T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK HİPERMODÜLLER

ÖMER FARUK KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. BAYRAM ALİ ERSOY

İSTANBUL, 2014

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK HİPERMODÜLLER

Ö. Faruk KOÇ tarafından hazırlanan tez çalışması 22.07.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY'a ve Arş. Gör. Serkan ONAR'a; içeriğinin oluşturulmasında ve tezin hazırlanmasında her türlü yardımı benden esirgemeyen Tuğba DURAN'a teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteklerini eksik etmeyip her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Temmuz, 2014

Ö. Faruk KOÇ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$\wedge$	Minimum veya infimum
$\vee$	Maksimum veya supremum
μ	Bulanık(fuzzy) alt küme
$[0,1]^X$	X' in bulanık kuvvet kümesi
$\mu(X)$	μ ' nün görüntüsü
$\mathrm{Im}(\mu)$	μ ' nün görüntüsü
μ^*	μ ' nün destekleyicisi
$a_Y(x)$	$[0,1]-$singleton
y_a	$[0,1]-$singleton
$1_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
$\chi_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
μ_a	μ ' nün seviye alt kümesi
$f(\mu)$	μ ' nün f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(\nu)$	ν ' nün f altındaki ters görüntüsü
$\mu \circ \nu$	μ ve ν ' nün nokta çarpımı
μ^{-1}	μ ' nün tersi
$L(G)$	G grubunun tüm bulanık alt gruplarının kümesi
μ_*	$\mu_* = \{x \in G \ : \ \mu(x) = \mu(0)\}$
$LI(R)$	R halkasının tüm bulanık ideallerinin kümesi
$L(M)$	M ' nin tüm bulanık alt modüllerinin kümesi
0_M	M ' nin sıfır elemanı
M/A	Bölüm modülü
ν/μ	ν ' nün μ ' ye göre bölüm modülü
$\nu\big\|_{\nu^*}$	ν ' nün ν^* ' a kısıtlanışı
$\mu : \nu$	Rezidüel bölüm
$\mu \times \sigma(x,y)$	μ ve σ nın kartezyen çarpımı
G_μ	$G_\mu = \{g \in G : \ \mu(g) = \mu(0)\}$

$P^*(A)$	A kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi
$F^*(A)$	A kümesinin boştan farklı tüm bulanık alt kümelerinin kümesi
$\mathcal{HM}$	Tüm hipermodüllerin sınıfı
$\mathcal{FHM}$	Tüm bulanık hipermodüllerin sınıfı

ÖZET

BULANIK HİPERMODÜLLER

Ömer Faruk KOÇ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Bu tezde klasik cebirdeki hipermodül kavramı bulanık cebirde incelenmiştir. Öncelikle klasik cebire ve bulanık cebire ait temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Klasik cebirdeki grup, halka, homomorfizma yapıları incelenmiş olup, klasik cebirdeki ideal, modül, hipergrup ve hiperhalka yapılarına yer verilmiştir. Daha sonra bulanık kümeye giriş yapılarak bulanık alt grup, bulanık alt halka, bulanık alt idealler ve bulanık alt modüller tanımlar ve teoremler yardımıyla açıklanmıştır. Son olarak ise bulanık hipermodüllerle ilgili tanımlar ve teoremler verilmiş, bazı teoremler ispatlanmıştır. Bu doğrultuda, bulanık hipermodül yapısının nasıl oluşması gerektiği ifade edilmiştir. Ardından örneklerle beraber bulanık hipermodüller ve hipermodüller arasındaki bağlantı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Bulanık grup, Bulanık alt grup, Bulanık halkalar, Bulanık idealler, Bulanık modüller, Bulanık alt modüller, Bulanık hipermodüller.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

FUZZY HYPERMODULES

Ömer Faruk KOÇ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

In this thesis the concept of hypermodule of classical algebra is analyzed within the context of the fuzzy algebra. Initially, the basic properties and theorems are given about the classical algebra and fuzzy algebra. We gave the basic definitions related to clasical algebra; groups, rings, homomorphism, ideal, module, hypergroup and hyperring. Then fuzzy set is defined and fuzzy subgroup, fuzzy subring, fuzzy subideals and fuzzy submodules are demostrated together with definitons and theorems. In the last cheapter the theorems and definitons related to fuzzy hypoermodules and some theorem’s proofs had been given. Moving from this point, it has been noted that how a fuzzy hypermodule structure should be formed. Then the relation between fuzzy hypermodules and hypermodules are investigated with examples.

Keywords: Fuzzy sets, Fuzzy groups, Fuzzy subgroups, Fuzzy rings, Fuzzy ideals, Fuzzy modules, Fuzzy submodules, Fuzzy hypermodules.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Geleneksel mantık sistemleri, kesin doğru ve kesin yanlış değerlerine sahip (iki değerli) önermelerle çalışmaktadır. Önermelerin değer kümesi {Yanlış, Doğru} veya sayısal olarak $\{0,1\}$ olarak kabul edilir. Bu mantık sistemi halen bilgisayarlarımızda kullanılan Boolean mantığının temellerini oluşturur. Aristo mantığı olarak bilinen bu klasik mantık sistemi üçüncü bir ihtimali reddeder ve bize dünyayı siyah ve beyazdan ibaret sunar. Oysa gerçek dünyada sonsuz renk tonu olduğu gibi, bir o kadar göreceli doğrular ve yanlışlar bulunmaktadır. Belirsizliği tanımlama ve modellemenin önemini ünlü fizikçi Einstein şu şekilde ifade etmiştir: "Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir." Bulanık mantık yoluyla, belirsizliği istenilmeyen bir durum olarak gören ve mümkün bütün durumlarda kaçınılması gerektiğinde inanan geleneksel anlayıştan, belirsizlikle uğraşan ve bilimde bundan kaçınılmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bakış açısına doğru dereceli bir geçiş ortaya konulmaktadır. Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesinin ihtiyacından dolayı bulanık mantık gibi mantık sistemleri önem kazanmıştır.

Aristoteles (M.Ö 322-M.Ö 294) ile başlayan ikili mantık, Boole (1815-1864) tarafından uygulamada yer bulmuş ve evrensel kümenin elemanlarını, kümeye ait olanlar ve olmayanlar olarak kesin çizgilerle ikiye bölen dairesel kapalı şekillerle ifade etme yöntemi, Venn (1834-1923) tarafından kullanmıştır.

1900'lerin ilk yıllarında Lukasiewicz ve Knuth, Aristo mantığında yanlış ve doğru arasında üçüncü bir değer olan "belki" kavramını eklemeyi ileri sürmüştür. Çok değerli mantığı geliştiren ve sezgisel mantığın kurucusu kabul edilen Heyting' in ardından, Gödel ve Black de çok değerli mantık üzerine çalışmalarını sürdürmüşler ancak kendilerine bir uygulama alanı bulamamışlardır. 1965'te yayınlanan "Bulanık Kümeler" adlı makale ile Lotfi A. Zadeh [1] modern anlamda bulanık mantık sistemini kurmuştur. Lotfi A. Zadeh' e göre, bulanık mantık her şeyin, doğrunun da, bir derece meselesi olduğu insani akıl yürütme için bir modeldir. Temelde, sözcükle hesap yapmak anlamını barındırmaktadır. Bulanık mantık, nesneleri ve değerleri gerçekliğe daha uygun olarak betimlemeyi amaçlayan ve bunu matematiğin elverdiği oranda başaran bir mantıktır.

Önermelerin değer aralığı $[0,1]$ aralığına genişleterek, Zadeh'in bulanık küme kavramını matematiğe kazandırmasının ardından birçok araştırmacı bu konu üzerinde çalışmaya başlamıştır. Bunun sonucu olarak matematikte yeni çalışma alanları oluşmuş, yaşantımız içinde var olan belirsizlik kavramı matematiksel olarak incelenmeye başlanmış ve bilgisayar mühendisliği, elektrik ve elektronik mühendisliği gibi teknik alanlarda yararlı uygulamalar bulmuştur.

1971 yılında A. Rosenfeld [2], herhangi bir grubun bulanık alt grubu kavramını tanımladıktan sonra pek çok matematikçi cebir ile ilgili bazı kavramları ve sonuçları bulanık küme teorisine aktarmış ve bulanık cebir teorisinin gelişmesine katkıda bulunmuştur. W. Liu [3] da, herhangi bir halkanın bulanık alt halkası kavramını tanımlamış ve daha sonra Z. Yue [4], T. K. Mukherjee ve M. K. Sen [5] ve V. N. Dixit, R. Kumar ve N. Ajmal [6] gibi matematikçiler halkalar teorisindeki sonuçlara paralel olarak benzer sonuçlar elde etmiştir. Literatür incelendiğinde yukarıda bahsedilen matematikçilere ek olarak Ameri, Corsini, Davvaz, Krasner, Leoreanu, Vougiouklis, Zahedi, Zhan ve diğer birçok araştırmacının cebirsel hiper yapılar ve bulanık hipermodüller arasında bir ilişki kurmaya çalıştığı gözlemlenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı bulanık cebir mantığında yer alan grup, alt grup ve hipermodüllere ait geçerli olan bazı temel teoremlerin yardımıyla bulanık hipermodüller ile hipermodüller arasında bulunan bağıntıları incelemek amaçlanmaktadır.

Sonuç olarak bu çalışma klasik cebirdeki hipermodüller ile bulanık hipermodüller arasındaki bağıntılarla ilgilidir ve bu alanda çalışma yapmak isteyenlere temel kaynak teşkil edecek niteliktedir.

1.3 Hipotez

Bu çalışma ile birlikte cebirde yer alan hipermodül yapısı ile bulanık cebirde yer alan hipermodül yapısı incelenip, bu iki yapı arasında bir bağlantı olup olmadığı araştırılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızın içinde yer alan temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1 Gruplar

Tanım 2.1 G boştan farklı bir küme, $\circ$ da G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olmak üzere, aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(G,\circ)$ cebirsel yapısına grup denir.

(G1) Her $a,b \in G$ için $a \circ b \in G$ dir. (kapalılık özelliği)

(G2) Her $a,b,c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dir. (birleşme özelliği)

(G3) Her $a \in G$ için $a \circ e = a = e \circ a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (birim elemanın varlığı)

(G4) Her $a \in G$ için $a \circ b = e = b \circ a$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır. (ters elemanın varlığı)

Tanım 2.2 $(G,\circ)$ bir grup ve her $a,b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ (değişme özelliği) ise bu gruba değişmeli veya Abelyen grup denir.

Tanım 2.3 $(G,\circ)$ bir grup ve H de G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G de tanımlanan $\circ$ işlemine göre bir grup oluyorsa H ye G nin bir alt grubu denir.

2.2 Halkalar

Tanım 2.4 Boş kümeden farklı bir R kümesinde (+) ve (.) sembolleri ile gösterilen iki işlem tanımlanmış olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,\cdot)$ iki işlemli cebirsel yapıya bir halka denir.

(R1) Her $a,b,c\in R$ için $a+(b+c)=(a+b)+c$ dir.

(R2) Her $a,b\in R$ için $a+b=b+a$ dir.

(R3) Her $a\in R$ için $a+0=a$ şartını sağlayan R nin bir 0 elemanı olmalıdır.

(R4) Her $a\in R$ için $a+(-a)=0$ şartını sağlayan bir $-a\in R$ olmalıdır.

(R5) Her $a,b,c\in R$ için $a.(b.c)=(a.b).c$ dir.

(R6) Her $a,b,c\in R$ için $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$ dir.

(R7) Her $a,b,c\in R$ için $(b+c).a=(b.a)+(c.a)$ dir.

Tanım 2.5 Her $a,b\in R$ için $a.b=b.a$ ise R ye değişimli halka denir.

Tanım 2.6 Her $a\in R$ için $a.e=a=e.a$ olacak şekilde bir $e\in R$ var ise e ye birim eleman; R ye de birim elemanlı halka denir.

Tanım 2.7 R bir halka ve I, R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

(i) Her $a,b\in I$ ve her $r\in R$ için $a-b\in I$, $ra\in I$ ise I ya R nin bir sol ideali denir.

(ii) Her $a,b\in I$ ve her $r\in R$ için $a-b\in I$, $ar\in I$ ise I ya R nin bir sağ ideali denir.

(iii) I, R nin hem sağ hem de sol ideali ise I ya kısaca R nin bir idealidir denir.

Örnek 2.1 $(Z,+,\cdot)$ halkasında her $p\in Z$ asal sayısı için $I=pZ$ alt halkası bir idealdir.

Teorem 2.1 R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Her $r\in R$ için $r+I=\{r+a\mid a\in I\}$ şeklindeki tüm kosetlerin kümesi R/I ile gösterilirse, $\forall r_1+I, r_2+I\in R/I$ için;

$$(r_1+I)+(r_2+I)=(r_1+r_2)+I$$

$$(r_1+I)(r_2+I)=r_1r_2+I$$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre R/I bir halkadır.

Tanım 2.8 R bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. $(R/I,+,.)$ halkasına R nin I idealine göre bölüm halkası denir.

