

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DEĞİŞMELİ OLMAYAN DERECELİ UZAYLAR ÜZERİNDE KONNEKSİYONLAR

HALİL İBRAHİM YOLDAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
YRD.DOÇ.DR. MUTTALİP ÖZAVŞAR**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DEĞİŞMELİ OLMAYAN DERECELİ UZAYLAR ÜZERİNDE KONNEKSİYONLAR

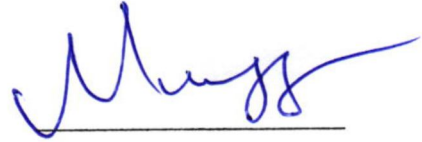
Halil İbrahim YOLDAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 18/08/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Muttalip Özavşar
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

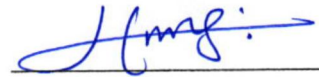
Yrd. Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR
Yıldız Teknik Üniversitesi



Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi



Yrd. Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN
İstanbul Üniversitesi



ÖNSÖZ

Tezin hazırlanması ve çalışılması aşamasında her zaman yanımda olan ve bana bu konuda yol gösteren değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Muttalıp ÖZAVŞAR'a ve bu zorlu süreçte desteğini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma en içten şükranlarımı sunarım.

Ağustos, 2014

Halil İbrahim YOLDAŞ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	viii
ABSTRACT	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez.....	2
BÖLÜM 2	
CEBİRSEL TANIMLAR.....	3
2.1 Cebirsel Kapalı Cisim ve Afin Uzay	3
2.2 Cebirle ilgili Bazı Temel Tanımlar ve Örnekler	4
2.3 Tensör Uzayı, Lie Cebiri, Modül ve Kısa Tam Dizi Kavramları	7
BÖLÜM 3	
DERECELİ CEBİRSEL YAPILAR	17
3.1 Dereceli Cebirsel Yapılar	17
BÖLÜM 4	
LİE SÜPER CEBİR	32
4.1 Lie Süper Cebirin Tanımı ve Özellikleri	32
BÖLÜM 5	
$\mathcal{E}$ -TÜREVLERE BAĞLI OLAN DEĞİŞMELİ OLMAYAN GEOMETRİ	42
5.1 Değiştirme Çarpanları.....	42

5.2	Schur arpanları	50
5.3	Değiştirme arpanları ile arpan Kümeleri Arasındaki İlişki	52
5.4	ε -Dereceli Birleşmeli Cebirler	56
5.5	Diferansiyel Hesap.....	69
5.6	ε -Konneksiyonlar	76
BÖLÜM 6		
SONUÇ ve ÖNERİLER		82
KAYNAKLAR		83
ÖZGEÇMİş		85

SİMGE LİSTESİ

$GL(n, F)$	Elemanları F cisminden alınan $n \times n$ tipindeki bütün terslenebilir matrislerin kümesi
$Z(V)$	V cebirinin merkezi
$Z_V(S)$	V cebirinin S merkezleştiricisi
$L(V_1, \dots, V_r; \mathbb{R})$	$V_1 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye bütün r -lineer fonksiyonların kümesi
$T^r(V)$	r ' nci dereceden kovaryant tensör uzayı
$T^s(V^*)$	s ' nci dereceden kontravaryant tensör uzayı
$O(n, \mathbb{C})$	Ortogonal Lie cebiri
$Hom_R(M, N)$	M den N ye bütün R -homomorfizmalarının kümesi
$End_R(M)$	M den M ye bütün R -homomorfizmalarının kümesi
Γ	Değişmeli bir grup
$ v $	$v \in V$ elemanının derecesi
$W \otimes W'$	Γ -dereceli W ve W' vektör uzaylarının tensör çarpımı
$A \bar{\otimes} B$	Γ -dereceli A ve B cebirlerinin dereceli tensör çarpımı
$EndV$	V den V ye bütün lineer dönüşümlerin kümesi
$F \oplus F\varepsilon$	Dual sayılar kümesi
$gl(m n)$	$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ formundaki bütün blok matrislerinin oluşturduğu $(m+n) \times (m+n)$ tipindeki matrislerin kümesi
$gl(m n)_0$	Çift matrisler
$gl(m n)_1$	Tek matrisler
$StrX$	X Blok matrisinin süper izi
$Z(A)$	A Lie süper cebirinin merkezi
$C_A(S)$	A Lie süper cebirinin S merkezleştiricisi
$sl(m n)$	Özel lineer Lie süper cebiri
$gl(V)$	V nin genel lineer Lie süper cebiri
$Der(A)$	A Lie süper cebirinin bütün türevlerinin uzayı

ad	Adjoint operatörü
ε	Değiştirme çarpanı
$Aut(\Gamma)$	Γ grubunun otomorfizması
Ψ_ε	ε Değiştirme çarpanının işaret fonksiyonu
$s(\varepsilon)$	ε Değiştirme çarpanının işaret çarpanı
σ	Çarpan kümesi
M_Γ	Γ nın çarpan grubu
$f^*\sigma$	f Otomorfizmasının geri çekilmesi
$[\cdot]_\varepsilon$	ε Lie braketi
$(g^\bullet, [\cdot]_\varepsilon)$	$g^\bullet$, ε -Lie cebiri
$A_\varepsilon^\bullet$ veya $A^\bullet$	ε -dereceli birleşmeli cebir
$Z_\varepsilon^\bullet(A)$	$A_\varepsilon^\bullet$ cebirinin ε -merkezi
$(A \otimes B)_\varepsilon^\bullet$	$A_\varepsilon^\bullet$ ve $B_\varepsilon^\bullet$ nin ε -dereceli tensör çarpımı
T	ε -iz
$Hom_A^\bullet(M, M)$	$M^\bullet$ nin homomorfizmalarının uzayı
$Der_\varepsilon^\bullet(A)$	$A_\varepsilon^\bullet$ cebiri üzerindeki bütün ε -türevlerinin uzayı
$Inn_\varepsilon^\bullet(A)$	$A_\varepsilon^\bullet$ cebiri üzerindeki bütün iç ε -türevlerinin uzayı
$Out_\varepsilon^\bullet(A)$	$A_\varepsilon^\bullet$ cebiri üzerindeki bütün dış ε -türevlerinin uzayı
$U(A^*)$	$A_\varepsilon^\bullet$ nin üniter grubu
$\underline{\Omega}_{Der}^n(A)$	Türeve bağlı diferansiyel hesap
$\underline{\Omega}_\varepsilon^{n,k}(A, M)$	ε -türeve bağlı diferansiyel hesap
$\tilde{\Gamma}$	$\mathbb{Z} \times \Gamma$ değişmeli grubu
d	Diferansiyel operatörü
$\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A g)$	$g^\bullet$ ye ait sınırlı diferansiyel hesapsı
∇	ε -konneksiyon
$R = \nabla^2$	ε -konneksiyonu ile ilişkili eğrilik
Φ	Gauge dönüşümü
$Aut_A^0(M, M)$	$M^\bullet$ nin sıfır dereceli grup otomorfizmaları

DEĞİŞMELİ OLMAYAN DERECELİ UZAYLAR ÜZERİNDE KONNEKSİYONLAR

Halil İbrahim YOLDAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

Bu tezde klasik cebir ve diferansiyel geometrideki bazı ortak kavramlar değişmeli olmayan dereceli uzaylarda incelenmiştir. Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin literatür özeti ve amacı verilmiştir. İkinci bölümde cebirsel temel tanımlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde dereceli cebirsel yapılara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde Lie süper cebir tanımından ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Beşinci bölümde değiştirme çarpanı, Schur çarpanı ve bunlar arasındaki ilişki açıklanmıştır. Ayrıca ε -dereceli cebirsel yapılarla ilgili tanımlar verilmiş ve bazı teoremler, lemmalar ispatlanmıştır. Bundan sonra ε -türeve bağlı diferansiyel hesabı ve ε -konneksiyonlar incelenmiştir. Son bölümde ise sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cebir, Dereceli vektör uzayı, Dereceli cebir, Süper cebir, Lie süper cebir, Değiştirme çarpanı, ε -dereceli cebir, ε -dereceli Lie cebir, ε -konneksiyon, ε -türeve bağlı diferansiyel hesap

CONNECTIONS ON NONCOMMUTATIVE GRADED SPACES

Halil İbrahim YOLDAŞ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Asst. Prof. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

In this thesis some common concepts of classical algebra and differential geometry are analyzed within the context of the noncommutative graded spaces. This study consists of six parts. In the first part, the literature and the aim of thesis are given. In the second part, algebraic basic definitions are mentioned. In the third part, graded algebraic structures are given. In the fourth part, the definition and the properties of Lie super algebra are discussed. In the fifth part, commutation factor, Schur multiplier and the relationship between them is discussed. Moreover, the definitions about ε -graded algebraic structures are given and some theorems, lemmas have been proved. In addition, the differential calculus based on ε -derivations and ε -connections have been studied. Finally, conclusions and recommendations are discussed.

Keywords: Algebra, Graded vector spaces, Graded algebra, Superalgebra, Lie superalgebra, Commutation factor, ε -graded algebra, ε -graded Lie algebra, ε -connections, differential calculus based on ε -derivations

1.1 Literatür Özeti

Değişmeli olmayan geometri, kabaca değişmeli olmayan cebirler üzerinde yapılan geometri çalışmalarıyla ilgilidir. Yani, bir M manifoldu ve bu manifolda karşılık gelen sürekli fonksiyonların cebiri yerine değişmeli olmayan C^* -cebirleri ve onlara karşılık gelen değişmeli olmayan manifoldlar ele alınır. Değişmeli olmayan geometri ile ilgili ilk çalışmayı 1925 yılında Heisenberg yapmıştır [1]. Heisenberg'in çalışmasından sonra, Dirac ve Born-Heisenberg-Jordan Hilbert uzayı üzerinde bir takım çalışmalar yürütmüştür [2],[3]. Bu gelişmelerden sonra Connes, değişmeli olmayan geometrinin cebirle olan ilişkisini sayı teorisi yönünden incelemiştir [4].

Değişmeli olmayan geometri; matematikte ölçüm uzayı, operatör cebir teorisi [5], diferansiyel topoloji ve sayı teorisi gibi alanlarla fizikte de parçacık fiziği, quantum fiziği gibi alanlarla etkileşim halindedir. Örneğin, Spektral üçlü yaklaşım yöntemi değişmeli olmayan geometrinin temel paradigmalarından bir tanesidir [6]. Bu yaklaşımla birlikte değişmeli olmayan diferansiyel hesap tanımlanmıştır ve günümüzde de çokça kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemin dışında, birleşmeli bir cebirin türevine bağlı diferansiyel hesap tanımından yararlanılarak değişmeli olmayan diferansiyel hesap tanımı yapılmıştır [7].

Değişmeli olmayan geometrinin dereceli cebirlerle ilişkisi de süper manifold ve dereceli Lie cebir teorileri ile başlamıştır. Son zamanlarda dereceli birleşmeli cebirler ile ilgili, özellikle de dereceli matris cebirleri alanında çok çalışmalar yapıldı [8]. Dereceli

cebirlerle ilgili çalışmalarda öncelikle $\mathbb{Z}$ ya da $\mathbb{Z}_2$ -derecelendirmesi ele alınıp sonradan bunun daha genel hali olan Γ -derecelendirme (Γ , değişmeli bir grup) yapısı var olmuştur. Bu olaydan sonra $\mathbb{Z}$ -dereceli Lie cebirlerini tanımlamak için çalışmalar yürütüldü ama bunun için toplamsal bir yapı tanımlanmalıydı. Bu durum da değiştirme çarpanının tanımını doğurdu [9],[10].

Bu çalışmalar ışığında değişmeli olmayan geometrinin, değişmeli olmayan uzaylar ile bağlantısı da ortaya çıktı. Değiştirme çarpanı ε olmak üzere, ε -dereceli birleşmeli cebir kavramı, ε -Lie cebir tanımı ve buna bağlı olarak ε -türeve bağlı olan diferansiyel hesap tanımlandı. Bu çalışmalarla birlikte ε -türeve bağlı olan diferansiyel hesap yapısına bağlı olarak da ε -konneksiyon yapısı kuruldu. Bu çalışmada, anlatılan bu yapılar ile ilgili araştırma ve inceleme yaptık.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez, klasik anlamda değişmeli olmayan ama ε -değişmeli olan cebirler üzerindeki bazı geometrik kavramların ve yapıların incelenmesi amacıyla hazırlanmıştır.

1.3 Hipotez

Lie cebir konusu uzun zamandan beri çalışılan bir alandır. Son zamanlarda bu alan ile ilgili bir çok çalışmalar yapılmıştır. Biz de bu tezde dereceli uzaylar, Lie süper cebir ve ε -değişmeli olan cebirler üzerindeki bazı geometrik kavram ve yapıları inceledik. Bu çalışma, bu alanlarda çalışmayı düşünen veya bu alanlarda çalışacak öğrenci arkadaşlar için bir ön ayak olacaktır.

BÖLÜM 2

CEBİRSEL TANIMLAR

2.1 Cebirsel Kapalı Cisim ve Afin Uzay

Tanım 2.1: F bir cisim olsun. $F[x] = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $i = 1, \dots, n$; $a_i \in F$

polinom halkası verilsin. Eğer $F[x]$ deki her bir polinomun bütün kökleri F cisminin içinde kalıyorsa o zaman F cismine *cebirsel kapalı bir cisim* denir [11].

Örnek 2.1: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi cebirsel kapalı bir cisim değildir. Çünkü örnek olarak $x^2 + 1 = 0$ polinom denklemini aldığımızda polinom denkleminin kökleri $x_{1,2} = i \notin \mathbb{R}$ dir. Ama aynı polinom denklemini $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi için aldığımızda denklemin kökleri $x_{1,2} = i \in \mathbb{C}$ olur. Dolayısıyla $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi cebirsel kapalı bir cisimdir.

Tanım 2.2: A , boş olmayan bir küme ve V , n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bu durumda $f: A \times A \rightarrow V$ dönüşümü verilsin. Eğer

- i) $\forall P, Q, R \in A$ için, $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$,
- ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $f(P, Q) = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır.

şartları sağlanıyorsa A ya V ile birleşen bir *afin uzay* denir [12].

Örnek 2.2: $A = \mathbb{R}^n$ ve $V = ((\mathbb{R}^n, \oplus), (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot)$ olarak verilsin. f dönüşümünü,

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda f dönüşümü afin uzayı aksiyomlarını sağlar.

Gerçekten de $\forall P, Q, R \in A$ için,

$$f(P, Q) + f(Q, R) = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = f(P, R)$$

olduğu görülür. Ayrıca $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için,

$$f(P, Q) = \vec{\alpha} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

olarak yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} &= (q_1, q_2, \dots, q_n) - (p_1, p_2, \dots, p_n) \\ &= (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \dots, q_n - p_n) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O zaman, $1 \leq i \leq n$ için $q_i - p_i = \alpha_i \Rightarrow q_i = \alpha_i + p_i$ olacak şekilde q_i ler vardır. Dolayısıyla bir tek $Q \in A$ vardır. Böylece $A = \mathbb{R}^n$, kümesi $V = \mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir afin uzayıdır.

2.2 Cebirle ilgili Bazı Temel Tanımlar ve Örnekler

Tanım 2.3: F , bir cisim ve V , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan çarpma işlemi,

$$\begin{aligned} \cdot : V \times V &\rightarrow V \\ (x, y) &\rightarrow xy \end{aligned}$$

$$i) \quad \forall x, y \in V \text{ ve } \forall \lambda \in F \text{ için } (\lambda x)y = \lambda(xy)$$

$$ii) \quad \forall x, y, z \in V \text{ için } (x+y)z = xz + yz \text{ ve } x(y+z) = xy + xz$$

özelliklerini sağlıyorsa V vektör uzayına (F cismi üzerinde) bir *cebir* adı verilir [13].

Örnek 2.3: $\mathbb{C}$ kompleks vektör uzayı, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir cebirdir. Ayrıca F cisminin alt cismi olduğu her K cismi de F üzerinde bir cebirdir

Tanım 2.4: V , bir cebir olsun. Eğer $\forall x, y \in V$ için,

$$xy = yx$$

koşulu sağlanıyorsa V ye bir *değişmeli cebir* adı verilir [13].

Tanım 2.5: V , bir cebir olsun. Eğer $\forall x, y, z \in V$ için,

$$x(yz) = (xy)z$$

koşulu sağlanıyorsa V ye bir *birleşmeli cebir* adı verilir [13].

Eğer $\forall x \in V$ için, $xe = ex = x$ koşulunu sağlayan bir $e \in V$ birim elemanı varsa bu V cebirine *birimli cebir* adı verilir [13].

Örnek 2.4: $GL(n, F)$, elemanları F cisminden alınan $n \times n$ tipindeki bütün terslenebilir matrislerin kümesi olarak gösterelim. Bu küme F üzerinde bir cebirdir ve çarpımı da birleşmeli olduğundan birleşmeli bir cebirdir. Ayrıca $n \times n$ tipindeki I_n birim matrisi de $GL(n, F)$ cebirine ait olduğundan $GL(n, F)$, aynı zamanda bir birimli cebirdir.

Not 2.1: F , bir cisim V , F cismi üzerinde bir cebir olsun. V cebirinin birim elemanı her zaman olmayabilir. Fakat F cisminde skaler olan birim eleman olmak zorundadır.

Tanım 2.6: V ve W , F cismi üzerinde iki cebir olsun. Eğer $\forall x, y \in V$ için, $\varphi: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü,

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

koşulunu gerçekleştiriyorsa φ ye bir *cebir homomorfizması* adı verilir [13].

Eğer φ homomorfizması, 1-1 ve örten ise o zaman bu homomorfizma bir *cebir izomorfizması* adını alır.

Tanım 2.7: V , F cismi üzerinde bir cebir olsun. W , V nin boştan farklı bir alt vektör uzayı olsun. Eğer $\forall x, y \in W$ için $xy \in W$ oluyorsa W alt vektör uzayına V nin bir *alt cebiri* denir [13].

Örnek 2.5: $\mathbb{R}$ vektör uzayları kümesi ve $\mathbb{C}$ vektör uzayları kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde cebirdirler. $\mathbb{R}$ reel sayılar cebiri, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cebirinin alt cebiridir.

Örnek 2.6: $\mathbb{R}_2^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in \mathbb{R}, i = j = 1, 2 \right\}$ 2×2 tipindeki bütün terslenebilir matrislerin kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir cebirdir. Ayrıca $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ şeklindeki bütün matrislerin kümesi, $\mathbb{R}_2^2$ nin bir alt cebirini oluşturur.

Tanım 2.8: V, F cismi üzerinde bir cebir ve I, V nin boştan farklı bir alt vektör uzayı olsun. $\forall x \in V$ ve $a \in I$ olmak üzere $xa \in I$ oluyorsa I alt vektör uzayına V nin bir *sol ideali*, $ax \in I$ oluyorsa I alt vektör uzayına V nin bir *sağ ideali* denir [13].

Eğer V değişmeli ise bu durumda I alt vektör uzayına V nin bir *(cebirsal) ideali* denir [13].

Örnek 2.7: V birleşmeli bir cebir olmak üzere V nin bir x elemanını göz önüne alalım.

$$N_x = \{a \in V : xa = 0\}$$

ile tanımlanan küme, V nin bir sağ idealidir. Şimdi bunun doğru olduğunu gösterelim. $\forall b \in V$ ve $a \in N_x$ için $ab \in N_x$ olduğunu göstereceğiz. V birleşmeli bir cebir olduğundan olarak yazılır. $x(ab) = \underbrace{(xa)}_0 b = 0.b = 0$ dır. Buradan $ab \in N_x$ olduğu görülüyor.

Tanım 2.9: V, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer I, V nin boştan farklı bir alt vektör uzayı ve I , aynı zamanda V nin bir ideali ise o zaman V/I kümesi,

$$V/I = \{a + I \mid a \in V\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu küme üzerinde $+$ ve $\bullet$, ikili işlemleri $\forall a + I, b + I \in V/I$ ve $\forall \lambda \in F$ için,

$$+ : V/I \times V/I \rightarrow V/I \quad (a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

$$\cdot: F \times V/I \rightarrow V/I \quad \lambda \cdot (a + I) \rightarrow (\lambda \cdot a) + I$$

şeklinde tanımlansın. Tanımlanan bu iki işlem ile birlikte V/I kümesi, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya V nin I idealine göre *bölüm vektör uzayı* adı verilir. Bu vektör uzayı üzerinde,

$$\cdot: V/I \times V/I \rightarrow V/I \quad (a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$$

şeklinde bir çarpma işlemi tanımlandığında o zaman V/I vektör uzayı, F cismi üzerinde bir cebirdir. Bu cebire V nin I idealine göre *bölüm cebiri* denir [13].

Tanım 2.10: V , F cismi üzerinde bir cebir olsun. V cebirinin *merkezi*,

$$Z(V) = \{a \in V \mid ab = ba, \forall b \in V\}$$

olarak tanımlanır [12]. $Z(V)$ nin V nin bir alt cebiri olduğu aşikardır.

Tanım 2.11: V , F cismi üzerinde bir cebir olsun. $\emptyset \neq S \subset V$ için,

$$Z_V(S) = \{a \in V \mid ab = ba, \forall b \in S\}$$

ile tanımlanan kümeye V nin S *merkezleştiricisi* denir [12].

2.3 Tensör Uzayı, Lie Cebiri, Modül ve Kısa Tam Dizi Kavramları

Tanım 2.12: $i = 1, 2, \dots, r$ olmak üzere V_i , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde birer vektör uzayları olsun.

$$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \rightarrow f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

dönüşümü $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için,

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_i + \mu \beta_i, \dots, \alpha_r) = \lambda f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) + \mu f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_r)$$

eşitliği sağlanıyorsa f ye i ' nci yere göre *lineerdir* denir [14].

Her $i=1,2,\dots,r$ için f lineer olursa, f ye r -lineer fonksiyon adı verilir. Özel olarak $r=2$ aldığımızda, o zaman f ye *bilineer fonksiyon* denir [14]. $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye bütün r -lineer fonksiyonların kümesi $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$ ile gösterilir. O zaman,

$$L = \{f \mid f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R} \text{ } f, r\text{-lineer}\}$$

olarak yazılır.

$L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$ kümesi için toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlansın. $\forall f, g \in L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$ ve $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ için,

$$(f + g)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) + g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(\lambda f)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \lambda f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r).$$

Tanımlanan bu iki işlem ile birlikte $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya *tensör uzayı*, uzayın her bir elemanına da r' nci dereceden *tensör* adı verilir [14]. $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ ile gösterilir.

Tanım 2.13: V , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $L(V, \dots, V; \mathbb{R}) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r \text{ tane}}$ tensör uzayına *kovaryant tensör* uzayı denir. Bu uzay,

$T^r(V)$ ile gösterilir ve bu uzayın her bir elemanına da r' nci dereceden *kovaryant tensör* denir [14].

Örnek 2.8: V , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşümü 1.dereceden kovaryant tensördür. Yani V^* dual uzayının elemanları, 1.dereceden kovaryant tensördür.

Tanım 2.14: $L(V, \dots, V; \mathbb{R}) = V^* \otimes \dots \otimes V^*$ kovaryant tensör uzayı verilsin. Bu uzayda V vektör uzayı yerine V^* dual uzayını alırsak, $L(V^*, \dots, V^*; \mathbb{R}) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{s \text{ tane}}$ tensör uzayı

elde edilir. Elde edilen bu uzaya *kontravaryant tensör* uzayı, bu uzayın her bir

elemanına da s' nci dereceden kontravaryant tensör adı verilir [14]. Bu uzay $T^s(V^*)$ ile gösterilir.

Örnek 2.9: $T^1(V^*) = V = \{f : V^* \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$ olarak yazılabileceğinden V vektör uzayının elemanları, 1.dereceden kontravaryant tensördür.

Tanım 2.15: $T^r(V)$ ve $T^s(V)$ tensör uzayları verilsin. $f \in T^r(V)$ ve $g \in T^s(V)$ tensörlerinin tensörel çarpımı, $f \otimes g$ ile gösterilir. Bu iki tensörün tensörel çarpımı $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ tane}} \text{ ve } \forall (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ tane}}$ olmak üzere,

$$(f \otimes g)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot g(\beta_1, \dots, \beta_s)$$

şeklinde tanımlanır [14]. Şimdi tensörel çarpımın bazı özelliklerini vereceğiz:

- i) $(f_1 + f_2) \otimes f_3 = (f_1 \otimes f_3) + (f_2 \otimes f_3)$
- ii) $f_1 \otimes (f_2 + f_3) = (f_1 \otimes f_2) + (f_1 \otimes f_3)$
- iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } (\lambda f) \otimes g = f \otimes (\lambda g) = \lambda (f \otimes g)$
- iv) $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)$

Tanım 2.16: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$[,]: V \times V \rightarrow V$$

dönüşümü $\forall x, y, z \in V$ ve $\alpha, \beta \in F$ için,

- 1) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha [x, z] + \beta [y, z]$ ve $[x, \alpha y + \beta z] = \alpha [x, y] + \beta [x, z]$
- 2) $[x, y] = -[y, x]$
- 3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

özellikleri sağlanıyorsa $[,]$ operatörüne *Lie operatörü*, üzerine tanımlı olduğu vektör uzayına da *Lie cebiri* denir [15]. Burada 1) özelliğine *bilineer*, 2) özelliğine *alterne*, 3) özelliğine de *Jacobi özdeşliği* adı verilir. Ayrıca Jacobi özdeşliğinden dolayı, Lie cebirleri birleşmeli değildir. Şimdi bunun doğruluğunu yani $\forall x, y, z \in V$ için,

$[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$ olduğunu göstereceğiz. O zaman, $\forall x, y, z \in V$ için Jacobi özdeşliğini yazalım.

