

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN BURGER DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ
İLE ÇÖZÜMÜ VE ANALİZİ**

İBRAHİM ŞENTÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUHAMMET KURULAY**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN BURGER DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE
ÇÖZÜMÜ VE ANALİZİ**

İbrahim ŞENTÜRK tarafından hazırlanan tez çalışması 26.08.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

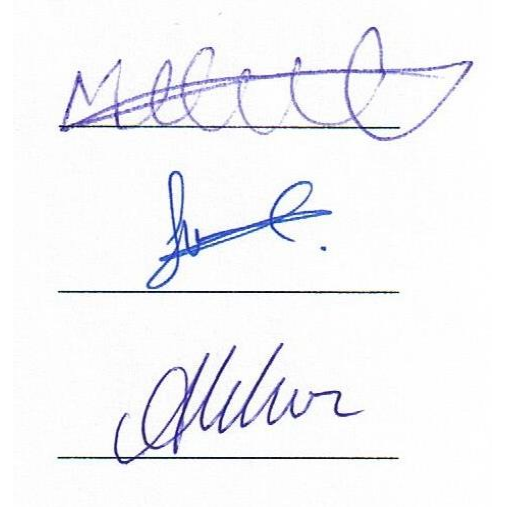
Doç. Dr. Muhammet KURULAY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Muhammet KURULAY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Selmahan SELİM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali AKINLAR
Yıldız Teknik Üniversitesi



Bu alışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün 2013-01-03-YL01 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca her türlü görüş ve düşünceleriyle bana yol gösteren, yardım ve katkılarını esirgemeyen değerli ve saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Muhammet KURULAY 'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım süresinde sağladıkları maddi ve manevi destekle beni hiç yalnız bırakmayan eşim Gülsüm Yeliz ŞENTÜRK' e ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ekim, 2014

İbrahim ŞENTÜRK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTMA LİSTESİ.....	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT.....	xii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Temel Tanımlar	3
2.1.1 KDD ve Çözümleri	4
2.1.2 Sınır ve Başlangıç Koşulları	5
2.1.3 Başlangıç Koşulları	6
2.2 İkinci Mertebe Denklemler	8
2.2.1 Sınıflandırma.....	8
2.2.2 İkinci Mertebeden Denklemlerin Önemi	10
2.2.3 Standart Form.....	11
2.3 Çözüm Yöntemleri Karşılaştırması	12
2.4 Sonlu Farklar Yöntemi.....	13
2.4.1 Doğrudan Yaklaşımlar.....	13
2.4.2 Taylor Seri Yaklaşımları ve Sayısal Hatalar	15

2.4.3	Düzgün Izgara(grid, mesh) Sistemi	15
2.4.4	Sayısal Hatalar	20
2.5	Kesirli Diferansiyel Denklemler:.....	22
2.5.1	Gama Fonksiyonu	23
2.5.2	Beta Fonksiyonu	24
2.5.3	Laplace Dönüşümü	25
2.5.4	Mittag-Leffler Fonksiyonları	25
2.5.5	Grünwald-Letnikov tanımı:.....	25
2.5.6	Riemann-Liouville Tanımı	26
2.5.7	Caputo Kesirli Türevi.....	29
2.5.8	Caputo ve Riemann-Liouville Yaklaşımlarının Karşılaştırılması	30
 BÖLÜM 3		
BURGER DENKLEMİ VE SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ		33
3.1	Burger Denklemi	33
3.2	Açık Fark Şeması	35
3.2.1	Açık Fark Şemasının Kararlılık Analizi	36
3.3	Kapalı Fark Şeması (Crank – Nicholson).....	37
 BÖLÜM 4		
KESİRLİ MERTEBEDEN BURGER DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SONLU FARK METODU İLE ÇÖZÜMÜ		43
4.1	Kesirli Mertebeden Burger Diferansiyel Denklemi :	43
4.2	Sonlu Fark Şemasının Oluşturulması:	43
 BÖLÜM 5		
SONUÇ VE ÖNERİLER		50
KAYNAKLAR.....		51
ÖZGEÇMİŞ.....		53

SİMGE LİSTESİ

L	Laplace operatörü
Γ	Gama fonksiyonu
B	Beta fonksiyonu
$O(h)$	Sayısal hata
$E_{\alpha}(z)$	Mittag-Leffler Fonksiyonu
${}_a^C D_t^{\alpha}$	Caputo Kesirli türevi

KISALTMA LİSTESİ

ADD	Adi Diferansiyel Denklem
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
IVP	Initial Value Problem
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi
SFY	Sonlu Farklar Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Bir KDD nin tanım bölgesi	5
Şekil 2. 2 Bir levhada sınır koşulları	6
Şekil 2. 3 Başlangıç koşulları	6
Şekil 2. 4 $u(x, \beta) = k$ veya $g(\alpha, y) = k$	7
Şekil 2. 5 Sınır değer problemi	8
Şekil 2. 6 Eliptik denklem	9
Şekil 2. 7 Parabolik denklem	10
Şekil 2. 8 Fark yaklaşımları	14
Şekil 2. 9 Düzgün ızgara sistemi	15
Şekil 2. 10 Izgara boyutuna bağlı olarak hatalar	21
Şekil 2. 11 Gama fonksiyonu	24
Şekil 3. 1 Açık Şema $\Delta t = 0.002$, $\Delta x = 0.02$	39
Şekil 3. 2 Kapalı Şema $\Delta t = 0.002$, $\Delta x = 0.02$	40
Şekil 3. 3 Açık Şema $\Delta t = 0.002$, $\Delta x = 0.02$	41
Şekil 3. 4 Kapalı Şema $\Delta t = 0.002$, $\Delta x = 0.02$	42
Şekil 4. 1 i ve j terimi 1den 10a kadar alındığında A_{ij} matrisi	46
Şekil 4. 2 Sonlu Fark Çözümü ($\Delta t = 0.01$, $\Delta x = 0.1$, $\alpha \cong 1$, $\beta \cong 2$ için).....	47
Şekil 4. 3 Sonlu Fark Metodu ile çözüm ($\Delta t=0.001$, $\Delta x=0.1$, $\alpha \cong 1$, $\beta \cong 2$ için).....	49

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2. 1 Analitik ve Sayısal Çözüm Arasındaki Karşılaştırma	12
Çizelge 3. 1 Örnek 3.1 için hata analizi	40
Çizelge 3. 2 Örnek 3.2 için hata analizi	42
Çizelge 4. 1 Örnek 4.1 için hata analizi	48
Çizelge 4. 2 Örnek 4.2 için hata analizi	49

KESİRLİ MERTEBEDEN BURGER DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ VE ANALİZİ

İbrahim ŞENTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muhammet KURULAY

Bu çalışmada, Dirichlet sınır koşullarına sahip olan non-lineer Burger Denkleminin, Sonlu Fark yöntemi ile yaklaşık çözümü hesaplanmıştır. Çözüm yapılırken, açık ve kapalı sonlu fark şemaları ele alınmış ve bu yaklaşımlar karşılaştırılmıştır. Açık fark şemasının kararlılık analizi yapılmıştır. Sayısal örnekler ve grafikler kullanılarak yaklaşık çözüm ile analitik çözüm arasındaki fark incelenmiştir. Yaklaşık çözümler hesaplanırken Maple programı kullanılmıştır.

Kesirli mertebeden Burger denklemi de S. Momani tarafından ortaya atılmış, zaman ve yer içeren terimlerin mertebesinin kesirli hale dönüştürülmesiyle oluşmuştur. Bu denklem de kapalı fark şeması oluşturularak çözülmüştür. Tam çözüm ile kesirli mertebeli denklemden elde edilen çözüm karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dirichlet Sınır koşulları, Burger Dif. Denk., Sonlu Fark Metodu

**FINITE DIFFERENCE METHOD SOLUTION AND ANALYSIS FOR FRACTIONAL
BURGER EQUATION**

İbrahim ŞENTÜRK

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammet KURULAY

In this study, non-linear Burger's Equation, which has Dirichlet Boundary Conditions, was solved with Finite Difference Method. While we were finding solution, different finite difference schemes were used such as Implicit and explicit scheme, besides these schemes were compared. The Analysis of stability and convergence of the explicit scheme were done. The difference of Analytic and Approximate solution was discussed with using numerical examples and graphs. Maple program was used when finding approximate solutions.

Fractional Burger Equation was found by S. Momani, which was made with changing time and space terms with fractional terms. This equation was solved with finite difference method and analysis of this scheme was discussed with examples. The exact solution and fractional burger equation were discussed.

Keywords: Dirichlet Boundary Conditions, Burger's Equation, Finite Difference Method

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Diferansiyel denklem çözümlerinde seçilen problemler genellikle lineer problemdir ve çözümleri bulunduğu için güncelliğini yitirmeye başlamıştır. Burger Denklemi gibi lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünün bulunmasının zorluğu nedeniyle, yaklaşık çözümlerinin bulunması güncelliğini korumaktadır ve artık çalışmalar genellikle bu yönde olmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı; analitik olarak çözümü çok zor olan non-lineer Burger diferansiyel denkleminin çözümünün sayısal yöntemler ile hesaplanmasıdır. Sayısal çözümler farklı yaklaşımlarla ele alınabilir. Bu çalışmada açık ve kapalı fark şemaları gibi değişik yaklaşımlar ile sayısal çözüm yapılacaktır. Bu yaklaşımların hangisinin analitik çözüme daha yakın olduğu çeşitli analizler yapılarak hesaplanacaktır. Yapılan işlemler tek bir sayısal örneğin çözümü olmak yerine, değişik koşullarda ve durumlarda ele alınabilen bir problemin çözümü olacaktır.

Bu ortaya çıkarılacak şemalar kullanılarak Dirichlet sınır şartlarına sahip Burger denkleminin farklı durumlardaki çözümleri elde edilebilir olacaktır. Ayrıca kesirli mertebeden Burger denklemi için de sonlu fark şeması oluşturularak bu şemanın tam sayılı mertebelere yaklaştığında oluşan sonuçları ile analitik çözümün sonuçları karşılaştırılacaktır.

1.3 Hipotez

Bu tezde lineer olmayan Burger diferansiyel denkleminin sonlu fark metodu ile çözümü incelenmiş ardından kesirli mertebeden Burger diferansiyel denklemi için bir sonlu fark yaklaşımı oluşturularak çözüm aranmıştır.

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanımlar

Tanım 2.1 Bağımsız değişkenlerin fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir.

Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem (KDD) denir [1].

Örnek 2.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

İki bağımsız değişken x ve y nin olduğu bir KDD dır.

Bu denklemde sadece u bağımlı değişkendir x , y bağımsız değişkenlerine bağımlı $u = u(x, y)$ fonksiyonu için genel KDD

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir.

En yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesine, KDD nin mertebesi denir.

Bağımlı değişken u ve u nun tüm kısmi türevleri doğrusal ise KDD de doğrusaldır (lineer). Yani u ve u nun tüm türevleri birinci derecedendir.

Kısmi türevlerden en az biri doğrusal değilse KDD doğrusal olmayandır (non-lineer) denir.

Bir KDD de sadece bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevleri doğrusal ise yarı doğrusal (quasi-lineer) KDD denir. Yani tüm en yüksek mertebeli türevlerin derecesi 1 dir. Böylece en yüksek mertebeli türevlerin katsayıları, daha düşük mertebeden türevlerin ve bağımlı değişkenlerin fonksiyonların olabilirler

Yarı doğrusal denklem, doğrusal olmayan denklemin özel halidir. Yarı doğrusal denklemlerde, en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olduğunda denkleme hemen hemen doğrusal denklem denir.

Eğer denklemin tüm terimleri bağımlı değişkeni veya bunun türevlerinden birini içeriyorsa bu KDD e homojendir denir. Aksi halde homojen olmayandır denir.

Kolaylık olması için KDD de bazen türevler alt indis kullanılarak ifade edilir [1].

2.1.1 KDD ve Çözümleri

Çeşitli fen ve mühendislik problemleri adi diferansiyel denklem (ADD) veya KDD ile matematiksel olarak modellenir. Örnek olarak- akışkanlar mekaniği, hidrolikler, ısı transferi, aerodinamik, yapısal analiz, elastisite, elektro-manyetik alanlar ve nötron difüzyon problemleri verilebilir. Matematiksel modeller genelde, örneğin Newton'un hareket kanunu gibi, fiziksel yasalardan çıkarılırlar. Bazı problemler birden fazla bağımsız değişken gerektirir. Bunların modellenmesi mecburi olarak KDD ile yapılır. Sadece çok az problem ADD ile modellenebilir. Bu sebeplerden KDD ler mühendislik ve fen için zorunludur.

Diferansiyel denklemden çıkarılan, yalnızca bağımsız değişkenler ve onların fonksiyonlarını içeren ve denkleme özdeş olarak (denklemin her değeri için) sağlayan bağıntılara bu denklemin çözümleri (integralleri) denir.

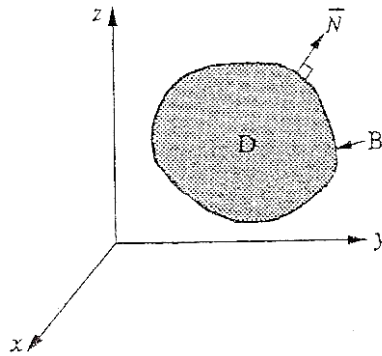
ADD lerin keyfi sabitleri içeren genel çözümü vardır. KDD lerin çözümünde genelde keyfi sabitler bulunmaz, keyfi fonksiyonlar bulunur. Böylece farklı fonksiyonlar aynı KDD i sağlayabilir ama genel çözüm olmayabilirler.

KDD de, ADD de olduğu gibi bazı çözümler hariç bütün çözümleri içeren bir çözüm aranabilir. Böyle çözüme genel çözüm (genel integral) denir.

