

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ ALTERNATİF
HOMOTOPİ METODU VE DİĞER METOTLARLA KARŞILAŞTIRILMASI**

GÜNAY ASLANOVA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. ELİF TEKİN TARIM**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ
ALTERNATİF HOMOTOPİ METODU VE DİĞER METOTLARLA
KARŞILAŞTIRILMASI**

Günay ASLANOVA tarafından hazırlanan tez çalışması 14.07.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Elif TEKİN TARIM

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Elif TEKİN TARIM

Yıldız Teknik Üniversitesi



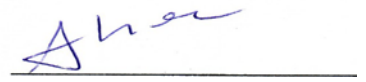
Yrd. Doç. Dr. Yasemen UÇAN

Yıldız Teknik Üniversitesi



Yrd. Doç. Dr. Arzu TURAN DİNÇEL

Yıldız Teknik Üniversitesi



Adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık seri çözümünü elde etmek için yeni bir yöntem olarak “Alternatif Homotopi Metodu” ilk defa bu çalışmada tanıtıldı ve çoğunlukla literatürde başka yöntemlerle çözülen problemlere uygulanarak karşılaştırması yapıldı. Bu metot, homotopi mantığı nedeniyle Homotopi Pertürbasyon Metodu’na daha yakın olduğundan genellikle iki metot karşılaştırıldı.

İlk olarak, iki metodun da temel özellikleri gösterildi ve ardından nasıl uygulandığı örneklerle açıklandı. Bu örneklerden bazıları için Alternatif Homotopi ve Homotopi Pertürbasyon Metodu ile elde edilen yaklaşık çözümlerdeki sonuçlar ile kesin çözümler arasındaki fark incelendi.

Bu çalışmanın hazırlanmasında, bana yön veren, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Elif TEKİN TARIM ’a teşekkür ediyorum.

Temmuz, 2014

Günay ASLANOVA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	vi
KISALTMA LİSTESİ	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
HOMOTOPI PERTÜRBASYON METODU (HPM)	3
2.1 Homotopi ve Pertürbasyon Kavramı	3
2.2 Metodun Kullanımı	4
BÖLÜM 3	
ALTERNATİF HOMOTOPI METODU (AHM)	7
3.1 Metodun Tanımı ve Uygulaması	7
3.2 Varlık Teoremi	11
3.3 Yakınsaklık Teoremi	15

BÖLÜM 4

DENKLEM ÇÖZÜMLERİNDE KARŞILAŞILAN SORUNLAR VE ÇÖZÜMLERİ	18
4.1 Regüler Denklem Çözümlerindeki Sorunlar	18
4.1.1 Bazı İkinci Mertebeden Denklemlerin Çözümündeki Sorunlar ve Giderilmesi	18
4.1.2 Reaksiyon-Difüzyon Denklemi, Uygulaması ve Sorunların Çözümü..	19
4.1.3 Çok-Noktalı Problemlerin Çözümündeki Zorluklar ve AHM ile Giderilmesi	23
4.2 Singüler Denklem Çözümlerindeki Sorunlar	27
4.2.1 Emden-Fowler Tipli Denklemler	27
4.2.1.1 Denklemin Modeli	27
4.2.1.2 AHM ile HPM Uygulanması ve Karşılaştırılması	28

BÖLÜM 5

YÜKSEK MERTEBEDEN DENKLEMLERE UYGULAMALAR	35
5.1 Denklem Modeli	35
5.2 Uygulamalar	36

BÖLÜM 6

KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERE UYGULAMALAR	43
6.1 Literatür Özeti	43
6.2 Değişken Katsayılı Dalga Tipli Non-Linear Denklem Çözümü için HPM....	44
6.3 Uygulamalar	46

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	58

SİMGE LİSTESİ

L	Diferansiyel operatörü
L^{-1}	İntegral operatörü
N	Lineer olmayan operatör
p	Küçük bir parametre