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Buradan,

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] \\ &= [[z, x], y] + [[x, y], z] \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$ dir.

Örnek 2.10: V, F cismi üzerinde bir cebir olsun. $\forall x, y \in V$ için, $[,]: V \times V \rightarrow V$ dönüşümü

$$[x, y] = xy - yx$$

ile tanımlandığında V , bir Lie cebiri olur ve V_L olarak adlandırılır [16]. Şimdi Lie cebir koşullarının sağlandığını gösterelim.

1) $\forall x, y, z \in V$ ve $\alpha, \beta \in F$ için,

$$\begin{aligned} [\alpha x + \beta y, z] &= (\alpha x + \beta y)z - z(\alpha x + \beta y) \\ &= (\alpha x)z + (\beta y)z - z(\alpha x) - z(\beta y) \\ &= \alpha(xz) + \beta(yz) - \alpha(zx) - \beta(zy) \\ &= \alpha(xz - zx) + \beta(yz - zy) \\ &= \alpha[x, z] + \beta[y, z] \end{aligned}$$

olarak yazılır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} [x, \alpha y + \beta z] &= x(\alpha y + \beta z) - (\alpha y + \beta z)x \\ &= x(\alpha y) + x(\beta z) - (\alpha y)x - (\beta z)x \\ &= \alpha(xy) + \beta(xz) - \alpha(yx) - \beta(zx) \end{aligned}$$

$$= \alpha(xy - yx) + \beta(xz - zx)$$

$$= \alpha[x, y] + \beta[x, z]$$

olduğu görülür.

2) $\forall x, y \in V$ için $[x, y] = -[y, x]$ olduğu aşıkardır.

$$[x, y] = xy - yx = -(yx - xy) = -[y, x]$$

3) $\forall x, y, z \in V$ için $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ olduğunu gösterelim.

$$[x, [y, z]] = [x, (yz - zy)]$$

$$= x(yz - zy) - (yz - zy)x$$

$$= xyz - zxy - yzx + zyx \dots (*)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$[y, [z, x]] = [y, (zx - xz)]$$

$$= y(zx - xz) - (zx - xz)y$$

$$= yzx - yxz - zxy + xzy \dots (**)$$

şeklinde yazılır. Son olarak,

$$[z, [x, y]] = [z, (xy - yx)]$$

$$= z(xy - yx) - (xy - yx)z$$

$$= zxy - zyx - xyz + yxz \dots (***)$$

elde edilir. Buradan $(*)$, $(**)$ ve $(***)$ eşitlikleri toplandığında sonucun sıfır olduğu görülür.

Örnek 2.11: $W = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : tr A = 0\}$ iz'i sıfır olan $n \times n$ tipindeki bütün reel matrislerin oluşturduğu bir kümedir.

$$[,]: W \times W \rightarrow W$$

dönüşümü için,

$$[A, B] = AB - BA$$

şeklinde tanımlandığında bir Lie operatörü olup W , uzayı da Lie cebiri olur. Bu Lie cebirine *özel lineer Lie cebiri* denir [16].

Tanım 2.17: V bir Lie cebiri olsun. Eğer $\forall x, y \in V$ için $[x, y] = 0$ oluyorsa V ye *değişmelidir* denir [16]. Örnek 2.10 daki V_L cebirinin değişmeli olması için,

$$[x, y] = xy - yx = 0 \Rightarrow xy = yx$$

olmalıdır.

Tanım 2.18: V bir Lie cebiri olsun. W , V nin bir alt vektör uzayı olsun. Eğer $\forall x, y \in W$ için $[x, y] \in W$ oluyorsa W ya V nin bir *Lie alt cebiri* denir [17].

Örnek 2.12: $O(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^T = -A\}$ *ortogonal Lie cebiri*, örnek 2.9 da tanımlı olan W nun bir Lie alt cebiridir [16].

İspat:

Öncelikle $O(n, \mathbb{C})$ kümesinin, W nun bir alt uzayı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için alt vektör uzayı şartlarının sağlandığını gösterelim.

- 1) $\forall A, B \in O(n, \mathbb{C})$ için, $(A + B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A + B)$ olarak yazılır. O zaman $A + B \in O(n, \mathbb{C})$ olur.
- 2) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall A \in O(n, \mathbb{C})$ için, $(\alpha A)^T = \alpha A^T = -\alpha A$ olarak yazılır. O zaman $\alpha A \in O(n, \mathbb{C})$ dir.

Dolayısıyla $O(n, \mathbb{C})$, W nun bir alt uzayıdır. Şimdi Lie alt cebiri koşulunun sağlandığını gösterelim. $\forall A, B \in O(n, \mathbb{C})$ için,

$$\begin{aligned} [A, B]^T &= (AB - BA)^T \\ &= (AB)^T - (BA)^T \\ &= B^T A^T - A^T B^T \\ &= BA - AB \end{aligned}$$

$$= -[A, B]$$

Böylece $[A, B] \in O(n, \mathbb{C})$ olduğu görülüyor.

Örnek 2.13: $W = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \text{tr} A = 0\}$ Lie cebiri, $GL(n, \mathbb{R})$ Lie cebirinin bir Lie alt cebiridir [16].

Tanım 2.19: V , bir Lie cebiri olsun. W , V nin bir Lie alt cebiri olsun. Eğer $\forall x \in V$ ve $\forall y \in W$ için $[x, y] \in W$ oluyorsa W ya V nin bir (Lie) *ideali* denir [17].

Tanım 2.20: V ve W , iki Lie cebir ve $\varphi: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in V$ için,

$$\varphi([x, y]_V) = [\varphi(x), \varphi(y)]_W$$

oluyorsa φ ye bir *Lie cebiri homomorfizması* denir [16].

Eğer yukarıdaki tanımda $V = W$ alınırsa φ ye bir *Lie cebiri endomorfizması* adı verilir.

Eğer φ , birebir ve örten ise φ ye bir *Lie cebiri izomorfizması* denir. Ayrıca $V = W$ alındığında φ , birebir ve örten ise φ ye bir *Lie cebiri otomorfizması* denir.

Örnek 2.14: Bir V Lie cebirindeki $\forall x \in V$ için, $\varphi(x) = 0$ şeklinde tanımlanan bir dönüşüm bir Lie cebir homomorfizmi tanımlar.

Tanım 2.21: R bir halka ve M bir değişmeli grup olsun.

$$\cdot: R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \rightarrow r.m$$

ile tanımlanan fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlıyorsa M ye bir *sol R-modül* denir [18].

$$\text{i)} \quad \forall r \in R \text{ ve } \forall m_1, m_2 \in M \text{ için, } r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$$

$$\text{ii)} \quad \forall r_1, r_2 \in R \text{ ve } \forall m \in M \text{ için, } (r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$$

$$\text{iii)} \quad \forall r_1, r_2 \in R \text{ ve } \forall m \in M \text{ için, } (r_1 r_2)m = (r_1 r_2)m$$

Aynı şekilde *sağ R-modül* de,

$$\cdot : M \times R \rightarrow M$$

$$(m, r) \rightarrow m.r$$

olarak tanımlanarak oluşturulur.

Eğer M hem sol R -modül ve hem de sağ R -modül yapısına sahipse o zaman M ye bir R -modül adı verilir. Ayrıca $\forall m \in M$ için $1_R.m = m.1_R = m$ oluyorsa bu modüle birimli modül denir [18].

Eğer R halkasını değişmeli olarak alırsak o zaman sol R -modül yapısı sağ R -modül yapılabilir.

Tanım 2.22: R ve S halkaları ile M değişmeli grubu verilsin. Eğer M aşağıdaki koşulları sağlarsa o zaman M ye R - S bimodülü adı verilir [19]:

1) M bir sol R -modül ve bir sağ S -modüldür. Yani $\forall r \in R, s \in S$ ve $m \in M$ için,

$$\cdot : R \times M \rightarrow M, (r, m) \rightarrow r.m \text{ ve } \cdot : M \times S \rightarrow M, (m, s) \rightarrow m.s$$

2) $\forall r \in R, s \in S$ ve $m \in M$ için, $(r.m).s = r.(ms)$

Burada eğer R ve S halkalarını aynı aldığımızda M modülü R - R bimodülü olur. Kısaca M , bir R bimodülü olarak yazılır.

Örnek 2.15: $\mathbb{Z}$, tamsayılar halkası verilsin. Her (toplamsal) değişmeli grup aşağıda tanımlanan dönüşümle birlikte bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

$$\cdot : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$$

$$(n, m) \rightarrow n.m$$

$$\text{Burada } n.m = \begin{cases} \underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ tane}}, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -(-n), & n < 0 \end{cases} \text{ olarak tanımlanıyor.}$$

Örnek 2.16: Her R halkası kendi üzerinde bir R -modüldür.

Örnek 2.17: M ve N , iki R -modül olsun. $M \times N$ değişmeli grubu için,

$$R \times (M \times N) \rightarrow (M \times N)$$

$$(r, (m, n)) \rightarrow r.(m, n) = (rm, rn)$$

şeklinde tanımlanan işlem ile birlikte $M \times N$, bir R -modüldür.

Tanım 2.23: M ve N , iki R -modül olsun. $f: M \rightarrow N$ dönüşümü $\forall x, y \in M$ ve $\forall r \in R$ için,

$$i) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$ii) \quad f(r.x) = r.f(x)$$

koşullarını sağlıyorsa f ye bir R -modül homomorfizması veya kısaca R -homomorfizması adı verilir [18].

M den N ye bütün R -homomorfizmalarının kümesi,

$$Hom_R(M, N) = \{f \mid f: M \rightarrow N\}$$

ile gösterilir. Özel olarak $M = N$ aldığımızda,

$$Hom_R(M, M) = End_R(M) = \{f \mid f: M \rightarrow M\}$$

olur. Eğer R bir cisim, M ve N modülleri birimsel R -modül ise o zaman f ye, M ve N vektör uzayları arasında bir *lineer dönüşüm* denir [18].

Tanım 2.24: R -modüllerinin ve homomorfizmalarının bir dizisi,

$$..... \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} M_n \xrightarrow{\phi_n} M_{n+1} \rightarrow$$

şeklinde verilsin. Eğer bu dizi $\forall n$ için $\text{Im}(\phi_{n-1}) = \text{Ker}(\phi_n)$ koşulunu sağlıyorsa bu diziye *tam dizi* denir. Eğer $n > m$ için $M_n = 0$ oluyorsa o zaman dizimiz,

$$..... \rightarrow M_{m-1} \rightarrow M_m \rightarrow 0$$

olarak yazılır. Aynı şekilde bu yazılış dizinin sol tarafı için de yapılabilir. Özel olarak,

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$$

dizisi tam dizi ise bu diziye *kısa tam dizi* adı verilir.

Lemma 2.1: $0 \rightarrow L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$ kısa tam dizisi verilsin. Bu durumda aşağıdaki koşullar geçerlidir:

- i) ϕ , 1-1 bir fonksiyondur.
- ii) φ , örten bir fonksiyondur.
- iii) $\text{Im}(\phi) = \text{Ker}(\varphi)$

Bu ifadenin tersi de doğrudur. Yani bu üç koşul birlikte sağlanırsa dizi, kısa tam dizi olur.

DERECELİ CEBİRSEL YAPILAR

3.1 Dereceli Cebirsel Yapılar

Bu bölümde Γ , aksi belirtilmedikçe bir değişmeli grup olarak ele alınacaktır.

Tanım 3.1: F bir cisim ve V , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V nin alt uzayları $\{V_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ olmak üzere

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha$$

koşulunu sağlayan $\{V_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ kümesine V nin Γ -derecelendirmesi denir [20].

Eğer V vektör uzayı Γ -derecelendirmesi yapısına sahip oluyorsa o zaman V vektör uzayına Γ -dereceli vektör uzayı denir [20].

Tanım 3.2: $V = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha$, Γ -dereceli bir vektör uzayı olsun. Eğer $v \in V$ elemanı V_α nin bir elemanı oluyorsa o zaman v elemanına α dereceli *homojen eleman* denir [20]. Bir $v \in V$ homojen elemanın paritesi yani derecesi $|v|$ ile gösterilir. Yani $v \in V_\alpha, \alpha \in \Gamma$ olarak yazıldığında $|v| = \alpha$ olur. Ayrıca $\forall x \in V$ için,

$$x = \sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha; x_\alpha \in V_\alpha, \alpha \in \Gamma$$

olacak şekilde tek türlü bir ayrışım vardır. Burada sonlu sayıdaki x_α lar sıfırdan farklıdır.

Buradaki x_α elemanlarına da x in α dereceli *homojen bileşenleri* adı verilir [20].

Özel olarak $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ alırsak; o zaman $V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} V_\alpha$, $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir vektör uzayı olur. Bu durumda $V = V_0 \oplus V_1$ olarak yazılır. Burada V_0 alt uzayının elemanlarına V uzayınının *çift elemanları*, V_1 alt uzayının elemanlarına da V uzayının *tek elemanları* adı verilir [20].

$\Gamma = \mathbb{Z}$ için; $V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} V_\alpha$, $\mathbb{Z}$ -dereceli bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayı aşağıdaki tanımlarla birlikte bir $\mathbb{Z}_2$ -derecelendirmesi yapısına sahip olur:

$$V_0 = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_{2i} \quad ; \quad V_1 = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_{2i+1}.$$

Tanım 3.3: $V = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha$, Γ -dereceli bir vektör uzayı ve W , V nin bir alt vektör uzayı olsun. Eğer W alt vektör uzayı, elemanlarının tümünü homojen bileşen olarak içeriyorsa yani;

$$W = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} (W \cap V_\alpha)$$

yazılabiliyorsa o zaman W alt vektör uzayına V nin Γ -dereceli alt vektör uzayı denir [20].

Tanım 3.4: V ve U , Γ -dereceli vektör uzayları olsun. Bu durumda U vektör uzayı,

$$U = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$$

olarak yazılsın. Eğer

$$\varphi: V \rightarrow U$$

lineer dönüşümü her $\beta \in \Gamma$ için,

$$\varphi(V_\beta) \subset U_{\alpha+\beta}$$

özellikliğini sağlıyorsa φ dönüşümüne α dereceli homojen lineer dönüşüm adı verilir.

Eğer φ sıfır dereceli homojen bir lineer dönüşümse, o zaman φ dönüşümüne V den W ya *dereceyi koruyan lineer dönüşüm* denir [20].

Tanım 3.5: W ve W' , F cismi üzerinde Γ -dereceli iki vektör uzayı olsun. Bu iki vektör uzayının tensör çarpımı da aşağıdaki tanımlamayla birlikte bir Γ -derecelendirmesi yapısına sahip olur:

$$(W \otimes W')_{\theta} = \bigoplus_{\alpha+\beta=\theta} (W_{\alpha} \otimes W'_{\beta}) \quad , \quad \theta \in \Gamma \text{ için}$$

O zaman $W \otimes W'$ vektör uzayına W ile W' , Γ -dereceli vektör uzaylarının (Γ -dereceli) tensör çarpımı adı verilir [20].

Tanım 3.6: W, W', V ve V' , F cismi üzerinde Γ -dereceli vektör uzayları olsun.

$$\varphi: W \rightarrow V \quad , \quad \varphi': W' \rightarrow V'$$

dönüşümleri sırasıyla θ ve θ' , dereceli homojen iki lineer dönüşüm olsun. O zaman bu iki lineer dönüşümün tensör çarpımı olan,

$$\varphi \bar{\otimes} \varphi': W \otimes W' \rightarrow V \otimes V'$$

lineer dönüşümü $\forall x \in W_{\varepsilon}, x' \in W'_{\varepsilon} \quad \varepsilon \in \Gamma$ için,

$$(\varphi \bar{\otimes} \varphi')(x \otimes x') = (-1)^{\theta' \varepsilon} \varphi(x) \otimes \varphi'(x')$$

olarak yazılır. Burada $\varphi \bar{\otimes} \varphi'$ lineer dönüşümünün, $\theta + \theta'$ dereceli homojen bir lineer dönüşüm olduğu açıkça görülmektedir [20].

Tanım 3.7: W, W', V, V', U ve U' , F cismi üzerinde Γ -dereceli vektör uzayları olsun.

$$\varphi: W \rightarrow V \quad , \quad \varphi': W' \rightarrow V'$$

$$\phi: V \rightarrow U \quad , \quad \phi': V' \rightarrow U'$$

dönüşümleri sırasıyla $\theta, \theta', \delta, \delta'$ dereceli homojen lineer dönüşüm olsunlar. Bu durumda ϕ ve ϕ' lineer dönüşümlerinin tensör çarpımı olan $\phi \bar{\otimes} \phi'$ ile φ ve φ' lineer dönüşümlerinin tensör çarpımı olan $\varphi \bar{\otimes} \varphi'$ nin bileşke işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır [20]:

$$(\phi \bar{\otimes} \phi') \circ (\varphi \bar{\otimes} \varphi') = (-1)^{\delta' \theta} (\phi \circ \varphi) \bar{\otimes} (\phi' \circ \varphi')$$

Tanım 3.8: F bir cisim ve A , F cismi üzerinde bir cebir olsun. A nın alt uzayları $\{A_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ olmak üzere,

$$i) \quad A = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$$

$$ii) \quad \forall i, j \in \Gamma \text{ için, } A_i A_j \subset A_{i+j}$$

şartlarını sağlıyorsa A cebirine Γ -dereceli cebir adı verilir [20].

Örnek 3.1: $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ için, $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$ kompleks sayılar cebiri $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir cebirdir.

Tanım 3.9: A ve B , F cismi üzerinde Γ -dereceli cebirler olsun. $A = \bigoplus_{\beta \in \Gamma} A_\beta$ ve $B = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ olarak yazıldıklarında,

$$\varphi : A \rightarrow B$$

lineer dönüşümü her $\beta \in \Gamma$ için,

$$\varphi(A_\beta) \subset B_{\alpha+\beta}$$

şartını sağlıyorsa φ dönüşümüne α dereceli cebir homomorfizması denir [20].

Eğer φ sıfır dereceli homojen bir lineer dönüşümse ve φ cebir homomorfizması koşulunu sağlıyorsa o zaman φ dönüşümüne A dan B ye *dereceyi koruyan homomorfizma* veya *sıfır dereceli homomorfizma* adı verilir [20].

Tanım 3.10: A ve B , F cismi üzerinde Γ -dereceli cebirler olsun. Eğer B cebiri A cebirinin bir alt cebiri ve aynı zamanda B , Γ -dereceli vektör uzayı olan A cebirinin Γ -dereceli bir alt uzayı oluyorsa o zaman B cebirine A nın bir Γ -dereceli alt cebiri adı verilir [20].

Örnek 3.2: $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$ kompleks sayılar cebiri, $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir cebirdir. $\mathbb{R}$ reel sayılar cebiri, $\mathbb{C}$ cebirinin $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir alt cebiridir. Çünkü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $ab \in \mathbb{R}$ dir. $\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}_1 = \mathbb{R}i$ olarak yazdığımızda $\mathbb{R} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} (\mathbb{R} \cap \mathbb{C}_\alpha)$ olduğu görülmektedir.

Tanım 3.11: A ve B , F cismi üzerinde Γ -dereceli iki cebir olsun. Eğer B cebiri A cebirinin bir ideali ve aynı zamanda B , Γ -dereceli vektör uzayı olan A cebirinin Γ -

dereceli bir alt uzayı oluyorsa o zaman B cebirine A , Γ -dereceli cebirinin bir *dereceli ideali* adı verilir [20].

Tanım 3.12: A ve B , F cismi üzerinde Γ -dereceli iki cebir olsun. A ve B nin *direkt (kartezyen) çarpımı* da aşağıdaki tanımlamayla birlikte Γ -dereceli bir cebir yapısına sahip olur [20]:

$$(A \times B)_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Gamma \text{ için}$$

Tanım 3.13: A ve B , F cismi üzerinde Γ -dereceli birleşmeli iki cebir ve A ile B birimli cebirler olsun. $A \otimes B$ vektör uzayının Γ -dereceli tensör çarpımını daha önce tanımlamıştık. Aşağıdaki tanımlamayla birlikte $A \otimes B$, Γ -dereceli birleşmeli cebir yapısına sahip olur:

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{ij} (aa') \otimes (bb')$$

$$\forall a \in A, a' \in A_j, b \in B_i, b' \in B \quad i, j \in \Gamma \text{ için}$$

Bu şekilde elde edilen $A \otimes B$ cebirine, Γ -dereceli A ve B cebirlerinin *dereceli tensör çarpımı* denir ve $A \bar{\otimes} B$ ile gösterilir [20].

Örnek 3.3: A ve B , F cismi üzerinde Γ -dereceli birleşmeli iki cebir olarak verilsin. $i, j \in \Gamma$ olmak üzere $\forall a \in A_i, b \in B_j$ için,

$$f : A \bar{\otimes} B \rightarrow B \bar{\otimes} A$$

$$f(a \otimes b) = (-1)^{|a||b|} b \otimes a$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm, Γ -dereceli cebir homomorfizmasıdır. Şimdi bunun doğruluğunu gösterelim. O zaman $\forall a \in A_i, c \in A_k, b \in B_j$ ve $d \in B_l$ için,

$$f((a \otimes b)(c \otimes d)) = f(a \otimes b) f(c \otimes d)$$

olduğunu gösterdiğimizde ispat tamamlanmış olur. Öncelikle sol taraftan başlayalım.

$$\begin{aligned} f((a \otimes b)(c \otimes d)) &= f((-1)^{|b||c|} ac \otimes bd) \\ &= (-1)^{|b||c|} f(ac \otimes bd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{|b||c|} (-1)^{|ac||bd|} bd \otimes ac \\
&= (-1)^{|b||c|} (-1)^{(|a|+|c|)(|b|+|d|)} bd \otimes ac \\
&= (-1)^{|b||c|} (-1)^{|a||b|+|a||d|+|c||b|+|c||d|} bd \otimes ac \\
&= (-1)^{|a||b|+|a||d|+|c||b|+|c||d|} bd \otimes ac \dots (*)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi eşitliğin sağ tarafını yapalım.

$$\begin{aligned}
f(a \otimes b) f(c \otimes d) &= (-1)^{|a||b|} (b \otimes a) (-1)^{|c||d|} (d \otimes c) \\
&= (-1)^{|a||b|} (-1)^{|c||d|} (b \otimes a) (d \otimes c) \\
&= (-1)^{|a||b|} (-1)^{|c||d|} (-1)^{|a||d|} bd \otimes ac \\
&= (-1)^{|a||b|+|c||d|+|a||d|} bd \otimes ac \dots (**)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan (*) ve (**) eşitliklerinin eşit olduğu görülür.

Tanım 3.14: A , F cismi üzerinde Γ -dereceli birleşmeli bir cebir ve V bir sol A -modül olsun. Ayrıca A cebiri ve V modülü birimli olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa o zaman sol A -modül V ye Γ -dereceli sol A -modül denir [20]:

- i) V vektör uzayı Γ -dereceli vektör uzayı olmalı.
- ii) $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $A_\alpha V_\beta \subset V_{\alpha+\beta}$ olmalıdır.

Benzer şekilde V bir sağ A -modül olarak alınırsa o zaman V ye Γ -dereceli sağ A -modül denir [20].

Eğer V uzayı hem Γ -dereceli sağ modül hem de Γ -dereceli sol modül özelliklerini sağlıyorsa o zaman V ye Γ -dereceli A -modül denir [20].

Tanım 3.15: A , F cismi üzerinde Γ -dereceli birleşmeli bir cebir olsun. V ve W , Γ -dereceli iki A -modül olsun.

$$\varphi: V \rightarrow W$$

lineer dönüşümü verilsin. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa φ dönüşümüne V den W ya Γ -dereceli A -modül homomorfizması adı verilir [20].

- i) $\varphi: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü modül homomorfizması şartını sağlamalıdır.
- ii) $\varphi: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü V ve W , Γ -dereceli vektör uzayı olarak alındıklarında Γ -dereceli homomorfizma koşullarını sağlamalıdır.

Tanım 3.16: A ve B , F cismi üzerinde Γ -dereceli birleşmeli iki cebir olsun. V , Γ -dereceli bir sol A -modül ve W da Γ -dereceli bir sol B -modül olsun. Bu taktirde $V \otimes W$ tensör çarpımı da Γ -dereceli bir vektör uzayıdır ve $A \bar{\otimes} B$ de Γ -dereceli birleşmeli bir cebirdir. O zaman $V \otimes W$ üzerinde tek olan bir Γ -dereceli sol $A \bar{\otimes} B$ -modül yapısı vardır öyle ki,

$$(a \otimes b)(x \otimes y) = (-1)^{\beta\alpha} (ax) \otimes (by)$$

$$\forall a \in A, b \in B, x \in V_\alpha, b' \in B, y \in W \quad \beta, \alpha \in \Gamma \text{ için}$$

olarak yazılır [20].

Şimdi literatürde önemli bir yere sahip olan süper vektör uzayları ve bu uzaylarla ilgili bazı temel kavramları vereceğiz.