ADD lerin genel çözümlerinde denklemin mertebesi kadar keyfi sabit bulunur. KDD lerin genel çözümlerinde ise keyfi sabitler yerine keyfi fonksiyonlar bulunur. k bağımsız değişkenli n . mertebeden KDD in genel çözümü, $k-1$ değişkenli n keyfi fonksiyon içerir. Yani ADD lerin genel çözümleri bir eğri ailesi olduğu halde, kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri kullanılan uzayın boyutuna göre farklılık gösteren geometrik şekiller (veya şekil aileleri) olabilirler [1].

2.1.2 Sınır ve Başlangıç Koşulları

Şekil 2.1 de gösterildiği gibi üç boyutlu uzayda bir genel fizik problemini ele alalım. B ye göre normal vektör $\vec{N}$ ve B sınırıyla sınırlanan D tanım bölgesinin içerisinde bir KDD in bir tek çözümü vardır.



Şekil 2. 1 Bir KDD nin tanım bölgesi

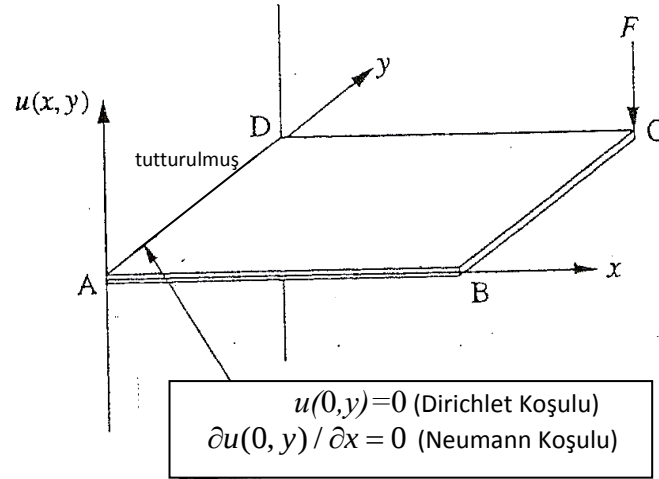
Bağımlı değişken u ve onun B deki türevlerinin değerleri sınır koşullarını sağlamalıdır.

Sınır koşullarının farklı türleri;

- a) **Dirichlet Koşulu:** Sınırdaki bağımsız değişkenin değeri $u(a) = \alpha$ ile verilmiştir.
- b) **Neumann Koşulu:** Sınırı normal yönünde, bağımsız değişkenin birinci mertebeden türevi $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$ ile verilmiştir
- c) **Robin Sınır Şartı / Karışık Koşul:** Sınırdaki Dirichlet ve Neumann koşullarının bir lineer kombinasyonu olarak verilir. (Ör. $au(0) + bu'(0) = g(0)$ a, b sabit) [1].

Örnek 2.2:

AD kenarından Şekil 2.2 deki gibi tutturulmuş olan $ABCD$ dikdörtgen levhasını ele alalım. Bir statik dik F kuvveti C köşesinden uygulanıyor ve yer değiştirmesi $u(x, y)$ dir. Fiziksel gerekliliklerden, AD kenarı boyunca yer değiştirmenin eğimi ve u yer değiştirmesi 0 dır. Böylece $x=0$ da Dirichlet ve Neumann koşulu vardır [1].



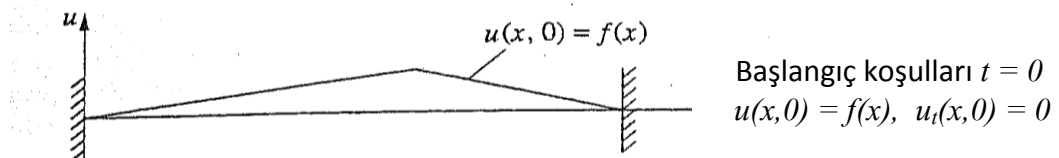
Şekil 2. 2 Bir levhada sınır koşulları

2.1.3 Başlangıç Koşulları

Eğer bağımsız değişkenlerden biri zaman (t) ise, başlangıç koşulları $t=0$ daki u nun ve u nun türevlerinin değerleridir.

Örneğin Şekil 2.3 de gösterildiği gibi iyice gerilmiş bir gitar telini ele alalım. Tel $t=0$ da tutulup bırakılarak yer değiştirsin. Böylece yer değiştirme $u(x, t)$ dir. Başlangıç şartları;

başlangıç yer değiştirmesi $u(x, 0) = f(x)$ ve başlangıç hızı $u_t(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$ dır



Şekil 2. 3 Başlangıç koşulları

Uygulamada bir fiziksel olayın sonucu olarak karşımıza çıkan bir diferansiyel denklem için uygulama bölgesinde bazı koşullar bilinir ya da belirlenebilir. Bu koşulların bilinmesi

halinde bu diferansiyel denklem bir KDD ise bir yüzey ailesi şeklindeki analitik çözümü bulmak yerine uygulayıcının koşullarını sağlayan yüzey üzerindeki noktalarda veya eğri üzerindeki noktalarda fonksiyon değerinin belirlenmesi istenir. Bu durumda diferansiyel denklemler hangi türden olursa olsun çeşitli veri durumlarına göre adlandırılırlar ve sayısal çözüm yöntemleri de bu gruplandırmalara göre değişiklik gösterir. Bunlar

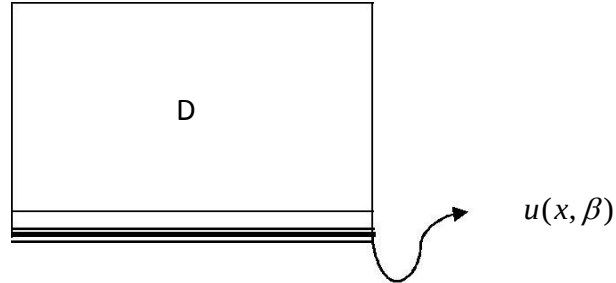
- I) Başlangıç Değer Problemi (Initial Value Problem)
- II) Sınır Değer Problemi (Boundary Value Problem)
- III) Karma Problem (Mixed Problem)

dir [1].

I) Başlangıç Değer Problemi (Initial Value Problem-IVP):

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}\right) = 0 \text{ şeklindeki bir KDD için eğer } D$$

bölgesinin herhangi bir başlangıç yerinde



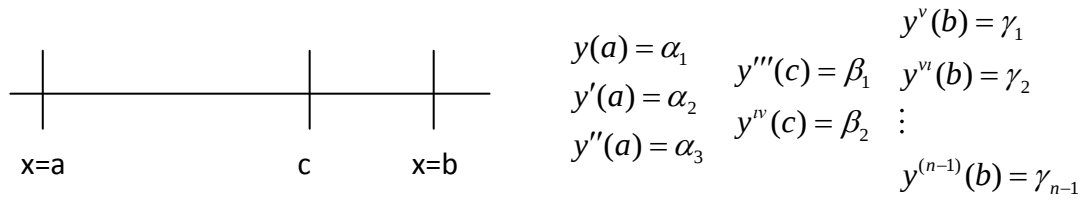
Şekil 2. 4 $u(x, \beta) = k$ veya $g(\alpha, y) = k$

şeklinde ya da bu başlangıç doğru (veya yüzeyi) üzerinde bütün noktalardaki fonksiyon değerleri, KDD in mertebesine göre kısmi türev değerleri, yeterli sayıda ya da işleme başlamayı sağlayacak şekilde verilmiş ise böyle bir KDD başlangıç değer problemidir.

II) Sınır Değer Problemi (Boundary Value Problem-BVP):

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ n. Mertebe adi diferansiyel denklemi için $c_i \in [a, b]$ olmak üzere c_i $i=1(1)k$ ve k tane noktada n tane koşul verilmesi bir sınır değer problemidir.

Örnek 2.3:


$$\begin{array}{l} \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ | \quad \quad | \quad \quad | \\ x=a \quad \quad c \quad \quad x=b \end{array} \quad \begin{array}{l} y(a) = \alpha_1 \\ y'(a) = \alpha_2 \\ y''(a) = \alpha_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} y'''(c) = \beta_1 \\ y^{iv}(c) = \beta_2 \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} y^{(v)}(b) = \gamma_1 \\ y^{(vi)}(b) = \gamma_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(b) = \gamma_{n-1} \end{array}$$

Şekil 2. 5 Sınır değer problemi

üç noktalı sınır değer problemidir.

Sınır değer problemi KDD için de geçerlidir. Bir bölgede verilmiş denklem için bu bölgeyi sınırlayan iki doğru (eğri) veya yüzey bulunabilir. Bu sınır yüzeyleri üzerinde yeterli sayıda koşul verilmelidir. Koşul sayısı, ADD lerde denklemin mertebesi, KDD lerde denklem veya denklem sisteminin mertebeleri toplamıdır.

III) Karma Problem (Mixed Problem):

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}\right) = 0 \quad \text{denklemi için bölgede hem}$$

başlangıç hem de sınır değerleri bilinir ya da belirlenirse o zaman bu şekildeki problemlere karma problemler denir. KDD lerde bu tür uygulamalar çoğunluktadır [1].

2.2 İkinci Mertebe Denklemler

KDD lerin karşımıza çıktığı uygulama alanları genelde fiziksel olayların meydana geldiği durumlardır (dalga yayılımı, ısı iletimi, titreşim problemleri vb). Fiziksel olaylarda sıkça karşılaşılan denklemler 2.mertebeden KDD lerdir. Bu yüzden kaynaklarda bu tür denklemlerin sayısal çözüm yöntemleri incelenir.

O zaman KDD sayısal çözümlerinde amaç, 2.mertebeden özellikle iki bağımsız değişkenli fonksiyonlar için tanımlanmış başlangıç veya sınır koşullarını sağlayan KDD lerin çözümü olarak varsayılan yüzey üzerindeki noktaları yaklaşık olarak bulmak olarak ifade edilebilir [1].

2.2.1 Sınıflandırma

İki bağımsız değişkenli ikinci mertebeden denklemin genel formu aşağıdaki gibi olan

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (2.3)$$

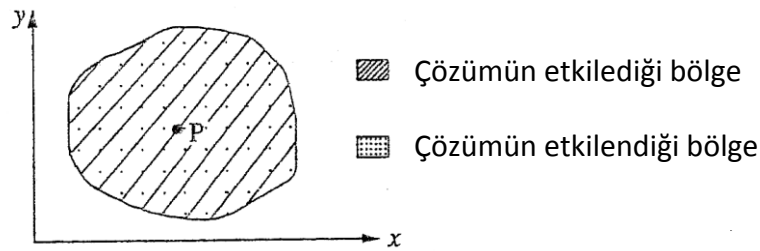
Bir KDD ni ele alalım. Burada a, b, c, f katsayıları yerine $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ nun fonksiyonları da yazılabilir.. Buna göre (2.3) denklemi lineer ya da non-lineer olabilir.

KDD in türlerinin sınıflandırması karakteristiklerine göredir. Bu karakteristikler çözüm bölgesindeki eğrilerdir.

a) Eğer $b^2 - 4ac < 0$ ise denklem eliptiktir.

Bu durumda kompleks karakteristik elde edilir. Böylece xy – düzleminde tanım bölgesindeki bir P noktasında (2.3) ün çözümü bu bölgedeki diğer tüm noktadaki çözümlere bağlı çözülür. Bu bölgeye “çözümün etkilendiği bölge” denir. Buna karşılık P daki çözümde bir değişiklik bu bölgedeki diğer tüm noktaların çözümünü etkiler. Bu bölgeye “çözümün etkilediği bölge” denir [3].

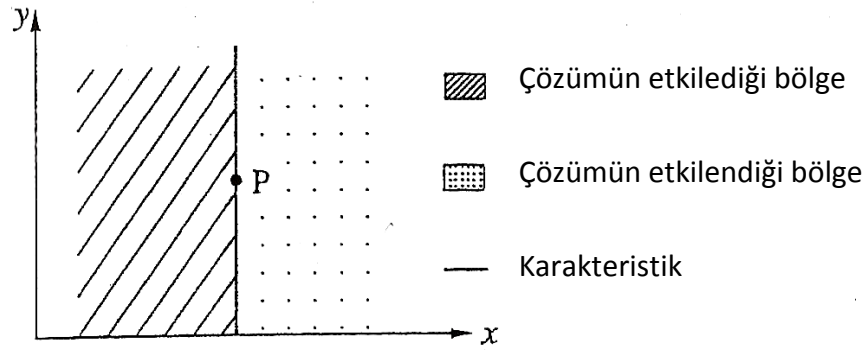
Eliptik denklemler için çözümün etkilendiği bölge ve çözümün etkilediği bölge Şekil 2.6 da verilmiştir. Yani bölge kapalı bir eğri ile sınırlanmış bir bölgedir. Bu kapalı alan içindeki bir P noktasındaki çözüm diğer noktalara ve sınır değerlerine bağlıdır. Dolayısıyla tüm sınır değerler bilinmelidir. İç noktalarda çözüm adım-adım değil, eşzamanlı olarak bulunmalıdır. Bu bakımdan çözümü diğer denklem türlerine göre daha zordur. Diskriminant negatif olduğu için eliptik denklemlerde gerçel karakteristik eğri yoktur [3].



Şekil 2. 6 Eliptik denklem

b) Eğer $b^2 - 4ac = 0$ ise denklem paraboliktir.

Çözümün etkilendiği bölge ve çözümün etkilediği bölge Şekil 2.7 de gösterilmiştir. Buna göre verilen başlangıç ve sınır şartlarından başlanarak, bir yönü açık bir alanda adım-adım ilerleyerek çözüme ulaşılır. Bu yüzden herhangi bir noktadaki çözüm, o noktadan önceki noktalardaki değerlere bağlı olarak elde edilir. Yani herhangi bir t anında P noktasındaki çözüm, P nin altındaki noktalara bağlı olarak bulunur. Diskriminant sıfır olduğundan gerçel karakteristiklerin iki ailesi birleşir [4].



Şekil 2. 7 Parabolik denklem

c) Eğer $b^2 - 4ac > 0$ ise denklem hiperboliktir.