KISALTMA LİSTESİ

ADM	Adomian Dekompozisyon Metodu
AHM	Alternatif Homotopi Metodu
HPM	Homotopi Pertürbasyon Metodu

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1.1	İki-nokta problemi için AHM ve HPM uygulaması	11
Çizelge 4.1.2.1	İki farklı başlangıç iterasyonu ile çözümlerin karşılaştırılması	23
Çizelge 4.1.3.1	Çok-nokta problemi için mutlak hataların karşılaştırılması	26
Çizelge 4.2.1.2.1	Homojen olmayan Lane-Emden denklemi için karşılaştırma	31
Çizelge 4.2.1.2.2	Homojen Lane-Emden denklemi için karşılaştırma	34
Çizelge 5.2.1	Yüksek mertebeden denklem için karşılaştırma	39
Çizelge 6.3.1	Sabit katsayılı dalga tipli denklem için mutlak hata değerleri.....	49
Çizelge 6.3.2	Değişken katsayılı dalga tipli denklem için mutlak hata değerleri....	51

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ
ALTERNATİF HOMOTOPİ METODU VE DİĞER METOTLARLA
KARŞILAŞTIRILMASI**

Günay ASLANOVA

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Elif TEKİN TARIM

Bu çalışmada, adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık seri çözümü için yeni bir yöntem olarak “Alternatif Homotopi Metodu” tanıtılmış ve bazı problemlere uygulanmıştır. Bu metot, literatürde yaygın olarak kullanılan Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ile karşılaştırılmıştır.

İlk bölümde, tezin amacı, literatür özeti ve genel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, homotopi kavramı ve pertürbasyon teorisi kısaca verilmiş, daha sonra ise Homotopi Pertürbasyon Metodu analiz edilmiştir.

Üçüncü bölümde, yeni bir yöntem olarak Alternatif Homotopi Metodu tanıtılmıştır. Çalışmamızı daha değerli yapmak için varlık ve yakınsaklık teoremleri ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, regüler ve singüler denklem çözümlerindeki sorunlar ayrı olarak incelenmiştir. Daha sonra bu zorlukların giderilmesine çalışılmıştır.

Beşinci bölümde, yüksek mertebeden denklemler içeren problemler tartışılmıştır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için yaklaşık seri çözümü, altıncı bölümde dikkate alınmıştır.

Son bölüm, bazı analizler ve sonuçlar içerir.

Anahtar Kelimeler: Yaklaşık çözüm, homotopi pertürbasyon metodu, başlangıç ve sınır değer problemleri

**A NEW ALTERNATIVE HOMOTOPY METHOD FOR THE APPROXIMATE
SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND COMPARISON WITH
OTHER METHODS**

Günay ASLANOVA

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assist. Prof. Dr. Elif TEKİN TARIM

In this study, a new method for the approximate solution of ordinary and partial differential equations called “Alternative Homotopy Method” is introduced and applied to some problems. This method is compared with Homotopy Perturbation Method (HPM), which is commonly used in the literature.

In the first section, the aim of the thesis, literature summary and the general definitions are given.

In the second section, the concept of homotopy and perturbation theory are given briefly, then the Homotopy Perturbation Method is analyzed.

In the third section, a new Alternative Homotopy Method is introduced. To make the work more valuable we established some existence and convergence theorems.

In the fourth section, the difficulties related to regular and singular problems are examined separately. Then we demonstrated the ways to overcome these difficulties.

In the fifth section, the problems containing higher order equations are discussed.

The approximate series solutions for partial differential equations, considered in the sixth section.

The last section, consists of some analysis and conclusions.

Keywords: Approximate solution, homotopy perturbation method, initial and boundary value problem.