Örnek 2.2 $R = Z$ halkasında $I = 3Z$ ideali için $R/I = \{I+0, I+1, I+2\}$ bölüm halkası elde edilir.

2.3 Homomorfizma ve Temel Teoremleri

Tanım 2.9 $(R,+,\cdot)$ ve $(R',+',\cdot')$ iki halka ve $f : R \to R'$ bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in R$ için;

$f(a+b) = f(a) +' f(b)$

$f(a.b) = f(a) \cdot' f(b)$

koşulları sağlanıyorsa f ye R den R' ye bir homomorfizma denir.

R halkasından R' halkasına bir f homomorfizması

(i) f bire-bir ise bir monomorfizma,

(ii) f örten ise bir epimorfizma,

(iii) f bire-bir ve örten ise izomorfizma,

olarak adlandırılır.

R halkasından R' halkasına f bir izomorfizma ise f^{-1} de R' halkasından R halkasına bir izomorfizmadır. R halkasından R halkasına bir izomorfizmaya da otomorfizma denir.

Tanım 2.10 f , R halkasından R' halkasına bir homomorfizma olsun. $0'$, R' halkasının toplamsal birimini belirtmek üzere;

$Çekf = \{a \in R \mid f(a) = 0'\}$

kümesine f nin çekirdeği denir.

Örnek 2.3 n pozitif tamsayısı ile üretilen $\langle n \rangle = \{qn \mid q \in Z\}$ idealini ele alalım. $a \in Z$ olmak üzere, $\langle n \rangle$ nin Z kümesindeki kosetleri, $a + \langle n \rangle = \{a + qn \mid q \in Z\}$ ve

$Z/\langle n\rangle$ bölüm halkası, $Z/\langle n\rangle = \{a+\langle n\rangle \mid a\in Z\}$ şeklindedir. ($Z_n, +_n$) halkasından $(Z/\langle n\rangle, +)$ halkasına $f: Z_n \to Z/\langle n\rangle$, $f([a]) = a+\langle n\rangle$ dönüşümü bir izomorfizmadır.

$$f([a]+_n [b]) = f([a+b]) = (a+b)+\langle n\rangle = (a+\langle n\rangle)+(b+\langle n\rangle) = f([a])+f([b])$$

$$f([a]\cdot_n [b]) = f([ab]) = (ab)+\langle n\rangle = (a+\langle n\rangle)(b+\langle n\rangle) = f([a]).f([b])$$

eşitliklerinden f nin Z_n den $Z/\langle n\rangle$ üzerine bir izomorfizma olduğu görülür.

Teorem 2.2 (1. izomorfizma teoremi) f, R halkasından R' halkasına bir homomorfizma olsun. Bu durumda $R/Çekf \cong f(R)$ dir.

Teorem 2.3 (2. izomorfizma teoremi) I ve J bir R halkasının iki ideali olsun. $I/(I\cap J) \cong (I+J)/J$ dir.

Teorem 2.4 (3. izomorfizma teoremi) I_1 ve I_2 bir R halkasının iki ideali ve $I_1 \subseteq I_2$ olsun. $(R/I_1)/(I_2/I_1) \cong (R/I_2)$ dir.

2.4 Asal İdealler

Tanım 2.11 P, R nin bir ideali ve R nin A ve B idealleri için $AB\subset P$ olduğunda $A\subset P$ veya $B\subset P$ oluyorsa P idealine asal ideal denir.

Teorem 2.5 Birimli ve değişmeli bir R halkasının bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul $a,b\in R$ için $ab\in P \Rightarrow a\in P$ veya $b\in P$ olmasıdır.

Örnek 2.4 Z tamsayılar halkasında $P=\{3k \mid k\in Z\}$ ideali bir asal idealdir.

Tanım 2.12 R değişmeli bir halka ve Q, R nin bir ideali olsun. Her $a,b\in R$, $ab\in Q$ ve $a\notin Q$ için, $b^n \in Q$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa Q idealine bir asallanabilir ideal denir.

Tanım 2.13 R değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. I idealinin radikali, $\sqrt{I} = \{a\in R \mid a^n \in I, n\in Z^+\}$ şeklinde tanımlanır.

2.5 Modüller

Tanım 2.14 R bir halka ve $(M,+)$ değişmeli bir grup olsun. Her $r,s\in R$ ve $m,m'\in M$ için $R\times M\to M$ dönüşümü,

(i) $r.(m+m')=r.m+r.m'$,

(ii) $r.(s.m)=(r.s).m$,

(iii) $(r+s).m=r.m+s.m$

koşullarını sağlıyorsa, $(M,+)$ değişmeli grubuna bir sol $R-$modül veya R üzerinde bir sol modüldür denir. R birimli bir halka ve her $m\in M$ için $1.m=m$ ise M grubuna birimli veya birimsel bir sol $R-$modüldür denir. Sağ $R-$modül de benzer şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.15 M bir $R-$modül ve N M nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. N M nin bir alt grubu ve her $r\in R$, $a\in N$ için $ra\in N$ oluyorsa N ye M nin bir alt modülü denir.

Tanım 2.16 X, M nin bir alt kümesi ve $\langle X\rangle$, M nin X tarafından üretilen alt modülü olsun. Herhangi bir $x\in M$ için $\langle x\rangle$, M nin $\{x\}$ tarafından üretilen alt modülüdür. M nin herhangi bir N alt modülü için,

$N:M=\left\{r \mid r\in R,\ rM\subseteq N\right\}$ ve $\sqrt{N:M}=\left\{r \mid r\in R,\ \exists m\in N\, öyle\ ki\ r^m M\subseteq N\right\}$

eşitliklerine sahibiz.

Tanım 2.17 M bir $R-$modül ve K M nin bir alt modülü olsun. $K\neq M$ olmak üzere, $r\in R$, $m\in M$ ve $rm\in K$ olduğunda $m\in K$ veya $r\in(K:M)$ oluyorsa K alt modülüne asal alt modül denir.

2.6 Hipergrup ve Hiperhalkalar

Tanım 2.18 G boş olmayan bir küme, $G\times G$ den $P^*(G)$ ya tanımlanan $\circ:G\times G\to P^*(G)$ dönüşümüne hiperişlem ve $(G,\circ)$ yapısına bir hipergrupoid denir [14].

Tanım 2.19 $(G,\circ)$ bir hipergrupoid, A ve B, G'nin boştan farklı 2 alt kümesi ve $x \in G$ olsun,

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b,$$

$$x \circ A = \{x\} \circ A \ ,$$

$$A \circ x = A \circ \{x\}$$

olarak gösterilir [20].

Tanım 2.20 $(G,\circ)$ bir hipergrupoid, her $x, y, z \in G$ için,

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ yani $\bigcup_{u \in x \circ y} u \circ z = \bigcup_{v \in y \circ z} x \circ v$

eşitliği sağlanıyorsa bu hipergrupoid'e yarı-hipergrup (semi-hipergrup) denir.

Tanım 2.21 Her $x \in G$ için $x \in (e \circ x) \cap (x \circ e)$ diğer bir deyişle $\{x\} = (e \circ x) \cap (x \circ e)$ olacak şekilde $e \in G$ varsa e'ye birim denir.

Tanım 2.22 $(G,\circ)$ bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup) olsun. Her $x \in G$ için $x \circ G = G \circ x = G$ oluyorsa $(G,\circ)$ 'ye hipergrup denir.

Tanım 2.23 $(G,\circ)$ bir hipergrup; H, G'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x \in H$ için $x \circ H = H \circ x = H$ oluyorsa $(H,\circ)$'ya $(G,\circ)$'nin bir alt hipergrubu denir.

Tanım 2.24 $(G_1,\circ_1)$ ve $(G_2,\circ_2)$ iki yarı-hipergrup (semi-hipergrup) ve $f : \mathrm{G}_1 \to G_2$ 'ye bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in G_1$ için $f(x \circ_1 y) \subseteq f(x) \circ_2 f(y)$ sağlanıyorsa f 'ye yarı-hipergrup (semi-hipergrup) homomorfizması denir.

Tanım 2.25 $(G,\circ)$ bir hipergrup olsun. Her $x, y \in G$ için $x \circ y = y \circ x$ oluyorsa $(G,\circ)$ 'ye değişmeli hipergrup denir.

Tanım 2.26 Boş kümeden farklı bir R kümesinde tanımlanan "$+$" ve "$\cdot$" hiperişlemleri tanımlanmış olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir hiperhalka denir [7].

(i) $(R,+)$ bir değişmeli hipergruptur,

(ii) $(R,\cdot)$ bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup),

(iii) "$\cdot$" hiperişleminin "$+$" hiperişlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Diğer bir deyişle her $r,s,t\in R$ için $r\cdot(s+t)=r\cdot s+r\cdot t$ ve $(r+s)\cdot t=r\cdot t+s\cdot t$ eşitliklerini sağlamalıdır.

Tanım 2.27 M boştan farklı bir küme ve $(\mathrm{R},\uplus,\circ)$ bir hiperhalka olsun. M üzerinde $\oplus,\odot$ hiperişlemleri tanımlansın. Eğer M kümesi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, M 'ye $(\mathrm{R},\uplus,\circ)$ üzerinde sol hipermodül denir [8]:

a) $(\mathrm{M},\oplus)$ bir değişmeli hipergruptur,

b) $\odot: R\times M\to P^*(M)$ bir dönüşüm ve her $a,b\in M$ ve $r,s\in R$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır,

(i) $r\odot(\mathrm{a}\oplus \mathrm{b})=(\mathrm{r}\odot \mathrm{a})\oplus(\mathrm{r}\odot \mathrm{b})$,

(ii) $(r\uplus \mathrm{s})\odot a=(\mathrm{r}\odot \mathrm{a})\oplus(\mathrm{s}\odot a)$,

(iii) $(r\circ s)\odot \mathrm{a}=\mathrm{r}\odot(\mathrm{s}\odot a)$.

$(\mathrm{R},\uplus)$ ve $(\mathrm{M},\oplus)$ hipergrupları birimli olsun ve bu hipergrupların birimlerini sırasıyla 0_R ve 0_M ile gösterelim. Bu durumda $(\mathrm{M},\oplus,\odot)$ hipermodülünde her $a\in M$ için $0_R\odot a=0_M$ eşitliği sağlanır.

$(\mathrm{R},\circ)$ birimli olsun ve bu birimi 1 ile gösterelim. Eğer her $a\in M$ için $1\odot a=a$ eşitliği sağlanıyorsa $(\mathrm{M},\oplus,\odot)$'ye birimsel denir.

Bundan sonraki bölümlerde kolaylık olması açısından sol hipermodül yerine kısaca hipermodül denilecektir.

Tanım 2.28 $(\mathrm{M}_1,+_1,\cdot_1)$ ve $(\mathrm{M}_2,+_2,\cdot_2)$ $(\mathrm{R},\uplus,\circ)$ hiperhalkası üzerinde iki hipermodül ve $f: M_1\to M_2$, M_1'den M_2'ye bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M_1$ ve $r\in R$ için,

(i) $f(x+_1 y)\subseteq f(x)+_2 f(y)$,

(ii) $f(r\cdot_1 x)\subseteq r\cdot_2 f(x)$ bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup),

sağlanıyorsa, f'ye bir hipermodül homomorfizması denir [7].

Tanım 2.29 $(\mathrm{M},+,\cdot)$, R hiperhalkası üzerinde bir hipermodül ve M', M'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(\mathrm{M}',+,\cdot)$'ye $(\mathrm{M},+,\cdot)$ nin bir alt hipermodülü denir:

(i) $(\mathrm{M}',+)$, $(\mathrm{M},+)$'nin bir alt hipergrubu,

(ii) $RM' \subseteq P^*(M')$.

Örnek 2.5 $(\mathrm{R},+,\cdot)$ birimli bir halka ve G, her $a,b \in R$ için $aGbG = abG$ eşitliğini sağlayan $(\mathrm{R},\cdot)$ yarı-grubunun (semi-grubunun) bir alt grubu olsun. $(\mathrm{M},+,\cdot)$ R-modülünde aşağıdaki şekilde bir denklik bağıntısı tanımlayalım:

$x\rho y \Leftrightarrow \exists t \in G : \mathrm{x} = \mathrm{yt}$.

M/R 'de aşağıdaki hiperişlemi tanımlayalım:

$\overline{x} \oplus \overline{y} = \left\{ \overline{w} \in M/\rho \,\middle|\, \overline{w} \subseteq \overline{x} + \overline{y} \right\}$.

Bu durumda $(M/\rho,\oplus)$ bir hipergrup olur. Bölüm halksı R/G ile gösterilir. Her $\overline{r} \in R/G$ ve $\overline{x} \in M/\rho$ için $\overline{r} \odot \overline{x} = \overline{rx}$ olarak tanımlanabiliyorsa M/ρ birimli bir hipermodüldür.

$(\mathrm{H},\circ)$ bir hipergrupoid, $\{A,B\} \subseteq P^*(H)$ ve ρ, H üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer,

$\forall a \in A, \exists b \in B$ için $a\rho b$,

$\forall b \in B, \exists a \in A$ için $b\rho a$,

oluyorsa $A\overline{\rho}B$ ile gösterilir.