Çözümün etkilendiği bölge ve çözümün etkilediği bölge Şekil 2.7 de gösterilmiştir. Bir tarafı açık alanda başlangıç değerlerden başlayarak adım-adım ilerleyerek çözümleri bulunur. P deki çözüm bulunmak isteniyorsa P den önce gelen ve iki doğru(eğri) arasında kalan noktalardaki çözüm bilinmelidir. Diskriminant sıfırdan büyük olduğundan iki ayrı reel karakteristik vardır. Karakteristik eğrilerin kesiştiği noktadan önceki kısmı çözümün etkilendiği, P den sonraki de çözümün etkilediği bölgedir [1],[4].

2.2.2 İkinci Mertebeden Denklemlerin Önemi

Birinci mertebeden ADD ler nadiren fiziksel problemlerde kullanılırlar. Genelde analitik olarak çözülebilirler. Doğadaki bir çok olayın modellenmesi yapıldığında KDD ler ortaya çıkmaktadır. Birinci mertebeden ADD lerin sistemleri daha sık kullanılır ve genelde yüksek mertebeden KDD lerin çözümlenip indirgenmiş halidir. Örneğin ikinci mertebeden KDD olarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

ele alalım. Bu denklem;

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde birinci mertebeden KDD sistemi olarak yazılabilir.

Birinci mertebeden denklemlerin gerçel karakteristikleri vardır. Bu yüzden doğal olarak hiperboliktirler. Örneğin akışkanlar mekaniği, sıcaklık transferi, grid yapı dinamiği ve elastisite problemleri gibi birçok fizik problemi ikinci mertebeden KDD ler ile modellenir.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{s}{D} \quad (2.6)$$

şeklinde 4. Mertebeden diferansiyel denklem olarak modellenen fiziksel durumlar da bulunabilir.

2.2.3 Standart Form

(6) denkleminin bir özel lineer durumu olan

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + eu_x + gu_y + ru = f(x, y) \quad (2.7)$$

formunu ele alalım. Burada a, b, c, e, g, r sabitlerdir.

$b=0$ olduğunda örneğin tel titreşimi, sıcaklık akışı ve sıvı akışı problemlerinde olduğu gibi pek çok fiziksel uygulamadan doğal olarak ortaya çıkan (2.8) denklemi standart form olarak bilinir.

$b \neq 0$ olduğunda hem x hem de y ye göre türev içeren terim, sonucu elde etmeyi zorlaştırabilir. Bu da sonlu fark yönteminde açıklanan tekil probleme neden olur. Bunun için iki terimin de türevini içeren terimin elenmesi istenir. Bu

$$\tan 2\alpha = \frac{b}{a-c} \quad (2.8)$$

dan α elde edilmek üzere,

$$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad q = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (2.9)$$

dönüşümlerinin kullanılmasıyla yapılır.

2.3 Çözüm Yöntemleri Karşılaştırması

Diğer matematiksel problemlerde olduğu gibi KDD ler ya analitik olarak ya da sayısal olarak çözülürler. KDD in karmaşık doğasından dolayı değişkenlerine ayrılma yöntemi ve integral dönüşümler gibi çeşitli analitik teknikler sadece bazı basit durumlara uygulanır. Çizelge 2.1 analitik ve sayısal çözümlerin doğasını göstermektedir.

Çizelge 2. 1 Analitik ve Sayısal Çözüm Arasındaki Karşılaştırma

Analitik Çözüm	Sayısal Çözüm
Çözüm süreklidir. Örneğin bağımsız değişkenin herhangi değerinde çözüm bulunabilir	Çözüm genellikle kesikli noktalarda elde edilir.
Kesin veya çok doğrudur.	Yaklaşık sayısal hataları doğruluk için uygun bir şekilde kontrol edilmek zorundadır.
Problemlerde fiziksel anlayışı sağlar. Örneğin titreşim sıklığı ve şekil modu kolaylıkla elde edilebilir.	Fiziksel bilgiler daha zor elde edilir.
Günümüzde KDD problemlerinin karmaşıklıklarından dolayı çoğunda kullanılamazlar.	Bilgisayar teknolojisinde ve karmaşık sayısal algoritmaların yeteneklerinin gelişmesinden dolayı karmaşık problemler için çözüm elde edilebilir.

Grafikteki son karşılaştırma, bilgisayar teknolojinin gelişmesine bağlı olarak sayısal yöntemleri önemli ve kaçınılmaz kılmaktadır [2].

KDD leri çözmek için sayısal çözümleri için geliştirilen yöntemler aşağıdaki gibidir [5].

1) Seri yöntemler: Taylor ve Fourier serileri kullanılır. Fizik ve mühendislikteki problemlerin büyük bir sınıfı periyodik özelliğe sahip olduğundan Fourier trigonometrik serisi bu tür problemlerin çözümünde önemlidir.

2) Sonlu Farklar Yöntemi: Bu yöntemde çözüm alanı ağ(grid) noktalarına ayrılır. Bu noktalardaki verilen diferansiyel denklemin fonksiyonunun değerlerine bağlı olan cebirsel denklemlere dönüştürülmesine dayanır.

3) Sonlu Elemanlar Yöntemi: Bu yöntemde çözüm bölgesi elemanlara(doğru, üçgen, kare,..) ayrılır. Her bir eleman üzerinde uygun enterpolasyon fonksiyonları kullanarak cebirsel denklemler elde edilir. Bunların çözülmesi ile de çözüme varılır.

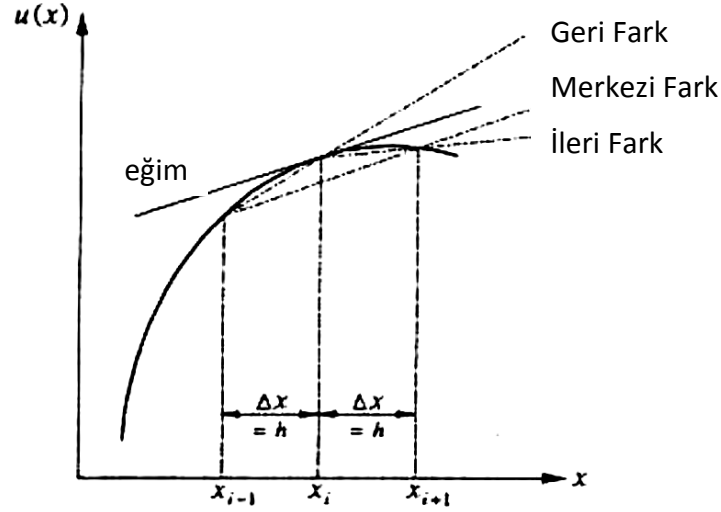
4) Sınır Elemanlar Yöntemi: Bu yöntemde ise çözüm alanının sınırlarında diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürülerek çözüme ulaşılır.

5) Sonlu Hacimler Yöntemi: Bu yöntemin temeli çözüm alanının belli hacimlere ayrılması ve diferansiyel denklemin bu hacimler üzerinden integrasyonuna dayanır.

2.4 Sonlu Farklar Yöntemi

2.4.1 Doğrudan Yaklaşımlar

Bir türevin sonlu fark gösterimleri geometriden doğrudan yaklaşımla elde edilebilir. Örneğin, x bağımsız değişkenine göre bağımlı değişkenin değişimi ele alınsın ve diğer tüm bağımsız değişkenler sabit gibi davransın. Böylece Şekil 2.8 de gösterildiği gibi x e göre değişen bir u fonksiyonunu elde etmek yeterlidir ve u nun tüm toplam türevleri için sonlu fark gösterimleri kısmi türevler için de geçerlidir [6].



Şekil 2. 8 Fark yaklaşımları

$x=x_i$ noktasındaki birinci mertebeden toplam türev $\frac{du}{dx}$ olarak ele alınsın. Şekil 2.8 de görüldüğü gibi geometrik olarak bu, x_i noktasındaki eğrinin tanjantıdır. Bu türeye üç farklı yolla yaklaşılabılır. $u(x)$ eğrisinde x_i ve x_{i+1} ye karşılık gelen iki noktanın bir doğru ile birleştirilmesiyle gerçek tanjanta yaklaşılabılır. $\Delta x = x_{i+1} - x_i = h$ bir x - adımı olarak ele alındığında

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad (2.10)$$

iki-noktalı ileri fark olarak bilinir.

Benzer şekilde $\frac{du}{dx}$ için iki-noktalı geri fark aşağıdaki gibidir:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad (2.11)$$

burada bir adım $\Delta x = x_i - x_{i-1} = h$ alınır.

Son olarak da $\frac{du}{dx}$ için üç-noktalı merkezi fark ise şöyledir:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad (2.12)$$

burada bir adım $\Delta x = x_{i+1} - x_{i-1} = 2h$ alınır.

Yüksek mertebeden türevlerin sonlu farklarla ifadesini elde etmek için (2.11-13) denklemleri kullanılır. Örneğin ikinci mertebeden türevi ele alalım. (2.11) denklemini kullanarak bunun ileri fark ifadesini elde edelim:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right] = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} - u_i}{h^2} \quad (2.13)$$

(2.12) yi kullanarak geri fark gösterilimi:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{h}\right] = \frac{u_i - 2u_{i-1} - u_{i-2}}{h^2} \quad (2.14)$$

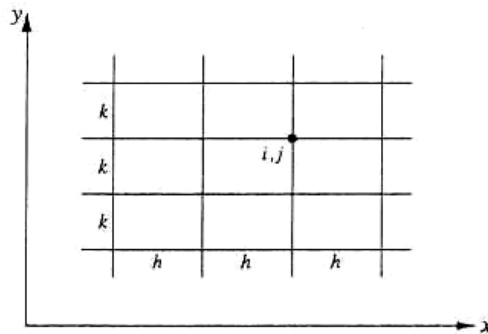
Bu kez (2.13) yi kullanarak merkezi fark ifadesini elde edelim:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i &= \frac{1}{2\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right]\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right] = \frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.4.2 Taylor Seri Yaklaşımları ve Sayısal Hatalar

Sonlu fark gösterimleri çoğunlukla Taylor serilerinden elde edilir. Bu yaklaşım hatalarının bulunmasına da yardım eder ki; bu hatalar kesme hatası olarak bilinir [1].

2.4.3 Düzgün Izgara(grid, mesh) Sistemi



Şekil 2. 9 Düzgün ızgara sistemi

Şekil.2.9 de görüldüğü gibi $\Delta x = h = sbt$, $\Delta y = k = sbt$ olan düzgün aralıklı bir sistemi göz önüne alalım.

$(x_i + h)$ ve $(x_i - h)$ da bir $u(x, y)$ fonksiyonu x_i ye göre Taylor serisine açılırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned} u(x+h, y) &= u(x, y) + h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots \\ u(x-h, y) &= u(x, y) - h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

elde edilir. Burada h , ızgara büyüklüğü(grid size) veya ızgara boşluğu (grid spacing) veya adım büyüklüğü (step size) olarak adlandırılır. Yaklaşımın olması için h yeterince küçüktür.

Birinci indis x -pozisyonunu, ikinci indis ise y -pozisyonunu göstermek üzere ikili alt indis gösterilimi ile bu ifadeleri yazalım:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.17)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.18)$$

(2.18) den

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h) \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.19) dan da aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Böylece iki ve daha yüksek mertebeden türevler içeren terimler ihmal edilirse, birinci mertebeden türevler için ileri ve geri fark yaklaşımlarını elde ederiz. Tüm ihmal edilen terimler için kullanılan ifade, ilk serinin ihmal edilen teriminin mertebesinin büyüklüğüne uygun şekilde yazılır.

(2.20) ve (2.21) de h mertebesinden hata $O(h)$ olarak bu ihmal edilen terimleri ifade eder. Verilen bir problemdeki tüm türevler aynı mertebeden olduğundan bu kesme

hataları yaklaşık olarak h ile orantılıdır. Yani h değeri küçültüldükçe küçülecektir. Bu sonlu fark ifadeleri “birinci-mertebeden doğrulukludur” denir. Fiziksel olarak kesme hatası, türevin gerçek değeri ile sonlu fark değeri arasındaki fark olarak gösterilir [6].

Eğer (2.18)-(2.19) ele alıp, tekrar düzenlersek, merkezi fark ifadelerini elde ederiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2)\end{aligned}\quad (2.21)$$

Kesme hatası $O(h^2)$ dir ve h^2 ile orantılıdır. Böylece merkezi fark ikinci-mertebeden doğruluğa sahiptir. Bu durumda h yarısı kadar küçültüldüğünde kesme hatası h mertebesindeki hatadan bir çeyrek daha küçük olacaktır. Bu da merkezi farkların hatası, ileri ve geri farkların hatasından daha küçük hataya sahip olduğunu gösterir. Geometrik olarak Şekil 2.8 den görüleceği gibi birinci mertebe türev için merkezi farklar gerçek tanjanta daha yakındır.