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM), aynı isimle, 1998 yılında Ji-Huan He [1] tarafından verilmiştir. Ama aslında bu metot, 1992’de Shijun Liao tarafından verilmiş homotopi analiz metodundan elde edilebilir. Liao, metot için yeni tanım ve teoremler vererek 2003 yılında yayınlanan “Beyond Perturbation: Introduction to the homotopy analysis method” adlı kitabında, homotopi pertürbasyon metodunun, kendi metodunun özel hali olduğunu kanıtlamıştır [2].

Genelde nonlinear problemlere farklı dallarda çalışan bilim insanlarının ilgisi, HPM ve Adomian Dekompozisyon Metodu (ADM) gibi seri çözümü bulan metotların yaygın kullanımını sağladı ve bu yönde yüzlerce makale yayınlandı.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık seri çözümünü bulmak için yeni bir yöntem olarak Alternatif Homotopi Metodu’nu tanıtmak ve bu yöntemi diğer yöntemlerle karşılaştırmaktır. Aynı zamanda, literatürde en çok uygulanan metotlar olan Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ve Adomian Dekompozisyon Metodu (ADM) gibi metotları da inceleyip uygulamalardaki bazı hataları analiz ederek daha uygun teknik oluşturmaya çalışacağız.

1.3 Hipotez

Literatürde uygulanmakta olan yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinin çoğunda ortaya çıkan sorunları ortadan kaldırmak için yeni yöntem olan Alternatif Homotopi Metodu, genelde daha etkili yöntemdir. Bu yöntem, homotopi mantığını esas almaktadır. Homotopi Pertürbasyon Metodu uygulandığı zaman, p parametresi dahil edilmesi nedeniyle non-lineer operatörün kullanılmasında ortaya çıkan zorluğu gidermenin en etkili yöntemi olarak Alternatif Homotopi Metodu ilk defa bu çalışmada ileri sürüldü. Bazı denklem türlerinde bu yöntemin yakınsaklığı da ispatlanarak teorik bakımdan iyi bir temeli olduğu esaslandırıldı. Bu metodun, gelecekte diğer diferansiyel denklem türlerine de uygulanması bekleniyor.

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU (HPM)

2.1 Homotopi ve Pertürbasyon Kavramı

Çözümeyen bir problem, bazen bu probleme çok yakın ama çözülebilir problemlerin limiti gibi gösterilmeye mecbur kalınır. Pertürbasyon teorisi, yaklaşık olarak bu tür matematiksel metotları ve teorileri içerir. Eğer bir problem, küçük terim veya terimler eklenerek tam olarak çözülebilen probleme getiriliyorsa uygulanan teori genelde pertürbasyon teorisidir.

Aslında, pertürbasyon teorisi, esas problemi bir seri şeklinde göstermeyi amaçlar. Bir örnekle bunu anlamaya çalışalım: Bir başlangıç değer probleminin beklenen çözümü $f(x)$ olsun. Bu çözümü bulmak kolay değilse, ona benzer daha basit, mesela homojen veya lineer problemin çözümünden başlanıp iterasyonlar kurularak $f(x)$ 'e yaklaşılar. Örneğin, daha basit problemin çözümü $f_0(x)$ fonksiyonu olsun. O zaman $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \dots \quad (2.1.1)$$

şeklinde gösterilir ve $f_k(x)$ fonksiyonları öncekilerin yardımıyla bulunarak esas çözüme seri şeklinde yaklaşılar.

Bu prosedür, her zaman etkili olmayabilir ve hatta yakınsak olmayabilir. Yani bulduğumuz seri çözümün bazen asıl çözümle ilgisi olmayabilir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için pertürbasyon teorisini topolojideki homotopi kavramıyla birleştirmek ihtiyacı oluşmuştur.

Homotopi derken bir fonksiyondan (operatörden) diğerine dönüşümü kolaylaştıran bir prosedür anlaşılır. Mesela $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının homotopisi,

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x) \quad (2.1.2)$$

gibi yazılabilir. Burada t parametresi $[0,1]$ aralığında değişirken $f(x)$ fonksiyonu $g(x)$ 'e dönüşür. Gerçekten de, $t = 0$ olunca, $H(x, 0) = f(x)$ ve $t = 1$ olunca, $H(x, 1) = g(x)$ elde edilir.

