temsilleri ortaya konularak elde edilen yapı örneklendirildi. Elde edilen yapının bir süper Hopf cebiri yapısına sahip olduğu gösterildi. Daha sonra, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri, 1-formlar ve kısmi türevleri tanımlanarak bunlar arasındaki komutasyon bağıntıları bulundu. Dolayısıyla elde edilen yapı için uygun bir diferansiyel geometri kuruldu. Son olarak, bu yapının oluşması için gereken şartları gösteren bir $\mathcal{R}$ -matrisi verildi.

Hiç şüphesiz, kuantum süper düzlemdeki vektörler için geçerli olan bu toplama işleminin h -süper düzlemin süper vektörlerine uygulanması da mümkündür. Bunlar, ileriki çalışmalarda ele alınacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Drinfeld, V.G., (1986). “Quantum Groups”, Proc. ICM, Berkeley, 798-820.
- [2] Manin, Yu.I., (1989). “Multiparametric Quantum Deformation of the General Linear Supergroup”, Communications in Mathematical Physics, 123:163-175.
- [3] Woronowicz, S.L., (1989). “Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups)”, Communications in Mathematical Physics, 122:125-170.
- [4] Wess, J. ve Zumino, B.,(1990). “Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane”, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 18:302-312.
- [5] Celik, S., (1998). “Differential geometry of the q-superplane”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 31 , 9695-9701
- [6] Celik, S. ve Celik, S.A., (2002). “Differential Geometry of the Z_3 -Graded Quantum Superplane”, Journal of Physics, A,35:4257-4268.
- [7] Celik, S., (2006). “Cartan Calculi on the Quantum Superplane” *J. Math. Phys.* 47, 083501
- [8] Soni, S.K., (1991), “Differential Calculus on the Quantum Superplane”, Journal of Physics A: Mathematical and General, 24: 619-624
- [9] Abe, E., (1977). Hopf Algebras, Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Jimbo,M.,(1986). “Quantum $\mathcal{R}$ Matrix for the Generalized Toda System”, Commun. Math. Phys., 102: 537-547

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İshak AYDIN
Doğum Tarihi ve Yeri : 08.08.1988 Çaykara
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ishakaydin@yandex.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Fen bilimleri	Trabzon Affan Kitapçıoğlu Lisesi	2005