Eğer (2.18)+(2.19) toplanıp düzenlenirse ikinci mertebeden türev için merkezi farkları elde ederiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2h}{4!} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} - \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)\end{aligned}\quad (2.22)$$

Benzer olarak y ye göre türevler şöyledir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k) \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \\ \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)\end{aligned}\quad (2.23)$$

(2.23) ve (2.24) denklemleri sıklıkla kullanılırlar. Bunlar, yüksek mertebeden türevler

veya çok nokta kullanarak daha doğru olan merkezi fark ifadelerinin elde edilmesinde kullanılırlar. Yüksek mertebeden türevler için sonlu farklar nadiren kullanılır. Çünkü fiziksel problemlerdeki KDD lerin çoğu ikinci mertebededir. Buna alternatif olarak doğruluğu daha düşük olan ifadelerdeki ızgara genişliği küçültülerek, doğruluk arttırılabilir. Düzgün ızgara sistemleri için sonlu fark ifadeleri özetlenebilir [6].

a) Birinci mertebeden sonrası ihmal edilerek yapılan ileri farklar

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \\
 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} \\
 \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} &= \frac{u_{i+3,j} - 3u_{i+2,j} + 3u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h^3} \\
 \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} &= \frac{u_{i+4,j} - 4u_{i+3,j} + 6u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^4}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

b) İkinci mertebeden sonrası ihmal edilerek yapılan ileri farklar

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{-u_{i+2,j} + 4u_{i+1,j} - 3u_{i,j}}{2h} \\
 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{-u_{i+3,j} + 4u_{i+2,j} - 5u_{i+1,j} + 2u_{i,j}}{h^2} \\
 \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} &= \frac{-3u_{i+4,j} + 14u_{i+3,j} - 24u_{i+2,j} + 18u_{i+1,j} - 5u_{i,j}}{2h^3} \\
 \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} &= \frac{-2u_{i+5,j} + 11u_{i+4,j} - 24u_{i+3,j} + 26u_{i+2,j} - 14u_{i+1,j} + 3u_{i,j}}{h^4}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

c) Birinci mertebeden sonrası ihmal edilerek yapılan geri farklar

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \\
 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} \\
 \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} &= \frac{u_{i,j} - 3u_{i-1,j} + 3u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{h^3} \\
 \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} &= \frac{u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i-2,j} - 4u_{i-3,j} + u_{i-4,j}}{h^4}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

d) İkinci mertebeden sonrası ihmal edilerek yapılan geri farklar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} \\
\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{2u_{i,j} - 5u_{i-1,j} + 4u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{h^2} \\
\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} &= \frac{5u_{i,j} - 18u_{i-1,j} + 24u_{i-2,j} - 14u_{i-3,j} + u_{i-4,j}}{2h^3} \\
\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} &= \frac{3u_{i,j} - 14u_{i-1,j} + 26u_{i-2,j} - 24u_{i-3,j} + 11u_{i-4,j} - 2u_{i-5,j}}{h^4}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

e) İkinci mertebeden sonrası ihmal edilerek yapılan merkezi farklar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \\
\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \\
\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} &= \frac{u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2h^3} \\
\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} &= \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

f) Dördüncü mertebeden sonrası ihmal edilerek yapılan merkezi farklar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{12h} \\
\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12h^2} \\
\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} &= \frac{-u_{i+3,j} + 8u_{i+2,j} - 13u_{i+1,j} + 13u_{i-1,j} - 8u_{i-2,j} + u_{i-3,j}}{8h^3} \\
\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} &= \frac{-u_{i+3,j} + 12u_{i+2,j} - 39u_{i+1,j} + 56u_{i,j} - 39u_{i-1,j} + 12u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{6h^4}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

g) Karışık türev için ikinci mertebeden sonrası ihmal edilerek yapılan merkezi farklar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk} + O\left(\frac{(h+k)^4}{hk}\right) \\
&= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2} + O(h^2) \quad (h=k)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

2.4.4 Sayısal Hatalar

İki tür sayısal hata vardır: kesme ve yuvarlatma hatası. Sayısal çözümün doğruluğunu etkileyen diğer hatalar ise eksik yaklaşımlar (ardışık yöntemler için) , veri giriş hataları vb. dir. Bu hatalar, bununla birlikte sayısal yöntem ve bilgisayar kullanımıyla ilişkili değildir. Bunlar dikkatle kolaylıkla kontrol edilebilir.

2.4.3’de tartışıldığı gibi Taylor serisinin ihmal edilen terimleri kesme hatasını oluşturur. Daha önce elde edilen tüm sonlu fark gösterimleri içinde görüldüğü gibi, seride daha fazla terim hesaba katıldığında ve/veya ızgara büyüklüğü azaldığında kesme hataları da azalır. Bununla birlikte seriye çok terim katmak uygulama açısından güçlükler içerir. Çünkü yüksek mertebeden türevler içerirler. Dahası bilgisayar sonsuz bir seriyi değerlendiremez. Teoride, ızgara büyüklüğü sıfıra yaklaşırken kesme hataları da sıfıra yaklaşır diye düşünebiliriz. Ama pratikte ızgara büyüklükleri iki sebepten dolayı çok küçük seçilemez. İlki, çözümdeki toplam hata (kesme ve yuvarlatma hatalarının toplamı) yuvarlatma hatası birikmesi nedeniyle çözümü hatalı hale getireceğinden önemli olabilir. İkincisi, verilen hesaplama bölgesindeki ızgara sayısı aşırı fazla olabilir, öyle ki çözümü üretmek için daha fazla bilgisayar zamanı gereklidir. Bilgisayar zamanındaki artış, iteratif yöntemlerde daha da ciddidir. Kesme hatası ve ızgara genişliği arasındaki ilişki Şekil 2.10 da gösterilmiştir.

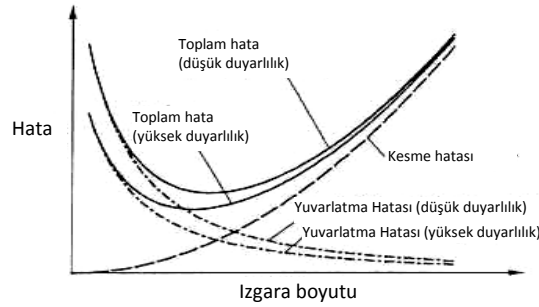
Bir dijital bilgisayarda bir gerçel sayı bir sonlu dijitteki formda yuvarlatılarak saklanır. Örneğin $2/3$ sayısı bir bilgisayarda 0.6666667 sayısına denk binary formda yuvarlatılarak saklanır. Aslında gerçek değer $0,66666666...$ dir. Yuvarlatmanın sebep olduğu hata yuvarlatma hatası olarak adlandırılır ve bu kaçınılmazdır. Yuvarlatma hataları makineye bağlıdır. Sonlu fark gösterimlerinde, eğer ızgara genişliği çok küçükse komşu ızgara noktalarındaki bağımlı değişkenin değerleri çok yakındır. Sonlu fark değeri gibi küçük bir değer başka küçük bir değerle bölünmesi önemli yuvarlatma hatasına sebep olur. Bunu göstermek için ileri fark denklemini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (2.31)$$

$u = ye^x$ ve tüm sayılar üç ondalık basamakla yuvarlatılmış olun ve $x=1.3$ de $y=1$ olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{e^{(1.3+0.01)} - e^{1.3}}{0.01} = \frac{3.706 - 3.669}{0.01} = 3.700 \quad (h = 0.01) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{e^{(1.3+0.001)} - e^{1.3}}{0.001} = \frac{3.673 - 3.669}{0.001} = 4 \quad (h = 0.001) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{e^{(1.3+0.0001)} - e^{1.3}}{0.0001} = \frac{3.670 - 3.669}{0.0001} = 10 \quad (h = 0.0001)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Oysa gerçek değer $e^{1.3} = 3.669$ dur. Bu yüzden ızgara genişlikleri küçülürken yuvarlatma hataları büyür. Izgara genişliklerini küçültülmesi, verilen ızgara bölgesi için ızgara noktalarının sayısının artmasından dolayı aritmetik işlemlerin artışı ve her adım için yuvarlatma hatalarının birikmesine yol açması ile bir KDD nin çözümünde durum daha da kötüye gidecektir. Daha büyük ızgara genişliği daha küçük yuvarlatma hatasına sebep olmasına rağmen iki sebepten dolayı ızgara genişliği çok büyük seçilemez. Bunlardan ilki, aşırı kesme hatasından dolayı toplam hata önemli hale gelir. İkincisi, kesin yöntemlerdeki kararsızlığın çözüme etki etmesidir. Izgara genişliğinin arttırılması yerine yüksek hassaslıklı aritmetik kullanarak yuvarlatma hataları büyük oranda azaltılabilir. Çünkü bu durumda kayan-nokta sayısı için daha fazla basamak kullanılır. Bununla birlikte bu çok daha fazla zaman ve yer kaybına sebep olur. Yuvarlatma hatası ve ızgara genişliği arasındaki ilişki Şekil 2.10 da gösterilmiştir.



Şekil 2. 10 Izgara boyutuna bağlı olarak hatalar

Şekil 2.10 da gösterildiği gibi anlamlı çözüm elde etmek için toplam hata kontrol edilmelidir. Yer ve hız etkenlerini düşünerek, doğruluğu iyileştirmek için sadece son çare olarak yüksek hassaslıklı hesaplamalar kullanılabilir. Minimum toplam hata için ızgara genişliğinin analitik hesabı çok güçtür. Minimum toplam hata için ızgara genişliği tahmin etmenin basit bir yolu deneme-yanılmadır. O halde belli bir ızgara genişliği için

elde edilen sayısal sonuçtan sonra farklı (sıklıkla daha küçük) ızgara genişliği için tekrar sayısal çözüm elde edilir. Bu iki başarılı sonuç karşılaştırıldıktan sonra gerekli ızgara genişliğine karar verilebilir.

Bununla birlikte minimum toplam hata için ızgara genişliği en iyi seçim olmayabilir. Çok ihtiyaç olmadıkça yavaşça genişleyen ızgara büyüklüğü belki daha iyi olacaktır. Çünkü daha az ızgara içereceğinden çözümü elde etme süresi kısalaabilir. Izgara genişliği seçimi problemin fiziksel doğasına da bağlıdır. Hesaplama bölgesindeki çözümün yavaşça değişmesinin beklendiği problemler için daha büyük ızgara genişliği kullanılabilir. Bölgesinin bir kısmında çözümün yavaşça değişmesinin ve diğer kısmında ise daha yavaş değişmesinin beklendiği problemlerde “hızlı-değişen” bölgede dar aralıklı ızgaralı ve “yavaş-değişen” bölgede geniş aralıklı ızgaralı düzgün olmayan sistem kullanılması en uygun seçim olacaktır [1].

2.5 Kesirli Diferansiyel Denklemler

Türev ve integral genel olarak teknolojinin temelini oluşturmaktadır ve aynı zamanda doğal ve yapay sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada çok önemli bir araçtır. Kesirli diferansiyel, matematiksel analizin bir kolu olarak, kendi adından da tahmin edileceği üzere, türev ve integralin tam olmayan (keyfi) derecelere genişletilmiş bir şeklidir. Konu, diferansiyel hesap kadar eski olup Leibniz ve Newton’un diferansiyel hesaplama tekniğini bulmalarına kadar uzanır [7].

Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü vs. türevlerinin nasıl alındığını biliyoruz fakat $3/2$ nci türevini nasıl alabiliriz? Aynı şekilde bir fonksiyonu iki ya da üç defa integre edebiliriz ama $1/2$ defa integre edebilir miyiz? Leibniz 1695’te L’Hospital’a sorduğu “Tam sayı dereceden türevler, kesirli dereceden türevlere genelleştirilebilir mi?” sorusu kesirli diferansiyelin başlangıcı olarak gösterilebilir. Leibniz’in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Leibniz’in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grunwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çalışmışlardır [8].

O günden bu yana hızla artan bir biçimde, kesirli diferansiyel denklemler birçok fiziksel süreçlere uygulanmış ve incelenen fiziksel süreçleri çok daha iyi karşılayan sonuçlar elde edilmiştir. Viscoelasticity, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler, birçok difüzyon süreçleri vs. bu uygulamalar arasında yer almaktadır. Kesirli hesap tekniğinin matematik uygulamalarının çoğu 19.yy. bitmeden ortaya koyulmuştur fakat mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarılar elde etmesi ancak geçtiğimiz yüz yıl içerisinde gerçekleşebilmiştir. Şu var ki kesirli diferansiyel denklemler anlaması oldukça güç olmasının yanı sıra tamsayı kuvvetli diferansiyellere göre daha doğru ya da kesin olduğu da söylenemez. Kesirli hesabın tanımları ve kullanımını anlamak için bazı matematik tanımlarını iyi bilmek gerekmektedir. Bunlar öncelikle Gama fonksiyonları, Beta Fonksiyonları, Laplace dönüşümleri ve Mittag-Leffler fonksiyonlarıdır [9].

2.5.1 Gama Fonksiyonu

Daha sonra da görüleceği üzere gama fonksiyonu, kesirli diferansiyel ile doğrudan ilişkilidir. Gama fonksiyonunun en basit anlamı faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir. Gama fonksiyonun tanımı;

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \quad z \in R \quad (2.33)$$

ile verilir. En belirgin özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in N_+, \quad \Gamma(z) = (z-1)! \quad (2.34)$$

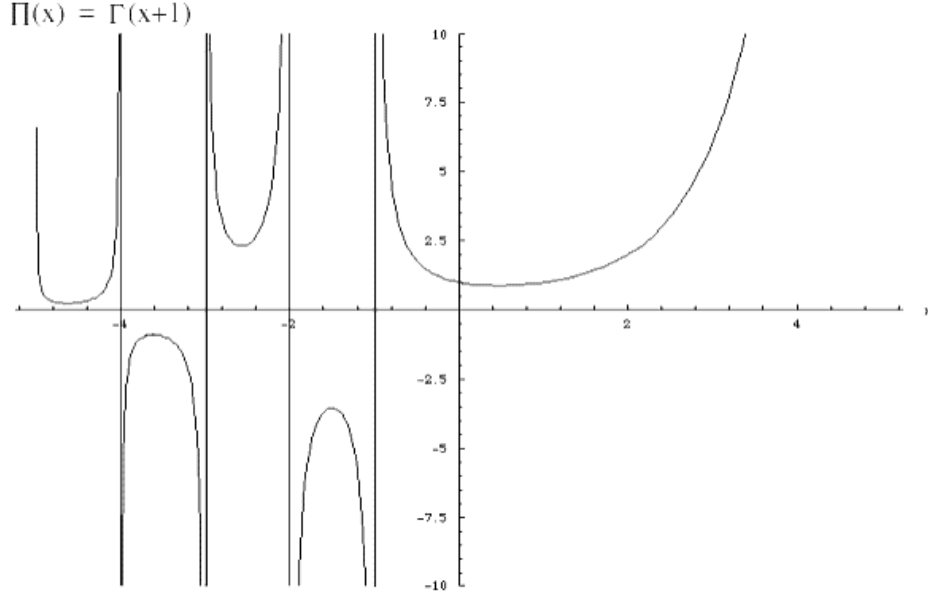
dir. Bu ifade kısmi integral yöntemiyle kolayca elde edilebilir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (2.35)$$

Buradan açıkça görülmektedir ki $\Gamma(1)=1$ dir ve (2.35) denklemi kullanılarak $z=1,2,3,\dots$ için

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \quad (2.36)$$

olduğu görülür. Şekil 2.11, sıfır noktası civarında gama fonksiyonunun davranışını göstermektedir. Gama fonksiyonu pozitif bölgede her noktada tanımlı olmasına karşın, negatif tamsayı değerlerinde sonsuza gitmektedir [10].