Şimdi farz edelim,

$$u'' = h(x, u) \quad (2.1.3)$$

denklemini belirli sınır şartlarında çözmek istiyoruz. Kabul edelim ki, beklenen çözüm $u(x)$ 'tir. Sağdaki fonksiyon basit fonksiyon değilse $u(x)$ 'e ulaşmak zor olabilir. Ama $u'' = 0$ denklemi (aynı sınır şartlarında) çok kolay bir denklemdir. Mesela, $u'' = 0$ denkleminin çözümü $u_0(x)$ olsun. $u_0(x)$ 'ten $u(x)$ 'e giden bir dönüşüm (deformasyon) yapmak homotopi pertürbasyon metodunun en esas yönlerinden biridir.

2.2 Metodun Kullanımı

Metot, çözümü zor veya uzun olan bir lineer veya non-lineer problemi, kolaylıkla çözülebilir lineer denklem sistemine indirgemektedir. Uygun bir başlangıç iterasyonu ve uygun homotopi seçmek, problemin çözümü için oldukça önemlidir. Örneklerden göreceğiz ki, literatürde çözülmüş bazı problemlerde, başlangıç iterasyonu çok uygun seçilmemiştir ve dolayısıyla seri çözüm, tam çözüme çok yavaş yaklaşmaktadır.

Homotopi pertürbasyon kavramını, adi diferansiyel denklemlere uygulayarak anlamaya çalışalım.

Daha önce anlatıldığı gibi $u'' = h(x, u)$ denkleminin sağ tarafı basit bir fonksiyon değilse bu denklemi çözmek zor olabilir. Eğer $u_0(x)$, daha basit $u'' = 0$ veya belli bir $f(x)$ fonksiyonu için $u'' = f(x)$ denkleminin çözümüyse $u_0(x)$ 'ten $u(x)$ 'e giden bir dönüşüm,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (2.2.1)$$

formülünün yardımıyla yazılabilir.

u için beklenti doğal olarak

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad (2.2.2)$$

şeklinde olur. Böylece (2.2.1)'de $p = 0$ olunca u_0 ve $p = 1$ olunca u elde edilir.

Aslında u ve u_0 arasındaki bu dönüşümü, esas denklem ve ona en yakın basit denklem arasındaki dönüşümle bağdaştırmak gerekir. Bunu, daha önceki ikinci mertebeden diferansiyel denklem örneğinden anlamaya çalışalım.

(2.1.3) denkleminde $h(x, u) = u^2$ olsun, yani

$$u'' = u^2. \quad (2.2.3)$$

Bu denkleme,

$$(1 - p)(u'' - v_0'') + p(u'' - u^2) = 0 \quad (2.2.4)$$

şeklinde bir homotopi (dönüşüm) denk gelir. Gerçekten $p = 0$ olunca basit

$$u'' - v_0'' = 0 \quad (2.2.5)$$

denklemini, $p = 1$ olunca ise (2.2.3) denklemini bulunur. (2.2.5)'teki v_0 , başlangıç iterasyonudur. v_0 iterasyonunun düzgün seçilmesi çoğu zaman çok önemlidir ve yaklaşımın hız ve yakınlığını belirler. Daha sonra, bunun ne kadar önemli olduğunu örneklerde göreceğiz.

Böylece, (2.2.4) denkleminin p herhangi bir sabit olmak üzere çözümünü bulmak aslında her şeyi çözmüş olur ve bu çözüm (2.2.1) gibi kabul edilir. Doğal olarak aldığımız seride, $p = 1$ alarak esas çözüme ulaşmış oluruz. Henüz (2.2.4)'ün avantajı anlaşılmamıştır. Genelde bu denklem, (2.2.3)'ten daha zor bir denklem gibi algılanabilir. Ama (2.2.4)'te u 'nın yerine (2.2.1) serisini koyarak ve p 'lerin aynı derecelerinin katsayılarını eşitleyerek $u_0, u_1, u_2, \dots$ ardışığının terimlerini ifade etmek için denklemler sistemi bulunur ve bu denklemlerin hepsi $u'' = h(x)$ gibi bir denklem olur, yani sağ tarafı x 'in belli fonksiyonu olarak bulunur.