Eğer $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için $a\rho b$ oluyorsa $A\overline{\overline{\rho}}B$ ile gösterilir.

Tanım 2.30 ρ, H üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $a,a',b,b' \in H$ aşağıdaki gerektirmeler sağlanıyorsa ρ'ya düzenli (çok düzenli / regular) denir:

$a\rho b$ ve $a'\rho b' \Rightarrow (a \circ a')\overline{\rho}(b \circ b')$

($a\rho b$ ve $a'\rho b' \Rightarrow (a \circ a')\overline{\overline{\rho}}(b \circ b')$ sırasıyla)

Düzenli (regular) bağıntılar bölümsel yapılarda çalışırken çok önem ifade etmektedir.

Teorem 2.6 $(H,\circ)$ bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup) ve ρ da H üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır,

(1) ρ düzenli (regular) ise, $\overline{x}\otimes\overline{y}=\left\{\overline{z}\,\middle|\,z\in x\circ y\right\}$ şeklinde tanımlanan hiperçarpım, H/ρ üzerinde bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup) yapısı tanımlar,

(2) $(H/\rho,\otimes)$ bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup) ise ρ düzenlidir (regulardır),

(3) $(H,\circ)$ bir hipergrup ise $(H/\rho,\otimes)$'nın hipergrup olması için gerek ve yeter koşul ρ 'nun düzenli (regular) olmasıdır [7].

Tanım 2.31 $(R,+,\cdot)$ bir hiperhalka olsun. Eğer ρ, R de tanımlı her iki işlem içinde düzenli (regular) ise ρ, R hiperhalkası üzerinde düzenlidir (regulardır) denir.

$(\mathrm{M},+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ hiperhalkası üzerinde tanımlı bir hipermodül olsun. Eğer ρ, $+$ işlemi için düzenli (regular); $a\rho b$ ve keyfi seçilmiş $r\in R$ için $(ra)\overline{\rho}(rb)$ elde ediliyor ise ρ 'ya M hipermodülü üzerinde düzenlidir (regulardır) denir.

Teorem 2.7 $(M,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ hiperhalkası üzerinde tanımlı bir hipermodül; ρ M üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır [9]:

(1) Eğer ρ, M üzerinde düzenli (regular) ise $\forall\overline{x},\overline{y}\in M/\rho$ ve $\forall r\in R$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan hiperişlemler göz önüne alındığında M/ρ, $(R,+,\cdot)$ üzerinde bir hipermodül yapısı tanımlar:

$\overline{x}*\overline{y}=\left\{\overline{z}\,\middle|\,z\in x+y\right\}$,

$r\circ\overline{y}=\left\{\overline{z}\,\middle|\,z\in r\cdot y\right\}$.

(2) Eğer $(M,*,\circ)$, $(R,+,\cdot)$ üzerinde bir hipermodül ise ρ, M üzerinde düzenlidir (regulardır).

Tanım 2.32 $(R,+,\cdot)$ bir hiperhalka olsun. Eğer ρ, R de tanımlı her iki işlem içinde çok düzenli ise ρ, R hiperhalkası üzerinde çok düzenlidir denir [10].

$(M,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ hiperhalkası üzerinde tanımlı bir hipermodül olsun. Eğer ρ, $(R,+,\cdot)$ da çok düzenli; δ, M de tanımlı $+$ işlemi için çok düzenli; $a\delta b$ ve $r\rho s$ için $(ra)\overline{\overline{\delta}}(sb)$ elde ediliyor ise δ'ya M hipermodülü üzerinde çok düzenlidir denir.

Teorem 2.8 $(H,\circ)$ bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup) ve ρ, H üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) ρ çok düzenli ise, $(H/\rho,\otimes)$ bir yarı-gruptur (semi-gruptur),

(2) $(H/\rho,\otimes)$ bir yarı-grup (semi-grup) ise ρ çok düzenlidir,

(3) $(H,\circ)$ bir hipergrup ise $(H/\rho,\otimes)$'nın grup olması için gerek ve yeter koşul ρ'nun çok düzenli olmasıdır.

Teorem 2.9 $(M,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ hiperhalkası üzerinde tanımlı bir hipermodül; ρ, R üzerinde çok düzenli bağıntı; δ, M üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) Eğer ρ, M üzerinde çok düzenli ise $\forall x, y \in M$ ve $\forall r \in R$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan hiperişlemler göz önüne alındığında M/δ, R/ρ üzerinde bir modül yapısı tanımlar:

$$\delta(x) * \delta(y) = \{\delta(z) | z \in x + y\},$$

$$\rho(r) \circ \delta(x) = \{\delta(z) | z \in r \cdot x\} .$$

(2) Eğer $(M/\delta,*,\circ)$, R/ρ üzerinde bir modül ise δ, M üzerinde çok düzenlidir.

Tanım 2.33 ϵ^* bağıntısı, $(R,+,\cdot)$ hiperhalkası üzerindeki $(M,+,\cdot)$ hipermodülündeki en küçük çok düzenli bağıntı olsun. ϵ^* bağıntısına temel bağıntı denir [10].

BÖLÜM 3

BULANIK KÜMEYE GİRİŞ

3.1 Bulanık Kümeler

Tanım 3.1 X herhangi bir küme olmak üzere, $\mu : X \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna X nin bulanık (fuzzy) alt kümesi denir. X nin bütün bulanık alt kümelerinin oluşturduğu kümeye X nin bulanık kuvvet kümesi denir ve $[0,1]^X$ şeklinde gösterilir [1].

Tanım 3.2 $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\{ \mu(x) : x \in X \}$ ile tanımlanan kümeye μ nün görüntü kümesi denir ve $\mu(X)$ ya da $\mathrm{Im}(\mu)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3 $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere,

$$\mu^* = \{ x : \mu(x) > 0 , x \in S \} \tag{3.1}$$

kümesine μ nün destekleyicisi denir. Eğer μ^* sonlu bir küme ise μ ye sonlu bulanık alt küme, μ^* sonsuz bir küme ise μ ye de sonsuz bulanık alt küme denir. Ayrıca $1 \in \mu(X)$ ise μ ye X in birimli bulanık alt kümesi denir.

Tanım 3.4 $Y \subseteq X$ ve $a \in [0,1]$ olmak üzere $a_Y \in [0,1]^X$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a; & x \in Y \\ 0; & x \notin Y \end{cases} \tag{3.2}$$

Özel olarak; eğer $Y=\{y\}$ ise a_Y kümesi $a_{\{y\}}$ veya y_a şeklinde ifade edilir, $[0,1]-$nokta (point) veya $[0,1]-$singleton ile adlandırılır.

Eğer $a=1$ ise,

$$1_Y(x)=\chi_Y(x)=\begin{cases} 1 \; ; & x\in Y \\ 0 \; ; & x\in X\backslash \mathrm{Y} \end{cases} \tag{3.3}$$

fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir.

Tanım 3.5 $\mu,\nu\in[0,1]^X$ olmak üzere $\forall x\in X$ için $\mu(x)\le\nu(x)$ ise ν bulanık alt kümesi, μ bulanık alt kümesini kapsar denir ve $\mu\subseteq\nu$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.6 $\mu,\nu\in[0,1]^X$ olmak üzere $\mu\cap\nu$, $\mu\cup\nu\in[0,1]^X$ kümeleri şu şekilde tanımlanır: $\forall x\in X$ için,

$$(\mu\bigcap\nu)(x)=\mu(x)\wedge\nu(x) \tag{3.4}$$

$$(\mu\bigcup\nu)(x)=\mu(x)\vee\nu(x) \tag{3.5}$$

Tanım 3.7 $\mu\in[0,1]^X$ olmak üzere $a\in[0,1]$ için,

$$\mu_a=\{\, x:\; x\in X,\; \mu(x)\ge a\,\} \tag{3.6}$$

kümesine μ nün seviye alt kümesi denir.

Teorem 3.1 $\mu,\nu\in[0,1]^X$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $\mu\subseteq\nu,\; a\in[0,1]\Rightarrow\mu_a\subseteq\nu_a$

ii) $a\le b$, $a,b\in[0,1]\Rightarrow\mu_b\subseteq\mu_a$

iii) $\mu=\nu\Leftrightarrow\mu_a=\nu_a$, $\forall a\in[0,1]$

Tanım 3.8 X , Y herhangi iki küme ve $\mu\in[0,1]^X$, $\nu\in[0,1]^Y$ ayrıca $f:\,X\to Y$ bir dönüşüm olsun. $f(\mu)\in[0,1]^Y$ ve $f^{-1}(\nu)\in[0,1]^X$ bulanık alt kümeler olmak üzere $\forall y\in Y$ için,

$$f(\mu)(y)=\begin{cases}\vee\{\mu(x):\ x\in X,\ f(x)=y\}\ ; & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0\ ; & f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases} \tag{3.7}$$

$\forall x\in X$ için,

$$f^{-1}(\nu)(x)=\nu[f(x)] \tag{3.8}$$

şeklindeki fonksiyonlara sırasıyla f nin μ altındaki görüntüsü ve f nin ν altındaki ters görüntüsü denir [11].

3.2 Bulanık Alt Grup, Bulanık Alt Halka ve Bulanık İdealler

Bu bölümde G daima birimi e olan ve çarpımsal ikili işleme sahip keyfi bir grubu, R ise değişmeli bir halkayı temsil edecek. Grup ve halkanın bulanık alt kümelerinde bazı işlemler tanımlayıp ardından sırasıyla bulanık alt grup, bulanık alt halka ve bulanık ideal tanımlarını vereceğiz. Daha sonra ise bulanık asal ideal, bulanık idealin radikali ve bulanık asallanabilir ideal kavramları verilecek.

Tanım 3.9 G bir grup ve $\forall\ \mu,\nu\in[0,1]^G$ bulanık kümeleri olmak üzere, $\forall x\in G$ için

$$(\mu\circ\nu)(x)=\vee\{\mu(y)\wedge\nu(z)\ :\ y,z\in G,\ yz=x\}, \tag{3.9}$$

$$\mu^{-1}(x)=\mu(x^{-1}). \tag{3.10}$$

$\mu\circ\nu$ işlemine μ ve ν nün nokta çarpımı, μ^{-1} ifadesine μ bulanık alt kümesinin tersi denir.

Tanım 3.10 G bir grup ve $\mu\in[0,1]^G$ olsun. Eğer μ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa μ ye G nin bulanık (fuzzy) alt grubu denir [1].

(G1) $\forall x,y\in G$ için, $\mu(xy)\geq\mu(x)\wedge\mu(y)$

(G2) $\forall x\in G$ için, $\mu(x^{-1})\geq\mu(x)$

G nin tüm bulanık alt gruplarının kümesini $L(G)$ ile gösterelim.

Tanım 3.11 $\mu\in L(G)$ olmak üzere,

$$\mu_*=\{x\in G\ :\ \mu(x)=\mu(e)\} \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır [11].

Ayrıca $n \in N$ olmak üzere $\forall x \in G$ için (G1) koşulundan $\mu\left(x^n\right) \geq \mu\left(x\right)$ elde edilir.

Teorem 3.2 $\mu \in L(G)$ olmak üzere, $\forall x \in G$ için;

(1) $\mu(e) \geq \mu(x)$;

(2) $\mu(x) = \mu(x^{-1})$

olur.

Teorem 3.3 H bir grup ve $v \in L(H)$ olsun. $f : G \to H$ dönüşümü bir homomorfizma ise $f^{-1}(v) \in L(G)$ olur.

R değişmeli halkasının bulanık alt kümelerinde bazı işlemler tanımlayalım.

Tanım 3.12 R bir halka μ ve ν R halkasının bulanık alt kümeleri olsun. $\mu+\nu$, $-\mu$, $\mu-\nu$, $\mu \circ \nu$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall x \in R$,

$$(\mu+\nu)(x) = \vee\left\{\mu\left(y\right) \wedge \nu\left(z\right) \middle| y, z \in R, y+z = x\right\}, \tag{3.12}$$

$$(-\mu)(x) = \mu(-x), \tag{3.13}$$

$$(\mu-\nu)(x) = \vee\left\{\mu(y) \wedge \nu(z) \middle| y, z \in R, y-z = x\right\}, \tag{3.14}$$

$$(\mu \circ \nu)(x) = \vee\left\{\mu(y) \wedge \nu(z) \middle| y, z \in R, yz = x\right\}. \tag{3.15}$$

$\mu+\nu$, $\mu-\nu$ ve $\mu \circ \nu$ sırasıyla μ ve ν nün toplamı, farkı ve nokta çarpımı olarak adlandırılır. $-\mu$, μ nün negatifi olarak tanımlanır. Tanımdan $\mu+\nu = \nu+\mu$ ve $\mu-\nu = \mu+(-\nu)$ olur. R halkası değişmeli olduğundan $\forall \mu, \nu \in [0,1]^R$ için $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ dir.