Şekil 2. 11 Gama fonksiyonu

2.5.2 Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda gama fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygundur.

Beta fonksiyonu çoğunlukla

$$B(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{\omega-1} d\tau, \quad \text{Re}(z) > 0, \quad \text{Re}(\omega) > 0 \quad (2.37)$$

şeklinde tanımlanır. En belirgin özellikleri arasında

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p) \quad (2.38)$$

verilebilir [10].

2.5.3 Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü genel olarak karmaşık denklemlerin çözümünde kullanılan çok faydalı bir yöntemdir. $f(t)$ nin Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s) \quad (2.39)$$

şeklinde verilir. Şayet (2.40) denklemi yakınsak ise $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcuttur denir. Bunun için gerek şart e^{-st} 'nin azalma oranına nispeten $f(t)$ nin daha hızlı bir oranda büyümesidir [9].

2.5.4 Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler fonksiyonları [11] kesirli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinde çok yaygın kullanım alanları bulan oldukça önemli bir fonksiyondur. Üstel fonksiyon e^z tamsayı dereceden diferansiyel denklemler teorisinde çok önemli bir rol oynar. Onun bir parametrelili genelleştirilmiş şekli

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.40)$$

ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir [9],[12],[28].

2.5.5 Grünwald-Letnikov tanımı:

Grünwald ve Letnikov türevin genel tanımından yola çıkmış ve gama fonksiyonlarından faydalanmışlardır. Gama fonksiyonlarının

$$(-j) \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \quad (2.41)$$

özdeşliği esas alınmıştır. Bu ifadeden yararlanılarak n nin negatif ve pozitif değerleri için hem türevi hem de integrali aynı anda sağlayan

$$\frac{d^n f}{d(x-a)^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(j+1)} f(x-j \frac{x-a}{N})}{\left(\frac{x-a}{N}\right)^n \Gamma(-n)} \quad (2.42)$$

ifadesi yazabilir. Burada n nin pozitif değerleri için türevin genel tanımına, pozitif değerleri için ise integralin genel tanımına ulaşılmaktadır. n yerine tüm değerleri alabilen q ifadesi yazıldığı takdirde (2.43) bağıntısı en genel haliyle

$$\frac{d^q f}{d(x-a)^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f(x-j \frac{x-a}{N})}{\left(\frac{x-a}{N}\right)^q \Gamma(-q)} \quad (2.43)$$

şeklinde ifade edilir ve bu bağıntı Grünwald-Letnikov tanımı olarak adlandırılır [9], [16].

2.5.6 Riemann-Liouville Tanımı

Sıkça kullanılan bu tanım Cauchy formülünden yararlanılarak elde edilir. İlk olarak

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.44)$$

gibi bir türev tanımlanmış olsun. Her iki tarafın a dan x e kadar integralini alınırsa,

$$\int_a^x f(t)dt = F(t) \Big|_a^x \quad (2.45)$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

olacaktır. Her iki tarafın x e göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

olduğu görülür.

$$I = \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt \quad (2.47)$$

şeklinde bir integral göz önüne alalım. Görüldüğü üzere I fonksiyonu $U(x)$ ve $V(x)$ e bağlıdır. Bu durumda kısmi türevin

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\partial I}{\partial V(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial U(x)} \frac{\partial U(x)}{\partial x} \quad (2.48)$$

özdeşliğinden faydalananarak bu ifadede (2.49) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt = \frac{\partial}{\partial V(x)} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial U(x)} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt \frac{\partial U(x)}{\partial x} \quad (2.49)$$

bulunur. Eşitliğin sağ, (2.48) özdeşliği göz önüne alınarak yeniden düzenlenirse

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt = f(V) \frac{dV}{dx} - f(U) \frac{dU}{dx} \quad (2.50)$$

elde edilir. Burada '-' işareti (2.51) denkleminin sağ tarafındaki son integral teriminin sınırlarının yer değiştirmesi neticesinde olmuştur. İntegralin alma işleminin

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt \quad (2.51)$$

özelliklerinden faydalanılarak (burada a ve b birer sabittirler) ve

$$I = \int_{U(x)}^{V(x)} f(x,t)dt \quad (2.52)$$

İntegrali için,

$$I = I(x, V(x), U(x)) \quad (2.53)$$

olduğuna göre (2.50) ve (2.51) denklemlerinin daha kapalı şekli

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(x,t)dt = f(x, V) \frac{dV}{dx} - f(x, U) \frac{dU}{dx} + \int_{U(x)}^{V(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt \quad (2.54)$$

Halini alır ve bu ifade Leibniz kuralı olarak adlandırılır. Aşağıdaki integral verilmiş olsun

$$I_n(x) = \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.55)$$

Burada n pozitif tamsayı, a ise sabittir. Bu integralde Leibniz'in (2.55) denklemi kullanılırsa; burada $F(x,t) = (x-t)^{n-1} f(t)$ olduğu görülmektedir, $I_n(x)$ 'in türevi için

$$\frac{dI_n(x)}{dx} = (n-1) \int_a^x (x-t)^{n-2} f(t) dt + [(x-t)^{n-1} f(t)]_{t=x} \quad (2.56)$$

yazarız. Eşitliğin sağındaki ikinci ifadenin $n > 1$ için sıfıra gittiği açıktır ve bu nedenle $n > 1$ için

$$\frac{dI_1}{dx} = f(x) \quad (2.57)$$

olacaktır. (2.57) denkleminin k defa türevi alınırsa

$$\frac{d^k I_n}{dx^k} = (n-1)(n-2) \dots (n-k) I_{n-k} \quad (2.58)$$

ifadesi elde edilir. $k=n-1$ değeri için daha kullanışlı olarak

$$\frac{d^{n-1} I_n}{dx^{n-1}} = (n-1)! I_1(x) \quad (2.59)$$

yazılır ve (2.58) ifadesi de göz önüne alınırsa

$$\frac{d^n I_n}{dx^n} = (n-1)! f(x) \quad (2.60)$$

denklemi elde edilir. Burada $n \geq 1$ değerleri için (2.60) ve (2.61) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_a^x f(x_1) dx_1 \\ I_2(x) &= \int_a^x f(x_2) dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$I_n(x) = (n-1)! \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Genel ifadesine ulaşılır. Burada

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.62)$$

Cauchy integrali olarak bilinir. Bu ifadenin sağ tarafı bir operatör ile temsil edilirse ve n yerine her değeri alabilen bir q değeri yazılırsa, ifade

$$\frac{d^q f}{d(x-a)^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x (x-t)^{-q-1} f(t) dt \quad ; q < 0 \quad (2.63)$$

şeklini alır. Bu ifade Riemann-Liouville kesirli integrali olarak adlandırılır. Basit bir matematiksel işlem ile $n > q$ olmak şartıyla $q \geq 0$ değerleri için

$$\frac{d^q f}{d(x-a)^q} = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^x (x-t)^{-(q-n)-1} f(t) dt \right] \quad (2.64)$$

bağıntısı elde edilebilir. (2.65) denklemi Riemann-Liouville kesirli türevi olarak bilinir. Bu yöntemle yazılan (2.64) integrali sadece $q < 0$ değerleri için yakınsatır; bu denklem $q \geq 0$ için $n > q$ olmak koşuluyla çözülür. (2.65) denkleminde görüldüğü gibi n kez türevin integrale uygulanması uygulamada zorluklar yaşanmasına neden olabilmektedir [7],[9],[13].

2.5.7 Caputo Kesirli Türevi

Kesirli diferansiyel tekniğin Riemann-Liouville tanımları kesirli türev integral ve onun uygulamalarıyla ilgilenen soyut matematiksel çalışmalarda çok büyük bir rol oynamıştır. Bununla birlikte modern teknolojinin gelişimi soyut matematiğin uygulama ve ele alınış şeklini de etkilemiştir. Kesirli diferansiyel tekniğinde, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde kullanabilen Caputo olmuştur. Caputo'nun tanımı

$${}_a^C D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 < \alpha < n) \quad (2.65)$$

ile verilir. Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tamsayı dereceden diferansiyel denklemlerdekiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Başka bir ifadeyle $t=a$ alt limitinde, bilinen bir fonksiyonun tam derece

türevlerinin limit değerlerini içermesidir [9].

2.5.8 Caputo ve Riemann-Liouville Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

(2.64) ve (2.65) ile verilen kesirli Riemann-Liouville türevi, kesirli türevler ve integraller teorisinde ve bunun soyut matematikteki uygulamalarında önemli rol oynar. Ancak, uygulama problemleri fiziksel olarak yorumlanabilir kesirli türev tanımlarını gerektirir. Bu açıdan bakıldığında, Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin fiziksel yorumlanmasında yetersiz kaldığı ortaya konmuştur. Caputo kesirli türevinin Riemann-Liouville kesirli türevine olan bir üstünlüğü olarak anlaşılmamalıdır. Ancak Caputo yaklaşımı Riemann-Liouville yaklaşımının fiziksel koşulları problemlere uygulama konusundaki bu eksikliğini tamamlaması açısından önemlidir [9].

İki yaklaşım arasındaki bazı önemli farklılıklar aşağıdaki biçimde açıklanabilir:

1. Riemann-Liouville yaklaşımı Riemann-Liouville kesirli türevlerinin limit değerleri biçiminde tanımlanan başlangıç koşullarına yol açar. Örneğin; $b_1, b_2, \dots, b_n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ &\dots \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n,\end{aligned}\tag{2.66}$$

biçiminde tanımlanan başlangıç koşulları meydana gelir. Bu tipteki başlangıç koşullarına sahip başlangıç-değer problemlerinin matematiksel olarak çözümü başarı ile gerçekleştirilebilir. Ancak pratikte bu çözümler kullanışsızdır. Çünkü bu tipteki başlangıç koşullarının bilinen fiziksel yorumu yoktur. Matematiksel teori ve pratik ihtiyaçlar arasındaki bu uyumsuzluğu ortadan kaldıran M.Caputo olmuştur.

Caputo kesirli türevinin, doğal şartlar altında $\alpha \rightarrow n$ için n . mertebeden tamsayıli mertebeli türeve eşit olduğu görülebilir. Varsayalım ki $0 \leq n-1 < \alpha < n$ ve $f(t)$, $[a, T]$ üzerinde $n+1$ sürekli türeve sahip olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow n} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{a \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\
&= f^{(n)}(t) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\
&= f^{(n)}(t), \quad n=1,2,\dots
\end{aligned} \tag{2.67}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise Riemann-Liouville yaklaşımında olduğu gibi Caputo yaklaşımının da tamsayı mertebeli türevler ile ilişkisi olduğunu gösterir.

Caputo yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır.

2. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinin Laplace dönüşümleri $\alpha=0$ olması durumunda sırasıyla

$$\int_0^\infty e^{-st} \{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t)_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n) \tag{2.68}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 \leq \alpha < n) \tag{2.69}$$

biçimindedir. Dikkat edilirse Caputo türevinin Laplace dönüşümü, tamsayı mertebeli türevlerin başlangıç değerlerinin kullanımına izin verir ve bu tipteki türevlerin bilinen fiziksel yorumları da vardır.

3. Riemann-Liouville ve Caputo tanımları arasındaki önemli bir fark da sabitin türevidir. Sabit bir sayının Caputo türevi sıfırdır. Ancak sonlu bir alt sınır değeri için Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. C sabit bir sayı olmak üzere

$${}_0 D_t^\alpha C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{2.70}$$

Ochmann ve Makarov, Riemann-Liouville kesirli türevini $\alpha = -\infty$ olması durumunda incelemişlerdir ve göstermişlerdir ki ancak bu durumda türevin değeri 0'a eşit olur. Çünkü bilinen odur ki problemin fiziksel olarak yorumunun yapılabilmesi için sabitin kesirli türevinin sıfıra eşit olması gerekir. $\alpha = -\infty$ olmasının fiziksel olarak anlamı

fiziksel sürecin başlangıç zamanının $-\infty$ olmasıdır. Böyle olması durumunda sistemdeki geçiş etkileri çalışmayabilir. Fakat, $\alpha = -\infty$ alınması sabit (salınımsız)-durum süreçleri düşünüldüğünde gereken bir soyutlamadır. Örneğin, periyodik girdi sinyallerine sahip olan bir kesirli dinamik sistemin tepkisi üzerinde çalışılırken ya da viskoelastik materyallerdeki dalga yayılımını incelerken bu soyutlamaya gerek duyulur.

4. Uygulamalar açısından önemli olan iki yaklaşım arasındaki bir başka fark, ardışık kesirli ve tamsayı mertebeli türevlerin sıralanışıdır. Bu fark Caputo ve Riemann-Liouville yaklaşımları için sırası ile şu şekildedir:

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m=0,1,2,\dots; n-1 < \alpha < n) \quad (2.71)$$

ve

$${}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m=0,1,2,\dots; n-1 < \alpha < n) \quad (2.72)$$

Her iki yaklaşımdaki türev operatörlerinin yer değiştirmesi farklı koşullar altında gerçekleşir. Bu koşullar aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha ({}_a^C D_t^m f(t)) &= {}_a^C D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t), \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = n, n+1, \dots, m \\ (m=0,1,2,\dots; n-1 < \alpha < n) \end{aligned} \quad (2.73)$$

ve

$$\begin{aligned} {}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) &= {}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t), \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = 0,1,2,\dots,m \\ (m=0,1,2,\dots; n-1 < \alpha < n) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Burada görülen odur ki Riemann-Liouville yaklaşımının tersine Caputo yaklaşımında $s=0,1,2,\dots,m$ olması durumunda $f^{(s)}(0)$ ler için herhangi bir kısıtlama yoktur.