Aslında, homotopi pertürbasyon kavramını, bütün diferansiyel denklemlere uygulamak için operatör kavramına geçmek daha iyi olur. Diyelim,

$$u^{(n)} = f(x, u, \dots, u^{(n-1)}) + g(x) \quad (2.2.6)$$

gibi bir denklemimiz vardır. Burada f, g sürekli fonksiyonlardır.

$L(u) = u^{(n)}$ ve $N(u) = f(x, u, \dots, u^{(n-1)})$ gibi lineer ve non-lineer operatöre bakalım. Uygun sınır şartlarında, $L(u) = 0$ denkleminin tek çözümü olur, yani L^{-1} tanımlanabilir. (2.2.6) denkleminde, $Lu = Nu + g(x)$ yazarak ve öncekine benzer homotopi uygulayarak,

$$Lu - Lv_0 + p[Lv_0 - Nu - g(x)] = 0 \quad (2.2.7)$$

yazarız ve çözümü (2.2.1) gibi alıp p 'nin aynı derecelerinin karşısındaki katsayıları eşitleyerek denklemler sistemi buluruz. Bu denklemler sistemi, terimleri ardışık olarak bulmaya imkan sağlar.

ALTERNATİF HOMOTOPİ METODU (AHM)**3.1 Metodun Tanımı ve Uygulaması**

HPM'nin (aslında Adomian dekompozisyon vb. metotların da) en önemli zorluklarından biri nonlinear operatörle ilgili hesaplamalardır. HPM uygulanırken, önce hesaplamamız gereken $N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)$ gibi ifadelerin hesaplanması en zor işlemlerden biridir. Hatta, $Nu = u^m$ gibi polinomlardan oluşsa bile hesaplamalar çok da kolay değildir. Eğer $Nu = \sin u$, $\cos u$ gibi fonksiyonlar olursa önce bu fonksiyonu u 'ya göre Taylor serisine ayırmak ve sonra HPM uygulamak gerekiyor ki bu da hata oranını çok artırır, hatta çoğu zaman hata kontrol edilemez hale gelebilir. Aynı sorun Adomian dekompozisyonu prosedüründe de ortaya çıkmaktadır.

Bizim uygulamak istediğimiz Alternatif Homotopi Metodu (AHM) aslında homotopi kavramının bir uygulamasıdır ve HPM'ye biraz benzese de tamamen farklı bir yöntemdir.

Denkleminizi,

$$Lu = Nu + g(x) \quad (3.1.1)$$

gibi yazalım ve aşağıdaki yeni homotopi kuralım:

$$\begin{aligned} &L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - Lv_0 + p\{Lv_0 - Nu_0 - p[(N(u_0 + u_1) - N(u_0)) \\ &- p^2[(N(u_0 + u_1 + u_2) - N(u_0 + u_1))] - \dots - p^n[(N(u_0 + u_1 + \dots + u_n) \\ &- N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}))] - \dots - g(x)\} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Çözümü, $u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$ gibi farz edelim.

$p = 0$ alırsak $Lu_0 - Lv_0 = 0$ denklemi, $p = 1$ alırsak, parantezleri açarak ve limite geçerek, $Lu - Nu - g(x) = 0$ elde edilir.