Tanım 3.13 $\mu, \nu \in [0,1]^R$ olsun. $\forall x \in R$ için $\mu\nu \in [0,1]^R$,

$$(\mu\nu)(x) = \vee\{\mathop{\wedge}_{i=1}^{n}(\mu(y_i) \wedge \nu(z_i)) \mid y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = x\} \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır. R değişmeli olduğundan $\forall \mu, \nu \in [0,1]^R$ için $\mu\nu = \nu\mu$ olur.

Tanım 3.14 R bir halka ve μ, R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda eğer,

(R1) $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\ \forall x, y \in R$

(R2) $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\ \forall x, y \in R$

şartları sağlanırsa μ ye R halkasının bulanık alt halkası denir.

R nin tüm bulanık alt halkalarının kümesini $L(R)$ ile gösterelim.

Tanım 3.15 μ, (R1) şartını sağlasın. Eğer μ,

(R3) $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)\ \forall x, y \in R$

şartını da sağlıyorsa R halkasının bulanık ideali olarak adlandırılır [3]. R nin tüm bulanık ideallerinin kümesini $LI(R)$ ile göstereceğiz. R bir halka; μ, R nin bulanık ideali ise, bu durumda;

$$\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\} \tag{3.17}$$

şeklinde alabiliriz.

$\mu \in [0,1]^R$ olsun. R halkası değişmeli olduğundan μ nün (R3) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul,

$$\mu(xy) \geq \mu(x)\ \forall x, y \in R \tag{3.18}$$

olmasıdır.

Teorem 3.4 $\mu, \nu \in LI(R)$ olsun. Bu durumda;

(1) $\mu(0) \geq \mu(x)\ \ \forall x \in R$

(2) R halkası birimli ise, $\mu(1) \leq \mu(x)\ \ \forall x \in R$

(3) $x, y \in R$ olsun. $\mu(x-y) = \mu(0)$ ise $\mu(x) = \mu(y)$ olur.

(4) μ_* R nin bir idealidir.

(5) μ^* R nin bir idealidir.

(6) $\mu_* \cap \nu_* \subseteq (\mu \cap \nu)_*$

Tanım 3.16 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, $\mu \circ \nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \xi$ oluyorsa ξ idealine R nin bulanık asal ideali denir.

Teorem 3.5 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, ξ idealinin R nin bulanık asal ideali olması için gerek ve yeter koşul $\mu\nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \xi$ olmasıdır.

Tanım 3.17 $c \in [0,1]$ ve $1 \neq c$ olsun. $\forall a, b \in [0,1]$ için $a \wedge b \leq c$ iken $a \leq c$ veya $b \leq c$ oluyorsa c elemanına $[0,1]$ in bir asal elemanıdır denir.

$\xi \in LI(R)$, $\xi \subseteq \mu$ ve $\xi_* \subseteq \mu_*$ olacak şekilde R nin tüm bulanık asal μ ideallerinin kümesini P_ξ ile göstereceğiz.

Tanım 3.18 $\xi \in LI(R)$ olmak üzere,

$$\sqrt{\xi} = \begin{cases} \cap \left\{ \mu : \mu \in P_\xi \right\}; & P_\xi \neq \varnothing \\ 1_R & ; \quad P_\xi = \varnothing \end{cases} \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanan $\sqrt{\xi}$ ifadesine bulanık ξ idealinin radikali denir.

Teorem 3.6 ξ, R nin sabit bir bulanık ideali olsun. Bu durumda $\sqrt{\xi} = 1_R$ olur.

Tanım 3.19 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, $\mu \circ \nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \sqrt{\xi}$ oluyorsa ξ idealine R nin bulanık asallanabilir ideali denir.

3.3 Bulanık Alt Modüller

Bu bölümde ilk olarak bir modülün bulanık alt kümelerinde toplama ve skalerle çarpma ile ilgili birkaç işlemi ele alacağız ardından bulanık alt modül tanımını vereceğiz. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R birimi 1 olan değişmeli bir halka, M bir R modül ve 0_M, M nin sıfır elemanı olarak alınacaktır. I kümesi de boş kümeden farklı bir indeks kümesi olsun.

Tanım 3.20 $\mu, \nu \in [0,1]^M$ olsun. $\mu + \nu, -\mu \in [0,1]^M$ bulanık alt kümelerini $\forall x \in M$ için,

$$\left(\mu+\nu\right)(x)=\vee\left\{\ \mu(y)\wedge\nu(z)\ \middle|\ y,z\in M,\ y+z=x\right\},$$

$$\left(-\mu\right)(x)=\mu(-x).$$

şeklinde tanımlamıştık.

$\mu+\nu$, μ ve ν nin toplamı, $-\mu$ de μ nün negatifi olarak adlandırıldı.

$\mu_i \in [0,1]^M$, $1\le i\le n$ ve $n\in\mathbb{N}$ olsun. “+” işleminde birleşme ve değişme özelliği olduğundan, $\mu_1+\mu_2+...+\mu_n$ toplamını düşünebiliriz ve bu toplamı $\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ olarak yazarız.

$\left|\,I\,\right|>1$ olmak üzere, her $i\in I$ için $\mu_i\in[0,1]^M$ olsun. O zaman $\sum_{i\in I}\mu_i\in[0,1]^M$ toplamı her $x\in M$ için,

$$\left(\sum_{i\in I}\mu_i\right)(x)=\vee\left\{\wedge_{i\in I}\mu_i(x_i)\ \middle|\ x_i\in M,\ i\in I\ ,\ \ \sum x_i=x\right\} \qquad (3.20)$$

şeklinde tanımlansın öyle ki $\sum x_i=\sum_{i\in I}x_i$ ve en fazla sonlu tane x_i, 0_M e eşit olmasın. $\sum_{i\in I}\mu_i$, μ_i lerin zayıf toplamı olarak adlandırılır.

Açıktır ki, $I=\{\ 1,2,...,n\ \}$ ve $n\ge 2$ için $\sum_{i\in I}\mu_i=\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ dir.

Tanım 3.21 $r\in R$ ve $\mu\in[0,1]^M$ olsun. $r\mu\in[0,1]^M$ şu şekilde tanımlansın. $\forall\, x\in M$ için,

$$\left(r\mu\right)(x)=\vee\left\{\ \mu(y)\ \middle|\ y\in M\ ,\ ry=x\ \right\}. \qquad (3.21)$$

$r\mu$, r ile μ nün çarpımı olarak adlandırılır.

Teorem 3.7 r, $s\in R$ ve $\mu,\nu,\xi,\mu_i\in[0,1]^M$, $i\in I$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) $1\mu=\mu$, $(-1)\mu=-\mu$;

(2) $r1_{\{0_M\}}=1_{\{0_M\}}$;

(3) $\mu\subseteq\nu\Rightarrow r\mu\subseteq r\nu$;

(4) $r\left(s\mu\right)=\left(rs\right)\mu$;

(5) $r\left(\mu+\nu\right)=r\mu+r\nu$;

(6) $r\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)=\bigcup_{i\in I}r\mu_i$;

(7) $\left(r\mu\right)\left(rx\right)\geq\mu(x)\ \forall x\in M$;

(8) $\xi\left(rx\right)\geq\mu(x)\ \forall x\in M\Leftrightarrow r\mu\subseteq\xi$;

(9) $\left(r\mu+s\nu\right)\left(rx+sy\right)\geq\mu(x)\wedge\nu(y)\ \forall x,y\in M$;

(10) $\xi\left(rx+sy\right)\geq\mu(x)\wedge\nu(y)\ \forall x,y\in M\Leftrightarrow r\mu+s\nu\subseteq\xi$.

İspat (1) den (6) ya kadar aşikâr.

(7) $\left(r\mu\right)\left(rx\right)=\vee\left\{\ \mu(y)\middle|\ y\in M\ ,\ ry=rx\ \right\}\geq\mu(x)\ \forall x\in M$.

(8) Eğer $\xi\left(rx\right)\geq\mu(x)\ \forall x\in M$ ise,

$\left(r\mu\right)(x)=\vee\left\{\ \mu(y)\ \mid\ y\in M\ ,\ ry=x\right\}\leq\vee\left\{\ \xi\left(ry\right)\mid y\in M,ry=x\right\}=\xi(x)\ \forall x\in M$,

$r\mu\subseteq\xi$.

Eğer $r\mu\subseteq\xi$ ise, (7) den $\xi\left(rx\right)\geq r\mu\left(rx\right)\geq\mu(x)\ \ \forall x\in M$ olur.

(9) (7) ve '$+$' işleminin tanımından,

$\left(r\mu+s\nu\right)\left(rx+sy\right)\geq\left(r\mu\right)\left(rx\right)\wedge\left(s\nu\right)\left(sy\right)\geq\mu(x)\wedge\nu(y)\ \ \forall x,y\in M$ olur.

(10) Farz edelim ki, $\xi\left(rx+sy\right)\geq\mu(x)\wedge\nu(y)\ \forall x,y\in M$ olsun. O zaman $\forall z\in M$ için,

$$\left(r\mu+s\nu\right)(z)=\vee\left\{\ \left(r\mu\right)(u)\wedge\left(s\nu\right)(v)\middle|\,u,v\in M,\ u+v=z\right\}$$

$$=\vee\left\{\left(\vee\left\{\ \mu(x)\mid x\in M,\ rx=u\right\}\right)\wedge\left(\vee\left\{\ \nu(y)\middle|y\in M,\ sy=v\right\}\right)\middle|u,v\in M,u+v=z\ \right\}$$

$$=\vee\left\{\ \mu(x)\wedge\nu(y)\ \mid\ x,y\in M,\ rx+sy=z\ \right\}$$

$$\leq\xi(z)$$

olur. Buradan $r\mu+s\nu\subseteq\xi$ elde edilir.

Tersine $r\mu+s\nu\subseteq\xi$ olduğunu varsayalım. O zaman $\forall x,y\in M$ için,

$$\xi(rx+sy) \geq (r\mu+s\nu)(rx+sy)$$

$$\geq (r\mu)(rx) \wedge (s\nu)(sy)$$

$$\geq \mu(x) \wedge \nu(y) \quad \text{((7)'den)}$$

olur.

Teorem 3.8 $r,s \in R$ ve $\mu \in [0,1]^M$ olsun. Bu durumda,

(1) $r\mu \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu(rx) \geq \mu(x) \;\; \forall x \in M$,

(2) $r\mu + s\mu \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu(rx+sy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \;\; \forall x,y \in M$.

İspat Teorem 3.7 nin (8), (9) ve (10). maddelerinden elde edilir.

Teorem 3.9 Varsayalım ki, N bir $R-$modül ve f , $f: M \to N$ şeklinde tanımlı bir homomorfizma olsun. $r,s \in R$ ve $\mu,\nu \in [0,1]^M$ için,

(1) $f(\mu+\nu) = f(\mu)+f(\nu)$,

(2) $f(r\mu) = r\,f(\mu)$,

(3) $f(r\mu+s\nu) = r\,f(\mu)+s\,f(\nu)$.

İspat (1) Kolaylıkla gösterilebilir.

(2) $\forall\; y \in N$ için,

$$f(r\mu)(y) = \vee\left\{ (r\mu)(x) \mid x \in M,\; f(x)=y \right\}$$

$$= \vee\left\{ \vee\left\{ \mu(u) \mid u \in M,\, ru = x \right\} \mid x \in M,\; f(x)=y \right\}$$

$$= \vee\left\{ \mu(u) \mid u \in M,\; f(ru)=y \right\}$$

$$= \vee\left\{ \mu(u) \mid u \in M,\, r(f(u))=y \right\}$$

$$= r\,f(\mu)(y).$$

Buradan da $f(r\mu) = r\,f(\mu)$ elde edilir.

(3) Bu ifade (1) ve (2) nin sonucu olarak hemen çıkar.

Tanım 3.22 $\zeta \in [0,1]^R$ ve $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $\zeta \cdot \mu,\ \zeta \odot \mu \in [0,1]^M$ işlemlerini $\forall\ x \in M$ için aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\left(\zeta \cdot \mu\right)(x) = \vee\left\{\, \zeta(r) \wedge \mu(y) \;\middle|\; r \in R,\ y \in M,\ ry = x \,\right\}, \tag{3.22}$$

$$\left(\zeta \odot \mu\right)(x) = \vee\left\{\, \wedge_{i=1}^{n}\left(\zeta(r_i) \wedge \mu(x_i)\right) \;\middle|\; r_i \in R,\ x_i \in M,\ 1 \le i \le n, n \in \mathbb{N} \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i x_i = x \right\}. \tag{3.23}$$

Teorem 3.10 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. O zaman

(1) Tüm $r \in R$ için, $1_{\{r\}} \cdot \mu = r\mu$,

(2) Tüm $r \in R$ ve $x \in M$ için,

$$\left(1_{\{r\}} \odot \mu\right)(x) = \vee\left\{ \wedge_{i=1}^{n} \mu(x_i) \;\middle|\; x_i \in M,\ 1 \le i \le n,\ n \in \mathbb{N}\ r\sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}.$$

Tanım 3.23 $\mu \in [0,1]^M$ için;

(M1) $\mu\left(0_M\right) = 1$

(M2) $\mu\left(rx\right) \ge \mu(x)\ \forall\, r \in R\ ve\ \ x \in M$

(M3) $\mu\left(x+y\right) \ge \mu(x) \wedge \mu(y)\quad \forall\ x, y \in M$

koşullarını sağlayan μ ye M nin bir bulanık alt modülü denir [12].