BÖLÜM 3

BURGER DENKLEMİ VE SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

3.1 Burger Denklemi

Burger Denklemi [14]; akışkan mekaniği, gaz dinamikleri ve trafik akış hesabı gibi konuların çözüme ulaşması için kullanılan bir non-lineer kısmi diferansiyel denklemdir. Matematiksel ifadesi aşağıdaki şekildedir [15].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < t \leq T \quad (\nu : \text{sabit})$$

Sınır Şartlar

$$u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t) \quad (3.1)$$

Başlangıç Şartı

$$u(x, 0) = f(x)$$

Burger denkleminin çözümü için araştırmacılar tarafından çeşitli yöntemler sunulmuştur. Bazı matematikçiler basit başlangıç şartları kullanarak analitik çözümlere ulaşmışlardır, bunlar; Hopf [16], Benton and Platzman [17], ve Core [18] olarak örnek

verilebilir. Birçok koşulda ise bu denklem sadece sayısal olarak çözülebilmıştır. Sonlu elemanlar metodu yaklaşımını Varöglü ve Finn's [19] yapmıştır. Sonlu fark metodu ile yapılan çözümler de bulunabilir [20-23]. Bazı özel yaklaşımlar da oluşturulmuştur. Hon ve Mao [24] Burger's denklemini multiquadric (MQ) quasi-interpolation yöntemi ile çözmüştür. Asaithambi [25] automatic differentiation yöntemi ile çözüm sunmuştur.

Bu problemin çözümünü sonlu fark metoduyla bulmak için çözüm bölgesini ayırklaştırmak gerekir. Bölgeyi x eksenini boyunca Δx adım aralığı ile t eksenini boyunca Δt adım aralığı ile bölünebilir. Bu sayede x eksenini $m.\Delta x$ aralığa, t eksenini $n.\Delta t$ aralığa bölünmüş olur [26].

Sonlu fark şeması oluşturulurken denklemdeki türevli ifadeler yerine bunların Taylor açılımı ile elde edilmiş yaklaşık ifadeleri yazılır. Düzenleme yapılarak sonlu fark şeması oluşturulmuş olur. Taylor açılımı yapılırken kullanılan noktaların aralıkları ileri, geri ve merkezi olarak farklı şekillerde alınabilir. Örneğin problemdeki $\frac{\partial u}{\partial t}$ ifadesi şu şekilde değiştirilir.

$$\begin{aligned}
 u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + \frac{u_{tt}(x, t)}{2}(\Delta t)^2 + \dots \\
 u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + O(\Delta t) \\
 u_t(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \\
 u_t(x, t) &= \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Benzer şekilde diğer türevli ifadelerin yerine de fark ifadeleri yazılırsa fark şeması elde edilmiş olur.

$$u_x(x, t) = \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \tag{3.3}$$

$$u_{xx}(x, t) = \left(\frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \tag{3.4}$$

3.2 Açık Fark Şeması

Bu fark şemasında bilinen değerlerin kullanılması ve iterasyonla çözüm yapılması için ileri, geri ve merkezi fark açılımı kullanılabilir. Aradığımız fonksiyonun yaklaşık çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [26].

$$u(x, t) \cong U(x_m, t_n) \quad (3.5)$$

Çözüm bölgesini de çeşitli adım aralıklarına bölmek gerekir bu adım aralıklarını da aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$M = \frac{b-a}{\Delta x}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M), \quad N = \frac{T}{\Delta t}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.6)$$

Bu düzenlemeleri yapıp fark yaklaşımları verilen problemde yerine yazılırsa aşağıdaki fark şeması elde edilir.

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) = v \left(\frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad (3.7)$$

Çeşitli düzenlemeler yapılır ve $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ olarak alınırsa;

$$U_m^{n+1} - U_m^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) = vr U_{m+1}^n - 2vr U_m^n + vr U_{m-1}^n \quad (3.8)$$

Bu elde edilen denklemde bilinen ve bilinmeyen değerler farklı yerlerde toplanırsa;

$$U_m^{n+1} = U_m^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + vr U_{m+1}^n - 2vr U_m^n + vr U_{m-1}^n \quad (3.9)$$

$$U_m^{n+1} = (1 - 2vr) U_m^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + vr (U_{m+1}^n + U_{m-1}^n)$$

Denklemini elde edilir. Açık fark şemasının kararlı bir çözüm elde edebilmesi için;

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2v} \quad (3.10)$$

Oranının sağlanması gerekir.

3.2.1 Açık Fark Şemasının Kararlılık Analizi

$U(x,t)$ yaklaşık çözümü için değişkenlerin ayrılması yöntemini kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$U_k(x,t) = T_k(t)X_j(x) = T_k(t)e^{j\beta x} = U_m^n \quad |T_k(t)| \leq 1 \quad (3.11)$$

Bu elde edilen ayrık çözüm ifadesi Burger Denklemi için oluşturulan Açık Fark Şemasında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(T(t+\Delta t)e^{j\beta x} - T(t)e^{j\beta x}) + T(t)e^{j\beta x} \frac{1}{2\Delta x}(T(t)e^{j\beta(x+\Delta x)} - T(t)e^{j\beta(x-\Delta x)}) = \\ \frac{v}{(\Delta x)^2}(T(t)e^{j\beta(x+\Delta x)} - 2T(t)e^{j\beta x} + T(t)e^{j\beta(x-\Delta x)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesi için, $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = r$ olarak alınır ve her

terim $\frac{\Delta t}{e^{j\beta x}}$ ifadesi ile çarpılırsa aşağıdaki denklem bulunur;

$$T(t+\Delta t) - T(t) + \frac{\Delta t}{2\Delta x}T(t)T(t)e^{j\beta x}(e^{j\beta\Delta x} - e^{-j\beta\Delta x}) = rvT(t)(e^{j\beta\Delta x} - 2 + e^{-j\beta\Delta x}) \quad (3.13)$$

Bu denklemde $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ifadesi kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T(t+\Delta t) - T(t) = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}T(t)T(t)e^{j\beta x}((\cos \beta\Delta x + j \sin \beta\Delta x) - (\cos \beta\Delta x - j \sin \beta\Delta x)) \\ + rvT(t)((\cos \beta\Delta x + j \sin \beta\Delta x) - 2 + (\cos \beta\Delta x - j \sin \beta\Delta x)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

denklemini elde edilir. Düzenleme yapılırsa;

$$T(t+\Delta t) - T(t) = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}T(t)T(t)e^{j\beta x}(2j \sin \beta\Delta x) + rvT(t)(2 \cos \beta\Delta x - 2) \quad (3.15)$$

denklemini bulunur. Bu denklemde bulunan polinom eşitliğini kullanarak imajiner kısımlar silinebilir.

$$T(t+\Delta t) = T(t) - 2rvT(t)(1 - \cos \beta\Delta x) \quad (3.16)$$

denkleminde trigonometrik dönüşümler uygulanırsa;

$$T(t + \Delta t) = T(t) - 2rvT(t)(1 - (1 - 2\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2})) \quad (3.17)$$

bu denklemde de düzenlemeler yapılırsa;

$$T(t + \Delta t) = T(t) - 2rvT(t)(2\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}) \quad (3.18)$$

$$T(t + \Delta t) = T(t)(1 - 4rv(\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2})) \quad (3.19)$$

Denklemleri elde edilir. Analizin başında $|T_k(t)| \leq 1$ olarak kabul edilmişti. Bu mutlak değer ifadesi;

$$-1 \leq T_k(t) \leq 1 \quad (3.20)$$

şeklinde ele alınabilir. Bu eşitsizlikte iki farklı durumun da ele alınması gerekir;

$T_k(t) \leq 1$	$-1 \leq T_k(t)$
$1 - 4rv(\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}) \leq 1$	$-1 \leq 1 - 4rv(\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2})$ $4rv(\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}) \leq 2$ $4rv \leq 2((\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}) = 1)$ $r \leq \frac{1}{2v} \Rightarrow \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2v}$

Bu ifadeler sonucunda açık şemanın kararlı olması için $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2v}$ ifadesinin sağlanması gerektiği bulunur[26].

3.3 Kapalı Fark Şeması (Crank – Nicholson)

Bu yöntemde bilinmeyen nokta sayısı birden fazla olmalıdır ve denklem sistemi yardımıyla çözüme ulaşılır. İleri ve merkezi fark kullanılması gereklidir. Normal kapalı

şemaya ek olarak Crank – Nicholson şeması kullanılarak bir türev ifadesi için aynı anda hem ileri hem de merkezi fark kullanılır. Açık şemaya benzer şekilde fark ifadelerin Burger Denkleminde yerine yazılınca aşağıdaki kapalı fark şemasını elde edilir [26].

$$\frac{1}{\Delta t}(U_m^{n+1} - U_m^n) = \frac{v}{2(\Delta x)^2}[(U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) + (U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n)] - U_m^n \left[\frac{1}{2\Delta x}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \right] \quad (3.21)$$

Her taraf Δt ile çarpılsın;

$$(U_m^{n+1} - U_m^n) = \frac{v\Delta t}{2(\Delta x)^2}[(U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) + (U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n)] - U_m^n \left[\frac{\Delta t}{2\Delta x}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \right] \quad (3.22)$$

$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ olarak alıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$U_m^{n+1} - U_m^n = \frac{vr}{2}U_{m+1}^{n+1} - vrU_m^{n+1} + \frac{vr}{2}U_{m-1}^{n+1} + \frac{vr}{2}U_{m+1}^n - vrU_m^n + \frac{vr}{2}U_{m-1}^n - \frac{r\Delta x}{2}U_m^n U_{m+1}^n + \frac{r\Delta x}{2}U_m^n U_{m-1}^n \quad (3.23)$$

Bilinen ve bilinmeyen terimler farklı taraflarda toplanırsa;

$$(1 + vr)U_m^{n+1} - \frac{vr}{2}(U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) = \frac{vr}{2}(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n) + (1 - vr - \frac{r\Delta x}{2}U_{m+1}^n + \frac{r\Delta x}{2}U_{m-1}^n)U_m^n \quad (3.24)$$

denklemini elde edilir. Burada her terim $\frac{2}{vr}$ ile çarpılırsa;

$$(\frac{2}{vr} + 2)U_m^{n+1} - (U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) = U_{m+1}^n + U_{m-1}^n + (\frac{2}{vr} - 2 - \frac{\Delta x}{v}U_{m+1}^n + \frac{\Delta x}{v}U_{m-1}^n)U_m^n \quad (3.25)$$

kapalı fark şemasını oluşturulmuş olur.

Kapalı fark şemasında m ve n değerlerine göre sol tarafta bilinmeyenler oluşur ve bir denklem sistemi elde edilir bu denklem sistemi çözülerek bölgedeki tüm noktalar

yaklaşık olarak hesaplanır. Kapalı fark şemasında kararlılık sorunu olmadığı için kararlılık analizi yapılmasına gerek yoktur [26].

Örnek 3.1 [15].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq 0,1$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \quad (3.26)$$

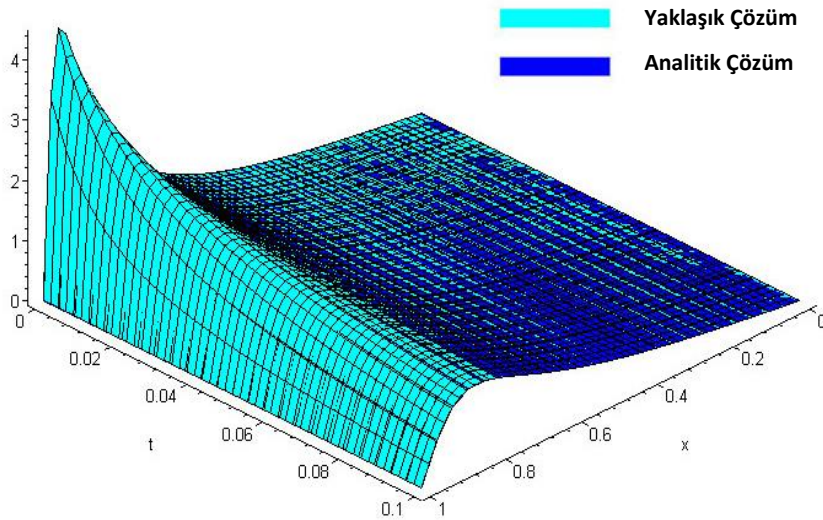
$$u(x,0) = \frac{2v\pi \sin(\pi x)}{a + \cos(\pi x)}, \quad a > 1$$

Denklemini $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.005$, $v = 1$, $a = 1.1$ olarak ele alınsın.

Analitik çözüm;

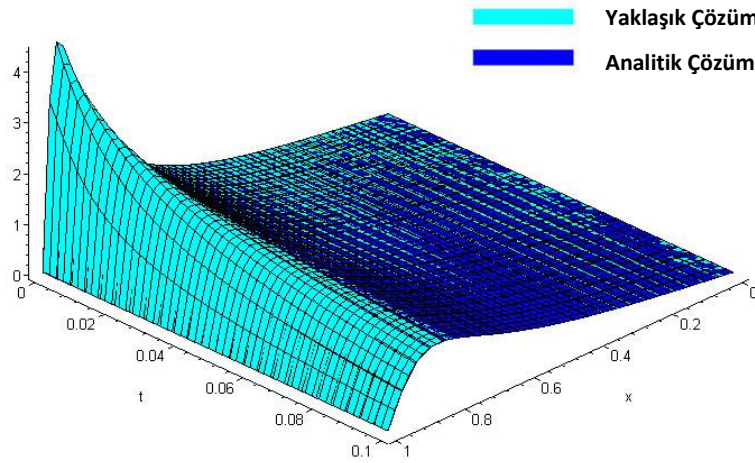
$$u(x,t) = \frac{2v\pi \exp(-\pi^2 vt) \sin(\pi x)}{a + \exp(-\pi^2 vt) \cos(\pi x)} \quad (3.27)$$

Açık Fark Şeması ile çözüm yapıldığında aşağıdaki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 3. 1 Açık Şema $\Delta t = 0.002$, $\Delta x = 0.02$

Kapalı Fark Şeması ile çözüm yapıldığında aşağıdaki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 3. 2 Kapalı Şema $\Delta t = 0.002$, $\Delta x = 0.02$

Grafiklere bakıldığında, çözüm aralıkları çok küçük alındığı için aradaki fark anlaşılmayabilir. Bu yüzden çeşitli noktadaki yaklaşık ve analitik çözüm değerleri karşılaştırılarak, yaklaşık çözüm ve analitik çözüm arasındaki farklar rahat bir şekilde görülebilir.