Tanım 3.17: V , F cismi üzerinde Γ -dereceli bir vektör uzayı olsun. $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ için, V vektör uzayı $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir vektör uzayı olur. O zaman V , $\mathbb{Z}_2$ -dereceli vektör uzayına bir *süper uzay* adı verilir [20]. Yani,

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_2} V_i = V_0 \oplus V_1$$

olarak yazılır.

Örnek 3.3: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1\}$ *kompleks sayılar* kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Burada da $\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}_1 = \mathbb{R}i$ olarak yazılırsa kompleks sayılar vektör uzayı bir süper uzay olur.

Örnek 3.4: V ve W , $\mathbb{Z}_2$ -dereceli iki vektör uzayı olsun. O zaman,

$$f: V \rightarrow W$$

lineer dönüşümlerinin uzayı da bir süper vektör uzayı olur. Özel olarak $W = V$ alırsak,

$$f: V \rightarrow V$$

lineer dönüşümü V nin endomorfizması olarak tanımlanır ve $EndV$ ile gösterilir. O zaman doğal olarak $EndV$ kümesi de bir süper vektör uzayıdır.

Tanım 3.18: $V = V_0 \oplus V_1$, $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir vektör uzayı olsun. $\emptyset \neq W \subset V$ verilsin. $\forall i \in \mathbb{Z}_2$ için $W_i \subset V_i$ olursa W alt uzayına V nin *süper alt uzayı* veya *alt uzayı* denir [20].

Tanım 3.19: A, F cismi üzerinde Γ -dereceli bir cebir olsun. $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ için, A cebiri $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir cebir olur. O zaman $A, \mathbb{Z}_2$ -dereceli cebirine bir *süper cebir* adı verilir [20].

Örnek 3.5: $A = A_0 \oplus A_1$, F cismi üzerinde herhangi bir cebir ve A_0 ile A_1 , A nin alt vektör uzayları olsun. $A_0 = A$ ve $A_1 = 0$ olarak aldığımızda A cebiri bir süper cebir yapısına sahip olur. Bu süper cebire *aşık süper cebir* adı verilir.

Örnek 3.6: $A = A_0 \oplus A_1$, F cismi üzerinde herhangi bir cebir ve $A^2 = 0$ olsun. Burada $A_0 = 0$ ve $A_1 = A$ olarak yazarsak A cebiri bir süper cebir olur. Çünkü A_0 ve A_1 vektör uzayları A nin alt uzaylarıdır ve direkt toplamları da A vektör uzayını veriyor. Ayrıca aşağıdaki koşulların da sağlandığı görülmektedir.

$$A_0 A_0 \subset A_0, A_0 A_1 \subset A_1, A_1 A_0 \subset A_1 \text{ ve } A_1 A_1 \subset A_0.$$

Örnek 3.7: F cebirsel kapalı bir cisim olsun.

$$D = F \oplus F\varepsilon = \{a + bx \mid a, b \in F \quad \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0\}$$

olarak tanımlanan *dual sayılar* kümesi F cismi üzerinde bir cebirdir [21].

$A_0 = F$ ve $A_1 = F\varepsilon$ için, A bir süper cebir yapısına sahip olur. Bu süper cebire *dual sayılar* süper cebiri adı verilir.

Örnek 3.8: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1\}$ *kompleks sayılar* kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir cebirdir. Burada da $\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}_1 = \mathbb{R}i$ olarak yazılırsa kompleks sayılar cebiri bir süper cebir olur.

Örnek 3.9: F cebirsel kapalı bir cisim olsun.

$$A = F[u, \alpha] = F + Fu = \{a + bu \mid a, b, \alpha \in F \quad u^2 = \alpha\}$$

olarak tanımlanan küme, F cebirsel kapalı cismi üzerinde bir cebir olup özel olarak $A_0 = F$ ve $A_1 = Fu$ olarak aldığımızda bir süper cebir olur. $F[u, 1]$ kısaca $F[u]$ olarak da yazılır [21].

Örnek 3.10: $A[u] = A + Au$ kümesi üzerinde aşağıdaki işlemi tanımlayalım.

$$(a + bu)(a' + b'u) = (aa' + bb'u) + (ab' + a'b)u \quad ; \quad a, b \in A \text{ için}$$

Bu durumda $(A[u])_0 = A$ ve $(A[u])_1 = Au$ olarak yazıldığında $A[u]$ bir süper cebir olur. Ayrıca $A[u]$ kümesi aşağıdaki dönüşümle tanımlandığında $A \oplus A$ ya izomorf olur [21].

$$f : A[u] \rightarrow A \oplus A$$

$$(a + bu) \rightarrow (a + b, a - b)$$

Tanım 3.20: $A = A_0 \oplus A_1$ süper cebiri verilsin. Eğer $\forall a, b, c \in A$ için,

$$a(bc) = (ab)c$$

koşulu sağlanıyorsa A süper cebirine *birleşmeli* adı verilir [22].

Örnek 3.11: $V = V_0 \oplus V_1$, $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir vektör uzayı olsun. V den V ye bütün lineer dönüşümlerin kümesi,

$$EndV = \{f \mid f : V \rightarrow V\}$$

olarak tanımlanır. Aşağıdaki tanımlamalarla birlikte $EndV = End(V)_0 \oplus End(V)_1$ uzayı birleşmeli bir süper cebir olur [21]:

$$\begin{aligned} End(V)_0 &= \{f \in EndV \mid f(V_i) \subset V_i, i \in \mathbb{Z}_2\} \\ &= \{f \in EndV \mid f(V_0) \subset V_0, f(V_1) \subset V_1, |f(x)| = |x|\} \\ End(V)_1 &= \{f \in EndV \mid f(V_i) \subset V_{i+1}, i \in \mathbb{Z}_2\} \end{aligned}$$

$$= \{f \in \text{End}V \mid f(V_0) \subset V_1, f(V_1) \subset V_0, |f(x)| = |x| + 1\}$$

Örnek 3.12: F bir cisim olsun. $gl(m|n)$ kümesi,

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

formundaki bütün blok matrislerinin oluşturduğu $(m+n) \times (m+n)$ tipindeki matrislerin kümesi olarak tanımlanır [23].

Burada A, B, C ve D matrisleri elemanları F cisiminden alınan sırasıyla $m \times m, m \times n, n \times m$ ve $n \times n$ tipinde matrislerdir. $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ blok matrisinde $A = D = 0$ için, $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ blok matrisi elde edilir. Bu durumda $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ şeklindeki blok matrislerinin oluşturduğu küme $gl(m|n)_0$ olsun. Böyle matrislere *çift* matrisler adı verilir. Yine benzer şekilde X blok matrisinde $B = C = 0$ için elde edilen $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ şeklindeki blok matrislerinin oluşturduğu küme de $gl(m|n)_1$ olsun. Böyle matrislere de *tek* matrisler adı verilir. O zaman $gl(m|n) = gl(m|n)_0 \oplus gl(m|n)_1$ uzayı birleşmeli bir süper cebir yapısına sahip olur.

$V = V_0 \oplus V_1$, $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir vektör uzayı ve $\dim V = k, \dim V_0 = m$ ve $\dim V_1 = n, (k = n + m)$ olsun. O zaman $\text{End}V$ uzayından $gl(m|n)$ uzayına bir izomorfizma vardır. Yani,

$$\text{End}(V)_0 \cong gl(m|n)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A \in gl(m), D \in gl(n) \right\}$$

$$\text{End}(V)_1 \cong gl(m|n)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \mid B \in gl(m, n), C \in gl(n, m) \right\}$$

olarak yazılır [21].

Tanım 3.21: $A = A_0 \oplus A_1$ süper cebiri verilsin. Eğer $\emptyset \neq B \subset A$ alt kümesi için,

i) $\forall x \in B_i, y \in B_j$ için $xy \in B_{i+j}$ $i, j \in \mathbb{Z}_2$ (alt cebir koşulu)

ii) $B = B_0 \oplus B_1$ olarak yazıldığında $B_0 \subset A_0$ ve $B_1 \subset A_1$

şartları sağlanıyorsa B alt kümesine A süper cebirinin bir *süper alt cebiri* veya *alt cebiri* adı verilir [22].

Tanım 3.22: $A = A_0 \oplus A_1$ süper cebiri verilsin. Eğer $\emptyset \neq I \subset A$ alt kümesi için,

i) $\forall a \in A_i, x \in I_j$ için $ax \in I_{i+j}$ ve $xa \in I_{i+j}$ (ideal koşulu)

ii) $I = I_0 \oplus I_1$ olarak yazıldığında $I_0 \subset A_0$ ve $I_1 \subset A_1$

şartları sağlanıyorsa I alt kümesine A süper cebirinin bir *süper ideali* veya *ideali* adı verilir [22].

Tanım 3.23: $A = A_0 \oplus A_1$ süper cebiri verilsin. A nın $\{0\}$ ve kendisinden başka ideali yoksa A süper cebirine *basit* denir [21].

Tanım 3.24: $A = A_0 \oplus A_1$ ve $B = B_0 \oplus B_1$ iki süper cebiri verilsin. Eğer $\varphi: A \rightarrow B$ lineer dönüşümü,

i) $\forall a, b \in A$ için $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (cebir homomorfizması)

ii) $\varphi(A_0) \subset B_0$ ve $\varphi(A_1) \subset B_1$

koşullarını sağlıyorsa φ dönüşümüne A dan B ye bir *süper cebir homomorfizması* veya *homorfizma* adı verilir [22].

Tanım 3.25: A bir süper cebir ve A nın $\mathbb{Z}_2$ -dereceli alt uzaylarının kümesi $\{A_i : i \in \mathbb{Z}_2\}$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa A süper cebirine $\mathbb{Z}$ -dereceli cebir adı verilir [20].

i) $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$

ii) $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ için $A_i A_j \subset A_{i+j}$.

Tanım 3.26: $A = A_0 \oplus A_1$ birleşmeli süper cebiri verilsin. $\forall a, b \in A$ için,

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba$$

şeklinde tanımlanan özdeşliğe A nın *süper komütatörü* adı verilir [23].

Tanım 3.27: $A = A_0 \oplus A_1$ birleşmeli bir süper cebir olsun. Eğer $\forall a, b \in A$ için,

$$[a, b] = 0, \text{ yani } ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

oluyorsa A süper cebirine *değişmeli* süper cebir adı verilir [23].

Tanım 3.28: $A = A_0 \oplus A_1$ ve $B = B_0 \oplus B_1$ iki süper cebiri verilsin. A ile B nin *direkt (kartezyen) çarpımı* da aşağıdaki tanımlamayla birlikte bir süper cebir yapısına sahip olur [20]:

$$(A \times B)_0 = A_0 \times B_0, \quad (A \times B)_1 = A_1 \times B_1$$

Tanım 3.29: A ve B , F cismi üzerinde iki cebir olsun. A ve B vektör uzaylarının tensör çarpımı $A \otimes B$ nin aşağıdaki çarpımla beraber bir cebir yapısına sahip olduğunu biliyoruz.

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb') \quad ; \quad \forall a \in A, b \in B \text{ için.}$$

$A = A_0 \oplus A_1$ ve $B = B_0 \oplus B_1$ süper cebirleri verilsin. Bu durumda $A \otimes B$ üzerinde

$$(A \otimes B)_0 = (A_0 \otimes B_0) \oplus (A_1 \otimes B_1), \quad (A \otimes B)_1 = (A_0 \otimes B_1) \oplus (A_1 \otimes B_0)$$

ile birlikte bir $\mathbb{Z}_2$ -derecelendirmesi mevcuttur. Bu durumda A ile B vektör uzaylarının tensör çarpımı,

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{ij} (aa') \otimes (bb')$$

$$\forall a \in A, a' \in A_i, b \in B_j \text{ ve } b' \in B \text{ için}$$

ile tanımlandığında A ve B , süper cebirlerinin *dereceli tensör çarpımı* adını alır. A ve B nin dereceli tensör çarpımı $A \bar{\otimes} B$ ile gösterilir [21].

Örnek 3.13: A ve B , birleşmeli iki süper cebir olsun. O zaman $A \bar{\otimes} B$ de birleşmeli bir süper cebirdir. Şimdi bunun doğruluğunu gösterelim.

$$(a \bar{\otimes} b)[(c \bar{\otimes} d)(e \bar{\otimes} f)] = [(a \bar{\otimes} b)(c \bar{\otimes} d)](e \bar{\otimes} f)$$

olduğunu gösterirsek ispatımız biter. O zaman

$$\begin{aligned}
(a \bar{\otimes} b)[(c \bar{\otimes} d)(e \bar{\otimes} f)] &= (a \bar{\otimes} b)[(-1)^{|d||e|}(ce) \bar{\otimes} (df)] \\
&= (-1)^{|d||e|}[(a \bar{\otimes} b)((ce) \bar{\otimes} (df))] \\
&= (-1)^{|d||e|} \left[(-1)^{|b|(|c|+|e|)} (ace) \bar{\otimes} (bdf) \right] \\
&= (-1)^{|d||e|+|b||c|+|b||e|} (ace \bar{\otimes} bdf) \dots (1)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
[(a \bar{\otimes} b)(c \bar{\otimes} d)](e \bar{\otimes} f) &= [(-1)^{|b||c|}(ac) \bar{\otimes} (bd)](e \bar{\otimes} f) \\
&= (-1)^{|b||c|}[(ac \bar{\otimes} bd)(e \bar{\otimes} f)] \\
&= (-1)^{|b||c|} \left[(-1)^{(|b|+|d|)|e|} (ace \bar{\otimes} bdf) \right] \\
&= (-1)^{|b||c|+|b||e|+|d||e|} (ace \bar{\otimes} bdf) \dots (2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (1) ve (2) eşitliklerinin eşit olduğu görülüyor.

Not 3.1: $A = A_0 \oplus A_1$ süper cebiri verilsin. $\forall x, y \in A$ için,

$$|xy| = |x| + |y| \quad ; \quad x \in A_i, y \in A_j \quad , \quad i, j \in \mathbb{Z}_2$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.30: $A = A_0 \oplus A_1$ süper cebiri verilsin. M , A süper cebiri üzerinde bir modül olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan M modülüne bir *süper modül* denir:

- i) $M = M_0 \oplus M_1$
- ii) $\forall a \in A_i, m \in M_j$ için $A_i M_j \subset M_{i+j}, M_j A_i \subset M_{i+j}$

Tanım 3.31: $gl(m|n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \middle| A, m \times m; B, m \times n; C, n \times m; D, n \times n \right\}$ süper cebiri

verilsin. X matrisinin *süper iz'i*, $StrX$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır [23]:

$$StrX = tr(A) - tr(D).$$

Lemma 3.1: $gl(m|n)$ süper cebiri verilsin. $\forall X, Y \in gl(m|n) = gl(m|n)_0 \oplus gl(m|n)_1$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $Str(X + Y) = Str(X) + Str(Y)$
- ii) $Str(XY) = (-1)^{|X||Y|} Str(YX)$
- iii) $Str([X, Y]) = 0$

İspat:

$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix};$ A, K $m \times m; B, L$ $m \times n; C, M$ $n \times m; D, N$ $n \times n$ tipinde iki matris verilsin. O zaman bu iki matrisin toplamı,

$$X + Y = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+K & B+L \\ C+M & D+N \end{pmatrix}$$

olarak yazılır. Buradan $X + Y$ matrisinin süper izi, süper iz tanımından

$$\begin{aligned} Str(X + Y) &= tr(A + K) - tr(D + N) \\ &= tr(A) + tr(K) - tr(D) - tr(N) \\ &= (tr(A) - tr(D)) + (tr(K) - tr(N)) \\ &= StrX + StrY \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece i) şıkkı ispat edilmiş oldu. Bu arada tr yani $trace$ dönüşümünün lineer olduğunu biliyoruz. Şimdi ii) şıkkının ispatını yapalım o zaman, $\forall X \in gl(m|n)_i, Y \in gl(m|n)_j; i, j \in \mathbb{Z}_2$ matrislerini ele alalım. Bu iki matrisin çarpımı, matris çarpımı tanımından

$$\begin{aligned} XY &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AK + BM & AL + BN \\ CK + DM & CL + DN \end{pmatrix} \\ YX &= \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} KA + LC & KB + LD \\ MA + NC & MB + ND \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki matrisin süper izleri, süper iz tanımından

$$\begin{aligned}
Str(XY) &= tr(AK + BM) - tr(CL + DN) \\
&= tr(AK) + tr(BM) - tr(CL) - tr(DN) \\
Str(YX) &= tr(KA + LC) - tr(MB + ND) \\
&= tr(KA) + tr(LC) - tr(MB) - tr(ND)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bütün $|X|=i, |Y|=j$ durumları ele alındığında her iki eşitliğin eşit olduğu görülür. Son olarak da iii) şıkkının ispatını yapalım. O zaman,

$$\begin{aligned}
Str([X, Y]) &= Str(XY - (-1)^{|X||Y|} YX) \\
&= Str(XY) - Str((-1)^{|X||Y|} YX) \\
&= Str(XY) - (-1)^{|X||Y|} Str(YX) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tanım 3.32: $V = V_0 \oplus V_1$, bir süper cebir ve F bir cisim olsun. $f: V \times V \rightarrow F$ bilineer formu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa f ye *süper simetrik* adı verilir [21]:

- i) $f(V_i, V_j) \neq 0, \quad i \neq j$ için
- ii) $\forall a, b \in V$ için $f(a, b) = (-1)^{|a||b|} f(b, a)$

$gl(m|n)$ süper uzayı üzerinde $Str(X, Y) := Str(XY)$ olacak şekilde bir bilineer form tanımlayabiliriz. Buradan $Str(X, Y)$ fonksiyonu süper simetrik şartlarını sağladığından süper simetrik bir bilineer formdur.

BÖLÜM 4

LİE SÜPER CEBİR

4.1 Lie Süper Cebirin Tanımı ve Özellikleri

Tanım 4.1: $A = A_0 \oplus A_1$ süper cebiri verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa A süper cebirine *Lie süper cebiri* adı verilir [20]:

- i) $[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \rightarrow [a, b]$ dönüşümü tanımlansın. O zaman $\forall i, j \in \mathbb{Z}_2$ için $[A_i, A_j] \subset A_{i+j}$
- ii) $\forall a \in A_i, b \in A_j$ için $[a, b] = -(-1)^{|a||b|} [b, a]$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$
- iii) $(-1)^{|a||c|} [a, [b, c]] + (-1)^{|a||b|} [b, [c, a]] + (-1)^{|c||b|} [c, [a, b]] = 0$.
 $\forall a \in A_i, b \in A_j, c \in A_k$; $i, j, k \in \mathbb{Z}_2$

Burada (i) özelliğindeki $[\cdot, \cdot]$ çarpımına *Lie çarpımı* veya *Lie süper braketi* ve (ii) özelliğindeki özdeşliğe *dereceli antisimetrik* özelliği, (iii) özelliğine de *dereceli Jacobi özdeşliği* adı verilir. Ayrıca $\forall a, b \in A$ için $[a, b]$ nin paritesi yani derecesi $|[a, b]| = |a| + |b|$ olarak yazılır.

Not 4.1: Bir Lie süper cebiri genelde Lie cebiri olmamasına rağmen sıklıkla $\mathbb{Z}_2$ -dereceli Lie cebiri olarak adlandırılır.

Örnek 4.1: $gl(m|n) = gl(m|n)_0 \oplus gl(m|n)_1$ birleşmeli süper cebiri verilsin.

$\forall X, Y \in gl(m|n)$ için,

$$[X, Y] = XY - (-1)^{|X||Y|} YX$$

ile tanımlandığında bu uzay bir Lie süper cebir yapısına sahip olur [23].

Örnek 4.2: $A = A_0 \oplus A_1$ bir Lie süper cebir olsun. A nın alt cebiri olan A_0 cebirinin bir Lie cebiri olduğunu gösterelim. Bunun için Lie cebir koşullarının sağlandığını göstereceğiz.

$\forall a, b \in A_0$ için $[a, b] = -[b, a]$ dir. Çünkü $\forall a, b \in A_0$ aynı zamanda A Lie süper cebirinin elemanıdır. A bir Lie süper cebir ve $|a| = 0, |b| = 0$ olduğu için tanım 4.1 deki (ii) özelliğinde $|a| = 0, |b| = 0$ değerleri yerine yazılırsa eşitlik sağlanır.

Yine $\forall a, b, c \in A_0$ için,

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

olur. Çünkü $|a| = 0, |b| = 0$ ve $|c| = 0$ değerleri tanım 4.1 deki (iii) özelliğindeki eşitlikte yerine yazılırsa eşitliğin sağlandığı görülür.

Örnek 4.3: $A = A_0 \oplus A_1$, Lie süper cebiri verilsin. $\forall a, b \in A$ için,

$$[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \rightarrow [b, a]$$

olarak tanımlanan çarpım *ters çarpım* olarak adlandırılır ve bu çarpımla birlikte A , yine bir Lie süper cebir yapısına sahip olur [20].

Örnek 4.4: $A = A_0 \oplus A_1$, birleşmeli süper cebiri verilsin. $\forall a, b \in A$ için,

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba$$

şeklinde tanımlanan komütatör ile birlikte A , bir Lie süper cebirdir [20]. Şimdi doğruluğunu gösterelim.

$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2$ için $[A_i, A_j] \subset A_{i+j}$ dir. Gerçekten de $\forall a \in A_i, b \in A_j$ için $[a, b] \in [A_i, A_j]$ olduğu görülür. A bir süper cebir olduğundan $ab \in A_i A_j \subset A_{i+j}$ ve $ba \in A_j A_i \subset A_{i+j}$ olur. O zaman,

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba \in A_{i+j}.$$

olur. Buradan $[A_i, A_j] \subset A_{i+j}$ olduğu görülür.

$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2$ için $\forall a \in A_i, b \in A_j$ olsun. O zaman $[a, b] = -(-1)^{|a||b|} [b, a]$ eşitliğini gösterelim. $[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba$(1) olduğunu biliyoruz. (1) eşitliğinde a ve b nin yerlerini değiştirsek $[b, a] = ba - (-1)^{|a||b|} ab$(2) olarak yazabiliriz. (2) eşitliğinin her iki tarafını $-(-1)^{|a||b|}$ ile çarpalım. O zaman;

$$\begin{aligned} -(-1)^{|a||b|} [b, a] &= -(-1)^{|a||b|} ba + (-1)^{|a||b|+|a||b|} ab \\ &= -(-1)^{|a||b|} ba + (-1)^{2|a||b|} ab \\ &= ab - (-1)^{|a||b|} ba \\ &= [a, b]. \end{aligned}$$

olarak yazılır. $\forall i, j, k \in \mathbb{Z}_2$ için $\forall a \in A_i, b \in A_j$ ve $c \in A_k$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özelliği göstereceğiz.

$$(-1)^{|a||c|} [a, [b, c]] + (-1)^{|a||b|} [b, [c, a]] + (-1)^{|c||b|} [c, [a, b]] = 0.$$

Burada $\forall a \in A_i, b \in A_j$ için $[a, b] = |a| + |b|$ olarak yazıldığını hatırlayalım. O zaman,

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] &= [a, bc - (-1)^{|b||c|} cb] \\ &= a(bc - (-1)^{|b||c|} cb) - (-1)^{|a|(|b|+|c|)} (bc - (-1)^{|b||c|} cb)a \\ &= abc - (-1)^{|b||c|} acb - (-1)^{|a||b|+|a||c|} (bca - (-1)^{|b||c|} cba) \\ &= abc - (-1)^{|b||c|} acb - (-1)^{|a||b|+|a||c|} bca + (-1)^{|a||b|+|a||c|+|b||c|} cba \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada $[a, [b, c]]$ eşitliğini $(-1)^{|a||c|}$ ile çarptığımızda,

$$(-1)^{|a||c|} [a, [b, c]] = (-1)^{|a||c|} abc - (-1)^{|a||c|+|b||c|} acb - (-1)^{|a||b|} bca + (-1)^{|a||b|+|b||c|} cba \dots (*)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} [b, [c, a]] &= [b, ca - (-1)^{|c||a|} ac] \\ &= b(ca - (-1)^{|c||a|} ac) - (-1)^{|b|(|a|+|c|)} (ca - (-1)^{|c||a|} ac)b \\ &= bca - (-1)^{|c||a|} bac - (-1)^{|b||a|+|b||c|} (cab - (-1)^{|c||a|} acb) \\ &= bca - (-1)^{|c||a|} bac - (-1)^{|b||a|+|b||c|} cab + (-1)^{|b||a|+|b||c|+|a||c|} acb \end{aligned}$$

olarak bulunur. $[b, [c, a]]$ eşitliğini $(-1)^{|a||b|}$ ile çarparsak,

$$(-1)^{|a||b|} [b, [c, a]] = (-1)^{|a||b|} bca - (-1)^{|a||b|+|c||a|} bac - (-1)^{|b||c|} cab + (-1)^{|b||c|+|c||a|} acb \dots (**)$$

eşitliği elde edilir. Son olarak,

$$\begin{aligned} [c, [a, b]] &= [c, ab - (-1)^{|a||b|} ba] \\ &= c(ab - (-1)^{|a||b|} ba) - (-1)^{|c|(|a|+|b|)} (ab - (-1)^{|a||b|} ba)c \\ &= cab - (-1)^{|a||b|} cba - (-1)^{|c|(|a|+|b|)} (abc - (-1)^{|a||b|} bac) \\ &= cab - (-1)^{|a||b|} cba - (-1)^{|c||a|+|c||b|} abc - (-1)^{|c||a|+|c||b|+|a||b|} bac \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada da $[c, [a, b]]$ eşitliğini $(-1)^{|c||b|}$ ile çarptığımızda,

$$(-1)^{|c||b|} [c, [a, b]] = (-1)^{|c||b|} cab - (-1)^{|c||b|+|a||b|} cba - (-1)^{|c||a|} abc + (-1)^{|c||a|+|a||b|} bac \dots (***)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $(*)$, $(**)$ ve $(***)$ eşitlikleri toplandığında eşitliğin sağlandığı görülür.