M nin tüm bulanık alt modüllerinin kümesini $L(M)$ ile göstereceğiz.

R kendi üzerinde bir modül olduğundan, bir önceki tanımdan μ nün R modülünün bir bulanık alt modülü olması için gerek ve yeter koşul μ nün R halkasının bir bulanık ideali olmasıdır.

$\forall\ x \in M$ için $-1x = -x$ olduğundan (M2) koşulu $\forall\ x \in M$ için $\mu(-x) \ge \mu(x)$' i sağlar. Buradan da $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün M toplamsal grubunun bir bulanık alt grubu ve (M2) şartını sağlamasıdır.

Teorem 3.11 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. O zaman $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün (M1) ve aşağıdaki şartı sağlamasıdır:

(M4) $\mu\left(rx+sy\right) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \;\; \forall \; r,s \in R \;\; ve \;\; x,y \in M$.

İspat Farzedelim $\mu \in L(M)$ olsun. Tanımdan dolayı μ (M1) koşulunu sağlar. μ aynı zamanda (M2) ve (M3) şartlarını da sağlar. Buradan da $\forall \; r,s \in R$ ve $x,y \in M$ için,

$\mu\left(rx+sy\right) \geq \mu\left(rx\right) \wedge \mu\left(sy\right) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur.

Böylece μ (M4) koşulunu da sağlamış olur.

Tersine, μ (M1) ve (M4) şartlarını sağlasın. Bu durumda $\forall \; r \in R$ ve $x \in M$ için,

$\mu\left(rx\right) = \mu\left(rx + r0_M\right) \geq \mu(x) \wedge \mu(0_M) = \mu(x)$ ve $\forall \; x,y \in M$ için,

$\mu\left(x+y\right) = \mu\left(1x+1y\right) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur.

Böylece μ (M2) ve (M3) koşullarını sağlar. Buradan da $\mu \in L(M)$ elde edilir.

Teorem 3.12 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün M toplamsal grubunun bir bulanık alt grubu ve aşağıdaki şartı sağlamasıdır:

$(\mathrm{M2})' \;\; r\mu \subseteq \mu \quad \forall \; r \in R$.

Teorem 3.13 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

$(\mathrm{M1})' \;\; 1_{\{0_M\}} \subseteq \mu$;

$(\mathrm{M2})' \;\; r\mu \subseteq \mu \; \forall \; r \in R$,

$(\mathrm{M3})' \;\; \mu + \mu \subseteq \mu$.

Teorem 3.14 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

$(\mathrm{M1})' \;\; 1_{\{0_M\}} \subseteq \mu$;

$(\mathrm{M4})'$ $r\mu + s\mu \subseteq \mu \quad \forall\ r,s \in R$.

Örnek 3.1 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ olmak üzere,

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \quad ise, \\ \dfrac{1}{3} & x = 2,4 \quad ise, \\ \dfrac{1}{4} & x = 1,3,5 \quad ise, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ, M nin bir bulanık alt modülüdür.

Biz şimdi bulanık alt modüller ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedeceğiz. Eğer $\mu,\nu \in [0,1]^M$ ise, $\mu+\nu$, $\forall\ x \in M$ için $(\mu+\nu)(x) = \vee\{\ \mu(y) \wedge \nu(z)\ \mid\ y,z \in M,\ x = y+z\ \}$ şeklinde tanımlanmıştı.

Teorem 3.15 $\mu,\nu \in [0,1]^M$ olsun. O zaman $\mu+\nu \in L(M)$ dir.

İspat $\forall\ r \in R$ için Teorem 3.7 (5) ve Teorem 3.12 dan $r(\mu+\nu) = r\mu + r\nu \subseteq \mu+\nu$ olur. Buradan $\mu+\nu \in L(M)$ elde edilir.

Teorem 3.16 $\zeta \in LI(R)$ ve $\mu \in L(M)$ olsun. Bu durumda $\zeta \odot \mu \in L(M)$ olur.

İspat $(\zeta \odot \mu)(0_M) = 1$ olduğu açıktır. $\forall\ r \in R,\ x \in M$ için,

$$\begin{aligned}
(\zeta \odot \mu)(rx) &= \vee\left\{ \wedge_{i=1}^{n}\big(\zeta(s_i) \wedge \mu(z_i)\big) \;\middle|\; s_i \in R,\ z_i \in M,\ 1 \le i \le n,\ n \in \mathbb{N}\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} s_i z_i = rx \right\} \\
&\ge \vee\left\{ \wedge_{i=1}^{n}\big(\zeta(rr_i) \wedge \mu(x_i)\big) \;\middle|\; r_i \in R,\ x_i \in M,\ 1 \le i \le n,\ n \in \mathbb{N}\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} (rr_i) x_i = rx \right\} \\
&\ge \vee\left\{ \wedge_{i=1}^{n}\big(\zeta(r_i) \wedge \mu(x_i)\big) \;\middle|\; r_i \in R,\ x_i \in M,\ 1 \le i \le n,\ n \in \mathbb{N}\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = rx \right\} \\
&= (\zeta \odot \mu)(x)
\end{aligned}$$

olur.

$\wedge$ işleminin $\vee$ işlemi üzerine dağılma özelliğinden, $\forall\ x,y \in M$ için,

$\left(\zeta \odot\mu\right)\left(x+y\right)\geq\left(\zeta \odot\mu\right)\left(x\right)\wedge\left(\zeta \odot\mu\right)\left(y\right)$ olur. Buradan da $\zeta \odot\mu \in L(M)$ bulunur.

$M = R$ alınırsa bir önceki teoremden, eğer $\zeta , \mu \in LI(R)$ ise $\zeta \odot\mu \in LI(R)$ olur.

Teorem 3.17 $\zeta \in LI(R)$ ve $\mu \in L(M)$ olsun. Eğer $\zeta(0_R) = 1$ ise $\zeta .\mu \in L(M)$ olur.

Örnek 3.2 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ olmak üzere, μ nün M nin bir bulanık alt modülü olduğunu Örnek 3.1 de söylemiştik. $2_{\frac{1}{2}} \in LI(R)$ ve $\mu \in L(M)$ için,

$$(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(0) = \vee\{2_{\frac{1}{2}}(2)\wedge\mu(3), 2_{\frac{1}{2}}(3)\wedge\mu(4), ...\}$$

$$= \vee\{\frac{1}{2}\wedge\frac{1}{4}, 0\wedge\frac{1}{3}, ...\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(1) = (2_{\frac{1}{2}}.\mu)(3) = (2_{\frac{1}{2}}.\mu)(5) = 0$$

$$(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(2) = \vee\{2_{\frac{1}{2}}(1)\wedge\mu(2), 2_{\frac{1}{2}}(2)\wedge\mu(4), 2_{\frac{1}{2}}(4)\wedge\mu(5).............\}$$

$$= \vee\{0\wedge\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\wedge\frac{1}{3}, 0\wedge\frac{1}{4}, ...\}$$

$$= \frac{1}{3} = (2_{\frac{1}{2}}.\mu)(4)$$

$$(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \quad ise, \\ \frac{1}{3} & x = 2,4 \quad ise, \\ 0 & x = 1,3,5 \quad ise, \end{cases}$$

elde edildi. Sonuç olarak $(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(0) \neq 1$ olduğundan $2_{\frac{1}{2}}.\mu \notin L(M)$ olur.

3.4 Bölüm Modüllerinin Bulanık Alt Modülleri, Rezidüel Bölümler ve Asal Alt Modüller

Bu bölümde öncelikle bir bölüm modülünün bulanık alt modüllerinin yapısının oluşumundan ve modül homomorfizmalarından bahsedilecek. Sonrasında rezidüel bölümler kavramını ve asal bulanık alt modül tanımını vereceğiz.

Teorem 3.18 A, M nin bir alt modülü ve $\nu \in L(M)$ olsun. $\forall\ x \in M$ için, $\xi \in [0,1]^{M/A}$ yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\xi([x]) = \vee\{\nu(u) \mid u \in [x]\} \tag{3.24}$$

Burada M/A, M nin bölüm modülünü, $[x]$ ise $x+A$ kosetini ifade etmektedir. Bu durumda $\xi \in L(M/A)$ olur.

İspat ξ, M/A bölüm modülünün toplamsal grubunun bir bulanık alt grubudur. Şimdi $\forall\ r \in R$ ve $x \in M$ için,

$$\begin{aligned}
\xi(r[x]) &= \xi([rx]) \\
&= \vee\{\nu(a) \mid a \in [rx]\} \\
&= \vee\{\nu(rx+y) \mid y \in A\} \\
&= \vee\{\nu(rx+rz) \mid z \in A\} \\
&= \vee\{\nu(r(x+z)) \mid z \in A\} \\
&\geq \vee\{\nu(x+z) \mid z \in A\} \\
&= \vee\{\nu(u) \mid u \in [x]\} \\
&= \xi([x])
\end{aligned}$$

olur. Buradan da $\xi \in L(M/A)$ elde edilir.

Şimdi Teorem 3.18 in özel bir durumunu ele alalım. $\nu \in L(M)$, $a \in [0,1]$ ve $A = \nu_a$ olsun. Bu durumda A, M nin bir alt modülüdür. Böylece Teorem 3.18 den (3.24) eşitliği ile tanımlanan ξ, $\xi \in L(M/A)$ olur. $x \in M$ olsun ve $\xi([x])$ i göz önüne alalım. Eğer $[x] = A$ ise, $\xi([x]) = 1$ dir. Eğer $[x] \neq A$ ise, o zaman $x \notin A$ ve buradan $\nu(x) < a$ olur. Böylece herhangi bir $y \in [x]$ için $z \in A$ vardır öyle ki $y = x + z$ dir. Buradan,

$$\nu(y) = \nu(x+z) \geq \nu(x) \wedge \nu(z) = \nu(x)$$

olur. Benzer biçimde $\nu(x) = \nu(y + (-z)) \geq \nu(y) \wedge \nu(-z) = \nu(y)$ dir. Sonuç olarak $\nu(x) = \nu(y)$ elde edilir. O halde $\forall\ x \in M$ için $\xi([x])$,

$$\xi([x]) = \begin{cases} 1 & \nu(x) \geq a \\ \nu(x) & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde verilebilir. $A = \nu_{[a]}$ olması durumu benzer şekilde elde edilebilir.

Biz şimdi Teorem 3.18 de tanımlanan ξ bulanık alt modülünün özelliklerini inceleyelim. $\mu \subseteq \nu$ olacak şekilde $\mu, \nu \in L(M)$ alalım. μ^* ve ν^* ın her ikisinin de M nin alt modülü olduğu biliniyor. $\mu^* \subseteq \nu^*$ olduğu açıktır. Böylece μ^*, ν^* ın bir alt modülüdür. Dahası açıktır ki $\nu\big|_{\nu^*} \in L(\nu^*)$ dir. Buradan Teorem 3.4.1 den eğer, $\xi \in [0,1]^{\nu^*/\mu^*}$ ı $\forall\ x \in \nu^*$ için,

$$\xi([x]) = \vee\{\nu(z) \mid z \in [x]\}$$

şeklinde tanımlarsak $[x]$, koset $x + \nu^*$ ı ifade eder ve bu durumda $\xi \in L(\nu^*/\mu^*)$ olur. Bulanık alt modül ξ, ν nin μ ye göre bölüm modülü olarak adlandırılır. ν/μ ile gösterilir.

$\mu \in L(M)$, N bir $R-$modül ve $f : M \to N$ bir homomorfizma alırsak $f(\mu) \in L(N)$ olur.

Tanım 3.24 M, N bir $R-$modül, $\mu \in L(M)$ ve $\nu \in L(N)$ olsun.

(1) Bir $f: M \to N$ homomorfizması; eğer $f(\mu) \subseteq \nu$ ise μ den ν ye zayıf homomorfizma olarak adlandırılır. μ den ν ye f homomorfizması zayıf homomorfizma ise μ, ν ye zayıfça homomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\sim} \nu$ ya da basitçe $\mu \sim \nu$ şeklinde yazılır.

(2) Bir $f: M \to N$ izomorfizması; eğer $f(\mu) \subseteq \nu$ ise μ den ν ye zayıf izomorfizma olarak adlandırılır. μ den ν ye f izomorfizması zayıf izomorfizma ise o zaman μ, ν ye zayıfça izomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\simeq} \nu$ ya da basitçe $\mu \simeq \nu$ şeklinde yazılır.

(3) Bir $f: M \to N$ homomorfizması; eğer $f(\mu) = \nu$ ise μ den ν ye bir homomorfizma olarak adlandırılır. Eğer f, μ den ν ye bir homomorfizma ise o zaman μ, ν ye homomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\approx} \nu$ ya da basitçe $\mu \approx \nu$ şeklinde yazılır.