Çizelge 3. 2 Örnek 3.1 için hata analizi

X	Analitik Çözüm	Açık Şema		Kapalı Şema	
		Yaklaşık Değer	Hata	Yaklaşık Değer	Hata
0.2	0.1919738192	0.1919410601	0.327591e-3	0.1919683617	0.54575e-5
0.4	0.4197026980	0.4195256164	0.1770816e-2	0.4196536175	0.490805e-4
0.6	0.7416266022	0.7404183044	0.1208297e-2	0.7471914470	0.4351552e-3
0.8	1.163397787	1.159295969	0.4101818e-2	1.161741813	0.1165597e-2

Bu tabloya baktığımızda çözüm bölgesinin farklı yerlerinden alınan değerler karşılaştırıldığında Kapalı Fark Şeması ile hesaplanan yaklaşık çözümün daha yakınsak çözümler verdiği görülmüştür.

Örnek 3.2 [15].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq 0,1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (3.28)$$

$$u(x, 0) = 4x(1 - x)$$

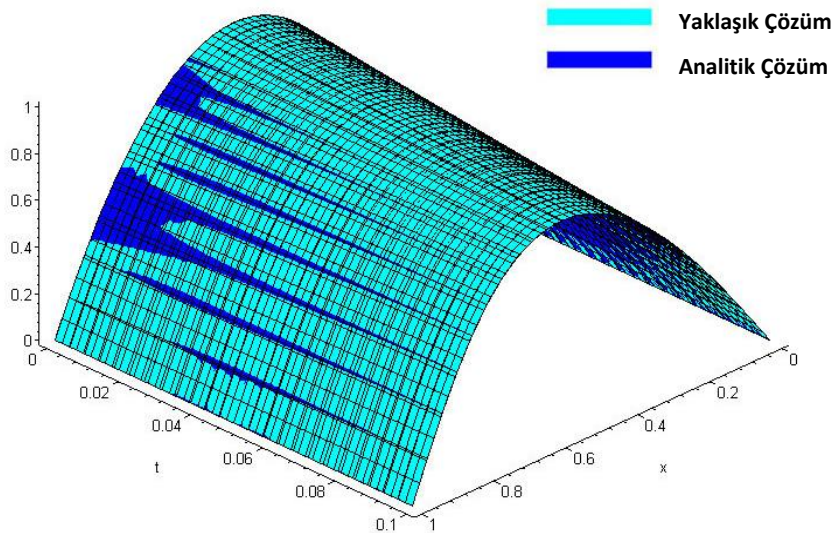
Denklemin $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.005$, $v = 1$ olarak ele alınsın.

Analitik çözüm;

$$u(x, t) = \frac{2v\pi \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \exp(-k^2 \pi^2 v t) \sin(k\pi x)}{A_0 + 2v\pi \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \exp(-k^2 \pi^2 v t) \cos(k\pi x)} \quad (3.29)$$

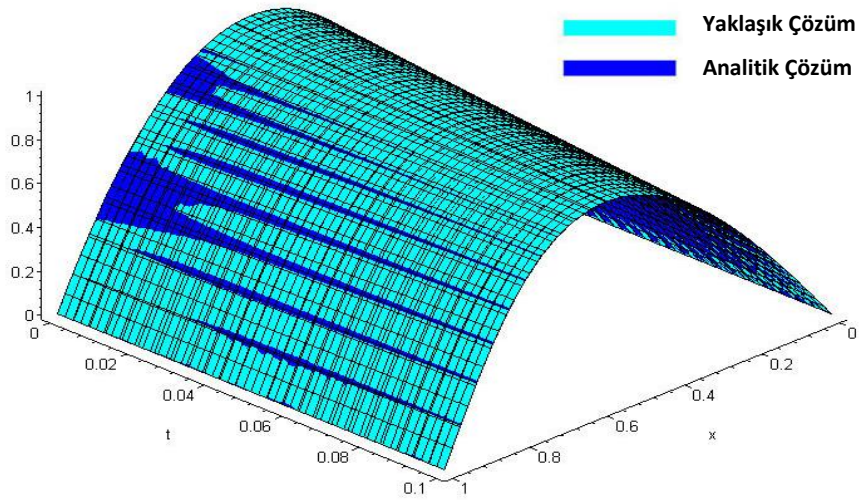
$$A_0 = \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}(3-2x)\} dx \quad A_k = \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}(3-2x)\} \cos(k\pi x) dx, \quad k \geq 1$$

Açık Fark Şeması ile çözüm yapıldığında aşağıdaki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 3. 3 Açık Şema $\Delta t = 0.002$, $\Delta x = 0.02$

Kapalı Fark Şeması ile çözüm yapıldığında aşağıdaki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 3. 4 Kapalı Şema $\Delta t = 0.002$, $\Delta x = 0.02$

Grafiklere bakıldığında, çözüm aralıkları çok küçük alındığı için aradaki fark anlaşılmayabilir. Bu yüzden çeşitli noktadaki yaklaşık ve analitik çözüm değerleri karşılaştırılarak, yaklaşık çözüm ve analitik çözüm arasındaki farklar rahat bir şekilde görülebilir.

Çizelge 3. 3 Örnek 3.2 için hata analizi

X	Analitik Çözüm	Açık Şema		Kapalı Şema	
		Yaklaşık Değer	Hata	Yaklaşık Değer	Hata
0.2	0.4624737728	0.4617228415	0.7509313e-3	0.4621357339	0.3380391e-3
0.4	0.8002594088	0.8000178592	0.2415496e-3	0.8003114016	-0.519928e-4
0.6	0.9186915912	0.9192373873	-0.5457961e-3	0.9192600915	-0.4685003e-3
0.8	0.6918279381	0.6924546991	-0.6267610e-3	0.6920556021	-0.267664e-3

**KESİRLİ MERTEBEDEN BURGER DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SONLU
FARK METODU İLE ÇÖZÜMÜ****4.1 Kesirli Mertebeden Burger Diferansiyel Denklemi :**

Burger diferansiyel denkleminin zaman ve alan değişkenine bağlı olarak kesirli mertebeden türevleri ile çözümü yaklaşık olarak sonlu farklar metodu ile hazırlanabilir. Kesir mertebeli Burger denklemi ilk olarak S. Momani [30] tarafından ortaya atılmıştır [27],[29].

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < t \leq T, \\ 0 < \alpha < 1, \quad 1 < \beta < 2$$

Dirichlet Sınır Koşulları :

$$u(a, t) = f_1(t), \quad (4.1)$$

$$u(b, t) = f_2(t),$$

Başlangıç Koşulları:

$$u(x, 0) = g(x),$$

4.2 Sonlu Fark Şemasının Oluşturulması:

Kesirli türev içeren terimlerin birisi Caputo diğeri de Riemann-Liouville kesirli türev açılımı kullanılarak sonlu fark şemasında yazılırsa aşağıdaki şemayı elde edilir. Burada α, β katsayıları kesirli türevin mertebesini ifade eder [27].

$$\frac{\Delta t}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u_i^{k+1-j} - u_i^{k-j}}{\Delta x} [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] = -u_i^k \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} + \frac{v}{(\Delta x)^\beta} \sum_{j=0}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^{k+1} \quad (4.2)$$

Bu şemada bazı terimler, sonraki kullanımlarda karışıklık olmaması için notasyonlar kullanarak yazılabilir [9].

$$\begin{aligned} \sigma_j &= (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha} \\ p_i &= \frac{\Gamma(2-\alpha)(\Delta t)^\alpha}{\Delta x} \\ r_i &= \frac{v}{(\Delta x)^\beta} (\Delta t)^\alpha \Gamma(2-\alpha) \\ g_j &= (-1)^j \frac{\beta \cdot (\beta-1) \cdot (\beta-2) \cdot \dots \cdot (\beta-j+1)}{j!}, \quad g_0 = 1, \quad g_1 = -\beta \end{aligned} \quad (4.3)$$

Bu notasyonlar fark şemasında yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir;

$$\sum_{j=0}^k \sigma_j (u_i^{k+1-j} - u_i^{k-j}) = -p_i (u_i^k (u_i^k - u_{i-1}^k)) + r_i \sum_{j=0}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^{k+1} \quad (4.4)$$

$k=0$ için aşağıdaki denklem elde edilir;

$$u_i^1 - u_i^0 + p_i (u_i^0 (u_i^0 - u_{i-1}^0)) = r_i \sum_{j=0}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^1 \quad (4.5)$$

$$u_i^1 - u_i^0 + p_i (u_i^0 (u_i^0 - u_{i-1}^0)) = r_i u_{i+1}^1 + r_i u_i^1 g_1 + r_i g_2 u_{i-1}^1 + r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^1 \quad (4.6)$$

$$-r_i u_{i+1}^1 + (1 - r_i g_1) u_i^1 - r_i g_2 u_{i-1}^1 - r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^1 u_i^1 = -p_i (u_i^0 (u_i^0 - u_{i-1}^0)) + u_i^0 \quad (4.7)$$

Ardından $k>0$ için aşağıdaki denklemler elde edilebilir;

$$\begin{aligned} \sigma_0 (u_i^{k+1} - u_i^k) + \sum_{j=1}^k \sigma_j u_i^{k+j-1} - u_i^{k-j} + p_i (u_i^k (u_i^k - u_{i-1}^k)) &= r_i u_{i+1}^{k+1} + r_i g_1 u_i^{k+1} + r_i g_2 u_{i-1}^{k+1} \\ &+ r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^{k+1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Şemadaki $p_i (u_i^k (u_i^k - u_{i-1}^k))$ ifadesin P olarak alınır ve çeşitli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
-r_i u_{i+1}^{k+1} + (1-r_i g_1) u_i^{k+1} - r_i g_2 u_{i-1}^{k+1} - r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^{k+1} &= u_i^k - \sum_{j=1}^k \sigma_j (u_i^{k+j-1} - u_i^{k-j}) - P \\
&= u_i^k - \sum_{j=1}^k \sigma_j u_i^{k+j-1} + \sum_{j=1}^k \sigma_j u_i^{k-j} - P \quad (4.9) \\
&= u_i^k - \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_{j+1} u_i^{k+j} + \sum_{j=1}^k \sigma_j u_i^{k-j} - P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-r_i u_{i+1}^{k+1} + (1-r_i g_1) u_i^{k+1} - r_i g_2 u_{i-1}^{k+1} - r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^{k+1} &= u_i^k - \sigma_1 u_i^k + \sigma_k u_i^0 + \sum_{j=1}^{k-1} (-\sigma_{j+1} + \sigma_j) u_i^{k-j} - P \\
&= \sigma_k u_i^0 + (2-2^{1-\alpha}) u_i^k \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} u_i^{k-j} (2(j+1)^{1-\alpha} - (j+2)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}) - P \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Denklemleri elde edilir. Son olarak $k > 0$ için sonlu fark şeması aşağıdaki şekli alır [27].

$$\begin{aligned}
-r_i u_{i+1}^{k+1} + (1-r_i g_1) u_i^{k+1} - r_i g_2 u_{i-1}^{k+1} - r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j u_{i-j+1}^{k+1} &= \sigma_k u_i^0 + (2-2^{1-\alpha}) u_i^k \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} u_i^{k-j} (2(j+1)^{1-\alpha} - (j+2)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}) \quad (4.11) \\
&\quad - p_i (u_i^k (u_i^k - u_{i-1}^k))
\end{aligned}$$

Bu fark şeması cebirsel denklem sistemi olarak yazılabilir;

$$\begin{cases}
AU^1 = -p_i u_i^0 (u_i^0 - u_{i-1}^0) + u_i^0 \\
AU^{k+1} = d_1 U^k + d_2 U^{k-1} + \dots + d_k U^1 + \sigma_k U^0 - p_i (u_i^k (u_i^k - u_{i-1}^k)), \quad k > 0 \\
U^0 = f
\end{cases} \quad (4.12)$$

Bu sistemde kullanılan notasyonlar aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
d_j &= 2j^{1-\alpha} - (j+1)^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}, \quad j = 1, 2, \dots, k \\
\sigma_j &= (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha} \\
p_i &= \frac{\Gamma(2-\alpha)(\Delta t)^\alpha}{\Delta x} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

A Matrisi bilinmeyen terimlerin katsayılarından oluşan bir matristir ve genel tanımı aşağıdaki şekildedir.

$$A_{ij} = \begin{cases} -r_i g_{i-j+1}, & j < i-1 \\ -r_i g_2, & j = i-1 \\ 1-r_i g_1, & j = i \\ -r_i, & j = i+1 \\ 0, & j > i+1 \end{cases} \quad (4.14)$$

Bu matriste;

$$r_i = \frac{v}{(\Delta x)^\beta} (\Delta t)^\alpha \Gamma(2-\alpha)$$

$$g_j = (-1)^j \frac{\beta \cdot (\beta-1) \cdot (\beta-2) \cdot \dots \cdot (\beta-j+1)}{j!}, \quad g_0 = 1, \quad g_1 = -\beta \quad (4.15)$$

ifadeleri yazılabilir.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1-r_i g_1 & -r_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_i g_2 & 1-r_i g_1 & -r_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_i g_3 & -r_i g_2 & 1-r_i g_1 & -r_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_i g_4 & -r_i g_3 & -r_i g_2 & 1-r_i g_1 & -r_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_i g_5 & -r_i g_4 & -r_i g_3 & -r_i g_2 & 1-r_i g_1 & -r_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_i g_6 & -r_i g_5 & -r_i g_4 & -r_i g_3 & -r_i g_2 & 1-r_i g_1 & -r_i & 0 & 0 & 0 \\ -r_i g_7 & -r_i g_6 & -r_i g_5 & -r_i g_4 & -r_i g_3 & -r_i g_2 & 1-r_i g_1 & -r_i & 0 & 0 \\ -r_i g_8 & -r_i g_7 & -r_i g_6 & -r_i g_5 & -r_i g_4 & -r_i g_3 & -r_i g_2 & 1-r_i g_1 & -r_i & 0 \\ -r_i g_9 & -r_i g_8 & -r_i g_7 & -r_i g_6 & -r_i g_5 & -r_i g_4 & -r_i g_3 & -r_i g_2 & 1-r_i g_1 & -r_i \\ -r_i g_{10} & -r_i g_9 & -r_i g_8 & -r_i g_7 & -r_i g_6 & -r_i g_5 & -r_i g_4 & -r_i g_3 & -r_i g_2 & 1-r_i g_1 \end{pmatrix}$$

Şekil 4. 1 i ve j terimi 1den 10a kadar alındığında A_{ij} matrisi

Örnek 4.1: [15].