Not 4.2: Bu örnekten gördüğümüz üzere Lie süper cebirleri kısmen komütatör yapısına ve kısmen de anti komütatör yapısına sahiptir.

Tanım 4.2 : $A = A_0 \oplus A_1$, Lie süper cebiri verilsin. Eğer $\emptyset \neq B \subset A$ alt kümesi için,

$$i) \quad \forall x, y \in B \text{ için } [x, y] \in B$$

$$ii) \quad \forall i \in \mathbb{Z}_2 \text{ için } B_i \subset A_i$$

koşulları sağlanıyorsa $B = B_0 \oplus B_1$ ye A nın *Lie süper alt cebiri* veya *alt cebiri* denir [22].

Eğer $B \neq A$ ve B , A nın alt cebiri oluyorsa B ye A nın *düzgün alt cebiri* denir.

Tanım 4.3: $A = A_0 \oplus A_1$ Lie süper cebiri verilsin. Eğer $\emptyset \neq I \subset A$ alt kümesi için,

$$i) \quad I, A \text{ nın alt cebiri (Liesüper alt cebiri)}$$

$$ii) \quad \forall a \in A, x \in I \text{ için } [a, x] \in I$$

özellikleri sağlanıyorsa I ya A nın bir *Lie süper ideali* veya *ideali* denir [22].

Özellik : A bir Lie süper cebir ve I ile I' , A nın iki ideali olsun. O zaman $[I, I']$ kümesi de A nın bir idealidir [22].

Tanım 4.4: $A = A_0 \oplus A_1$ ve $B = B_0 \oplus B_1$ iki Lie süper cebiri verilsin. Eğer $f : A \rightarrow B$ lineer dönüşümü $\forall a, b \in A$ için,

$$f([a, b]_A) = [f(a), f(b)]_B$$

koşulunu sağlıyorsa f dönüşümüne A dan B ye Lie süper cebirlerin *homomorfizması* denir.

Tanım 4.5: A , Lie süper cebiri verilsin. A , Lie süper cebirinin *merkezi*;

$$Z(A) = \{a \in A \mid [a, b] = 0, \forall b \in A\}$$

olarak tanımlanır [22].

Tanım 4.6: A , bir Lie süper cebir ve $\emptyset \neq S \subset A$ nın bir alt kümesi olsun.

$$C_A(S) = \{a \in A \mid [a, b] = 0, \forall b \in S\}$$

ile tanımlanan kümeye A Lie süper cebirinin S *merkezleştiricisi* denir [22].

Tanım 4.7: $sl(m|n) = \{X \in gl(m|n) \mid StrX = 0\}$ ile tanımlanan alt uzay, $gl(m|n)$ nin bir alt cebiridir ve *özel linear Lie süper cebir* olarak adlandırılır [22].

Lemma 4.1: F bir cisim olsun. $\tau = \tau_0 \oplus \tau_1$, F cismi üzerinde bir Lie süper cebir ve $A = A_0 \oplus A_1$ da F cismi üzerinde süper değişmeli birleşmeli cebir olsun.

$$\tau_A = (\tau \otimes A)_0 = (\tau_0 \otimes A_0) \oplus (\tau_1 \otimes A_1)$$

kümesini $\forall x, y \in \tau$ ve $a, b \in A$ olmak üzere $x \otimes a, y \otimes b \in \tau_A$ homojen elemanları için,

$$[,]: \tau_A \times \tau_A \rightarrow \tau_A$$

$$[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab$$

olarak tanımlayalım. O zaman τ_A kümesi bir Lie cebirdir [23].

İspat:

$\forall x, y \in \tau$ için $x \in \tau_i$ ve $y \in \tau_j$ olsun. Aynı zamanda $x \otimes a, y \otimes b \in (\tau \otimes A)_0$ olduğu için $a \in A_i, b \in A_j$; $i, j \in \mathbb{Z}_2$ olur. O zaman,

$$\begin{aligned} [x \otimes a, y \otimes b] &= [x, y] \otimes ab \\ &= -(-1)^{ij} [y, x] \otimes (-1)^{ij} ba \\ &= (-1)^{ij} (-1)^{ij} (-[y, x] \otimes ba) \\ &= (-1)^{2ij} (-[y, x] \otimes ba) \\ &= -[y, x] \otimes ba \\ &= -[y \otimes b, x \otimes a] \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla eşitlik sağlanmış oldu. Şimdi Jacobi özdeşliğinin sağlandığını yani $\forall x \otimes a, y \otimes b$ ve $z \otimes c \in \tau_A$ homojen elemanları için,

$$[x \otimes a, [y \otimes b, z \otimes c]] + [y \otimes b, [z \otimes c, x \otimes a]] + [z \otimes c, [x \otimes a, y \otimes b]] = 0$$

olduğunu gösterelim. $x \otimes a, y \otimes b$ ve $z \otimes c \in \tau_A$ homojen elemanlar olduklarından, $|x|=|a|=i, |y|=|b|=j$ ve $|z|=|c|=k$ olarak yazılır. O zaman Tanımdan,

$$[x \otimes a, [y \otimes b, z \otimes c]] = [x \otimes a, [y, z] \otimes bc] = [x, [y, z]] \otimes abc \dots (1)$$

$$[y \otimes b, [z \otimes c, x \otimes a]] = [y \otimes b, [z, x] \otimes ca] = [y, [z, x]] \otimes bca \dots (2)$$

$$[z \otimes c, [x \otimes a, y \otimes b]] = [z \otimes c, [x, y] \otimes ab] = [z, [x, y]] \otimes cab \dots (3)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi A nın süper değişmeli birleşmeli özelliğini kullanırsak,

$$bca = (-1)^{ik} bac = (-1)^{ik} (-1)^{ij} abc$$

$$cab = (-1)^{ik} acb = (-1)^{ik} (-1)^{kj} abc$$

olarak yazılır. Bu durumda,

$$[y, [z, x]] \otimes bca = [y, [z, x]] \otimes (-1)^{ik} (-1)^{ij} abc = (-1)^{ij} [y, [z, x]] \otimes (-1)^{ik} abc$$

$$[z, [x, y]] \otimes cab = [z, [x, y]] \otimes (-1)^{ik} (-1)^{kj} abc = (-1)^{kj} [z, [x, y]] \otimes (-1)^{ik} abc$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca τ bir Lie süper cebir olduğundan,

$$(-1)^{ik} [x, [y, z]] + (-1)^{ij} [y, [z, x]] + (-1)^{kj} [z, [x, y]] = 0$$

olduğunu biliyoruz. O zaman,

$$[y, [z, x]] \otimes bca = (-1)^{ij} [y, [z, x]] \otimes (-1)^{ik} abc$$

$$= \left(-(-1)^{ik} [x, [y, z]] - (-1)^{kj} [z, [x, y]] \right) \otimes (-1)^{ik} abc$$

$$= -(-1)^{ik} [x, [y, z]] \otimes (-1)^{ik} abc - (-1)^{kj} [z, [x, y]] \otimes (-1)^{ik} abc$$

$$= -[x, [y, z]] \otimes abc - (-1)^{kj} (-1)^{ik} [z, [x, y]] \otimes abc$$

olduğu görülür. Buradan,

$$[x, [y, z]] \otimes abc + [y, [z, x]] \otimes bca + [z, [x, y]] \otimes cab = [x, [y, z]] \otimes abc$$

$$- [x, [y, z]] \otimes abc - (-1)^{kj} (-1)^{ik} [z, [x, y]] \otimes abc + (-1)^{kj} (-1)^{ik} [z, [x, y]] \otimes abc$$

$$= 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.5: $V = V_0 \oplus V_1$, $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir vektör uzayı verilsin. O zaman $EndV = End(V)_0 \oplus End(V)_1$ süper cebiri, bir Lie süper cebir olur. Bu Lie süper cebirine V nin *genel lineer Lie süper cebiri* adı verilir ve $gl(V)$ olarak gösterilir.

Tanım 4.8: A , bir Lie süper cebir ve V , bir $\mathbb{Z}_2$ -dereceli bir vektör uzayı olsun.

$$f : A \rightarrow gl(V)$$

ile tanımlanan homomorfizmaya A Lie süper cebirinin *dereceli temsili* denir [20].

Tanım 4.9: $A = A_0 \oplus A_1$ bir süper cebiri verilsin. Aşağıdaki koşulu sağlayan $D \in End(A)_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ endomorfizmasına A nın α *dereceli türevi* denir [12].

$$D[a, b] = [D(a), b] + (-1)^{\alpha|a|} [a, D(b)] \quad a, b \in A \text{ için.}$$

A süper cebiri üzerinde α dereceli türevlerin uzayı, $Der(A)_\alpha$ ile gösterilir. Burada sırasıyla $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ olursa $Der(A)_0$, çift türevlerden ve $Der(A)_1$, tek türevlerden oluşur. Ayrıca $Der(A) = Der(A)_0 \oplus Der(A)_1$ uzayı, $EndA$ Lie süper cebirinin bir alt cebiridir.

$Der(A)$ nın elemanlarına A Lie süper cebirinin *süper türevleri* veya *türevi* denir.

$Der(A)$ uzayına da A Lie süper cebirinin *türev uzayı* denir [20].

Örnek 4.6: $A = A_0 \oplus A_1$, Lie süper cebiri verilsin. $\forall x \in A$ için $adx : A \rightarrow A$ lineer dönüşümünü,

$$adx(y) = [x, y], \quad \forall y \in A \text{ için}$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu durumda adx lineer dönüşümü, A nın bir süper türevidir. Şimdi adx lineer dönüşümünün A nın bir süper türevi olduğunu gösterelim. O zaman öncelikle türev tanımını kullanırsak, $\forall y, z \in A$ için

$$adx[y, z] = [adx(y), z] + (-1)^{|adx||y|} [y, adx(z)]$$

$$= [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|} [y, [x, z]] \dots (1)$$

eşitliği elde edilir. A , bir Lie süper cebir olduğundan $\forall x, y, z \in A$ için,

$$(-1)^{|x||z|} [x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|} [y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|} [z, [x, y]] = 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $(-1)^{|x||z|}$ çarparsak,

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= -(-1)^{|x||z|} (-1)^{|y||x|} [y, [z, x]] - (-1)^{|x||z|} (-1)^{|z||y|} [z, [x, y]] \\ &= -(-1)^{|x||z|} (-1)^{|y||x|} [y, -(-1)^{|z||x|} [x, z]] + (-1)^{|x||z|} (-1)^{|z||y|} (-1)^{|z|(|x|+|y|)} [[x, y], z] \\ &= (-1)^{|x||z|} (-1)^{|y||x|} (-1)^{|z||x|} [y, [x, z]] + (-1)^{|x||z|} (-1)^{|z||y|} (-1)^{|z||x|} (-1)^{|z||y|} [[x, y], z] \\ &= (-1)^{2|x||z|} (-1)^{|y||x|} [y, [x, z]] + (-1)^{2|x||z|} (-1)^{2|z||y|} [[x, y], z] \\ &= (-1)^{|y||x|} [y, [x, z]] + [[x, y], z] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi de adx in tanımını kullanalım. Bu durumda $\forall y, z \in A$ için,

$$adx[y, z] = [x[y, z]] = (-1)^{|y||x|} [y, [x, z]] + [[x, y], z] \dots (2)$$

elde edilir. Buradan (1) ve (2) eşitliklerinin eşit olduğu görülür. Dolayısıyla adx , A nın bir süper türevidir.

Tanım 4.10: $A = A_0 \oplus A_1$, bir Lie süper cebir olsun. $EndA$, A nın genel lineer Lie süper cebiri olmak üzere,

$$ad : A \rightarrow EndA$$

ile tanımlanan homomorfizmaya A nın *adjoint operatörü* adı verilir [20].

Adjoint operatörünün tanımından ve adx lineer dönüşümü, A nın bir süper türevi olduğundan dolayı ad dönüşümü,

$$ad : A \rightarrow Der(A)$$

$$x \rightarrow adx$$

şeklinde tanımlanan bir homomorfizma olur [20].

Tanım 4.11: $A = A_0 \oplus A_1$, süper cebiri verilsin. Eğer A , Lie süper cebir olursa o zaman $\forall x \in A$ için $adx \in \text{Der}(A)$ olur. $\forall x \in A$ için türevleri, adx formundaki türevlere *iç türevler* adı verilir [20].

Tanım 4.12: $A = A_0 \oplus A_1$, bir Lie süper cebir ve F , bir cisim olsun. A , üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan,

$$(\cdot, \cdot): A \times A \rightarrow F$$

bilineer form $\forall a, b, c \in A$ için,

$$([a, b], c) = (a, [b, c])$$

özellikliğini sağlıyorsa bu bilineer forma *invariant(değişmez)* adı verilir [23].

ε -TÜREVLERE BAĞLI OLAN DEĞİŞMELİ OLMAYAN GEOMETRİ

5.1 Değiştirme Çarpanları

Tanım 5.1: Γ değişmeli bir grup, K bir cisim ve $K^* = K / \{0\}$, K cisminin çarpımsal grubu olsun. Eğer $\forall i, j, k \in \Gamma$ için,

$$\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$$

$$(i, j) \rightarrow \varepsilon(i, j)$$

dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ε dönüşümüne bir *değiştirme çarpanı* adı verilir [7].

$$\varepsilon(i, j) \varepsilon(j, i) = 1_K \quad (5.1a)$$

$$\varepsilon(i, j+k) = \varepsilon(i, j) \varepsilon(i, k) \quad (5.1b)$$

$$\varepsilon(i+j, k) = \varepsilon(i, k) \varepsilon(j, k) \quad (5.1c)$$

Lemma 5.1: $\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ bir değiştirme çarpanı verilsin. Bu durumda $\forall i, j \in \Gamma$ için aşağıdaki özelliklerin hepsi geçerlidir.

$$i) \quad \varepsilon(i, 0) = \varepsilon(0, i) = 1_K$$

$$ii) \quad \varepsilon(i, i) \in \{1_K, -1_K\}$$

$$iii) \quad \varepsilon(j, i) = \varepsilon(i, -j) = \varepsilon(i, j)^{-1}$$

İspat:

i) $\forall i, j, k \in \Gamma$ için $j = k = 0$ alalım. Bu değerleri (5.1b) özelliğinde yerine yazarsak,

$$\varepsilon(i, 0+0) = \varepsilon(i, 0)\varepsilon(i, 0)$$

$$\varepsilon(i, 0) = \varepsilon(i, 0)\varepsilon(i, 0)$$

$$0_K = \varepsilon(i, 0)[\varepsilon(i, 0) - 1_K]$$

$\varepsilon(i, 0) \in K^*$ olduğundan $\varepsilon(i, 0) \neq 0_K$ olmalıdır. O zaman,

$$\varepsilon(i, 0) - 1_K = 0_K \Rightarrow \varepsilon(i, 0) = 1_K.$$

(5.1a) özelliğinde de $j = 0$ aldığımızda $\varepsilon(i, 0)\varepsilon(0, i) = 1_K$ olduğu görülür. $\varepsilon(i, 0) = 1_K$ olduğundan $\varepsilon(0, i) = 1_K$ olur.

ii) $\forall i, j \in \Gamma$ için $i = j$ olarak alalım. Bu değerleri (5.1a) özelliğinde yerine yazalım. Buradan,

$$\varepsilon(i, i)\varepsilon(i, i) = 1_K$$

$$\varepsilon(i, i)\varepsilon(i, i) - 1_K = 0_K$$

$$(\varepsilon(i, i) + 1_K)(\varepsilon(i, i) - 1_K) = 0_K$$

elde edilir. Buradan $\varepsilon(i, i) = 1_K$ veya $\varepsilon(i, i) = -1_K$ olur. Dolayısıyla $\varepsilon(i, i) \in \{1_K, -1_K\}$ olduğu görülür.

iii) $\forall i, j \in \Gamma$ olmak üzere $\varepsilon(i, j)\varepsilon(j, i) = 1_K$ olduğunu biliyoruz. $\varepsilon(i, j), \varepsilon(j, i) \in K^*$ olduğundan $\varepsilon(i, j)$ nin tersi $\varepsilon(j, i)^{-1}$ olarak yazılır. O zaman,

$$\varepsilon(j, i) = \varepsilon(i, j)^{-1} \dots (*)$$

olur.

Şimdi diğer eşitliği gösterelim. i) şıkkının sonucu olarak $\varepsilon(i, 0) = 1_K$ olduğunu biliyoruz. O zaman,

$$\varepsilon(i, j)\varepsilon(j, i) = 1_K = \varepsilon(i, 0) = \varepsilon(i, j-j) = \varepsilon(i, j)\varepsilon(i, -j)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafını soldan $\varepsilon(i, j)^{-1}$ çarparsak,

$$\varepsilon(i, j)^{-1}\varepsilon(i, j)\varepsilon(j, i) = \varepsilon(i, j)^{-1}\varepsilon(i, j)\varepsilon(i, -j) \Rightarrow \varepsilon(j, i) = \varepsilon(i, -j) \dots (*)$$

eşitliği elde edilir. (*) ve (**) eşitliğinden $\varepsilon(j, i) = \varepsilon(i, -j) = \varepsilon(i, j)^{-1}$ olarak yazılır.

Örnek 5.1: $\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ değiştirme çarpanı verilsin. Özel olarak ε değiştirme çarpanını, aşikar değiştirme çarpanı olarak alalım. Yani $\varepsilon(i, j) = 1_K$ olarak verilsin. O zaman $\forall i, j \in \Gamma$ için ε , bir değiştirme çarpanı olur.

Örnek 5.2: $\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ değiştirme çarpanı verilsin. Eğer özel olarak $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ alırsak, o zaman $\forall i, j \in \mathbb{Z}_2$ için $\varepsilon(i, j) = (-1)^{ij}$ değiştirme çarpanı olur.

Tanım 5.2: $\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ ve $\varepsilon' : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ değiştirme çarpanları olsun ve $f^*\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ dönüşümü verilsin. $\forall i, j \in \Gamma$ olmak üzere,

$$\varepsilon'(i, j) = f^*\varepsilon(i, j) = \varepsilon(f(i), f(j))$$

olacak şekilde bir $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ grup otomorfizması varsa ε ve ε' değiştirme çarpanları *denktir* denir ve $\varepsilon \approx \varepsilon'$ ile gösterilir. Ayrıca bir Γ grubunun grup otomorfizması $Aut(\Gamma)$ ile gösterilir [7].

Lemma 5.2: $\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ bir değiştirme çarpanı ve $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ grup otomorfizması olsun.

$$\Psi_\varepsilon : \Gamma \rightarrow \{1_K, -1_K\}$$

ile tanımlanan fonksiyon $\forall i \in \Gamma$ için $\Psi_\varepsilon(i) = \varepsilon(i, i)$ dir öyle ki bu fonksiyon $\forall f \in Aut(\Gamma)$ için,

$$\Psi_{f^*\varepsilon} = f^*\Psi_\varepsilon$$

eşitliğini sağlar.

İspat:

$\Psi_{f^*\varepsilon} = f^*\Psi_\varepsilon$ olduğunu gösterelim. Tanımdan $\forall i \in \Gamma$ için,

$$\Psi_{f^*\varepsilon}(i, i) = f^*\varepsilon(i, i) = \varepsilon(f(i), f(i)) \dots (*)$$

olarak yazılır. Benzer şekilde $\forall i \in \Gamma$ için,

$$f^*\Psi_\varepsilon(i, i) = \Psi_\varepsilon(f(i), f(i)) = \varepsilon(f(i), f(i)) \dots (**)$$

elde edilir. Dolayısıyla (*) ve (**) eşitliklerinin eşit olduğu görülür.

Tanım 5.3: Lemma 5.2 de tanımlanan Ψ_ε fonksiyonuna ε değiştirme çarpanının *işaret fonksiyonu* adı verilir [7].

Önerme 5.1: $\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ değiştirme çarpanı verilsin.

$$\Gamma_\varepsilon^0 = \{i \in \Gamma, \quad \varepsilon(i, i) = 1_K\} \quad \text{ve} \quad \Gamma_\varepsilon^1 = \{i \in \Gamma, \quad \varepsilon(i, i) = -1_K\}$$

kümelerini tanımlayalım. Eğer $\Gamma_\varepsilon^0 = \Gamma$ olursa ε , değiştirme çarpanına *düzgün değiştirme çarpanı* adı verilir. Ayrıca bu özellikte değiştirme çarpanları üzerindeki denklik bağıntısının uyumlu olduğu görülür. Eğer ε düzgün değilse o zaman Γ_ε^0 , indeksi 2 olan Γ nın bir alt grubudur ve Γ_ε^0 ile Γ_ε^1 , Γ nın kalanlarıdır [7].

İspat:

Öncelikle denklik bağıntısının yani yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinin sağlandığını gösterelim.

i) *Yansıma özelliği:* $\varepsilon \approx \varepsilon$ olduğu aşikardır. Çünkü $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$\varepsilon(i, j) = f^*\varepsilon(i, j) = \varepsilon(f(i), f(j))$$

olacak şekilde bir $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ vardır öyle ki bu f fonksiyonu $\forall i \in \Gamma$ için, $f(i) = i$ olacak şekilde bir birim fonksiyondur.

ii) *Simetri özelliği:* $\varepsilon \approx \varepsilon' \Rightarrow \varepsilon' \approx \varepsilon$ olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon \approx \varepsilon'$ olsun. Bu durumda $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$\varepsilon'(i, j) = f^*\varepsilon(i, j) = \varepsilon(f(i), f(j))$$

olacak şekilde bir $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ vardır. Şimdi bir g fonksiyonunu ele alalım. O zaman $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$\varepsilon(i, j) = g^* \varepsilon'(i, j) = g^* \varepsilon(f(i), f(j)) = \varepsilon(g(f(i)), g(f(j)))$$

olacak şekilde bir $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ vardır ve bu g fonksiyonu $\forall i \in \Gamma$ için, $g(f(i)) = i$ eşitliğinden $g = f^{-1}$ fonksiyonudur. $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ olduğundan $f^{-1} \in \text{Aut}(\Gamma)$ mevcuttur. Dolayısıyla simetri özelliği de sağlanmış oldu.

iii) *Geçişme özelliği*: $\varepsilon \approx \varepsilon'$ ve $\varepsilon' \approx \varepsilon''$ iken $\varepsilon \approx \varepsilon''$ olduğunu göstereceğiz. O zaman $\varepsilon \approx \varepsilon'$ ve $\varepsilon' \approx \varepsilon''$ olsun. Bu durumda $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$\varepsilon'(i, j) = f^* \varepsilon(i, j) = \varepsilon(f(i), f(j))$$

$$\varepsilon''(i, j) = g^* \varepsilon'(i, j) = \varepsilon'(g(i), g(j))$$

olacak şekilde $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ ve $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ vardır. Şimdi bir h fonksiyonunu ele alalım. O zaman $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$\varepsilon''(i, j) = h^* \varepsilon(i, j) = \varepsilon(h(i), h(j))$$

olacak şekilde bir $h \in \text{Aut}(\Gamma)$ vardır. Çünkü yukarıdaki iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} \varepsilon''(i, j) &= g^* \varepsilon'(i, j) \\ &= g^* \varepsilon(f(i), f(j)) \\ &= \varepsilon(g(f(i)), g(f(j))) \\ &= \varepsilon((g \circ f)(i), (g \circ f)(j)) \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan $\forall i \in \Gamma$ için, $h(i) = (g \circ f)(i)$ olarak yazılır. $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ ve $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ olduğundan $g \circ f \in \text{Aut}(\Gamma)$ dır. Dolayısıyla bir $h \in \text{Aut}(\Gamma)$ mevcuttur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi ε düzgün olmadığı zaman Γ_ε^0 nın Γ nın bir alt grubu olduğunu gösterelim. $\forall i, j \in \Gamma$ için, $i \in \Gamma_\varepsilon^0$ ve $j \in \Gamma_\varepsilon^0$ iken $i + j \in \Gamma_\varepsilon^0$ olduğunu göstereceğiz. $i \in \Gamma_\varepsilon^0$ ve $j \in \Gamma_\varepsilon^0$ olduğu için $\varepsilon(i, i) = 1_K$ ve $\varepsilon(j, j) = 1_K$ olarak yazarız.

$$\varepsilon(i + j, i + j) = \underbrace{\varepsilon(i, i)}_{1_K} \underbrace{\varepsilon(i, j)}_{1_K} \underbrace{\varepsilon(j, i)}_{1_K} \underbrace{\varepsilon(j, j)}_{1_K} = 1_K$$

olduğundan $i + j \in \Gamma_\varepsilon^0$ olur. Buradan Γ_ε^0 , Γ nın bir alt grubu olduğu görülür.