(4) Bir $f: M \to N$ izomorfizması; eğer $f(\mu) = \nu$ ise μ den ν ye bir izomorfizma olarak adlandırılır. Eğer f, μ den ν ye bir izomorfizma ise o zaman μ, ν ye izomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\cong} \nu$ ya da basitçe $\mu \cong \nu$ şeklinde yazılır.

Teorem 3.19 $\mu \subseteq \nu$ olmak üzere $\mu, \nu \in L(M)$ olsun. Bu durumda $\nu\big|_{\nu^*} \approx \nu/\mu$ olur.

Teorem 3.20 $\nu \in L(M)$ olsun. N bir $R-$modül ve $\xi \in L(N)$ olmak üzere $\nu \approx \xi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\mu \in L(M)$ vardır öyle ki $\mu \subseteq \nu$ ve $\nu\big/\mu \cong \xi\big|_{\xi^*}$ olur.

Teorem 3.21 $\mu, \nu \in L(M)$ olsun. Bu durumda $\nu\big/(\mu \cap \nu) \simeq (\mu + \nu)\big/\mu$ olur.

Teorem 3.22 $\mu \subseteq \nu \subseteq \xi$ olmak üzere $\mu, \nu, \xi \in L(M)$ olsun. Bu durumda $(\xi/\mu)\big/(\nu/\mu) \cong \xi/\nu$ olur.

Tanım 3.25 $\mu, \nu \in [0,1]^M$ ve $\zeta \in [0,1]^R$ için rezidüel bölümler $\mu : \nu \in [0,1]^R$ ve $\mu : \zeta \in [0,1]^M$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu : \nu = \cup\left\{ \eta \mid \eta \in [0,1]^R,\ \eta \cdot \nu \subseteq \mu \right\}$$

$$\mu : \zeta = \cup\left\{ \xi \mid \xi \in [0,1]^M,\ \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \right\} \qquad (3.25)$$

Teorem 3.23 $\mu,\nu\in[0,1]^M$ ve $\zeta\in[0,1]^R$ olsun. Bu durumda,

(1) $\mu:\nu=\cup\left\{ r_a \mid r\in R,\ a\in[0,1],\ r_a\cdot\nu\subseteq\mu \right\}$

(2) $\mu:\zeta=\cup\left\{ x_a \mid x\in M,\ a\in[0,1],\ \zeta\cdot x_a\subseteq\mu \right\}$

olur.

İspat (1) Tanım 3.25 den,

$$\cup\left\{ r_a \mid r\in R,\ a\in[0,1],\ r_a\cdot\nu\subseteq\mu \right\}\subseteq\mu:\nu$$

olduğu açıktır. $\eta\in[0,1]^R$, $\eta\cdot\nu\subseteq\mu$, $r\in R$ ve $\eta(r)=a$ olsun. Bu durumda $\forall\ x\in M$ için,

$$\begin{aligned}(r_a\cdot\nu)(x)&=\vee\left\{ r_a(s)\wedge\nu(y)\mid s\in R,\ y\in M,\ sy=x\right\}\\ &\leq\vee\left\{ \eta(r)\wedge(y)\mid y\in M,\ ry=x\right\}\\ &=(\eta\cdot\nu)(x)\\ &\leq\mu(x)\end{aligned}$$

Böylece $r_a\cdot\nu\subseteq\mu$ ve bundan dolayı,

$$\mu:\nu\subseteq\cup\left\{ r_a \mid r\in R,\ a\in L,\ r_a\cdot\nu\subseteq\mu \right\}$$

olur. Sonuçta,

$$\mu:\nu=\cup\left\{ r_a \mid r\in R,\ a\in L,\ r_a\cdot\nu\subseteq\mu \right\}$$

elde edilir.

(2) (1)' e benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.24 $\mu,\nu\in[0,1]^M$ ve $\zeta\in[0,1]^R$ olsun. Bu durumda,

(1) $(\mu:\nu)\cdot\nu\subseteq\mu$,

(2) $\zeta\cdot(\mu:\zeta)\subseteq\mu$,

(3) $\zeta \cdot \nu \subseteq \mu \Leftrightarrow \zeta \subseteq \mu : \nu \Leftrightarrow \nu \subseteq \mu : \zeta$

olur.

Teorem 3.25 $\mu, \nu \in [0,1]^M$ ve $\zeta \in [0,1]^R$ olsun.

(1) Eğer $\mu \in L(M)$ ise, $\mu : \nu = \bigcup \{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \}$ olur.

(2) Eğer $\zeta \in LI(R)$ ise, $\mu : \zeta = \bigcup \{ \xi \mid \xi \in L(M), \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \}$ olur.

Teorem 3.26 $\mu \in L(M)$, $\nu \in [0,1]^M$ ve $\zeta \in LI(R)$ olsun. Bu durumda $\mu : \nu \in LI(R)$ ve $\mu : \zeta \in L(M)$ olur.

$\mu, \nu \in L(M)$ ve $\xi \in LI(R)$ olsun. $\mu : \xi$, μ ve ξ nin rezidüel bölüm bulanık alt modülü, $\mu : \nu$ de μ ve ν nün rezidüel bölüm bulanık ideali olarak adlandırılır.

Tanım 3.26 $\mu, \nu \in L(M)$ ve ν, μ nün bulanık alt modülü olsun. $r_t \in [0,1]^R$ ve $x_s \in [0,1]^M$ olmak üzere, $r_t x_s \subseteq \nu$ iken $x_s \subseteq \nu$ veya $r_t \mu \subseteq \nu$ oluyorsa, ν ye μ nün bir bulanık asal alt modülü denir [13].

Eğer özellikle $\mu = \chi_M$ aldığımızda, $r_t x_s \subseteq \nu$ iken $x_s \subseteq \nu$ veya $r_t \chi_M \subseteq \nu$ oluyorsa, ν ye M nin bir bulanık asal alt modülü denir.

Teorem 3.27 Eğer $M = R$ alırsak, $\nu \in [0,1]^R$ nün M nin bir bulanık asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul, ν nün M nin bir bulanık asal ideali olmasıdır.

Teorem 3.28 $\mu, \nu \in L(M)$ ve ν, μ nün bulanık alt modülü olsun. Eğer $\nu_t \neq \mu_t$ ise, ν_t, μ_t nin bir asal alt modülü olur.

Teorem 3.29 ν, M nin bir bulanık asal alt modülü olsun. Bu durumda,

$\nu_* = \{x \in M \mid \nu(x) = \nu(0_M)\}$ M nin bir asal alt modülü olur.

BÖLÜM 4

BULANIK HİPERMODÜLLER

Bu bölümde öncelikle bulanık hipermodül yapısını anlatacağız. Ardından bulanık hipermodüller ile hipermodüller arasında bağlantı kuracağız.

4.1 Bulanık Hipermodüller

Tanım 4.1 S boştan farklı bir küme olsun ve S'nin boştan farklı tüm bulanık alt kümelerini $F^*(S)$ ile gösterelim. S üzerinde tanımlı $\circ : S \times S \to F^*(\mathrm{S})$ dönüşümü S 'nin herhangi iki elemanından oluşan (a,b) ikilisini boştan farklı $a \circ b$ bulanık alt kümesine götürsün. $(S,\circ)$'ya bulanık hipergrupoid denir.

Eğer her $a,b \in S$ için $a \circ b = b \circ a$ eşitliği sağlanıyorsa $(S,\circ)$'ya değişmeli denir.

Tanım 4.2 $(S,\circ)$ bir bulanık hipergrupoid olsun. Eğer her $a,b,c,r \in S$ ve herhangi $\mu \in F^*(\mathrm{S})$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(S,\circ)$'ya bulanık yarı-hipergrup (semi-hipergrup) denir:

(i) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ **,**

(ii) $(a \circ \mu)(\mathrm{r}) = \vee_{t \in S} \left((a \circ t)(r) \wedge \mu(t) \right)$**,**

(iii) $(\mu \circ a)(\mathrm{r}) = \vee_{t \in S} \left(\mu(t) \wedge (t \circ a)(r) \right)$**.**

Örnek 4.1 $\mathbb{N}^*$ sıfırdan farklı tüm doğal sayıların kümesi olsun. $\forall a,b \in \mathbb{N}^*$ için

$$
\begin{array}{lcl}
a \circ b : \mathbb{N}^* & \to & [0,1] \\
(a \circ b)(t) & = & \min\left\{ \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{t} \right\}
\end{array}
$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümeler için $(\mathbb{N}^*,\circ)$ bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup)tur.

Teorem 4.1 A, S'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $x \in S$ olsun. Her $t \in S$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $(x \circ A)(t) = \vee_{a \in A}(x \circ a)(t)$,

(ii) $(A \circ x)(t) = \vee_{a \in A}(a \circ x)(t)$.

Teorem 4.2 A, S'nin boştan farklı bir alt kümesi ve χ_A, A'nın karakteristik fonksiyonu olsun. Eğer $A = S$ ise her $t \in S$ için $\chi_A(t) = 1$ dir.

Tanım 4.3 $(S,\circ)$ bir bulanık yarı-hipergrup (semi-hipergrup) olsun. Her $a \in S$ için $a \circ S = S \circ a = \chi_s$ eşitliği sağlanıyorsa, $(S,\circ)$'ya bulanık hipergrup denir.

Tanım 4.4 $(S,\circ)$ bir bulanık hipergrupoid, μ ve λ S'nin sıfırdan farklı iki bulanık alt kümesi olsun. Her $t \in S$ için

$$(\mu \circ \lambda)(t) = \vee_{p,q \in S}\left(\mu(p) \wedge (p \circ q)(t) \wedge \lambda(q)\right)$$

şekilde tanımlanır.

Tanım 4.5 R boştan farklı bir küme, $\boxplus, \boxdot$ R üzerinde tanımlı 2 hiperişlem olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(R,\boxplus,\boxdot)$ 'ye bulanık hiperhalka denir [14]:

(i) $(R,\boxplus)$ değişmeli bulanık hipergruptur,

(ii) $(R,\boxdot)$ bulanık yarı-hipergrup (semi-hipergrup)tur,

(iii) "$\boxdot$" hiperişleminin "$\boxplus$" hiperişlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Diğer bir deyişle her $a,b,c \in R$ için,

$a \boxdot (\mathrm{b} \boxplus c) = (a \boxdot b) \boxplus (a \boxdot c)$ ve $(\mathrm{a} \boxplus b) \boxdot c = (a \boxdot c) \boxplus (b \boxdot c)$

eşitliklerini sağlamalıdır.

Tanım 4.6 $(R,\boxplus,\boxdot)$ bir bulanık hiperhalka olsun. Üzerinde $\oplus, \odot$ bulanık hiperişlemleri tanımlı boştan farklı M kümesi eğer aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, $(M,\oplus,\odot)$'ye $(R,\boxplus,\boxdot)$ üzerinde tanımlı bir sol bulanık hipermodül denir:

(1) $(M,\oplus)$ değişmeli bulanık hipergruptur,

(2) $\odot : R \times M \to F^{*}(\mathrm{M})$'ye her $a,b \in M$ ve $\alpha,\beta \in R$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşümdür:

(i) $\alpha \odot (a \oplus b) = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b)$,

(ii) $(\alpha \boxplus \beta) \odot a = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a)$,

(iii) $(\alpha \boxdot \beta) \odot a = \alpha \odot (\beta \odot a)$.

$(R,\boxplus),(M,\oplus)$ değişmeli bulanık hipergruplarının birim elemanları olsun ve bunları sırası ile 0_R ve 0_M ile gösterelim. $(M,\oplus,\odot)$ bulanık hipermodülü her $a \in M$ için $0_R \odot a = \chi_{\{0_M\}}$ eşitliğini sağlar.

$(R,\boxdot)$ bulanık yarı-hipergrubunun (semi-hipergrubunun) da birim elemanı olsun ve onu 1 ile gösterelim. Eğer $(M,\oplus,\odot)$ bulanık hipermodülü her $a \in M$ için $1 \odot a = \chi_{\{a\}}$ eşitliğini sağlarsa $(M,\oplus,\odot)$'ye birimsel denir.

Bundan sonraki bölümlerde kolaylık olması açısından sol bulanık hipermodül yerine kısaca bulanık hipermodül denilecektir.

Örnek 4.2 Her bulanık hiperhalka kendi üzerinde bir bulanık hipermodüldür.

4.2 Bulanık Hipermodüller ve Hipermodüller Arasındaki Bağlantı

Tanım 4.7 S boştan farklı bir küme, $p \in [0,1]$ ve $\circ$, S üzerinde tanımlanmış bir hiperişlem olsun. Her $a,b \in S$ için $a \circ b$'nin $p-$ kesitleri,

$$(a \circ b)_p = \{t \in S : (a \circ b)(t) \geq p\}$$

şeklinde tanımlanır. Her $p \in [0,1]$ için S üzerinde tanımlı bu hiperişlemi $a \circ_p b = (a \circ b)_p$ şeklinde göstereceğiz.