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq 0.1,$$

$$0 < \alpha < 1, \quad 1 < \beta < 2$$

sınır koşulları:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

(4.16)

başlangıç koşulu:

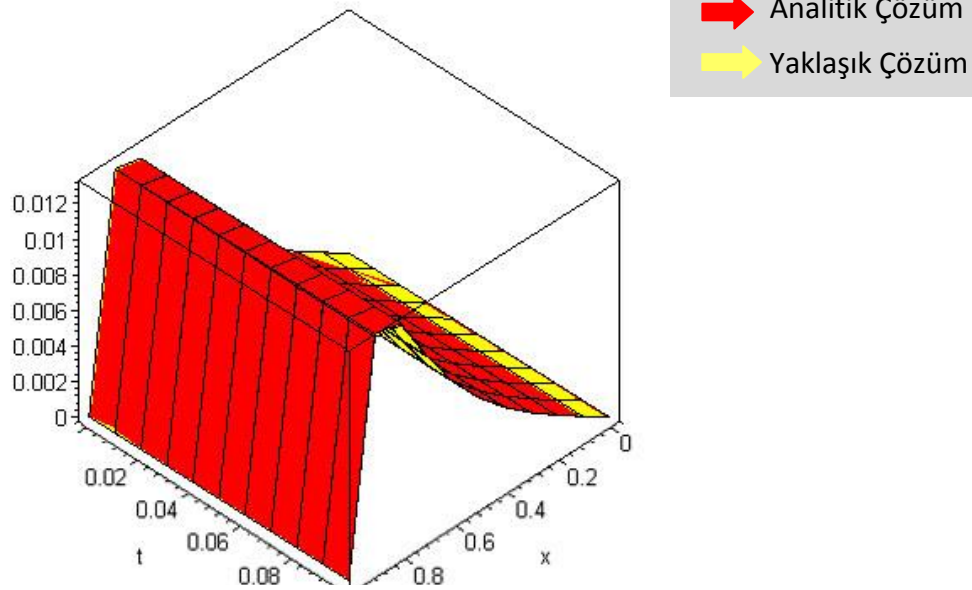
$$u(x, 0) = \frac{2v\pi \sin(\pi x)}{a + \cos(\pi x)}, \quad a > 1$$

$$v = 0.001, \quad a = 1.1, \quad \alpha = 0.95, \quad \beta = 1.95$$

Seri açılımı ile elde edilmiş analitik çözüm;

$$u(x, t) = \frac{2v\pi \exp(-\pi^2 vt) \sin(\pi x)}{a + \exp(-\pi^2 vt) \cos(\pi x)} \quad (4.17)$$

Sonlu fark metoduyla hesaplanan yaklaşık çözüm ve analitik çözümle oluşturulan grafikleri karşılaştırılırsa;



Şekil 4. 2 Sonlu Fark Çözümü ($\Delta t = 0.01$, $\Delta x = 0.1$, $\alpha = 0.95$, $\beta = 1.95$ için)

Aradaki farkı sayısal olarak da görmek mümkündür.

Çizelge 4. 4 Örnek 4.1 için hata analizi

X	Yaklaşık Çözüm	Analitik Çözüm	Hata
0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.0009461845189	0.0009461384100	0.461089e-7
0.2	0.001924465410	0.001933489085	0.9023675e-5
0.3	0.002991456650	0.003009822748	0.18366098e-4
0.4	0.004209350415	0.004237749682	0.28399267e-4
0.5	0.005666712399	0.005706351919	0.3963952e-4
0.6	0.007491462912	0.007544371558	0.52908646e-4
0.7	0.009832247233	0.009902969776	0.70722543e-4
0.8	0.01253842757	0.01264482419	0.10639662e-3
0.9	0.01278084698	0.01294151322	0.16066624e-3
1	0.0	0.0	0.0

Örnek 4.2: [15].

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq 0,01, \\ 0 < \alpha < 1, \quad 1 < \beta < 2$$

sınır koşulları: (4.18)

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

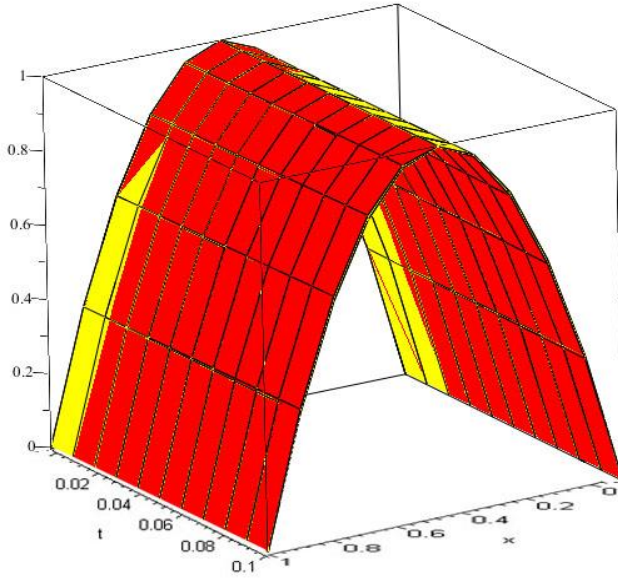
başlangıç koşulu:

$$u(x, 0) = 4x(1 - x)$$

$$v = 0.001, \quad \alpha = 0.95, \quad \beta = 1.95$$

Seri açılımı ile elde edilmiş analitik çözüm;

$$u(x, t) = \frac{2v\pi \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \exp(-k^2 \pi^2 v t) \sin(k\pi x)}{A_0 + 2v\pi \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \exp(-k^2 \pi^2 v t) \cos(k\pi x)}, \quad \left(\begin{array}{l} A_0 = \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}(3-2x)\} dx \\ A_k = \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}(3-2x)\} \cos(k\pi x) dx, \quad k \geq 1 \end{array} \right) \quad (4.19)$$



 Analitik Çözüm
 Yaklaşık Çözüm

Şekil 4. 3 Sonlu Fark Metodu ile çözüm ($\Delta t=0.001$, $\Delta x=0.1$, $\alpha=0.95$, $\beta=1.95$ için)

Çizelge 4. 5 Örnek 4.2 için hata analizi

X	Yaklaşık Çözüm	Analitik Çözüm	Hata
0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.3473711502	0.3486899313	0.13187811e-2
0.2	0.6220256101	0.6247583412	0.27327311e-2
0.3	0.8226195405	0.8264408177	0.38212772e-2
0.4	0.9474252601	0.9519845695	0.45593094e-2
0.5	0.9946485647	0.9995746590	0.49260943e-2
0.6	0.9624307453	0.9673304143	0.48996690e-2
0.7	0.8488455983	0.8533022617	0.44566634e-2
0.8	0.6518961906	0.6554683894	0.35721988e-2
0.9	0.3695116587	0.3717305024	0.22188437e-2
1	0.0	0.0	0.0

SONUÇ VE ÖNERİLER

Burger Diferansiyel Denklemi için Sonlu Fark Metodu kullanılarak, Açık ve Kapalı fark şemaları ile yaklaşık çözümler elde edildi. Bu Çözümlerin hangisinin analitik çözüme daha çok yakınsadığı ve Açık Fark şemasının kararlı bir çözüm vermesi için hangi çözüm aralıklarına sahip olması gerektiği kararlılık analizi yapılarak bulundu.

Ardından Kesirli mertebeden Burger diferansiyel denklemi için bir sonlu fark yaklaşımı oluşturuldu ve bu çözüm yönteminin tam sayı şeklindeki mertebelere yaklaşıldığında ne gibi sonuçlar doğurduğu incelendi. Yapılan analizler sonucunda tam sayılı mertebelerde yakınsak sonuçlar bulundu bu sayede kesirli mertebeden sonuçların bulunabileceği anlaşıldı.

Daha ileriki çalışmalarda kesirli mertebeden Burger diferansiyel denklemi için oluşturulan sonlu fark şemasının analizleri yapılabilir ve bu yöntemi genel olarak tüm lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için kullanılabilir hale getirilmesi için çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Chung-Yau, L., (1994). Applied Numerical Methods For Partial Differential Equations Nanyang technological Univesity, Prentice Hall Press, Singapore.
- [2] Celia, M.A. ve Gray, W.G., (1992). Numerical Methods for Differantial Equations, Prentice-Hall, New Jersey.
- [3] Larn, C.Y., (1992). Spreadsheet Approach to Partial Differantial Equations- Part 1: Elliptic Equation, Int. J. Engineering Education, 8(4): 278-287.
- [4] Larn, C.Y., (1992). Spreadsheet Approach to Partial Differantial Equations- Part 2: Parabolic and Hyperbolic Equations, Int. J. Engineering Education, 8(5): 371-383.
- [5] Hoffman, J. D., (1992). Numerical Methods for Engineer and Scientists, McGraw Hill, New York.
- [6] LeVeque, R.J., (2005). Finite Diference Methods for Diferential Equations, DRAFT VERSION for use in the course AMath 585-586 University of Washington
- [7] Bayın, S., (2004). Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Genişletilmiş ikinci baskı, Ders Kitapları Anonim Şirketi, ISBN 975-443-397-6.
- [8] Loverro, A., (2004). Fractional Calculus: History, Defination and Aplications for the Engineer, Depertment of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, IN 46555, USA.
- [9] Podlubny, I., (1999). Fractional diferential equation"Mathematics in Science and Engineering, V198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego,Calif, USA.
- [10] Arfken, G.B. ve Weber, H.J., (1995). Mathematical Methods for Physicist, Fourth Edition, Academic Pres.
- [11] Mittag-Leffler, G., (1905). Acta Math. 29, 101.
- [12] Oldham, K.B. ve Spainer, J., (1974). The fractional calculus 'Mathematics in Science and Engineering 198, Academic Press.
- [13] Miller, K.S. ve Ross, B., (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-71-58884-9.

- [14] Burgers, J.M., (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech* 1, 171–199.
- [15] Zhang, P.G. ve Wang, J.P., (2012). A predictor–corrector compact finite difference scheme for Burgers’ equation, *Applied Mathematics and Computation*, 219, 892-898.
- [16] Hopf, E., (1950). The partial differential equation $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$, *Commun. Pure Appl. Math* 3, 201–230.
- [17] Benton, G.P.E., (1972). A table of solutions of the one-dimensional burgers equation, *Quart. Appl. Math* 30, 195–212.
- [18] Cole, J.D., (1951). On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math* 9, 225–236.
- [19] Varöglu, E. ve Liaw, W.D., (1980). Space-time finite elements incorporating characteristics for the burgers’ equation, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 16, 171–184.
- [20] Kutluay, S., Bahadır, A.R. ve Özdes, A., (1999). Numerical solution of one-dimensional burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *J. Comput. Appl. Math* 103 251–261.
- [21] Pandey, K., Verma, L. ve Verma, A.K., (2009). On a finite difference scheme for burgers’ equation, *Appl. Math. Comput* 215, 2206–2214.
- [22] Liao, W., (2008). An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional burgers’ equation, *Appl. Math. Comput* 206, 755–764.
- [23] Saria, M. ve Gürarslan, G., (2009). A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of burgers’ equation, *Appl. Math. Comput* 208, 475–483.
- [24] Hon, Y. ve Mao, X., (1998). An efficient numerical scheme for burgers’ equation, *Appl. Math. Comput* 95, 37–50.
- [25] Asaithambi, A., (2010). Numerical solution of the burgers’ equation by automatic differentiation, *Appl. Math. Comput* 216, 2700–2708.
- [26] Mena, S.A. ve Salim, B.C., (2007). Etkinlikli bir burger denkleminin analitik çözümü, *Mecelle-tül rafdin liulumil muhasebeti verriyaziyatıl mücellidi*, 1-4.
- [27] Zhang, Y., (2009). A finite difference method for fractional partial differential equation, *Applied Mathematics and Computation*.
- [28] Kurulay, M. ve Bayram, M., (2012). Some properties of the Mittag-Leffler functions and their relation with the Wright functions, *Advances in Difference Equations* , 2012(0).
- [29] Kurulay, M., (2010). The Approximate And Exact Solutions Of The Space- And Time-Fractional Burgers Equations. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 3(3), 257-263.
- [30] Momani, S., (2006). Non-perturbative analytical solutions of the space and time fractional Burgers equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 28(4), 930–937.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İbrahim ŞENTÜRK
Doğum Tarihi ve Yeri : 04.12.1987 / Ankara
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ibrahimsenturk@mail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2012
Lise	Fen - Matematik	Eskişehir Yunusemre Lisesi	2005

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2012	Sınav Dergisi Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2013	Yıldız Teknik Üniversitesi	Asistan Öğrenci
2013 - ...	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

ULUSLARLARASI BİLDİRİLER:

1. Senturk, I. ve Kurulay, M., (2013). Finite Difference Method Solution and Analysis for Burger's Equation, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), Issue 229.
2. Senturk I. ve Kurulay M., (2013). Analysis of Differential Equation with Finite Difference Scheme, International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2013), Issue 170.