Tanım 5.4: $\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ bir değiştirme çarpanı, Γ_ε^0 ve Γ_ε^1 de Γ nın kalanları olsun. $\forall i, j \in \Gamma$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $s(\varepsilon)$ çarpanına ε değiştirme çarpanının *işaret çarpanı* adı verilir [7].

- i) Eğer $i \in \Gamma_\varepsilon^1$ ve $j \in \Gamma_\varepsilon^1$ iken $s(\varepsilon)(i, j) = -1_K$
- ii) Eğer $i \notin \Gamma_\varepsilon^1$ ve $j \notin \Gamma_\varepsilon^1$ iken $s(\varepsilon)(i, j) = 1_K$

Lemma 5.3: $\varepsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ değiştirme çarpanı verilsin. Bu durumda $s(\varepsilon)$ işaret çarpanı, $\forall f \in \text{Aut}(\Gamma)$ için $s(f^* \varepsilon) = f^* s(\varepsilon)$ şartını sağlayacak şekilde bir değiştirme çarpanıdır.

İspat:

$s(f^* \varepsilon) = f^* s(\varepsilon)$ olduğunu göstereceğiz. $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ olduğundan $f^* \varepsilon = \varepsilon'$ olacak şekilde bir ε' değiştirme çarpanı vardır. O zaman $\forall i, j \in \Gamma$ için, tanım 5.2 den

$$\varepsilon'(i, j) = f^* \varepsilon(i, j) = \varepsilon(f(i), f(j)) \Rightarrow s(\varepsilon')(i, j) = s(f^* \varepsilon)(i, j) = s(\varepsilon)(f(i), f(j))$$

elde edilir. Yine tanım 5.2 den hareketle aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$f^* s(\varepsilon)(i, j) = s(\varepsilon)(f(i), f(j)).$$

Buradan $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$s(f^* \varepsilon)(i, j) = s(\varepsilon)(f(i), f(j)) = f^* s(\varepsilon)(i, j) \Rightarrow s(f^* \varepsilon) = f^* s(\varepsilon)$$

olarak bulunur.

Lemma 5.4: Γ_1 ve Γ_2 değişmeli iki grup ve $K^* = K / \{0\}$, K cisminin çarpımsal grubu olsun.

$$\varepsilon_1 : \Gamma_1 \times \Gamma_1 \rightarrow K^* \quad , \quad \varepsilon_2 : \Gamma_2 \times \Gamma_2 \rightarrow K^*$$

değiştirme çarpanları verilsin.

$$\varepsilon : (\Gamma_1 \times \Gamma_2) \times (\Gamma_1 \times \Gamma_2) \rightarrow K^*$$

ile tanımlanan dönüşüm $\forall i_1, j_1 \in \Gamma_1$ ve $\forall i_2, j_2 \in \Gamma_2$ için,

$$\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = \varepsilon_1(i_1, j_1) \varepsilon_2(i_2, j_2)$$

olarak verilsin. Bu şekilde tanımlanan ε dönüşümü $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ değişmeli grubu üzerinde bir değiştirme çarpanıdır.

İspat:

$\forall i_1, j_1, k_1 \in \Gamma_1$ ve $\forall i_2, j_2, k_2 \in \Gamma_2$ için,

i) $\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2)) \varepsilon((j_1, j_2), (i_1, i_2)) = 1_K$ olduğunu göstereceğiz. Tanımdan aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = \varepsilon_1(i_1, j_1) \varepsilon_2(i_2, j_2) \dots (1)$$

$$\varepsilon((j_1, j_2), (i_1, i_2)) = \varepsilon_1(j_1, i_1) \varepsilon_2(j_2, i_2) \dots (2)$$

ε_1 ve ε_2 değiştirme çarpanları olduğundan $\varepsilon_1(j_1, i_1) \varepsilon_1(i_1, j_1) = 1_K$ ve $\varepsilon_2(j_2, i_2) \varepsilon_2(i_2, j_2) = 1_K$ eşitlikleri elde edilir. O zaman (1) ve (2) eşitliklerini taraf tarafa çarptığımızda,

$$\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2)) \varepsilon((j_1, j_2), (i_1, i_2)) = \varepsilon_1(i_1, j_1) \varepsilon_2(i_2, j_2) \varepsilon_1(j_1, i_1) \varepsilon_2(j_2, i_2) = 1_K$$

olur. Böylece ispatın (i) şıkkı gösterilmiş oldu.

ii) Şimdi $\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2) + (k_1, k_2)) = \varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2)) \varepsilon((i_1, i_2), (k_1, k_2))$ olduğunu gösterelim. Tanımdan,

$$\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2) + (k_1, k_2)) = \varepsilon((i_1, i_2), (j_1 + k_1, j_2 + k_2))$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_1(i_1, j_1 + k_1) \varepsilon_2(i_2, j_2 + k_2) \\
&= \varepsilon_1(i_1, j_1) \varepsilon_1(i_1, k_1) \varepsilon_2(i_2, j_2) \varepsilon_2(i_2, k_2) \dots (*)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine tanımdan,

$$\begin{aligned}
\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2)) \varepsilon((i_1, i_2), (k_1, k_2)) &= \varepsilon_1(i_1, j_1) \varepsilon_2(i_2, j_2) \varepsilon_1(i_1, k_1) \varepsilon_2(i_2, k_2) \\
&= \varepsilon_1(i_1, j_1) \varepsilon_1(i_1, k_1) \varepsilon_2(i_2, j_2) \varepsilon_2(i_2, k_2) \dots (**)
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Buradan (*) ve (**) eşitliklerinin her ikisinin eşit olduğu görülmektedir.

iii) Son olarak $\varepsilon((i_1, i_2) + (j_1, j_2), (k_1, k_2)) = \varepsilon((i_1, i_2), (k_1, k_2)) \varepsilon((j_1, j_2), (k_1, k_2))$ olduğunu gösterelim. Tanımdan,

$$\begin{aligned}
\varepsilon((i_1, i_2) + (j_1, j_2), (k_1, k_2)) &= \varepsilon((i_1 + j_1, i_2 + j_2), (k_1, k_2)) \\
&= \varepsilon_1(i_1 + j_1, k_1) \varepsilon_2(i_2 + j_2, k_2) \\
&= \varepsilon_1(i_1, k_1) \varepsilon_1(j_1, k_1) \varepsilon_2(i_2, k_2) \varepsilon_2(j_2, k_2) \\
&= \varepsilon((i_1, i_2), (k_1, k_2)) \varepsilon((j_1, j_2), (k_1, k_2))
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla ε nun $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ üzerinde bir değiştirme çarpanı olduğu görülür.

Önerme 5.1: Γ , sonlu üretilmiş bir değişmeli grup ve K bir cisim olsun. O zaman Γ , üreteçleri $\{e_r\}_{r \in I}$ şeklinde olan devirli grupların sonlu sayıdaki direkt çarpımı şeklinde yazılır.

K üzerinde ve Γ daki bir değiştirme çarpanı $\forall i = \sum_{r \in I} \lambda_r e_r, j = \sum_{s \in I} \mu_s e_s \in \Gamma$ olmak üzere aşağıdaki koşul sağlandığı takdirde,

$$\varepsilon(i, j) = \prod_{r, s \in I} \varepsilon(e_r, e_s)^{\lambda_r \mu_s}, \quad (\lambda_r, \mu_s \in \mathbb{Z})$$

formunda olur [7].

Koşul : $e_r, e_s \in \Gamma$ olsun. e_r nin mertebesi $m_r \geq 0$ ve e_s nin mertebesi $m_s \geq 0$ olmak üzere m_r ve m_s nin en büyük ortak böleni m_{rs} ise o zaman,

$$\forall r \in I \text{ için } m_r, \text{ tektir ve } \varepsilon(e_r, e_r) = 1_K$$

$$\forall r \in I \text{ için } m_r, \text{ çifttir ve } \varepsilon(e_r, e_r) = \pm 1_K$$

$$\forall r, s \in I \text{ için } \varepsilon(e_r, e_s)^{m_{rs}} = 1_K.$$

5.2 Schur Çarpanları

Tanım 5.5: Γ değişmeli bir grup, K bir cisim ve $K^* = K / \{0\}$, K cisminin çarpımsal grubu olsun. Eğer $\forall i, j, k \in \Gamma$ için,

$$\sigma : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$$

dönüşümü,

$$\sigma(i, j+k)\sigma(j, k) = \sigma(i, j)\sigma(i+j, k) \quad (5.2)$$

özellikliğini sağlıyorsa σ ya bir *çarpan kümesi* adı verilir [7].

Tanım 5.6: $\sigma : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ ve $\sigma' : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ iki çarpan kümesi olsun. Eğer $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$\sigma'(i, j) = \sigma(i, j)\rho(i+j)\rho(i)^{-1}\rho(j)^{-1}$$

koşulunu sağlayan bir $\rho : \Gamma \rightarrow K^*$ dönüşümü varsa σ ve σ' çarpan kümelerine *denktir* denir [7].

Çarpan kümelerinin bölüm kümesi, bu denklik bağıntısı ile birlikte K nın çarpımı altında bir değişmeli gruptur. Bu gruba Γ nın *çarpan grubu* denir ve M_Γ ile gösterilir.

M_Γ nın her $[\sigma]$ denklik sınıfına da bir *çarpan* adı verilir [7].

Tanım 5.7: $\sigma : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ bir çarpan kümesi ve $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ bir otomorfizma olsun. O zaman $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$f^*\sigma : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$$

dönüşümü,

$$f^*\sigma(i, j) = \sigma(f(i), f(j))$$

şeklinde tanımlandığında $f^*\sigma$ dönüşümüne f otomorfizmasının (pullback) geri çekilmesi adı verilir [7].

Lemma 5.5: $f^*\sigma : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$ dönüşümü verilsin. $\forall i, j \in \Gamma$ için $f^*\sigma$ dönüşümü bir çarpan kümesidir.

İspat:

$\forall i, j, k \in \Gamma$ için $f^*\sigma(i, j+k)\sigma(j, k) = f^*\sigma(i, j)f^*\sigma(i+j, k)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
 f^*\sigma(i, j+k)f^*\sigma(j, k) &= \sigma(f(i), f(j+k))\sigma(f(j), f(k)) \\
 &= \sigma(f(i), f(j)+f(k))\sigma(f(j), f(k)) \\
 &= \sigma(f(i), f(j))\sigma(f(i), f(k))\sigma(f(j), f(k)) \\
 &= \sigma(f(i), f(j))\sigma(f(i)+f(j), f(k)) \\
 &= \sigma(f(i), f(j))\sigma(f(i+j), f(k)) \\
 &= f^*\sigma(i, j)f^*\sigma(i+j, k)
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca bu işlem yukardaki denklik bağıntısıyla uyumludur. Dolayısıyla bu sayede çarpanlar üzerinde (pullback) geri çekilme $f^*[\sigma] = [f^*\sigma]$ olacak şekilde tanımlanır. Bu tanım çarpanlar grubu M_Γ üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar ama çarpımla uyumlu değildir.

Tanım 5.8: Γ değişmeli bir grup ve Γ_0 ile Γ_1 , Γ nın alt grupları olsun. $[\sigma]$ ve $[\sigma']$ iki çarpan olsun ve $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ verilsin. Eğer $f(\Gamma_1) = \Gamma_0$ ve $[\sigma'] = f^*[\sigma]$ oluyorsa o zaman $([\sigma], \Gamma_0)$ ile $([\sigma'], \Gamma_1)$ denktir denir [7].

5.3 Değişirme Çarpanları ile Çarpan Kümeleri Arasındaki İlişki

ε , bir değişirme çarpanı olsun. O zaman ε değişirme çarpanı, tanım 5.1 den dolayı aynı zamanda bir çarpan kümesidir. Fakat aşağıdaki teorem, değişirme çarpanları ile çarpan kümeleri arasında daha derin bir ilişki olduğunu göstermektedir.

Teorem 5.1: Γ değişmeli bir grup ve K bir cisim olsun.

- i) O zaman $\forall i, j \in \Gamma$ için $[\sigma]$ çarpanı Γ da ε_σ ile gösterilen bir tek düzgün değişirme çarpanını tanımlar.

$$\varepsilon_\sigma(i, j) = \sigma(i, j) \sigma(j, i)^{-1} \quad (5.3)$$

- ii) Eğer Γ sonlu üretilmişse o zaman Γ daki herhangi bir ε düzgün değişirme çarpanı, (5.3) özelliğindeki $[\sigma]$ çarpanıyla elde edilebilir.
- iii) Ayrıca K cebirsel kapalı cisim ise o zaman ε , $[\sigma]$ çarpanıyla elde edilir.
- iv) Sonlu üretilmiş Γ ve K cebirsel kapalı cismi için, Eğer ε_σ ve $\varepsilon_{\sigma'}$ gibi iki tane düzgün değişirme çarpanları denkse o zaman $[\sigma']$, $[\sigma]$ nın geri çekilmesidir [7].

İspat:

Öncelikle ε_σ nun değişirme çarpanı koşullarını sağladığını göstereceğiz.

- i) σ bir çarpan kümesi ve $\forall i, j \in \Gamma$ için $\varepsilon_\sigma(i, j) = \sigma(i, j) \sigma(j, i)^{-1}$ verilsin. O zaman,

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma(i, j) \varepsilon_\sigma(j, i) &= \sigma(i, j) \sigma(j, i)^{-1} \sigma(j, i) \sigma(i, j)^{-1} \\ &= \underbrace{\sigma(i, j) \sigma(i, j)^{-1}}_{1_K} \underbrace{\sigma(j, i)^{-1} \sigma(j, i)}_{1_K} = 1_K \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla tanım 5.1 in 1.aksiyomu gösterilmiş oldu. Şimdi de $\forall i, j, k \in \Gamma$ için $\varepsilon_\sigma(i, j+k) = \varepsilon_\sigma(i, j) \varepsilon_\sigma(i, k)$ olduğunu göstereceğiz. Tanımdan,

$$\varepsilon_\sigma(i, j+k) = \sigma(i, j+k) \sigma(j+k, i)^{-1} \dots (*)$$

$$\varepsilon_\sigma(i, j) \varepsilon_\sigma(i, k) = \sigma(i, j) \sigma(j, i)^{-1} \sigma(i, k) \sigma(k, i)^{-1}$$

eşitlikleri yazılır. Bu durumda her iki tarafın eşitliğini göstereceğiz.

σ bir çarpan kümesi olduğundan $\sigma(i, j+k)\sigma(j, k) = \sigma(i, j)\sigma(i+j, k)$ olarak yazılır.

Bu eşitliği kullanırsak,

$$\sigma(i, j+k) = \sigma(i, j)\sigma(i+j, k)\sigma(j, k)^{-1} \dots (1)$$

eşitliği elde edilir. (5.2) özelliğini bir daha kullandığımızda,

$$\sigma(j, k+i)\sigma(k, i) = \sigma(j, k)\sigma(j+k, i)$$

$$\sigma(j+k, i)^{-1} = \sigma(j, k)\sigma(j, k+i)^{-1}\sigma(k, i)^{-1} \dots (2)$$

eşitliği elde edilir. Γ değişmeli bir grup olduğundan $\forall i, j, k \in \Gamma$ için $\sigma(j, k+i) = \sigma(j, i+k)$ olarak yazılır. O zaman (5.2) özelliğini son kez kullanalım. Bu durumda,

$$\sigma(j, i+k)\sigma(i, k) = \sigma(j, i)\sigma(j+i, k)$$

$$\sigma(j, i+k)^{-1} = \sigma(j, i)^{-1}\sigma(j+i, k)^{-1}\sigma(i, k)^{-1} \dots (3)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (1) ve (2) eşitliklerini (*) eşitliğinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma(i, j+k) &= \underbrace{\sigma(i, j)\sigma(i+j, k)\sigma(j, k)^{-1}}_{\sigma(i, j+k)} \underbrace{\sigma(j, k)\sigma(j, k+i)^{-1}\sigma(k, i)^{-1}}_{\sigma(j+k, i)^{-1}} \\ &= \sigma(i, j)\sigma(i+j, k)\sigma(j, k+i)^{-1}\sigma(k, i)^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada da (3) eşitliğini yazarsak,

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma(i, j+k) &= \sigma(i, j)\sigma(i+j, k)\sigma(j, i)^{-1}\sigma(j+i, k)^{-1}\sigma(i, k)\sigma(k, i)^{-1} \\ &= \sigma(i, j)\sigma(j, i)^{-1}\sigma(i, k)\sigma(k, i)^{-1} \\ &= \varepsilon_\sigma(i, j)\varepsilon_\sigma(i, k) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Tanım 5.1 in 3.aksiyomu da buna benzer olarak ispat edilir. Şimdi tekliği yani $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\sigma$ olduğunu gösterelim. O zaman $\rho: \Gamma \rightarrow K^*$ bir dönüşüm olmak üzere,

$$\sigma'(i, j) = \sigma(i, j) \rho(i+j) \rho(i)^{-1} \rho(j)^{-1}, \quad \sigma'(j, i)^{-1} = \sigma(j, i)^{-1} \rho(j+i)^{-1} \rho(j) \rho(i)$$

eşitliklerini yazalım. Tanım 5.4 den,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma'} &= \sigma'(i, j) \sigma'(j, i)^{-1} = \sigma(i, j) \rho(i+j) \rho(i)^{-1} \rho(j)^{-1} \sigma(j, i)^{-1} \rho(j+i)^{-1} \rho(j) \rho(i) \\ &= \sigma(i, j) \sigma(j, i)^{-1} \\ &= \varepsilon_{\sigma} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Γ sonlu üretilmiş değişmeli bir grup ve $\{e_r\}_{r \in I}$ üreteç sistemi olsun. Burada I sonlu mertebeli bir kümedir. ε , Γ üzerinde bir düzgün değiştirme çarpanı olsun.

$\lambda_r, \mu_s \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall i = \sum_{r \in I} \lambda_r e_r, j = \sum_{s \in I} \mu_s e_s \in \Gamma$ için,

$$\sigma : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K^*$$

dönüşümünü tanımlayalım. O zaman,

$$\sigma(i, j) = \prod_{r < s} \varepsilon(e_r, e_s)^{\lambda_r \mu_s}$$

eşitliği elde edilir. $\forall r, s \in I$ için $\varepsilon(e_r, e_r) = 1_K$ ve $\varepsilon(e_r, e_s) = \varepsilon(e_s, e_r)^{-1}$ olduğundan

$\varepsilon = \sigma(i, j) \sigma(j, i)^{-1}$ olarak yazılır. Ayrıca $\forall k = \sum_{r \in I} \nu_r e_r \in \Gamma, (\nu_r \in \mathbb{Z})$ için,

$$\sigma(i, j+k) \sigma(j, k) = \prod_{r < s} \varepsilon(e_r, e_s)^{\lambda_r \mu_s + \lambda_r \nu_s + \mu_r \nu_s} = \sigma(i, j) \sigma(i+j, k)$$

olduğu görülür.

iii) Γ sonlu üretilmiş değişmeli bir grup, K cebirsel kapalı bir cisim ve ε , K üzerinde ve Γ da bir değiştirme çarpanı olsun. Kabul edelim ki ε değiştirme çarpanı, σ ve σ' gibi iki çarpan kümesinden elde edilmiş olsun. O zaman $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$\sigma(i, j) \sigma'(i, j)^{-1} = \sigma(j, i) \sigma'(j, i)^{-1}$$

olur. Bu da $\sigma \sigma'^{-1}$ in simetrik bir çarpan kümesi olduğunu gösterir. K cebirsel kapalı bir cisim olduğu için $\sigma \sigma'^{-1}$ tek bir tane çarpana denktir. Dolayısıyla σ ve σ' çarpanları aynı denklik sınıfındadırlar.

iv) Γ sonlu üretilmiş ve K cebirsel kapalı bir cisim olsun. ε ve ε' gibi iki denk değıştirme çarpanını göz önüne alalım ve $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ için $\varepsilon' = f^* \varepsilon$ dur. O zaman tek bir $[\sigma]$ çarpanı vardır öyle ki $\varepsilon = \varepsilon_\sigma$ dur. Bu durumda $\forall i, j \in \Gamma$ için,

$$\varepsilon'(i, j) = \sigma(f(i), f(j)) \sigma(f(j), f(i))^{-1} = \varepsilon_{f^* \sigma}(i, j)$$

olur.

Sonuç 5.1: Γ sonlu üretilmiş değışmeli bir grup ve K cebirsel kapalı bir cisim olsun. O zaman,

- i) Γ üzerindeki düzgün değıştirme çarpanları, Γ nın çarpanlarının yani geri çekilmelerinin denklik sınıflarıyla sınıflandırılır.
- ii) Γ üzerinde düzgün olmayan değıştirme çarpanları, Γ (indeksi 2) nın alt gruplarının ve çarpanlarının denklik sınıflarıyla sınıflandırılır [7].

İspat:

i) ispatı Teorem 5.1 in direkt sonucudur.

ii) ε_1 ve ε_2 , Γ üzerinde düzgün olmayan iki tane değıştirme çarpanı olsun. Bu durumda bir $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ vardır öyle ki $\varepsilon_2 = f^* \varepsilon_1$ ve $f(\Gamma_{\varepsilon_2}^0) = \Gamma_{\varepsilon_1}^0$ dir. O zaman $\forall \alpha = 1, 2$ için $\varepsilon_\alpha = s(\varepsilon_\alpha) \overline{\varepsilon_\alpha}$ olur. Burada $\overline{\varepsilon_\alpha}$ düzgün değıştirme çarpanıdır. Teorem 5.1 yi kullanırsak tek olacak şekilde $[\sigma_\alpha]$ çarpanları vardır öyle ki $\overline{\varepsilon_\alpha} = \varepsilon_{\sigma_\alpha}$ ve bu çarpanlar $[\sigma_2] = f^* [\sigma_1]$ eşitliğini sağlarlar. O zaman $([\sigma_1], \Gamma_{\varepsilon_1}^0)$ ve $([\sigma_2], \Gamma_{\varepsilon_2}^0)$ denktirler.

Tersine, $\forall \alpha = 1, 2$ için $[\sigma_\alpha]$ çarpanları ile birlikte $\varepsilon_\alpha = s(\varepsilon_\alpha) \varepsilon_{\sigma_\alpha}$ dir öyle ki $([\sigma_1], \Gamma_{\varepsilon_1}^0)$ ve $([\sigma_2], \Gamma_{\varepsilon_2}^0)$ denk olsunlar. O zaman bir $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ vardır öyle ki $f(\Gamma_{\varepsilon_2}^0) = \Gamma_{\varepsilon_1}^0$ ve $[\sigma_2] = f^* [\sigma_1]$ dir. Bu da $s(\varepsilon_2) = f^* s(\varepsilon_1)$ ve $\varepsilon_{\sigma_2} = f^* \varepsilon_{\sigma_1}$ olduğunu gösterir. Böylece $\varepsilon_2 = f^* \varepsilon_1$ olur ve ispat tamamlanır.

5.4 ε -Dereceli Birleşmeli Cebirler

K bir cisim ve $K^* = K / \{0\}$, K nin çarpımsal grubu olsun. Γ değişmeli bir grup olsun.

Tanım 5.9: A^* , K cismi üzerinde birleşmeli, birimli Γ -dereceli bir cebir olsun. Eğer A^* , Γ üzerinde bir ε değiştirme çarpanına sahipse o zaman (A^*, ε) ikilisine bir ε -dereceli (birleşmeli) cebir denir. (A^*, ε) , ε -dereceli birleşmeli cebiri kısaca A_ε^* ile gösterilecektir [14].

Bundan sonraki bütün ε -dereceli cebirlerimiz birleşmeli olarak ele alınacaktır.

Not 5.2: Buradaki ε -yapısı, derecelendirme grubu Γ dan dolayı sadece A^* cebiriyle ilgilidir. Özellikle cebirdeki çarpımın bu yapıyla bağlantısı yoktur.

Örnek 5.3: Herhangi $\mathbb{Z}$ -dereceli birleşmeli bir cebir, $\mathbb{Z}$ üzerindeki doğal değiştirme çarpanı yani $\varepsilon(i, j) = 1_K$ için, ε -dereceli birleşmeli bir cebirdir.

Tanım 5.10: g^* , Γ -dereceli bir vektör uzayı ve ε , Γ üzerinde bir değiştirme çarpanı olsun. Eğer $\forall a, b, c \in g^*$ homojen elemanları için,

$$[-, -]: g^* \times g^* \rightarrow g^*$$

sıfır dereceli homojen bilineer çarpımı;

$$[a, b]_\varepsilon = -\varepsilon(|a|, |b|)[b, a]_\varepsilon \quad (5.4)$$

$$\varepsilon(|c|, |a|)[a, [b, c]_\varepsilon]_\varepsilon + \varepsilon(|a|, |b|)[b, [c, a]_\varepsilon]_\varepsilon + \varepsilon(|b|, |c|)[c, [a, b]_\varepsilon]_\varepsilon = 0 \quad (5.5)$$

özelliklerini sağlıyorsa o zaman $(g^*, [-, -]_\varepsilon)$ ikilisine bir ε -Lie cebir adı verilir. Burada (5.4) özelliğine ε -dereceli antisimetrik özelliği, (5.5) özelliğine de ε -dereceli jacobı özdeşliği adı verilir. $|a| \in \Gamma$ elemanı, $a \in g^*$ nin derecesidir [7].