Örnek 4.3 $(M,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ halkası üzerinde bir modül olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan hiperişlemler için $(M,\oplus,\odot)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde bir bulanık hipermodüldür:

- Her $a,b\in M$ için $a\oplus b=\chi_{\{a,b\}}$,
- Her $a\in M$ ve $r\in R$ için $r\odot a=\chi_{\{ra\}}$,
- Her $r,s\in R$ için $r\boxplus s=\chi_{\{r,s\}}$ ve $r\boxdot s=\chi_{\{rs\}}$.

Örnek 4.4 $(M,+,\cdot)$, birimsiz $(R,+,\cdot)$ halkası üzerinde bir modül olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan hiperişlemler için $(M,\oplus,\odot)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde bir bulanık hipermodüldür:

- Her $a,b\in M$ için $a\oplus b=\chi_{\{a,b\}}$,
- Her $a\in M$ ve $r\in R$ için $r\odot a=\begin{cases}1/2 & t=ra\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$,
- Her $r,s\in R$ için $r\boxplus s=\chi_{\{r,s\}}$ ve $r\boxdot s=\chi_{\{rs\}}$.

Örnek 4.5 $(M,+,\cdot)$, birimsiz $(R,+,\cdot)$ halkası üzerinde bir modül olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan hiperişlemler için $(M,\oplus,\odot)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde bir bulanık hipermodüldür:

- Her $a,b\in M$ için $a\oplus b=\chi_{\{a+b\}}$,
- Her $a\in M$ ve $r\in R$ için $r\odot a=\begin{cases}1/2 & t=ra\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$,
- Her $r,s\in R$ için $r\boxplus s=\chi_{\{r,s\}}$ ve $r\boxdot s=\chi_{\{rs\}}$.

Yukarıdaki örnekleri göz önüne aldığımızda bulanık hipermodüller ve hipermodüller arasındaki ilk bağlantının bir bulanık kümenin $p-$kesitleri kullanılarak sağlandığını söyleyebiliriz.

Teorem 4.3 Her $p \in [0,1]$, her $a,b,c,u \in S$ ve $\circ_p$ hiperişlemi için aşağıdaki denklik sağlanır:

$\left(a \circ (b \circ c)\right)(u) \geq p \Leftrightarrow u \in a \circ_p \left(b \circ_p c\right)$.

İspat $\left(a \circ (b \circ c)\right)(u) = \vee_{t \in S} (a \circ t)(u) \wedge (b \circ c)(t) \geq p$ olması için gerek ve yeter koşul $(a \circ t_0)(u) \geq p$ ve $(b \circ c)(t_0) \geq p$ eşitsizlikleri sağlayacak şekilde bir $t_0 \in S$ elemanının olmasıdır. Bu eşitsizlikler sağlanıyor ise $p-$kesitinin tanımı gereği $u \in a \circ_p t_0$ ve $t_0 \in b \circ_p c$ dir. Bu da $u \in a \circ_p \left(b \circ_p c\right)$ demektir.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 4.4 Her $p \in [0,1]$, her $a,b,c,u \in S$ ve $\circ_p$ hiperişlemi için aşağıdaki denklik sağlanır:

$\left((a \circ b) \circ c\right)(u) \geq p \Leftrightarrow u \in \left(a \circ_p b\right) \circ_p c$.

Teorem 4.5 S üzerinde $\oplus, \circ$ bulanık hiperişlemleri tanımlı boştan farklı bir küme; her $p \in [0,1]$ için $\oplus_p$ ve $\circ_p$ birer hiperişlem olsun. Bu durumda her $p \in [0,1]$, her $a,b,c,u \in S$ için aşağıdaki denklikler sağlanır:

- $\left(a \circ (b \oplus c)\right)(u) \geq p \Leftrightarrow u \in a \circ_p \left(b \oplus_p c\right)$,
- $\left((a \oplus b) \circ c\right)(u) \geq p \Leftrightarrow u \in \left(a \oplus_p b\right) \circ_p c$,
- $\left(a \circ b \oplus a \circ c\right)(u) \geq p \Leftrightarrow u \in \left(a \circ_p b\right) \oplus_p \left(a \circ_p c\right)$,
- $\left(b \circ a \oplus c \circ a\right)(u) \geq p \Leftrightarrow u \in \left(b \circ_p a\right) \oplus_p \left(c \circ_p a\right)$.

Sonuç 4.1 $(S, \circ)$ nın bulanık yarı-hipergrup (semi-hipergrup) olması için gerek ve yeter koşul her $p \in [0,1]$ için $(S, \circ_p)$ nin yarı-hipergrup (semi-hipergrup) olmasıdır.

İspat $(S, \circ)$ nın bulanık yarı-hipergrup (semi-hipergrup) olsun. Teorem 4.3 ve teorem 4.4 den her $p \in [0,1]$ için $(S, \circ_p)$ bir yarı-hipergrup (semi-hipergrup)tur.

Denkliğin diğer tarafını ispatlamamız için her A,B ve $p\in[0,1]$ için $A\geq p \Leftrightarrow B\geq p$ olduğunda $A=B$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $A>B$ olduğunu varsayalım bu durumda $A>p_0>B$ olacak şekilde bir p_0 sayısı bulunur bu da $B\geq p_0$ olması ile çelişir.

Teorem 4.6 Her $a\in S$ için $a\circ S=\chi_S \Leftrightarrow a\circ_p S=S, \forall p\in[0,1]$ denkliği sağlanır.

İspat $a\circ S=\chi_S$ olsun. Her $t\in S$ ve $p\in[0,1]$ için $\vee_{u\in S}(a\circ u)(t)=1\geq p$ dir. Bu durumda $(a\circ u_0)(t)\geq p$ olacak şekilde $u_0\in S$ vardır. Bu da $t\in a\circ_p u_0$ demektir. Böylece her $p\in[0,1]$ için $a\circ_p S=S$ elde edilmiş olur.

Diğer taraftan, $p=1$ için $a\circ_1 S=S$ dir. Bundan dolayı her $t\in S$ için $t\in a\circ_1 u$ olacak şekilde $u\in S$ vardır. Bu da $(a\circ u)(t)=1$ demektir. Diğer bir deyişle $a\circ S=\chi_S$ dir.

Sonuç 4.2 $(S,\circ)$ nın bulanık hipergrup olması için gerek ve yeter koşul her $p\in[0,1]$ için $(S,\circ_p)$ nin hipergrup olmasıdır.

Sonuç 4.3 $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerindeki $(M,\oplus,\odot)$ yapısının bulanık hipermodül olması için gerek ve yeter koşul her $p\in[0,1]$ için $(R,\boxplus_p,\boxdot_p)$ hiperhalkası üzerinde $(M,\oplus_p,\odot_p)$ nin hipermodül olmasıdır.

Her $p\in[0,1]$ için $(a\circ b)_p$ kümesini biliyorsak buna karşılık sadece tek bir tane $a\circ b$ bulanık kümesi elde ederiz. Gerçektende $(a\circ b)(u)=p$ olması için gerek ve yeter koşul $u\in(a\circ b)_p$ ve $\forall p'>p$ için $u\notin(a\circ b)_{p'}$ olmasıdır.

$(M,\oplus,\odot)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde bir bulanık hipermodül olsun. M üzerindeki yeni tip bazı hiperişlemleri aşağıdaki şekilde tanımlarız:

- $\forall a,b\in M$ için $a+b=\{x\in M | (a\oplus b)(x)>0\}$,
- $\forall \alpha,\beta\in R$ için $\alpha \uplus \beta=\{\gamma\in R | (\alpha\boxplus\beta)(\gamma)>0\}$,

- $\forall x \in M$ ve $\forall \alpha \in R$ için $\alpha \cdot x = \{z \in M | (\alpha \odot x)(z) > 0\}$,

- $\forall \alpha, \beta \in R$ için $\alpha \circ \beta = \{\gamma \in R | (\alpha \boxdot \beta)(\gamma) > 0\}$.

Teorem 4.7 Eğer $(M, \oplus, \odot)$, $(R, \boxplus, \boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde bir bulanık hipermodül ise $(M, +, \cdot)$, $(R, \uplus, \circ)$ hiperhalkası üzerinde bir hipermodüldür.

İspat Bu teoremi ispatlamamız için tanım 2.27 (2) yi sağladığını göstermemiz yeterlidir. Her $x, y \in M$ ve $\alpha \in R$ için

$t \in \alpha(x+y) \Leftrightarrow \exists u \in x+y : t \in \alpha u \Leftrightarrow \exists u \in M : (x \oplus y)(u) > 0$ ve $(\alpha \odot u)(t) > 0$ dir.

Bundan dolayı eğer $t \in \alpha \cdot (x+y)$ ise

$$\begin{aligned} [(\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)](t) &= [\alpha \odot (x \oplus y)](t) \\ &= \vee_{p \in M} (\alpha \odot p)(t) \wedge (x \oplus y)(p) \\ &\geq (\alpha \odot u)(t) \wedge (x \oplus y)(u) \\ &> 0 \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$\bigvee_{p,q \in M} (\alpha \odot x)(p) \wedge (\alpha \odot y)(q) \wedge (p \oplus q)(t) > 0$$

elde ederiz. Böylece $(\alpha \odot x)(p) > 0$, $(\alpha \odot y)(q) > 0$ ve $(p \oplus q)(t) > 0$ olacak şekilde $p, q \in M$ vardır. Buradan $p \in \alpha x$, $q \in \alpha y$ ve $t \in p+q$ elde edilir, bu da $t \in \alpha x + \alpha y$ demektir.

Benzer şekilde tanım 2.7 deki diğer eşitlikler ve teoremin ters ispatı yapılabilir.

Böylece $(M, +, \cdot)$'nın $(R, \uplus, \circ)$ hiperhalkası üzerinde bir hipermodül olduğu gösterilmiş olur.

Tüm hipermodüllerin sınıfını $\mathcal{HM}$, tüm bulanık hipermodüllerin sınıfını $\mathcal{FHM}$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$
\begin{array}{lcl}
\psi : \mathcal{FHM} & \rightarrow & \mathcal{HM} \\
\psi\left((M,\oplus,\odot)\right) & = & (M,+,\cdot)
\end{array}
$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayabiliriz.

Diğer taraftan $(R,\uplus,\circ)$ hiperhalkası üzerinde tanımlı $(M,+,\cdot)$ hipermodülü olsun. Aşağıdaki bulanık hiperişlemleri tanımlayabiliriz:

- $\forall a,b \in M$ için $a \oplus b = \chi_{a+b}$,
- $\forall \alpha,\beta \in R$ için $\alpha \boxplus \beta = \chi_{\alpha \uplus \beta}$,
- $\forall x \in M$ ve $\forall \alpha \in R$ için $\alpha \odot x = \chi_{\alpha \cdot x}$,
- $\forall \alpha,\beta \in R$ için $\alpha \boxdot \beta = \chi_{\alpha \circ \beta}$.

Teorem 4.8 $(M,+,\cdot)$'nın $(R,\uplus,\circ)$ hiperhalkası üzerinde bir hipermodül olsun. Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\oplus,\odot,\boxplus$ ve $\boxdot$ bulanık hiperişlemleri için $(M,\oplus,\odot)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde bir bulanık hipermodüldür.

İspat Bu teoremi ispatlamamız için tanım 4.6 (2) yi sağladığını göstermemiz yeterlidir. Her $x,y \in M$ ve $\alpha \in R$ için $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$ olduğunu gösterelim. Her $t \in M$ için

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha \odot (x \oplus y)\right)(t) &= \bigvee_{r \in M} \left((\alpha \odot r)(t) \wedge (x \oplus y)(r)\right) \\
&= \bigvee_{r \in M} \left(\chi_{\alpha r}(t) \wedge \chi_{x+y}(\mathrm{r})\right) \\
&= \begin{cases} 1 & t \in \alpha x + \alpha y \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
\big((\alpha\odot x)\oplus(\alpha\odot y)\big)(t) &= \bigvee_{p,q\in M}\big((\alpha\odot x)(p)\wedge(\alpha\odot y)(q)\wedge(p\oplus q)(t)\big)\\
&= \bigvee_{p,q\in M}\big(\chi_{\alpha x}(p)\wedge\chi_{\alpha y}(q)\wedge\chi_{p+q}(t)\big)\\
&= \begin{cases}1 & t\in\alpha x+\alpha y\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}
\end{aligned}
$$

$(M,+,\cdot)$ bir hipermodül olduğundan tanım 4.6 (2) (i) yi elde etmiş oluruz.

Benzer şekilde tanım 4.6 (2) de ki diğer özdeşikliklerde gösterilebilir.

Ayrıca eğer R hiperhalkasının birim elemanı varsa $(M,\oplus,\odot)$ bulanık hipermodülüne birimseldir. Böylece $(M,\oplus,\odot)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde bir bulanık hipermodüldür.

Böylelikle tüm bulanık hipermodüllerin sınıfındam yüm hipermodüllerin sınıfına,

$$
\begin{aligned}
\varphi:\mathcal{HM} &\rightarrow \mathcal{FHM}\\
\varphi\big((M,+,\cdot)\big) &= (M,\oplus,\odot)
\end{aligned}
$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlabilir. Böylece bulanık hipermodüller arasında bir homomorfizmadan bahsedebiliriz.