Şimdi HPM'deki gibi $N(u_0 + pu_1 + \dots + p^n u_n)$ gibi ifadelerin yerine daha basit $N(u_0 + u_1 + \dots + u_n)$ ifadelerine ihtiyacımız vardır. Diğer taraftan p 'lerin aynı derecelerinin katsayılarını kıyaslarken bulunan denklemler de daha kolaydır. v_0 olarak, $Lu = g(x)$ denkleminin aynı sınır şartlarında çözümü alınır.

Bunları daha iyi anlamak için bir örneğe bakalım.

ÖRNEK:

Önce daha basit lokal (yani 2-nokta) probleme bakalım:

$$u'' = u^2 - x^4 - 2x^2 + 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2. \quad (3.1.3)$$

Bu problemin tam çözümü $u = x^2 + 1$ fonksiyonudur.

$Lu = u''$ ve $Nu = u^2$ olarak (3.1.2) formülünden,

$$Lu_0 = Lv_0$$

yazılır. v_0 olarak,

$$u'' = -x^4 - 2x^2 + 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2$$

probleminin çözümü alınır. Bu denklem çözülerek,

$$v_0 = -\frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{10}x + 1 = u_0$$

bulunur.

Burada dikkat edilmesi gereken noktalardan biri: Bundan sonraki denklemlerin $u(0) = 0, u(1) = 0$ sınır şartlarında çözülmesi gerekir. Çünkü, $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'lerin toplamının sınır şartları u 'nun sınır şartına uygun olmalıdır.

u_1 için (3.1.2) formülünden,

$$\begin{aligned} Lu_1 &= -Lv_0 - x^4 - 2x^2 + 1 + (u_0)^2 = (u_0)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{10}x + 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

elde edilir.

(3.1.4) denklemi, u_1 'e göre çözülerek,

$$u_1 = \frac{1}{163800}x^{14} + \frac{1}{11880}x^{12} - \frac{1}{16200}x^{10} - \frac{7}{10800}x^9 - \frac{1}{240}x^8 - \frac{1}{180}x^7 \\ - \frac{1}{360}x^6 + \frac{7}{200}x^5 + \frac{149}{1200}x^4 + \frac{7}{30}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{28520417}{32432400}x$$

bulunur.

Devam edilerek (3.1.2) formülünden,

$$Lu_2 = N(u_1 + u_0) - N(u_0) = (u_1 + u_0)^2 - (u_0)^2 = (u_1)^2 + 2u_1u_0$$

yazılır. Sağ tarafta elde edilen değerler, yani u_0 ve u_1 yerine yazılırsa bir denklem elde edilir. Bu denklem, çözüm yöntemi olarak tercih ettiğimiz LaTeX (Scientific WorkPlace) programının yardımıyla çözülerek yaklaşık olarak,

$$u_2 \approx \frac{24733}{570\,439584000}x^{19} + \frac{795721}{7145\,506368000}x^{18} + \frac{9834043}{21249\,708480000}x^{17} \\ + \frac{102103}{51\,891840000}x^{16} + \frac{203543089}{404561\,757600000}x^{15} - \frac{109}{199584000}x^{14} \\ - \frac{1385532223}{40981\,580640000}x^{13} - \frac{88235591}{660\,508992000}x^{12} - \frac{598171949}{2140\,538400000}x^{11} \\ - \frac{6406121719}{10508\,097600000}x^{10} + \frac{44312501}{32\,332608000}x^9 + \frac{54671263}{25\,945920000}x^8 \\ + \frac{5093491129}{272\,432160000}x^7 + \frac{63564433}{2084940000}x^6 - \frac{9601517}{324324000}x^5 \\ + \frac{570294\,954378769}{12622326\,837120000}x^4 - \frac{28520417}{97297200}x^3 + 0.22594x$$

bulunur.

Benzer şekilde (3.1.2) formülü, diğer terimleri bulmak için kullanılabilir. Fakat, bu örnekte 3-terimlik çözümdeki mutlak hataları karşılaştıracığımız için ilk üç terimin bulunması yeterlidir.