Tanım 5.11: $(g^*, [-, -]_\varepsilon)$ bir ε -Lie cebir olsun. Eğer $\forall a, b \in g^*$ için $[a, b]_\varepsilon = 0$ olursa o zaman $(g^*, [-, -]_\varepsilon)$ cebirine *değişmeli ε -Lie cebir* adı verilir [7].

Uyarı 5.1: $\varepsilon_1 : \Gamma_1 \times \Gamma_1 \rightarrow K^*$ ve $\varepsilon_2 : \Gamma_2 \times \Gamma_2 \rightarrow K^*$ değiştirme arpanları verilsin. $A^{\bullet,\bullet}$, birleşmeli ve birimli $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ -dereceli bir K -cebiri olsun. Lemma 5.4 den $\forall i_1, j_1 \in \Gamma_1$ ve $\forall i_2, j_2 \in \Gamma_2$ için,

$$\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = \varepsilon_1(i_1, j_1) \varepsilon_2(i_2, j_2)$$

dönüşümünün $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ değişmeli grubu üzerinde bir değiştirme çarpanı olduğunu biliyoruz. O zaman $A^{\bullet,\bullet}$, ε değiştirme çarpanı ile birlikte ε -dereceli bir cebir olur [7].

Tanım 5.12: $A_\varepsilon^\bullet$, ε -dereceli birleşmeli bir cebir olsun. $\forall a, b \in A^\bullet$ homojen elemanları için,

$$[a, b]_\varepsilon = ab - \varepsilon(|a|, |b|)ba \quad (5.6)$$

ile tanımlandığında $A_\varepsilon^\bullet$, cebiri bir ε -Lie cebiri olur. Bu cebir $A_{Lie, \varepsilon}^\bullet$ ile gösterilecektir [7].

İspat:

Öncelikle $\forall a \in A_i^\bullet, b \in A_j^\bullet$ için $[a, b]_\varepsilon = -\varepsilon(i, j)[b, a]_\varepsilon$ olduğunu göstereceğiz.

Tanımdan aşağıdaki eşitlikler,

$$[a, b]_\varepsilon = ab - \varepsilon(i, j)ba \dots (1) \text{ ve } [b, a]_\varepsilon = ba - \varepsilon(j, i)ab \dots (2)$$

elde edilir. Burada (2) eşitliğinin her iki tarafını $-\varepsilon(i, j)$ çarpalım. O zaman,

$$\begin{aligned} -\varepsilon(i, j)[b, a]_\varepsilon &= -\varepsilon(i, j)ba + \underbrace{\varepsilon(i, j)\varepsilon(j, i)}_{1_K}ab \\ &= ab - \varepsilon(i, j)ba \\ &= [a, b]_\varepsilon \end{aligned}$$

olarak bulunur. şimdi $\forall a \in A_i^\bullet, b \in A_j^\bullet, c \in A_k^\bullet$ için, $|a| = i, |b| = j, |c| = k$ olmak üzere

$$\varepsilon(k, i)[a, [b, c]_\varepsilon]_\varepsilon + \varepsilon(i, j)[b, [c, a]_\varepsilon]_\varepsilon + \varepsilon(j, k)[c, [a, b]_\varepsilon]_\varepsilon = 0$$

olduğunu gösterelim. Tanımdan,

$$[a, [b, c]_\varepsilon]_\varepsilon = [a, bc - \varepsilon(j, k)cb]$$

$$\begin{aligned}
&= a(bc - \varepsilon(j, k)cb) - \varepsilon(i, j+k)(bc - \varepsilon(j, k)cb)a \\
&= abc - \varepsilon(j, k)acb - \varepsilon(i, j+k)bca + \varepsilon(i, j+k)\varepsilon(j, k)cba
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda bu eşitliği $\varepsilon(k, i)$ ile çarptığımızda,

$$\varepsilon(k, i)[a, [b, c]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} = \varepsilon(k, i)abc - \varepsilon(k, i)\varepsilon(j, k)acb - \varepsilon(i, j)bca + \varepsilon(i, j)\varepsilon(j, k)cba \dots (1)$$

olarak yazılır. Benzer şekilde tanımdan,

$$\begin{aligned}
[b, [c, a]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} &= [b, ca - \varepsilon(k, i)ac] \\
&= b(ca - \varepsilon(k, i)ac) - \varepsilon(j, i+k)(ca - \varepsilon(k, i)ac)b \\
&= bca - \varepsilon(k, i)bac - \varepsilon(j, i+k)cab + \varepsilon(j, i+k)\varepsilon(k, i)acb
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan bu eşitliği $\varepsilon(i, j)$ ile çarptığımızda,

$$\varepsilon(i, j)[b, [c, a]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} = \varepsilon(i, j)bca - \varepsilon(i, j)\varepsilon(k, i)bac - \varepsilon(j, k)cab + \varepsilon(j, k)\varepsilon(k, i)acb \dots (2)$$

olur. Son olarak tanımdan,

$$\begin{aligned}
[c, [a, b]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} &= [c, ab - \varepsilon(i, j)ba] \\
&= c(ab - \varepsilon(i, j)ba) - \varepsilon(k, i+j)(ab - \varepsilon(i, j)ba)c \\
&= cab - \varepsilon(i, j)cba - \varepsilon(k, i+j)abc + \varepsilon(k, i+j)\varepsilon(i, j)bac
\end{aligned}$$

olduğu görülür. O zaman bu eşitliği $\varepsilon(j, k)$ ile çarptığımızda,

$$\varepsilon(j, k)[c, [a, b]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} = \varepsilon(j, k)cab - \varepsilon(j, k)\varepsilon(i, j)cba - \varepsilon(k, i)abc + \varepsilon(k, i)\varepsilon(i, j)bac \dots (3)$$

eşitliği elde edilir. Buradan (1), (2) ve (3) eşitliklerini toplarsak sonucun sıfır olduğu görülür.

Örnek 5.4: $g^{\bullet}$, Γ -dereceli bir ε -Lie cebir olsun. Özel olarak, ε değiştirme çarpanını aşıkâr değiştirme çarpanı olarak ele alalım. Yani $\forall i, j \in \Gamma$ için $\varepsilon(i, j) = 1_K$ olarak tanımlansın. Bu durumda $g^{\bullet}$, Γ -dereceli bir ε -Lie cebiri, Γ -dereceli bir Lie cebiri olur. Dolayısıyla Γ -dereceli bir Lie cebir, Γ -dereceli bir ε -Lie cebirinin özel bir sonucudur.

Örnek 5.5: $g^\bullet$, Γ -dereceli bir ε -Lie cebir olsun. Özel olarak $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ alalım. $\forall i, j \in \mathbb{Z}_2$ için $\varepsilon(i, j) = (-1)^{ij}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathbb{Z}_2$ -dereceli ε -Lie cebirleri dediğimiz şey aslında Lie süper cebirler olur.

Tanım 5.13: $A_\varepsilon^\bullet$, Γ -dereceli bir ε -Lie cebir olsun. Eğer $\forall a, b \in A_\varepsilon^\bullet$ için,

$$ab = \varepsilon(|a|, |b|)ba$$

oluyorsa $A_\varepsilon^\bullet$ cebirine ε -dereceli değişmeli cebir adı verilir [7].

Burada $\Gamma = \mathbb{Z}$ durumunu ele alalım. Eğer $\varepsilon(|a|, |b|) = 1$ olursa yani ε değiştirme çarpanını aşikar değiştirme çarpanı olarak ele alırsak; o zaman ε -dereceli değişmeli cebirler, değişmeli ve dereceli cebirlerden elde edilir. Fakat $\varepsilon(|a|, |b|) = (-1)^{|a||b|}$ olursa yani ε değiştirme çarpanını aşikar olmayan değiştirme çarpanı olarak ele alırsak; o zaman ε -dereceli değişmeli cebirler, dereceli değişmeli cebirlerden elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ -dereceli cebirlerin elde edilmesi ε değiştirme çarpanının seçimine bağlı olarak değişir.

Tanım 5.14: $A_\varepsilon^\bullet$, ε -dereceli birleşmeli bir cebir olsun. $A_\varepsilon^\bullet$ cebirinin ε -merkezi,

$$Z_\varepsilon^\bullet(A) = \{a \in A_\varepsilon^\bullet \mid \forall b \in A_\varepsilon^\bullet, [a, b]_\varepsilon = 0\}$$

şeklinde tanımlanır [7].

Γ -dereceli bir cebir üzerindeki ε -merkez, ε -yapısının seçimine bağlı olarak farklı olabilir. $A_\varepsilon^\bullet$, birimli ise $|1| = 0$ ve $1 \in Z_\varepsilon^\bullet(A)$ dır.

$A^\bullet$ ve $B^\bullet$ aynı ε değiştirme çarpanına sahip iki ε -dereceli cebir olsun. Eğer $\forall a, b \in A^\bullet$ için $\varphi: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ dönüşümü aşağıdaki özelliği sağlıyorsa φ dönüşümüne $A^\bullet$ ve $B^\bullet$, ε -dereceli cebirlerinin homomorfizması denir [7].

$$\varphi([a, b]_\varepsilon) = [\varphi(a), \varphi(b)]_\varepsilon$$

Ayrıca φ homomorfizması $A_{Lie, \varepsilon}^\bullet$ ve $B_{Lie, \varepsilon}^\bullet$ arasındaki ε -Lie cebirlerinin bir homomorfizması olarak yazılabilir.

Tanım 5.15: $A^\bullet$ ve $B^\bullet$ aynı ε değiştirme arpanına sahip iki ε -dereceli cebir olsun. $A^\bullet$ ve $B^\bullet$ nin ε -dereceli tensör çarpımı, $\forall a, c \in A^\bullet$ ve $\forall b, d \in B^\bullet$ homojen elemanları için,

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = \varepsilon(|b|, |c|)(ac) \otimes (bd)$$

şeklinde tanımlanır. $A^\bullet$ ve $B^\bullet$ nin ε -dereceli tensör arpımı, $(A \otimes B)^\bullet$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle $(A \otimes B)^\bullet$, Γ -dereceli vektör uzayı olarak tanımlanan ε -dereceli bir cebirdir [7].

Lemma 5.6: $A_\varepsilon^\bullet$ ve $B_\varepsilon^\bullet$, iki ε -dereceli değişmeli cebir olsun. Bu durumda $A_\varepsilon^\bullet$ ve $B_\varepsilon^\bullet$ nin ε -dereceli tensör çarpımı da ε -dereceli değişmeli cebirdir.

İspat:

$(A \otimes B)^\bullet = \bigoplus_{\theta \in \Gamma} (A \otimes B)_\theta^\bullet = \bigoplus_{i+j=\theta} (A_i^\bullet \otimes B_j^\bullet)$, Γ -dereceli vektör uzaylarının tensör çarpımı olarak yazıldığını biliyoruz. O zaman $a \otimes b \in (A \otimes B)_\theta^\bullet$ ve $c \otimes d \in (A \otimes B)_\alpha^\bullet$ için, $(a \otimes b)(c \otimes d) = \varepsilon(\theta, \alpha)(c \otimes d)(a \otimes b)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

$a \otimes b \in (A \otimes B)_\theta^\bullet$ ve $c \otimes d \in (A \otimes B)_\alpha^\bullet$ olduğundan $a \in A_i^\bullet, b \in B_j^\bullet$ ve $c \in A_k^\bullet, d \in B_l^\bullet$ olarak yazılır. $A_\varepsilon^\bullet$ ve $B_\varepsilon^\bullet$, ε -dereceli değişmeli cebir olduklarından,

$$ac = \varepsilon(i, k)ca \text{ ve } bd = \varepsilon(j, l)db$$

eşitlikleri elde edilir. ε -dereceli tensör çarpımı tanımından,

$$(c \otimes d)(a \otimes b) = \varepsilon(l, i)(ca) \otimes (db)$$

olduğu görülür. ε , değiştirme çarpanı olduğundan $\varepsilon(l, i)^{-1} = \varepsilon(i, l)$ olarak yazılır. O zaman,

$$(c \otimes d)(a \otimes b) = \varepsilon(l, i)(ca) \otimes (db) \Rightarrow (ca) \otimes (db) = \varepsilon(l, i)^{-1}(c \otimes d)(a \otimes b)$$

eşitliğini elde ederiz. Yine ε -dereceli tensör çarpımının tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(c \otimes d) &= \varepsilon(j, k)(ac) \otimes (bd) \\ &= \varepsilon(j, k)(\varepsilon(i, k)ca) \otimes (\varepsilon(j, l)db) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon(j, k) \varepsilon(i, k) \varepsilon(j, l) (ca) \otimes (db) \\
&= \varepsilon(j, k) \varepsilon(i, k) \varepsilon(j, l) \varepsilon(i, l) (c \otimes d) (a \otimes b) \\
&= \varepsilon(j+i, k) \varepsilon(j+i, l) (c \otimes d) (a \otimes b) \\
&= \varepsilon(j+i, k+l) (c \otimes d) (a \otimes b) \\
&= \varepsilon(\theta, \alpha) (c \otimes d) (a \otimes b)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 5.16: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. Eğer $\forall a, b \in A^\bullet$ homojen elemanları için $T : A^\bullet \rightarrow K$ lineer dönüşümü,

$$T(a.b) = \varepsilon(|a|, |b|) T(b.a)$$

özellikliğini sağlıyorsa T dönüşümüne bir ε -iz adı verilir [7].

Tanım 5.17: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $M^\bullet$ uzayına ε -dereceli bir sağ modül veya $A^\bullet$ üzerinde Γ -dereceli bir (sağ) modül adı verilir [7].

- i) $M^\bullet = \bigoplus_{i \in \Gamma} M_i^\bullet$, (Γ -dereceli vektör uzayı)
- ii) $f : M^\bullet \times A^\bullet \rightarrow M^\bullet$, $\forall m \in M^\bullet$ ve $\forall a \in A^\bullet$ için $f(m, a) = \varepsilon(|m|, |a|) ma$
- iii) $\forall i, j \in \Gamma$ için $M_i^\bullet A_j^\bullet \subset M_{i+j}^\bullet$

Benzer şekilde $M^\bullet$, $A^\bullet$ üzerinde bir sol modül olarak alınırsa; o zaman $M^\bullet$, ε -dereceli bir sol modül olur.

Eğer $M^\bullet$, $A^\bullet$ üzerinde hem sol modül hem de sağ modül özelliklerini sağlıyorsa o zaman $M^\bullet$ ye ε -dereceli bir modül adı verilir. $M^\bullet$ nin homomorfizmalarının uzayı ε -dereceli bir cebirdir ve $Hom_A^\bullet(M, M)$ ile gösterilecektir.

Tanım 5.18: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. $A^\bullet$ üzerinde ε -türev aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\partial : A^\bullet \rightarrow A^\bullet$ lineer dönüşümü olarak tanımlanır [7].

- 1) ∂ , $|\partial| \in \Gamma$ dereceli homojen bir lineer dönüşüm (Γ -dereceli vektör uzayların dönüşümü olarak)

$$2) \quad \forall a, b \in A^\bullet \text{ için } \partial(ab) = \partial(a).b + \varepsilon(|\partial|, |a|)a.\partial(b) \quad (\text{Leibniz Kuralı})$$

$A^\bullet$, ε -dereceli cebiri üzerindeki bütün ε -türevlerin Γ -dereceli uzayı $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ ile gösterilir.

Önerme 5.2: $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ uzayı, aşağıdaki şekilde tanımlanan braket işlemi için bir ε -Lie cebiridir.

$$[\partial, \mathfrak{R}]_\varepsilon = \partial.\mathfrak{R} - \varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)\mathfrak{R}.\partial \quad (5.7)$$

Ayrıca $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ uzayı, $\forall \partial \in Der_\varepsilon^\bullet(A), \forall z \in Z_\varepsilon^\bullet(A)$ ve $\forall a \in A^\bullet$ homojen elemanları için,

$$(z.\partial)(a) = \varepsilon(|z|, |\partial|)(\partial.z)(a) = z(\partial(a)) \quad (5.8)$$

tanımıyla beraber bir $Z_\varepsilon^\bullet(A)$ -bimodüldür [7].

İspat:

$Der_\varepsilon^\bullet(A) = \bigoplus_{i \in \Gamma} Der_\varepsilon^\bullet(A)_i$ kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanan işlemlerle birlikte bir vektör uzayıdır.

$$\forall \partial_1, \partial_2 \in Der_\varepsilon^\bullet(A) \text{ ve } \forall a \in A^\bullet \text{ için } (\partial_1 + \partial_2)(a) = \partial_1(a) + \partial_2(a)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall \partial \in Der_\varepsilon^\bullet(A) \text{ ve } \forall a \in A^\bullet \text{ için } (\lambda.\partial)(a) = \lambda.\partial(a)$$

Şimdi $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ uzayının ε -Lie cebiri olduğunu gösterelim. $\forall \partial, \mathfrak{R} \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ için $[\partial, \mathfrak{R}]_\varepsilon = -\varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)[\mathfrak{R}, \partial]_\varepsilon$ olduğunu göstereceğiz. O zaman tanımdan,

$$[\partial, \mathfrak{R}]_\varepsilon = \partial.\mathfrak{R} - \varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)\mathfrak{R}.\partial \dots (1) \text{ ve } [\mathfrak{R}, \partial]_\varepsilon = \mathfrak{R}.\partial - \varepsilon(|\mathfrak{R}|, |\partial|)\partial.\mathfrak{R} \dots (2)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda (2) eşitliğinin her iki tarafını $-\varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)$ ile çarpalım.

O zaman,

$$\begin{aligned} -\varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)[\mathfrak{R}, \partial]_\varepsilon &= -\varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)\mathfrak{R}.\partial + \underbrace{\varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)\varepsilon(|\mathfrak{R}|, |\partial|)}_{1_K}\partial.\mathfrak{R} \\ &= \partial.\mathfrak{R} - \varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)\mathfrak{R}.\partial \\ &= [\partial, \mathfrak{R}]_\varepsilon \end{aligned}$$

olarak yazılır. Şimdi $\forall \partial, \mathfrak{R}, \mathfrak{T} \in Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ için $(|\partial| = i, |\mathfrak{R}| = j, |\mathfrak{T}| = k)$ olmak üzere,

$$\varepsilon(k, i) [\partial, [\mathfrak{R}, \mathfrak{T}]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} + \varepsilon(i, j) [\mathfrak{R}, [\mathfrak{T}, \partial]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} + \varepsilon(j, k) [\mathfrak{T}, [\partial, \mathfrak{R}]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} = 0$$

olduğunu göstereceğiz. Tanımdan,

$$\begin{aligned} [\partial, [\mathfrak{R}, \mathfrak{T}]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} &= [\partial, \mathfrak{R}.\mathfrak{T} - \varepsilon(j, k) \mathfrak{T}.\mathfrak{R}]_{\varepsilon} \\ &= \partial(\mathfrak{R}.\mathfrak{T} - \varepsilon(j, k) \mathfrak{T}.\mathfrak{R}) - \varepsilon(i, j+k)(\mathfrak{R}.\mathfrak{T} - \varepsilon(j, k) \mathfrak{T}.\mathfrak{R})\partial \\ &= \partial.\mathfrak{R}.\mathfrak{T} - \varepsilon(j, k) \partial.\mathfrak{T}.\mathfrak{R} - \varepsilon(i, j+k) \mathfrak{R}.\mathfrak{T}.\partial + \varepsilon(i, j+k) \varepsilon(j, k) \mathfrak{T}.\mathfrak{R}.\partial \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O zaman bu eşitliği $\varepsilon(k, i)$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned} \varepsilon(k, i) [\partial, [\mathfrak{R}, \mathfrak{T}]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} &= \varepsilon(k, i) \partial.\mathfrak{R}.\mathfrak{T} - \varepsilon(k, i) \varepsilon(j, k) \partial.\mathfrak{T}.\mathfrak{R} - \varepsilon(i, j) \mathfrak{R}.\mathfrak{T}.\partial \\ &\quad + \varepsilon(i, j) \varepsilon(j, k) \mathfrak{T}.\mathfrak{R}.\partial \dots (1) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde tanımdan,

$$\begin{aligned} [\mathfrak{R}, [\mathfrak{T}, \partial]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} &= [\mathfrak{R}, \mathfrak{T}.\partial - \varepsilon(k, i) \partial.\mathfrak{T}]_{\varepsilon} \\ &= \mathfrak{R}(\mathfrak{T}.\partial - \varepsilon(k, i) \partial.\mathfrak{T}) - \varepsilon(j, k+i)(\mathfrak{T}.\partial - \varepsilon(k, i) \partial.\mathfrak{T})\mathfrak{R} \\ &= \mathfrak{R}.\mathfrak{T}.\partial - \varepsilon(k, i) \mathfrak{R}.\partial.\mathfrak{T} - \varepsilon(j, k+i) \mathfrak{T}.\partial.\mathfrak{R} + \varepsilon(j, k+i) \varepsilon(k, i) \partial.\mathfrak{T}.\mathfrak{R} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan bu eşitliği $\varepsilon(i, j)$ ile çarptığımızda,

$$\begin{aligned} \varepsilon(i, j) [\mathfrak{R}, [\mathfrak{T}, \partial]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} &= \varepsilon(i, j) \mathfrak{R}.\mathfrak{T}.\partial - \varepsilon(i, j) \varepsilon(k, i) \mathfrak{R}.\partial.\mathfrak{T} - \varepsilon(j, k) \mathfrak{T}.\partial.\mathfrak{R} \\ &\quad + \varepsilon(j, k) \varepsilon(k, i) \partial.\mathfrak{T}.\mathfrak{R} \dots (2) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Son olarak tanımdan,

$$\begin{aligned} [\mathfrak{T}, [\partial, \mathfrak{R}]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} &= [\mathfrak{T}, \partial.\mathfrak{R} - \varepsilon(i, j) \mathfrak{R}.\partial]_{\varepsilon} \\ &= \mathfrak{T}(\partial.\mathfrak{R} - \varepsilon(i, j) \mathfrak{R}.\partial) - \varepsilon(k, i+j)(\partial.\mathfrak{R} - \varepsilon(i, j) \mathfrak{R}.\partial)\mathfrak{T} \\ &= \mathfrak{T}.\partial.\mathfrak{R} - \varepsilon(i, j) \mathfrak{T}.\mathfrak{R}.\partial - \varepsilon(k, i+j) \partial.\mathfrak{R}.\mathfrak{T} + \varepsilon(k, i+j) \varepsilon(i, j) \mathfrak{R}.\partial.\mathfrak{T} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu durumda bulduğumuz bu eşitliği $\varepsilon(j, k)$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned} \varepsilon(j, k) [\mathfrak{T}, [\partial, \mathfrak{R}]_{\varepsilon}]_{\varepsilon} &= \varepsilon(j, k) \mathfrak{T}.\partial.\mathfrak{R} - \varepsilon(j, k) \varepsilon(i, j) \mathfrak{T}.\mathfrak{R}.\partial - \varepsilon(k, i) \partial.\mathfrak{R}.\mathfrak{T} \\ &\quad + \varepsilon(k, i) \varepsilon(i, j) \mathfrak{R}.\partial.\mathfrak{T} \dots (3) \end{aligned}$$

olur. (1),(2) ve (3) eşitlikleri toplandığında sonucun sıfır olduğu görülmektedir. Şimdi $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ uzayının $Z_\varepsilon^\bullet(A)$ -bimodül olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle,

$$Z_\varepsilon^\bullet(A) \times Der_\varepsilon^\bullet(A) \rightarrow Der_\varepsilon^\bullet(A) \text{ ve } Der_\varepsilon^\bullet(A) \times Z_\varepsilon^\bullet(A) \rightarrow Der_\varepsilon^\bullet(A)$$

olduğunu yani $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ uzayının, $Z_\varepsilon^\bullet(A)$ üzerinde sağ ve sol modül olduğunu göstereceğiz. $\forall z \in Z_\varepsilon^\bullet(A)$ ve $\forall \partial \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ için, $z.\partial \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ ve $\partial.z \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ olduğunu gösterelim. Bu durumda (5.8) eşitliğinden, $\forall a, b \in A^\bullet$ için,

$$\begin{aligned} (z.\partial)(a.b) &= z.\partial(a.b) = z(\partial(a).b + \varepsilon(|\partial|, |a|).a.\partial(b)) \\ &= z.\partial(a).b + z.\varepsilon(|\partial|, |a|).a.\partial(b) \\ &= z.\partial(a).b + \varepsilon(|\partial|, |a|)z.a.\partial(b) \\ &= (z.\partial)(a).b + \varepsilon(|\partial|, |a|)\varepsilon(|z|, |a|)a.z.\partial(b) \\ &= (z.\partial)(a).b + \varepsilon(|\partial|, |a|)\varepsilon(|z|, |a|)a.(z.\partial)(b) \\ &= (z.\partial)(a).b + \varepsilon(|\partial| + |z|, |a|)a.(z.\partial)(b) \\ &= (z.\partial)(a).b + \varepsilon(|z.\partial|, |a|)a.(z.\partial)(b) \end{aligned}$$

olur. Buradan $z.\partial \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ olarak yazılır. $\forall a, b \in A^\bullet$ için,

$$\varepsilon(|z|, |\partial|)(\partial.z)(a) = (z.\partial)(a) \Rightarrow (\partial.z)(a) = \varepsilon(|\partial|, |z|)(z.\partial)(a)$$

şeklinde yazılır. O zaman bu eşitlikten faydalandığımızda,

$$\begin{aligned} (\partial.z)(a.b) &= \varepsilon(|\partial|, |z|)(z.\partial)(a.b) \\ &= \varepsilon(|\partial|, |z|)((z.\partial)(a).b + \varepsilon(|z.\partial|, |a|)a.(z.\partial)(b)) \\ &= \varepsilon(|\partial|, |z|)(z.\partial)(a).b + \varepsilon(|\partial|, |z|)\varepsilon(|z.\partial|, |a|)a.(z.\partial)(b) \\ &= \varepsilon(|\partial|, |z|)(z.\partial)(a).b + \varepsilon(|\partial.z|, |a|)\varepsilon(|\partial|, |z|)a.(z.\partial)(b) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $\varepsilon(|\partial|, |z|)(z.\partial) \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$\partial.z \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ dir. Şimdi $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ uzayının sol $Z_\varepsilon^\bullet(A)$ -modül şartlarını sağladığını gösterelim. $\forall z_1, z_2 \in Z_\varepsilon^\bullet(A), \forall \partial_1, \partial_2 \in Der_\varepsilon^\bullet(A), \forall a \in A^\bullet$ ve $\forall \lambda \in K$ için,

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & (z_1 \cdot (\partial_1 + \partial_2))(a) = z_1 \cdot (\partial_1 + \partial_2)(a) \\
& = z_1 \cdot (\partial_1(a) + \partial_2(a)) \\
& = z_1 \cdot \partial_1(a) + z_1 \cdot \partial_2(a) \\
& = (z_1 \cdot \partial_1)(a) + (z_1 \cdot \partial_2)(a) \\
& = (z_1 \cdot \partial_1 + z_1 \cdot \partial_2)(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad & ((z_1 + z_2) \cdot \partial_1)(a) = (z_1 + z_2) \cdot (\partial_1)(a) \\
& = z_1 \cdot (\partial_1)(a) + z_2 \cdot (\partial_1)(a) \\
& = (z_1 \cdot \partial_1)(a) + (z_2 \cdot \partial_1)(a) \\
& = (z_1 \cdot \partial_1 + z_2 \cdot \partial_1)(a)
\end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad (z_1 \cdot (z_2 \cdot \partial_1))(a) = z_1 \cdot (z_2 \cdot \partial_1)(a) = z_1 \cdot z_2 \cdot (\partial_1)(a) = (z_1 \cdot z_2 \cdot (\partial_1))(a)$$

$$\text{iv)} \quad (1_{Z_\varepsilon^\bullet(A)} \cdot \partial_1)(a) = 1_{Z_\varepsilon^\bullet(A)} \cdot \partial_1(a) = \partial_1(a)$$

olarak yazılır. Böylece $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ uzayı, bir sol $Z_\varepsilon^\bullet(A)$ -modüldür. Benzer şekilde $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ uzayının bir sağ $Z_\varepsilon^\bullet(A)$ -modül olduğu gösterilir.