4.3 Bulanık Hipermodül Homomorfizmaları

Tanım 4.8 $(M_1,\oplus_1,\odot_1)$ ve $(M_2,\oplus_2,\odot_2)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde iki bulanık hipermodül olsun. Her $x,y\in M_1$ ve $\alpha\in R$ için $f:M_1\rightarrow M_2$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, f'ye bulanık hipermodül homomorfizması denir:

$f(x\oplus_1 y)\leq f(x)\oplus_2 f(y)$,

$f(\alpha\odot_1 x)\leq\alpha\odot_2 f(x)$.

Bundan sonraki iki teoremde bulanık hipermodül homomorfizmaları ile hipermodül homomorfizmaları arasındaki bağlantıyı göstereceğiz.

Teorem 4.9 $(M_1,\oplus_1,\odot_1)$ ve $(M_2,\oplus_2,\odot_2)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde iki bulanık hipermodül ve $(M_1,+_1,\cdot_1)$ ve $(M_2,+_2,\cdot_2)$, $(R,\uplus,\circ)$ hiperhalkası üzerinde iki hipermodül olsun. $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkasından $(R,\uplus,\circ)$ hiperhalkasına $\psi\left((R,\boxplus,\boxdot)\right)=(R,\uplus,\circ)$ olacak şekilde bir dönüşüm tanımlayalım. Buna bağlı olarak $\psi\left((M_1,\oplus_1,\odot_1)\right)=(M_1,+_1,\cdot_1)$ ve $\psi\left((M_2,\oplus_2,\odot_2)\right)=(M_2,+_2,\cdot_2)$ olsun. Eğer $f:M_1\to M_2$ bir bulanık hipermodül homomorfizması ise f bir hipermodül homomorfizmasıdır.

İspat Her $x,y\in M_1$ ve $\alpha\in R$ için

$$f(x\oplus_1 y)\le f(x)\oplus_2 f(y) ,$$

$$f(\alpha\odot_1 x)\le \alpha\odot_2 f(x)$$

dir. $u\in\alpha\cdot_1 x$ olsun bu durumda $(\alpha\cdot_1 x)(\mathrm{u})>0$ dir. $f(u)=v$ ile gösterelim. Böylece

$$\left(f(\alpha\odot_1 x)\right)(v)=\vee_{s\in f^{-1}(v)}(\alpha\odot_1 x)(s)\ge(\alpha\odot_1 x)(u)>0$$

elde ederiz. Bundan dolayı $\left(\alpha\odot_2 f(x)\right)(v)>0$ dir. Böylece $v\in\alpha\cdot_2 f(x)$ elde edilir. Bu da $f(\alpha\cdot_1 x)\subseteq\alpha\cdot_2 f(x)$ demektir. Benzer şekilde $f(x\oplus_1 y)\subseteq f(x)+_2 f(y)$ olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 4.10 $(M_1,+_1,\cdot_1)$ ve $(M_2,+_2,\cdot_2)$, $(R,\uplus,\circ)$ hiperhalkası üzerinde iki hipermodül ve $(M_1,\oplus_1,\odot_1)$ ve $(M_2,\oplus_2,\odot_2)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde iki bulanık hipermodül olsun. $(R,\uplus,\circ)$ hiperhalkasından $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkasına $\varphi\left((R,\uplus,\circ)\right)=(R,\boxplus,\boxdot)$ olacak şekilde bir dönüşüm tanımlayalım. Buna bağlı olarak $\varphi\left((M_1,+_1,\cdot_1)\right)=(M_1,\oplus_1,\odot_1)$ ve $\varphi\left((M_2,+_2,\cdot_2)\right)=(M_2,\oplus_2,\odot_2)$ olsun. $f:M_1\to M_2$ 'nin bir hipermodül homomorfizması olması için gerek ve yeter koşul f 'nin bir bulanık hipermodül homomorfizması olmasıdır.

İspat "$\Rightarrow$" f bir hipermodül homomorfizması olduğunu varsayalım ve f 'nin bir bulanık hipermodül homomorfizması olduğunu gösterlim.

$x\in M_1$, $\alpha\in R$ olsun. Her $t\in\operatorname{Im} f$ için,

$$\begin{aligned}
\left(f\left(\alpha \odot_1 x\right)\right)(t) &= \bigvee_{r\in f^{-1}(t)} \left(\alpha \odot_1 x\right)(r) \\
&= \bigvee_{r\in f^{-1}(t)} \chi_{\alpha \cdot_1 x}(\mathrm{r}) \\
&= \begin{cases} 1 & f^{-1}(t)\cap \alpha \cdot_1 x \neq \varnothing \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & t\in f\left(\alpha \cdot_1 x\right) \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\
&= \chi_{f(\alpha \cdot_1 x)}(t) \leq \chi_{\alpha \cdot_2 f(x)}(t) = \alpha \odot_2 f\left(x\right)(t)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Eğer $t \notin \operatorname{Im} f$ ise $\left(f\left(\alpha \odot_1 x\right)\right)(t) = 0 \leq \left(\alpha \odot_2 f\left(x\right)\right)(t)$ olur. Böylece $f\left(\alpha \odot_1 x\right) \leq \alpha \odot_2 f\left(x\right)$ eld edilir.

Benzer şekilde her $x, y \in M$ için $f\left(x \oplus_1 y\right) \leq f\left(x\right) \oplus_2 f\left(y\right)$ olduğu gösterilir.

“$\Leftarrow$” Şimdi de f ’nin bir bulanık hipermodül homomorfizması olduğunu kabul edip, f ’nin bir hipermodül homomorfizması olduğunu gösterlim.

$x, y \in M_1$, $\alpha \in R$ için,

$$f\left(x \oplus_1 y\right) \leq f\left(x\right) \oplus_2 f\left(y\right) ,$$

$$f\left(\alpha \odot_1 x\right) \leq \alpha \odot_2 f\left(x\right)$$

dir. Buradan

$$\chi_{f(x+_1 y)} \leq \chi_{f(x)+_2 f(y)} ,$$

$$\chi_{f(\alpha \cdot_1 x)} \leq \chi_{\alpha \cdot_2 f(x)}$$

elde edilir. Bu da her $x, y \in M_1$, $\alpha \in R$ için,

$$f\left(x +_1 y\right) \subseteq f\left(x\right) +_2 f\left(y\right),$$

$$f\left(\alpha \cdot_1 x\right) \subseteq \alpha \cdot_2 f\left(x\right)$$

demektir.

Tanım 4.9 $(M,\oplus,\odot)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde bulanık hipermodül ve M', M'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $x,y\in M'$ ve $\alpha\in R$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa M''ne M'nin bir bulanık alt hipermodülü denir:

(1) $(x\oplus y)(t)>0$ ise $t\in M'$ dür,

(2) $x\oplus M'=\chi_{M'}$ dir,

(3) $(\alpha\odot x)(t)>0$ ise $t\in M'$ dür.

Aşağıdaki iki teoremde bulanık alt hipermodüller ile alt hipermodüller arasındaki bağlantıyı göstereceğiz.

Teorem 4.11 $(M',\oplus,\odot)$, $(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde tanımlı $(M,\oplus,\odot)$ bulanık hipermodülünün bir bulanık alt hipermodülü olsun. $\psi((R,\boxplus,\boxdot))=(R,\uplus,\circ)$ hiperhalkası üzerinde tanımlı $\psi((M,\oplus,\odot))=(M,+,\cdot)$ hiper modülü için $\psi((M',\oplus,\odot))=(M',+,\cdot)$ bir alt hipermodüldür.

Teorem 4.12 $(M',+,\cdot)$, $(R,\uplus,\circ)$ hiperhalkası üzerinde tanımlı $(M,+,\cdot)$ hipermodülünün bir alt hipermodülü olması için gerek ve yeter koşul $\varphi((M',+,\cdot))=(M',\oplus,\odot)$'nin $\varphi((R,\uplus,\circ))=(R,\boxplus,\boxdot)$ bulanık hiperhalkası üzerinde tanımlı $\varphi((M,+,\cdot))=(M,\oplus,\odot)$ bulanık hipermodülünün bir bulanık alt hipermodülü olmasıdır.

BÖLÜM 5

SONUÇ

Bulanık küme kavramı yardımıyla tanımlanan bulanık fonksiyon, bulanık ikili işlem gibi bulanık yapılar, klasik cebir teorisinde yer alan grup, halka, cisim gibi cebirsel yapıları bulanık bir yapıya taşımaktadır. Böylece klasik grup teorisinde bilinen temel kavramlar bulanık mantıkta; bulanık grup, bulanık alt grup, bulanık normal alt grup, bulanık bölüm grubu, bulanık grup homomorfizmaları olarak tanımlanır. Klasik halka teorisinde ise bulanık halka, bulanık alt halka, bulanık ideal, bulanık bölüm halkası, bulanık halka homomorfizmaları vb. bulanık yapılar, bulanık grup ve halka teorisi kapsamında tanımlanır.

Bu çalışmada, ilk olarak bulanık mantık kavramı tanıtılarak, cebir teorisinde bulanık cebirsel yapılar detaylarıyla incelenmiştir. Bulanık cebir teorisindeki bulanık cebirsel yapılar ile klasik cebirde yer alan klasik cebirsel yapıların benzer özellikler taşıdığı gözlemlenmiştir. Bir bakıma, klasik cebir teorisi genelleştirilerek, bulanık mantık adı verilen farklı bir mantık sistemi üzerine inşa edilen yeni cebirsel yapılarda da aynı cebirsel özelliklerin korunduğu söylenebilmektedir.

Bu bağlamda klasik cebirde önemli bir yere sahip hipermodül kavramının bulanık cebirdeki karşılığı incelenmiştir ve aralarında bağıntının ne derece önemli olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L. A., (1965). “Fuzzy sets”, Inform. Control, 8:353-383.

[2] Rosenfeld, A., (1971). “Fuzzy groups”, J. Math. Anal. Appl., 35:512-517.

[3] Liu, W., (1982). “Fuzzy Invariant subgroups and fuzzy ideals”, Fuzzy sets and systems, 8:133-139.

[4] Yue Z., Prime L-fuzzy ideals and primary L-fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 27 (1988), 345-350.

[5] Mukherjee, T. K. and Sen, M. K., On fuzzy ideals of a ring I, Fuzzy Sets and Systems 21 (1987), 99-104.

[6] Dixit, V. N., Kumar R. and Ajmal N., On fuzzy rings, Fuzzy Sets and Systems 49 (1992), 205-213.

[7] P. Corsini, Prolegomena of Hypergroup Theory, Aviani Editore, Italy, 1993.

[8] P. Corsini, V. Leoreanu, Applications of Hyperstructure Theory, in: Advances in Mathematics, vol. 5, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[9] Th. Vogiouklis, Fundamental relations in hyperstructure, Bull. Greek Math. Soc. 42(1999)113-118.

[10] Vougiouklis Th., (1999). Fundamental relations in hyperstructures, Bull. Greek Math. Soc. 42: 113-118.

[11] Malik, D.S. ve Morderson, J., (1998). “Fuzzy Commutative Algebra”, World Scientific Co. Pte. Ltd, Singapore.

[12] Negoita, C.V. ve Ralescu, D.A., (1975). “Application of fuzzy systemsanalysis”, Birkhauser, Basel.

[13] Makambra, B.B. ve Muralı, V., (2000). On Fuzzy Prime Submodules and radicals, J. Fuzzy math., 8(4):831-843.

[14] V. Leoreanu-Fotea, B. Davvaz, Fuzzy hyperrings (submitted for publication).

[15] Mordeson, J. N., Malik, M. S., (1998). "Fuzzy Commutative Algebra", Word Publ.

[16] Sen, M. K., Ameri, R., Chowdhury, G., (2007). "Fuzzy hypersemigroups", Soft Comput., 35:512-517.

[17] Davvaz, B., Fotea, V. L., (2009). "Fuzzy hyperrings", Fuzzy Sets Syst., 160:2366-2378.

[18] Davvaz, B., (1999). "Fuzzy H_v-groups", Fuzzy Sets Syst., 101:191-195.

[19] Davvaz, B., (2001). "Fuzzy H_v submodules", Fuzzy Sets Syst., 117:477-484.

[20] Fotea, V. L., (2009). "Fuzzy hypermodules", Computers and Mathematics with Applications, 57:466-475.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ömer Faruk KOÇ

Doğum Tarihi ve Yeri : 10.12.1984 Bakırköy

Yabancı Dili : İngilizce, Fransızca

E-posta : ffarukkoc@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	YTÜ	
Lisans	Matematik	YTÜ	2007
Lise	Fen - Matematik	Adile Mermerci Anadolu Lisesi	2002

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2012-Devam ediyor	NicEye Group Ltd. Sti.	Proje Yöneticisi
2007 - 2008	Haliç Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2006 - 2008	Vakıfbank	Otorizasyon ve Risk Sorumlusu
2003	Devlet Istatistik Enstitüsü	Anketör