Son olarak $\forall z_1, z_2 \in Z_\varepsilon^\bullet(A), \partial \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ için $(z_1 \cdot \partial) \cdot z_2 = z_1 \cdot (\partial \cdot z_2)$ olduğunu göstereceğiz. O zaman $\forall a \in A^\bullet$ için (5.8) eşitliğini kullandığımızda,

$$\begin{aligned}
((z_1 \cdot \partial) \cdot z_2)(a) &= \varepsilon(|z_1 \cdot \partial|, |z_2|)(z_2 \cdot (z_1 \cdot \partial))(a) \\
&= \varepsilon(|z_1 \cdot \partial|, |z_2|)z_2 \cdot ((z_1 \cdot \partial)(a)) \\
&= \varepsilon(|z_1 \cdot \partial|, |z_2|)z_2 \cdot (z_1 \cdot \partial(a)) \\
&= \varepsilon(|z_1 \cdot \partial|, |z_2|)z_2 \cdot z_1 \cdot \partial(a) \\
&= \varepsilon(|z_1 \cdot \partial|, |z_2|)\varepsilon(|z_2|, |z_1|)z_1 \cdot z_2 \cdot \partial(a) \\
&= \varepsilon(|z_1 \cdot \partial|, |z_2|)\varepsilon(|z_2|, |z_1|)z_1 \cdot (z_2 \cdot \partial(a)) \\
&= \varepsilon(|z_1 \cdot \partial|, |z_2|)\varepsilon(|z_2|, |z_1|)z_1 \cdot ((z_2 \cdot \partial)(a)) \\
&= \varepsilon(|z_1 \cdot \partial|, |z_2|)\varepsilon(|z_2|, |z_1|)z_1 \cdot (\varepsilon(|z_2|, |\partial|)(\partial \cdot z_2)(a)) \\
&= \varepsilon(|z_1|, |z_2|)\varepsilon(|\partial|, |z_2|)\varepsilon(|z_2|, |z_1|)\varepsilon(|z_2|, |\partial|)z_1 \cdot ((\partial \cdot z_2)(a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z_1.((\partial.z_2)(a)) \\
&= (z_1.(\partial.z_2))(a)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 5.19: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. $A^\bullet$ üzerinde bir iç ε -türev, $a \in A^\bullet$ için

$$b \rightarrow ad_a(b) = [a, b]_\varepsilon$$

olarak yazılabilen bir ε -türev olarak tanımlanır [7]. $A^\bullet$, üzerindeki bütün iç ε -türevlerin uzayını

$$Inn_\varepsilon^\bullet(A) = \{ad_a \mid a \in A^\bullet\}$$

olarak göstereceğiz. Şimdi iç ε -türevin, bir ε -türev olduğunu gösterelim. $a \in A^\bullet$ için

$\forall ad_a \in Inn_\varepsilon^\bullet(A)$ olsun. O zaman ε -türev tanımından $\forall b \in A^\bullet$ için,

$$\begin{aligned}
ad_a(bc) &= ad_a(b).c + \varepsilon(|ad_a|, |b|)b.ad_a(c) \\
&= [a, b]_\varepsilon.c + \varepsilon(|a|, |b|)b.[a, c]_\varepsilon \\
&= (ab - \varepsilon(|a|, |b|)ba).c + \varepsilon(|a|, |b|)b.(ac - \varepsilon(|a|, |c|)ca) \\
&= abc - \varepsilon(|a|, |b|)bac + \varepsilon(|a|, |b|)bac - \varepsilon(|a|, |b| + |c|)bca \\
&= abc - \varepsilon(|a|, |bc|)bca \dots (1)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Şimdi de iç ε -türevin tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned}
ad_a(bc) &= [a, bc]_\varepsilon \\
&= a.(bc) - \varepsilon(|a|, |bc|)(bc).a \\
&= abc - \varepsilon(|a|, |bc|)bca \dots (2)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (1) ve (2) eşitliklerinin eşit olduğu görülür. Böylece

$ad_a \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ dır. Dolayısıyla bir iç ε -türev, aynı zamanda bir ε -türevdir.

Önerme 5.3: $Inn_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$, bir ε -Lie ideal ve bir $Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ -modüldür. O zaman,

$$Out_{\varepsilon}^{\bullet}(A) = \frac{Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)}{Inn_{\varepsilon}^{\bullet}(A)}$$

bir ε -Lie cebirdir ve aynı zamanda bir $Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ -modül olarak tanımlanır. Bu uzaya, $A^{\bullet}$ üzerindeki *dış ε -türevlerin* uzayı adı verilir [7].

İspat:

$I = Inn_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ olarak alalım. O zaman $\forall \partial \in Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ için $\partial + I \in Out_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ olarak yazılır.

$\forall \partial, \mathfrak{R} \in Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ için, $[\partial + I, \mathfrak{R} + I]_{\varepsilon} = [\partial, \mathfrak{R}]_{\varepsilon} + I$ olarak tanımlanır. O zaman bu tanımla birlikte $Out_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ uzayı, (5.6) özelliğiyle bir ε -Lie cebir ve (5.8) özelliğiyle de bir $Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ -modül olur.

$\forall ad_a \in Inn_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ için $ad_a \in Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ olduğunu ispatlamıştık. $Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ uzayı, $Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ -modül olduğundan o zaman $Inn_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ uzayı da $Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ -modüldür.

Bu bilgilerden yola çıkarsak, ε -Lie cebirlerin ve $Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ -modüllerinin aşağıdaki gibi iki kısa tam dizisi elde edilir.

$$0 \rightarrow Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A) \xrightarrow{\varphi} A^{\bullet} \xrightarrow{ad} Inn_{\varepsilon}^{\bullet}(A) \rightarrow 0.$$

$$0 \rightarrow Inn_{\varepsilon}^{\bullet}(A) \rightarrow Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A) \rightarrow Out_{\varepsilon}^{\bullet}(A) \rightarrow 0.$$

$\forall z \in Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ için φ fonksiyonunu birim fonksiyon yani $\varphi(z) = z$ olarak alabiliriz. O zaman φ fonksiyonunu 1-1 dir. Bu durumda ad fonksiyonu örtendir. Çünkü $\forall y \in Inn_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ için $y = ad_a$ olacak şekilde $\exists a \in A^{\bullet}$ vardır. Son olarak $Im(\varphi) = Ker(ad)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} Ker(ad) &= \{a \in A^{\bullet} \mid \forall b \in A^{\bullet}, ad_a(b) = 0(b) = 0\} \\ &= \{a \in A^{\bullet} \mid \forall b \in A^{\bullet}, [a, b]_{\varepsilon} = 0\} \\ &= Z_{\varepsilon}^{\bullet}(A) \\ &= Im(\varphi) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bundan sonraki alt bölümde bütün lineer yapılarda K cismini, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olarak ele alacağız. Şimdi bu anlamda *involution* kavramını ele alalım. $K = \mathbb{C}$ aldığımızdan ε değiştirme çarpanı için hermityenlik durumu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\forall i, j \in \Gamma \text{ için } \overline{\varepsilon(i, j)} = \varepsilon(j, i)$$

Ayrıca burada denk olarak $|\varepsilon(i, j)| = 1$ dir.

Tanım 5.20: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. $A^\bullet$ üzerinde bir *involution* herhangi bir $i \in \Gamma$ için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $A_i^\bullet \rightarrow A_{-i}^\bullet$, $a \rightarrow a^*$ antilineer dönüşümü olarak tanımlanır [7].

$$\forall a, b \in A^\bullet \text{ için } (a^*)^* = a \text{ ve } (a.b)^* = b^*.a^*$$

Tanım 5.21: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. $A^\bullet$ nın *üniter* grubu $*$ ile ilişkilidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır [7].

$$U(A^\bullet) = \{g \in A^\bullet \mid g^*.g = 1\}$$

Tanım 5.22: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. Eğer $\forall a \in A^\bullet$ için $k \in \Gamma$ olmak üzere,

$$(f_k(a))^* = \varepsilon(|a|, |f_k|) f_{-k}(a)^*$$

oluyorsa o zaman homojen elemanları $f = \sum_{k \in \Gamma} f_k$ olarak ayırışan bir ε -türeve *reeldir* denir. Burada $|f_k| = k$ dir [7].

Tanım 5.23: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. Eğer $\forall a \in A^\bullet$ için $T(a^*) = \overline{T(a)}$ olarak yazılıyorsa o zaman $A^\bullet$ üzerindeki ε -iz, T *reeldir* denir [7].

Tanım 5.24: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir olsun. $M^\bullet$, bir sağ $A^\bullet$ -modül olsun. $M^\bullet$ üzerinde bir hermitian yapı $i, j \in \Gamma$ için,

$$\langle, \rangle : M_i^\bullet \times M_j^\bullet \rightarrow A_{j-i}^\bullet$$

bir sesquilinear dönüşümdür öyle ki $\forall n, m \in M^\bullet$ ve $\forall a, b \in A^\bullet$ için,

$$\langle m, n \rangle^* = \langle n, m \rangle \text{ ve } \langle ma, nb \rangle^* = a^* \langle m, n \rangle b$$

olarak yazılır [7].

5.5 Diferansiyel Hesap

Uyarı 5.2: A , birleşmeli bir cebir olsun. Birleşmeli bir A cebiri için türeve bağlı diferansiyel hesap aşağıdaki şekilde tanımlanır [7]:

$$\underline{\Omega}_{Der}^n(A) = \left\{ \omega : (Der(A))^n \rightarrow A, Z(A)\text{-multilineer ve ters simetrik} \right\}$$

Biz bu bölümde sadece ε -merkez ve ε -türevleri ele alacağız. Çünkü ε -merkez ve ε -türevler birbirleri ile uyumlu yapıya sahiptirler. Gerçekten de aynı değiştirme çarpanı, hem Lie braketini için hem de Leibniz bağıntısı için kullanılır. Bu nedenle ε -dereceli cebirler açısından türeve bağlı bir türevin diferansiyel hesapsı da tanımlanabilir.

Bu alt bölümde $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir ve $M^\bullet$, bir sağ $A^\bullet$ -modül olarak alınacaktır. O zaman şimdi ε -türevlere bağlı olan diferansiyel hesap tanımını verelim.

Tanım 5.25: $A^\bullet$, ε -dereceli bir cebir ve $M^\bullet$, bir sağ $A^\bullet$ -modül olsun. $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \Gamma$ için,

$$\underline{\Omega}_\varepsilon^{n,k}(A, M) = \left\{ \omega : (Der_\varepsilon^\bullet(A))^n \rightarrow M^\bullet \right\}$$

n -lineer dönüşümlerin uzayı olsun öyle ki $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ ve $\forall z \in Z_\varepsilon^\bullet(A)$ homojen elemanları için,

$$\omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) \in M_{k+|\partial_1|+\dots+|\partial_n|},$$

$$\omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n z) = \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) z,$$

$$\omega(\partial_1, \dots, \partial_i, \partial_{i+1}, \dots, \partial_n) = -\varepsilon(|\partial_i|, |\partial_{i+1}|) \omega(\partial_1, \dots, \partial_{i+1}, \partial_i, \dots, \partial_n) \quad (5.9)$$

ve $\underline{\Omega}_\varepsilon^{0,k}(A, M) = M_k$ olarak yazılır. Burada $\partial.z$ (5.8) de tanımlanan şekilde ele alınacaktır [7].

Bu tanımdan hareketle $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A, M)$ vektör uzayı, $\mathbb{N} \times \Gamma$ -dereceli bir vektör uzayıdır.

Çünkü $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \Gamma$ için, $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A, M) = \bigoplus_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \Gamma} \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,k}(A, M)$ olarak yazılır. Lineer

dönüşümlerin kümesinin bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz. O zaman $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A, M)$

kümesi de bir vektör uzayıdır. Ayrıca $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A, M)$, $A^\bullet$ üzerinde bir sağ $A^\bullet$ -modüldür.

Şimdi $\underline{\Omega}_\varepsilon^{n,\bullet}(A, M)$ vektör uzayının $A^\bullet$ üzerinde bir sağ $A^\bullet$ -modül olduğunu gösterelim.

Bunun için,

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,\bullet}(A, M) \times A^\bullet &\rightarrow \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,\bullet}(A, M) \\ (\omega, a) &\rightarrow \omega.a \end{aligned}$$

olduğunu göstereceğiz. $\omega.a \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,\bullet}(A, M)$ olduğunu söyleyebilmemiz için,

$$\omega.a : \left(\text{Der}_\varepsilon^\bullet(A) \right)^n \rightarrow M^\bullet$$

dönüşümünün mevcut olduğunu söylememizle mümkündür. Bu dönüşüm $\forall a \in A^\bullet$ ve

$\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n \in \text{Der}_\varepsilon^\bullet(A)$ için, $(\omega.a)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) = \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).a$ olarak tanımlanır.

Bu şekilde $\omega.a \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,\bullet}(A, M)$ olarak yazılır. Şimdi modül şartlarının sağlandığını gösterelim.

i) $\forall \omega_1 \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,|\omega_1|}(A, M), \omega_2 \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,|\omega_2|}(A, M)$ ve $\forall a \in A^\bullet$ ve $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n \in \text{Der}_\varepsilon^\bullet(A)$ için,

$$((\omega_1 + \omega_2).a)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) = [(\omega_1 + \omega_2)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)].a$$

$$= [\omega_1(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) + \omega_2(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)].a$$

$$= \omega_1(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).a + \omega_2(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).a$$

$$= (\omega_1.a)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) + (\omega_2.a)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$$

$$= (\omega_1.a + \omega_2.a)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $(\omega_1 + \omega_2).a = \omega_1.a + \omega_2.a$ yazılır.

ii) $\forall \omega \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,|\omega|}(A, M), \forall a_1, a_2 \in A^\bullet$ ve $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n \in \text{Der}_\varepsilon^\bullet(A)$ için,

$$\begin{aligned}
(\omega.(a_1 + a_2))(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) &= \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).(a_1 + a_2) \\
&= \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).a_1 + \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).a_2 \\
&= (\omega.a_1)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) + (\omega.a_2)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) \\
&= (\omega.a_1 + \omega.a_2)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman $\omega.(a_1 + a_2) = \omega.a_1 + \omega.a_2$ olarak yazılır.

iii) $\forall \omega \in \underline{\Omega}_{\varepsilon}^{n, |\omega|}(A, M), \forall a_1, a_2 \in A^{\bullet}$ ve $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n \in Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ için,

$$\begin{aligned}
(\omega.(a_1 a_2))(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) &= \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).(a_1 a_2) \\
&= (\omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).a_1).a_2 \\
&= (\omega.a_1)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).a_2 \\
&= ((\omega.a_1).a_2)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $\omega.(a_1 a_2) = (\omega.a_1).a_2$ dir.

iv) $\forall \omega \in \underline{\Omega}_{\varepsilon}^{n, |\omega|}(A, M)$ ve $\forall 1_{A^{\bullet}} \in A^{\bullet}$ olmak üzere $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n \in Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ için,

$$(\omega.1_{A^{\bullet}})(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) = \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).1_{A^{\bullet}} = \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$$

olarak bulunur. Buradan $\omega.1_{A^{\bullet}} = \omega$ olduğu görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Eğer $\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A, M)$ vektör uzayında $M^{\bullet} = A^{\bullet}$ olarak alırsak, o zaman $\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A, A) = \underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A)$ şeklinde kullanacağız.

Tanım 5.26: $(\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A))$ uzayı için **diferansiyel cebir tanımı** $\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A)$ vektör uzayı verilsin. $\forall \omega \in \underline{\Omega}_{\varepsilon}^{p, |\omega|}(A), \forall \eta \in \underline{\Omega}_{\varepsilon}^{q, |\eta|}(A)$ ve $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{p+q} \in Der_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ homojen elemanları için çarpım işlemi,

$$\begin{aligned}
(\omega.\eta)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{p+q}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^{|\sigma|} f_1 \omega(\partial_{\sigma(1)}, \partial_{\sigma(2)}, \dots, \partial_{\sigma(p)}) \\
&\quad \cdot \eta(\partial_{\sigma(p+1)}, \partial_{\sigma(p+2)}, \dots, \partial_{\sigma(p+q)})
\end{aligned} \tag{5.10}$$

diferansiyel işlemi de,

$$d\omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{p+1}) = \sum_{m=1}^{p+1} (-1)^{m+1} f_2 \partial_m \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \overset{m}{\vee}, \dots, \partial_{p+1}) \\ + \sum_{1 \leq m < n \leq p+1} (-1)^{m+n} f_3 \omega([\partial_m, \partial_n]_{\varepsilon}, \dots, \overset{m}{\vee}, \dots, \overset{n}{\vee}, \dots, \partial_{p+1}) \quad (5.11)$$

olarak tanımlanır [7]. Burada f_i çarpanları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$f_1 = \prod_{m < n, \sigma(m) > \sigma(n)} \varepsilon(|\partial_{\sigma(n)}|, |\partial_{\sigma(m)}|) \prod_{m \leq p} \varepsilon(|\eta|, |\partial_{\sigma(m)}|)$$

$$f_2 = \varepsilon(|\omega|, |\partial_m|) \prod_{a=1}^{m-1} \varepsilon(|\partial_a|, |\partial_m|)$$

$$f_3 = \varepsilon(|\partial_n|, |\partial_m|) \prod_{a=1}^{m-1} \varepsilon(|\partial_a|, |\partial_m|) \prod_{a=1}^{n-1} \varepsilon(|\partial_a|, |\partial_n|).$$

Bu çarpım ve diferansiyel işlemi ile birlikte $\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A)$ bir diferansiyel cebir olur.

$\tilde{\Gamma} = \mathbb{Z} \times \Gamma$ değişmeli grubu verilsin. $\tilde{\Gamma}$, değişmeli grubu için $\tilde{\varepsilon}$ değiştirme çarpanı,

$$\tilde{\varepsilon}((p, i), (q, j)) = (-1)^{pq} \varepsilon(i, j)$$

olarak tanımlansın. O zaman $\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A)$, $\tilde{\Gamma} = \mathbb{Z} \times \Gamma$ değişmeli grubu üzerinde tanımlanan $\tilde{\varepsilon}$ değiştirme çarpanı ile birlikte $\tilde{\varepsilon}$ -dereceli bir cebirdir. Ayrıca d diferansiyeli, $\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A)$ nın $(1, 0)$ dereceli $\tilde{\varepsilon}$ -türevidir ve $d^2 = 0$ eşitliğini sağlar.

$M^{\bullet}$, herhangi bir sağ $A^{\bullet}$ -modül olsun. O zaman $\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A, M)$, $\underline{\Omega}_{\varepsilon}^{\bullet, \bullet}(A)$ üzerinde aşağıdaki işlem için bir sağ modüldür. $\forall \omega \in \underline{\Omega}_{\varepsilon}^{p, |\omega|}(A, M)$, $\forall \eta \in \underline{\Omega}_{\varepsilon}^{q, |\eta|}(A)$ ve $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{p+q} \in \text{Der}_{\varepsilon}^{\bullet}(A)$ homojen elemanları için,

$$(\omega \eta)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^{|\sigma|} f_1 \omega(\partial_{\sigma(1)}, \partial_{\sigma(2)}, \dots, \partial_{\sigma(p)}) \\ \eta(\partial_{\sigma(p+1)}, \partial_{\sigma(p+2)}, \dots, \partial_{\sigma(p+q)})$$

Burada f_1 yukarıda tanımlandığı gibi ele alınacaktır.

Uyarı 5.3: ($\tilde{\Gamma}$ -dereceli diferansiyel cebir kavramı)

Bir önceki tanım da yani tanım 5.26 da Γ -dereceli diferansiyel cebir ya da diferansiyel cebir kavramının anlamını tam bilmeden bu terimi kullandık. Bu durumda $\tilde{\Gamma}$ -dereceli bir diferansiyel cebir üzerinde $\mathbb{Z}$ yönündeki d diferansiyeli aşağıdaki koşulu sağlar:

i) d diferansiyeli, $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A)$ nın $(1,0)$ dereceli $\tilde{\varepsilon}$ -türevidir öyle ki $d^2 = 0$ dir.

Genelde ε -dereceli diferansiyel cebir kavramını tanımlamak uygun olabilir. Bunu yapmak için $A^\bullet$, ε -dereceli cebirini ve d diferansiyelini ele alalım. d diferansiyeli, $d^2 = 0$ eşitliğini sağlayan bir ε -türevidir. Fakat bu diferansiyelin derecesini özel durumların dışında minimal olarak elde etmek zordur. Sonlu sayıda üreteçlerin ürettiği grubu örnek olarak verebiliriz. Bu durumlarda bir diferansiyel, bu grubun üreteçlerinin bir derecesi olarak yazmayı gerektirebilir. O zaman üreteçler kadar diferansiyeller de mevcut olabilir. Örneğin $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durumundaki gibi.

Düşük derecelilerde yani $\mathbb{Z}$ bölgesinde diferansiyelin ifadesi aşağıdaki biçimde meydana gelir. $\forall \omega \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{1,\bullet}(A), \forall \partial, \mathfrak{R} \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ ve $\forall a \in A^\bullet$ homojen elemanları için,

$$da(\partial) = \varepsilon(|a|, |\partial|) \partial(a)$$

$$d\omega(\partial, \mathfrak{R}) = \varepsilon(|\omega|, |\partial|) \partial(\omega(\mathfrak{R})) - \varepsilon(|\omega| + |\partial|, \mathfrak{R}) \mathfrak{R}(\omega(\partial)) - \omega([\partial, \mathfrak{R}]_\varepsilon).$$

Ayrıca ε -Lie cebirin türevleri sonlu boyutlu olsa bile $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A)$ vektör uzayı, sonsuz boyutlu olabilir.

Önerme 5.4: Eğer $A^\bullet$, ε -dereceli değişmeli bir cebirse o zaman $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A)$, $\tilde{\varepsilon}$ -dereceli değişmeli bir cebirdir [7].

Tanım 5.27: $g^\bullet$, $Der_\varepsilon^\bullet(A)$ nın bir ε -Lie alt cebiri ve $Z_\varepsilon^\bullet(A)$ üzerinde bir modül olsun. $g^\bullet$ ye ait sınırlı diferansiyel hesabı,

$$\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A|g) = \left\{ \omega \left| \omega : (g^\bullet)^n \rightarrow A^\bullet, \quad \omega, n\text{-lineer dönüşüm} \right. \right\}$$

olarak tanımlanır öyle ki bu ω dönüşümleri (5.9) aksiyomu, (5.10) çarpım aksiyomu ve (5.11) diferansiyel aksiyomlarını sağlar. Ayrıca bu uzay bir $\tilde{\Gamma}$ -dereceli diferansiyel cebirdir [7].

Önerme 5.5: $g^\bullet, Der_\varepsilon^\bullet(A)$ nın bir ε -Lie alt cebiri olsun. $g^\bullet, (\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A), d)$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir *Kartan İşlemi* tanımlar [7]:

$\forall \partial \in Der_\varepsilon^\bullet(A)$ için ∂ ile iç çarpım, $i_\partial : \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,k}(A) \rightarrow \underline{\Omega}_\varepsilon^{n-1,k+|\partial|}(A)$ dönüşümüdür öyle ki $\forall \omega \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,|\omega|}(A)$ ve $\forall \partial, \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{n-1} \in g^\bullet$ homojen elemanları için,

$$i_\partial \omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{n-1}) = \varepsilon(|\partial|, |\omega|) \omega(\partial, \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{n-1}) \quad (5.12)$$

ve $i_\partial \underline{\Omega}_\varepsilon^{0,\bullet}(A) = 0$ dır. Bu durumda $i_\partial, \underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A)$ cebirinin $(-1, |\partial|)$ dereceli bir $\tilde{\varepsilon}$ -türevidir. i_∂ e ait Lie türev L_∂ olsun. O zaman,

$$L_\partial = [i_\partial, d] = i_\partial d + di_\partial : \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,k}(A) \rightarrow \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,k+|\partial|}(A) \quad (5.13)$$

olarak yazılır. Ayrıca $L_\partial, \underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A)$ nın $(0, |\partial|)$ dereceli bir $\tilde{\varepsilon}$ -türevidir. Burada yani (5.13) deki braket, $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A)$ nın $\tilde{\varepsilon}$ değiştirme çarpanından elde edilmektedir.

O zaman $\forall \partial, \Re \in g^\bullet$ homojen elemanları için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$[i_\partial, i_\Re] = i_\partial i_\Re + \varepsilon(|\partial|, |\Re|) i_\Re i_\partial = 0, \quad [L_\partial, i_\Re] = L_\partial i_\Re - \varepsilon(|\partial|, |\Re|) i_\Re L_\partial = i_{[\partial, \Re]_\varepsilon},$$

$$[L_\partial, d] = L_\partial d - dL_\partial = 0, \quad [L_\partial, L_\Re] = L_\partial L_\Re - \varepsilon(|\partial|, |\Re|) L_\Re L_\partial = i_{[\partial, \Re]_\varepsilon}.$$

İspat:

$\forall \omega \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{n,|\omega|}(A), \forall \eta \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{p,|\eta|}(A)$ ve $\forall \partial, \Re, \partial_1, \dots, \partial_{n-2} \in g^\bullet$ homojen elemanları için,

$$i_\partial(\omega \cdot \eta) = (i_\partial \omega) \cdot \eta + \tilde{\varepsilon}(|\partial|, |\omega|) \omega(i_\partial \eta)$$

$$i_\partial(\omega \cdot \eta) = (i_\partial \omega) \cdot \eta + \tilde{\varepsilon}((-1, |\partial|), (n, |\omega|)) \omega(i_\partial \eta)$$

$$i_\partial(\omega \cdot \eta) = (i_\partial \omega) \cdot \eta + (-1)^n \varepsilon(|\partial|, |\omega|) \omega(i_\partial \eta)$$

eşitliği (5.12) deki i_{∂} nin tanımından ve (5.10) daki çarpımdan elde edilir. O zaman (5.9) un 3.aksiyomunu da kullanırsak,

$$\begin{aligned}
i_{\partial} i_{\mathfrak{R}} \omega(\partial_1, \dots, \partial_{n-2}) &= i_{\partial} (i_{\mathfrak{R}} \omega(\partial_1, \dots, \partial_{n-2})) \\
&= i_{\partial} (\varepsilon(|\mathfrak{R}|, |\omega|) \omega(\mathfrak{R}, \partial_1, \dots, \partial_{n-2})) \\
&= \varepsilon(|\mathfrak{R}|, |\omega|) i_{\partial} \omega(\mathfrak{R}, \partial_1, \dots, \partial_{n-2}) \\
&= \varepsilon(|\mathfrak{R}|, |\omega|) \varepsilon(|\partial|, |\omega|) \omega(\partial, \mathfrak{R}, \partial_1, \dots, \partial_{n-2}) \\
&= \varepsilon(|\mathfrak{R}| + |\partial|, |\omega|) \omega(\partial, \mathfrak{R}, \partial_1, \dots, \partial_{n-2}) \\
&= -\varepsilon(|\mathfrak{R}| + |\partial|, |\omega|) \varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|) \omega(\mathfrak{R}, \partial, \partial_1, \dots, \partial_{n-2}) \dots (1)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
i_{\mathfrak{R}} i_{\partial} \omega(\partial_1, \dots, \partial_{n-2}) &= i_{\mathfrak{R}} (i_{\partial} \omega(\partial_1, \dots, \partial_{n-2})) \\
&= i_{\mathfrak{R}} (\varepsilon(|\partial|, |\omega|) \omega(\partial, \partial_1, \dots, \partial_{n-2})) \\
&= \varepsilon(|\partial|, |\omega|) i_{\mathfrak{R}} \omega(\partial, \partial_1, \dots, \partial_{n-2}) \\
&= \varepsilon(|\partial|, |\omega|) \varepsilon(|\mathfrak{R}|, |\omega|) \omega(\mathfrak{R}, \partial, \partial_1, \dots, \partial_{n-2}) \\
&= \varepsilon(|\mathfrak{R}| + |\partial|, |\omega|) \omega(\mathfrak{R}, \partial, \partial_1, \dots, \partial_{n-2}) \dots (2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (2) eşitliğini $-\varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|)$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned}
-\varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|) i_{\mathfrak{R}} i_{\partial} \omega(\partial_1, \dots, \partial_{n-2}) &= -\varepsilon(|\partial|, |\mathfrak{R}|) \varepsilon(|\mathfrak{R}| + |\partial|, |\omega|) \omega(\mathfrak{R}, \partial, \partial_1, \dots, \partial_{n-2}) \\
&= i_{\partial} i_{\mathfrak{R}} \omega(\partial_1, \dots, \partial_{n-2})
\end{aligned}$$

olur. Böylece $[i_{\partial}, i_{\mathfrak{R}}] = 0$ olduğu görülür. Ayrıca $L_{\partial} d = di_{\partial} d = dL_{\partial}$ olarak yazılır.

Gerçekten,

$$L_{\partial} d = (i_{\partial} d + di_{\partial}) d = \underbrace{i_{\partial} d^2}_0 + di_{\partial} d = di_{\partial} d$$

$$dL_{\partial} = d(i_{\partial}d + di_{\partial}) = di_{\partial}d + \underbrace{d^2i_{\partial}}_0 = di_{\partial}d$$

eşitliklerinin eşit olduğu görülüyor. Şimdi $[L_{\partial}, d]$ için braket işlemini açtığımızda,

$$\begin{aligned} [L_{\partial}, d] &= L_{\partial}d - \tilde{\varepsilon}(|L_{\partial}|, |d|)dL_{\partial} \\ &= L_{\partial}d - \tilde{\varepsilon}((0, |\partial|), (1, 0))dL_{\partial} \\ &= L_{\partial}d - (-1)^{0,1} \underbrace{\varepsilon(|\partial|, 0)}_{1_K} dL_{\partial} \\ &= L_{\partial}d - dL_{\partial} \\ &= di_{\partial}d - di_{\partial}d = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $[L_{\partial}, i_{\Re}]$ nin ispatını yapalım. Lie braket tanıımından,

$$[L_{\partial}, i_{\Re}] = i_{\partial}di_{\Re} + di_{\partial}i_{\Re} - \varepsilon(|\partial|, |\Re|)(i_{\Re}i_{\partial}d + i_{\Re}di_{\partial})$$

olarak yazılır. Buradan (5.11) ve (5.12) yi kullandığımızda, $[L_{\partial}, i_{\Re}] = i_{[\partial, \Re]_e}$ elde edildiği görülür. En sonunda yukarıdaki sonuçlardan,

$$\begin{aligned} [L_{\partial}, L_{\Re}] &= L_{\partial}(i_{\Re}d + di_{\Re}) - \varepsilon(|\partial|, |\Re|)(i_{\Re}d + di_{\Re})L_{\partial} \\ &= i_{[\partial, \Re]_e}d + di_{[\partial, \Re]_e} \\ &= L_{[\partial, \Re]_e} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.6 ε -Konneksiyonlar

Tanım 5.28: $M^{\bullet}$, $A^{\bullet}$ ε -dereceli cebiri üzerinde bir sağ modül olsun.

$$\nabla : M^{\bullet} \rightarrow \underline{\Omega}_{\varepsilon}^{1, \bullet}(A, M)$$

sıfır dereceli homojen lineer dönüşümü verilsin. Eğer $\forall a \in A^{\bullet}$ ve $\forall m \in M^{\bullet}$ için,

$$\nabla(ma) = \nabla(m)a + mda \quad (5.14)$$

oluyorsa o zaman ∇ dönüşümüne bir ε -konneksiyon adı verilir [7].

Tanım 5.29: $\nabla, M^\bullet$ üzerinde bir ε -konneksiyon olsun. O zaman $\forall \omega \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{p,|\omega|}(A, M)$ ve $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{p+1} \in \text{Der}_\varepsilon^\bullet(A)$ homojen elemanları için aşağıdaki bağıntıyı yani (5.15) denklemini kullanırsak ∇, ε -konneksiyonu

$$\nabla : \underline{\Omega}_\varepsilon^{p,\bullet}(A, M) \rightarrow \underline{\Omega}_\varepsilon^{p+1,\bullet}(A, M) \quad (5.15)$$

olarak genişletilebilir.

$$\begin{aligned} \nabla(\omega)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{p+1}) &= \sum_{m=1}^{p+1} (-1)^{m+1} f_4 \nabla \left(\omega \left(\partial_1, \partial_2, \dots, \overset{m}{\nabla}, \dots, \partial_{p+1} \right) \right) (\partial_m) \\ &\quad + \sum_{1 \leq m < n \leq p+1} (-1)^{m+n} f_5 \omega \left([\partial_m, \partial_n]_\varepsilon, \dots, \overset{m}{\nabla}, \dots, \overset{n}{\nabla}, \dots, \partial_{p+1} \right) \end{aligned}$$

Burada f_i çarpanları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} f_4 &= \prod_{a=m+1}^{p+1} \varepsilon(|\partial_m|, |\partial_a|), \\ f_5 &= \varepsilon(|\partial_n|, |\partial_m|) \prod_{a=1}^{m-1} \varepsilon(|\partial_a|, |\partial_m|) \prod_{a=1}^{n-1} \varepsilon(|\partial_a|, |\partial_n|). \end{aligned}$$

Bu durumda $\forall \omega \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{p,|\omega|}(A, M), \forall \eta \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{q,|\eta|}(A)$ homojen elemanları için,

$$\nabla(\omega\eta) = \nabla(\omega)\eta + (-1)^p \omega d\eta \quad (5.16)$$

eşitliği sağlanır [7].

∇ nın bir sağ $A^\bullet$ -modül homomorfizması olması için kısıtlama, ∇ nın $R = \nabla^2$ eğriliğiyle hesaplanır öyle ki bu R , sıfır dereceli homojen bir lineer dönüşümdür ve aşağıdaki biçimde yazılır. $\forall m \in M^\bullet, \forall \partial, \Re \in \text{Der}_\varepsilon^\bullet(A)$ homojen elemanları için,

$$R(m)(\partial, \Re) = \varepsilon(|\partial|, |\Re|) \nabla(\nabla(m)(\Re))(\partial) - \nabla(\nabla(m)(\partial))(\Re) - \nabla(m)([\partial, \Re]_\varepsilon).$$

Önerme 5.6: $M^\bullet$ üzerindeki bütün ε -konneksiyonların kümesi, $\text{Hom}_A^0(M^\bullet, \underline{\Omega}_\varepsilon^{1,\bullet}(A, M))$ vektör uzayı ile birleşen bir *afin uzayıdır*. Ayrıca ∇, ε -konneksiyonu ile ilişkili R eğriliği, sağ $A^\bullet$ -modüllerinin bir homomorfizmasıdır [7].

İspat:

$A = \{\nabla \mid \nabla \text{ bir } \varepsilon\text{-konneksiyon}\}$, $M^\bullet$ üzerindeki bütün ε -konneksiyonların kümesi ve $\nabla : M^\bullet \rightarrow \underline{\Omega}_\varepsilon^{1,\bullet}(A, M)$, $V = \text{Hom}_A^0(M^\bullet, \underline{\Omega}_\varepsilon^{1,\bullet}(A, M))$ olsun. Öncelikle A nın, V uzayı ile birleşen bir afin uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için f fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} f : A \times A &\rightarrow V \\ (\nabla, \nabla') &\rightarrow f(\nabla, \nabla') = \nabla - \nabla' \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda afin uzayı şartlarının sağlandığını gösterelim.

i) $\forall \nabla, \nabla' \text{ ve } \nabla'' \in A$ için $f(\nabla, \nabla') + f(\nabla', \nabla'') = f(\nabla, \nabla'')$ olduğunu göstereceğiz.

Tanımdan,

$$\begin{aligned} f(\nabla, \nabla') + f(\nabla', \nabla'') &= \nabla - \underbrace{\nabla' + \nabla'}_0 - \nabla'' \\ &= \nabla - \nabla'' \\ &= f(\nabla, \nabla'') \end{aligned}$$

olarak yazılır.

ii) $\forall \nabla \in A$ ve $\forall \psi \in V$ için $f(\nabla, \nabla') = \psi$ olacak şekilde bir tane $\nabla' \in A$ vardır.

Gerçekten,

$$f(\nabla, \nabla') = \nabla - \nabla' = \psi \Rightarrow \nabla' = \nabla - \psi \in V$$

olduğu görülür. ∇ ve ∇' , iki ε -konneksiyon olsun ve $\psi = \nabla - \nabla'$ olarak alalım. O zaman $\forall a \in A^\bullet$ ve $\forall m \in M^\bullet$ için,

$$\begin{aligned} \psi(ma) &= (\nabla - \nabla')(ma) \\ &= \nabla(ma) - \nabla'(ma) \\ &= \nabla(m)a + mda - \nabla'(m)a - mda \\ &= \nabla(m)a - \nabla'(m)a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\nabla(m) - \nabla'(m))a \\
&= \psi(m)a.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\psi \in \text{Hom}_A^0(M^\bullet, \underline{\Omega}_\varepsilon^{1,\bullet}(A, M))$ olur.

Son olarak R eğriliğinin, sağ $A^\bullet$ -modüllerinin bir homomorfizması olduğunu gösterelim. Burada (5.14) ve (5.16) eşitliklerini kullanacağız. O zaman $\forall a \in A^\bullet$ ve $\forall m \in M^\bullet$ için,

$$\begin{aligned}
R(ma) &= \nabla^2(ma) = \nabla(\nabla(ma)) \\
&= \nabla(\nabla(m)a + mda) \\
&= \nabla(\nabla(m)a) + \nabla(mda) \\
&= \nabla^2(m)a + (-1)\nabla(m)da + \nabla(m)da + md^2a \quad (5.16 \text{ eşitliği } p=1) \\
&= \nabla^2(m)a - \underbrace{\nabla(m)da}_0 + \underbrace{\nabla(m)da}_0 + \underbrace{md^2a}_0 \quad (d^2=0) \\
&= \nabla^2(m)a \\
&= R(m)a
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Tanım 5.30: $M^\bullet$ nin *Gauge Grubu*, $M^\bullet$ nin (bir sağ $A^\bullet$ -modül olarak) sıfır dereceli grup otomorfizmaları olarak tanımlanır ve $\text{Aut}_A^0(M, M)$ ile gösterilir. $M^\bullet$ nin elemanları da Gauge dönüşümleri olarak adlandırılır [7].

Her Φ Gauge dönüşümü, $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A, M)$ nin $(0,0)$ dereceli bir otomorfizmasına aşağıdaki şekilde genişletilebilir: $\forall \omega \in \underline{\Omega}_\varepsilon^{p,|\omega|}(A, M)$ ve $\forall \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_p \in \text{Der}_\varepsilon^\bullet(A)$ için,

$$\Phi(\omega)(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_p) = \Phi(\omega(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_p))$$

Burada Φ , bir sağ $\underline{\Omega}_\varepsilon^{\bullet,\bullet}(A)$ -modül olarak düşünülecektir.

Önerme 5.7: $M^\bullet$ nin Gauge grubu, kendi ε -konneksiyonları üzerinde aşağıdaki şekilde bir etkiye sahiptir: $\Phi \in \text{Aut}_A^0(M, M)$ ve ∇ ε -konneksiyonu için,

$$\nabla^\Phi = \Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}$$

dönüşümü bir ε -konneksiyondur. Φ ile ilişkili $R = \nabla^2$ eğriliği R^Φ olmak üzere,

$$R^\Phi = \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$$

şeklinde yazılır [7].

İspat:

∇^Φ nin bir ε -konneksiyon olduğunu gösterelim. Bunun için ∇^Φ nin (5.14) eşitliğini sağladığını göstereceğiz. Bu durumda $\forall a \in A^\bullet$ ve $\forall m \in M^\bullet$ için,

$$\begin{aligned} \nabla^\Phi(ma) &= (\Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1})(ma) \\ &= \Phi \circ \nabla(\Phi^{-1}(ma)) \\ &= \Phi \circ \nabla(\Phi^{-1}(m)a) \\ &= \Phi \circ [\nabla(\Phi^{-1}(m))a + \Phi^{-1}(m)da] \\ &= \Phi \circ \nabla(\Phi^{-1}(m))a + (\Phi \circ \Phi^{-1})(m)da \\ &= \Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}(m)a + mda \\ &= (\nabla^\Phi(m)a) + mda \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $|\Phi| = |\Phi^{-1}| = 0$ oldundan dolayı ∇^Φ , sıfır dereceli homojen bir lineer dönüşümdür. Şimdi $R^\Phi = \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} R^\Phi &= \Phi \circ R \circ \Phi^{-1} \\ &= \Phi \circ \nabla^2 \circ \Phi^{-1} \\ &= \Phi \circ \nabla \circ \nabla \circ \Phi^{-1} \\ &= \underbrace{\Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}}_{\nabla^\Phi} \circ \underbrace{\Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}}_{\nabla^\Phi} \end{aligned}$$

$$= \nabla^\Phi \circ \nabla^\Phi$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 5.31: $A^\bullet$, ε -dereceli involutif $(\mathbb{C}-)$ cebir ve $M^\bullet$, hermityen yapısını sağlayan bir sağ $A^\bullet$ -modül olsun. Eğer $\forall m, n \in M^\bullet$ için,

$$\langle \Phi(m), \Phi(n) \rangle = \langle m, n \rangle$$

oluyorsa Φ Gauge dönüşümüne *üniter* denir [7].

Lemma 5.7: Eğer $\forall m, n \in M^\bullet$ homojen elemanları ve $\forall \partial = \sum_{k \in \Gamma} \partial_k$ bir reel ε -türev ayrışım için (homojen bileşenler içinde),

$$\sum_{k \in \Gamma} \varepsilon(-|m| + |n|, k) \langle \nabla(m)(\partial_k), n \rangle + \langle m, \nabla(n)(\partial) \rangle = d(\langle m, n \rangle)(\partial)$$

olarak yazılabiliyorsa ∇ , ε -konneksiyonuna *hermityen* adı verilir. Burada $|\partial_k| = k$ dir [7]. O zaman $M^\bullet$, üzerindeki bütün hermityen ε -konneksiyonların uzayı, üniter Gauge dönüşümlerinin grubu altında değişmezdir.

İspat:

Φ , üniter bir Gauge dönüşüm ve ∇ , hermityen bir ε -konneksiyon olsun. Ayrıca $\partial = \sum_{k \in \Gamma} \partial_k$ bir reel ε -türev ve $m, n \in M^\bullet$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \Gamma} \varepsilon(-|m| + |n|, k) \langle \nabla^\Phi(m)(\partial_k), n \rangle + \langle m, \nabla^\Phi(n)(\partial) \rangle \\ &= \sum_{k \in \Gamma} \varepsilon(-|m| + |n|, k) \langle \Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}(m)(\partial_k), n \rangle + \langle m, \Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}(n)(\partial) \rangle \\ &= \sum_{k \in \Gamma} \varepsilon(-|m| + |n|, k) \langle \nabla \circ \Phi^{-1}(m)(\partial_k), \Phi^{-1}(n) \rangle + \langle \Phi^{-1}(m), \nabla \circ \Phi^{-1}(n)(\partial) \rangle \\ &= \sum_{k \in \Gamma} \varepsilon(-|m| + |n|, k) \langle \nabla(\Phi^{-1}(m))(\partial_k), \Phi^{-1}(n) \rangle + \langle \Phi^{-1}(m), \nabla(\Phi^{-1}(n))(\partial) \rangle \\ &= d(\langle \Phi^{-1}(m), \Phi^{-1}(n) \rangle)(\partial) \\ &= d(\langle m, n \rangle)(\partial) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde dereceli cebirler, vektör uzaylar, modül, tensör çarpımı ve Lie süper cebirler anlatılmıştır. Bunun yanında değiştirme çarpanı, Schur çarpanı ve ε -dereceli cebirsel yapılar ile ilgili tanımlamalar verilmiş olup bu yapılarla ilgili bazı teorem, lemma ve önermeler ispatlanmıştır.

Öneri olarak, bu çalışmadaki incelediğimiz geometrik kavram ve yapılar ileriye dönük olarak [24] de tanımlı olan regüler cebirlere, regüler matris cebirleri çalışmasına uygulamayı düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

-
- [1] Heisenberg, W. , (1925), "Qantum-theoretical re-interpretation of Kinematic and mechanical relations", Zs. Phys. ,33:879-893.
 - [2] Dirac, P. , (1926), "The fundamental equations of quantum mecahanics", Proc. Roy. Soc. , 109:642-653.
 - [3] Born, M. , Heisenberg, W. , ve Jordan, P. , (1926), "On quantum mechanics II ", Zs. Phys. , 35:557-615.
 - [4] Connes, A. , (1994), "Noncommutative Geometry", Academic Press, San Diego, New York, London.
 - [5] Khalkhali, M. , (1994), "On the entire cyclic cohomology of Banach algebras Comm.Algebra", 14:5861-5874.
 - [6] Chamseddine, A.H. , Connes, A. , ve Marcolli, M. , (2007), "Gravity and the standart model with neutrino mixing", Adv. Theor. Math. Phys. , 11:991-1089, arXiv:hep-th\0610241
 - [7] Goursac, A.D. , Masson, T. , ve Wallet, J.C , (2012), "Noncommutative ε - graded connections", Journal of Noncommutative Geometry6, 2:343-387
 - [8] Nastasescu, C. ve Oystaeyen, F.W. , (1982), "Graded ring theory", North-Holland Publishing Co. , Amsterdam-New York.
 - [9] Scheunert, M. , (1979), "Generalized Lie algebras", J. Math. Phys, 20(712).
 - [10] Funks, D.B. , (1986), Cohomology of İnfinite-Dimensional Lie Algebras, Consultants Bureau.
 - [11] Malik, D.S. , Mordeson, J.N. , ve Sen, M.K. , (2007), MTH 581-582 Introduction to Abstract Algebra.
 - [12] Joyce, D. , (2008), Introduction to Modern Algebra, Clark University.
 - [13] Erdoğan, M. ve Yılmaz, G. , (2008), Çözümlü Problemlerle Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, 1.Baskı, Beykent Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
 - [14] Broida, J.G. ve Williamson, S.G. , (1986), A Comprehensive Introduction to Linear Algebra Part III Operators and Tensors, Addison-Wesley.
 - [15] Kernik, S. , (2008), A Very Brief Overwiev of Lie Algebras.

- [16] Samelson, H. , (1990), Notes on Lie Algebras, Springer, New York.
- [17] Karapınar, D. , (2012), Lie cebirlerin temsilleri, Yükek Lisans Tezi, ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- [18] Neşet, A. , (2012), Modül Teori, Modüller, ÇOMÜ,. <https://nesetaydin.files.wordpress.com/2012/03/moduldersnotu2012.pdf> (14.03.2014).
- [19] Jacobson, N. , (1989), Basic Algebra II, Second Edition, W.H. Freeman and Company, New York.
- [20] Scheunert, M. , (1979), The Theory of Lie Superalgebras: An Introduction, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
- [21] Zhukavets, N. , “ Introduction to Superalgebras”,
- [22] Frappat, L. ,Sciarrino, A. ve Sorba, P. , (2000), Dictionary on Lie algebras and Superalgebras, San Diego:Academic Press, (412)
- [23] Musson, I.M. , (2012), Lie Superalgebras and Enveloping Algebras, 131, American Mathematical Society.
- [24] Bahturin, Y. ve Regev, A. , (2009), “Graded Tensor Products”, Journal of Pure and Applied Algebra, 213(9):1643-1650

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Halil İbrahim Yoldaş
Doğum Tarihi ve Yeri :09.09.1989, Şanlıurfa
Yabancı Dili: :İngilizce
E-posta: :hibrahimyoldas@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2011
Lise	Fen Bilimleri	Ramazan Atıl Lisesi	2006

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014- ...	Mersin Üniversitesi	Araştırma Görevlisi