Böylece ilk üç terim kullanılarak yaklaşık seri çözümü aşağıdaki gibi yazılır:

$$u \approx u_0 + u_1 + u_2 ,$$

$$\begin{aligned} u \approx & 4.284 \times 10^{-14}x^{30} + 1.3595 \times 10^{-12}x^{28} + 9.7411 \times 10^{-12}x^{26} \\ & -1.3190 \times 10^{-11}x^{25} - 1.1099 \times 10^{-10}x^{24} - 3.497 \times 10^{-10}x^{23} \\ & -2.4644 \times 10^{-9}x^{22} - 1.0188 \times 10^{-9}x^{21} - 1.4905 \times 10^{-8}x^{20} \\ & +4.3358 \times 10^{-8}x^{19} + 1.1136 \times 10^{-7}x^{18} + 4.6278 \times 10^{-7}x^{17} \\ & +1.9676 \times 10^{-6}x^{16} + 5.0312 \times 10^{-7}x^{15} + 5.5589 \times 10^{-6}x^{14} \\ & -3.3809 \times 10^{-5}x^{13} - 4.9412 \times 10^{-5}x^{12} - 2.7945 \times 10^{-4}x^{11} \\ & -6.7137 \times 10^{-4}x^{10} + 7.2237 \times 10^{-4}x^9 - 2.0595 \times 10^{-3}x^8 \\ & +1.3141 \times 10^{-2}x^7 - 5.6237 \times 10^{-3}x^6 + 5.3953 \times 10^{-3}x^5 \\ & +2.6814 \times 10^{-3}x^4 - 5.9793 \times 10^{-2}x^3 + x^2 + 4.6560 \times 10^{-2}x + 1.0 \end{aligned}$$

Şimdi HPM uygulamaya çalışalım. Her iki yöntemde, u_0 ve u_1 aynıdır. Ama sonraki terim için farklı formüller ve tabii ki farklı sonuçlar bulunur. HPM uygularsak,

$$Lu_2 = 2u_1u_0 \quad (3.1.5)$$

alınır. Yani u_1 , sonraki terimin bulunmasında *tam olarak* kullanılmıyor.

(3.1.5) çözülerek u_2 bulunur:

$$\begin{aligned} u_2 = & -\frac{1}{1135134000}x^{22} - \frac{31}{1540539000}x^{20} - \frac{4339}{74\,432358000}x^{18} \\ & + \frac{109}{572832000}x^{17} + \frac{38407}{23\,351328000}x^{16} + \frac{251}{74844000}x^{15} \\ & + \frac{599}{64864800}x^{14} - \frac{197}{25272000}x^{13} - \frac{2033}{21384000}x^{12} - \frac{431}{1188000}x^{11} \\ & - \frac{337}{324000}x^{10} + \frac{412337}{35\,026992000}x^9 + \frac{17}{1008000}x^8 + \frac{93684247}{5108103000}x^7 \\ & + \frac{43}{1200}x^6 + \frac{9317383}{648648000}x^5 - \frac{5354417}{277992000}x^4 - \frac{28520417}{97297200}x^3 + 0.24531x \end{aligned}$$

Şimdi her iki yöntemle elde edilen sonuçlardaki hataları karşılaştıralım. Aşağıdaki çizelgede iki yöntemle bulunan 3-terimlik çözümlerin hatalarının kıyaslamaları verilmiştir.

Çizelge 3.1.1 İki-nokta problemi için AHM ve HPM uygulaması

x	HPM'de mutlak hata	AHM'de mutlak hata
0.1	6.5275×10^{-3}	4.5965×10^{-3}
0.2	1.2625×10^{-2}	8.8395×10^{-3}
0.3	1.7787×10^{-2}	1.2387×10^{-2}
0.5	0.02325	1.6149×10^{-2}
0.6	2.2738×10^{-2}	1.5861×10^{-2}
0.8	1.4685×10^{-2}	1.0432×10^{-2}
0.9	7.8114×10^{-3}	5.6075×10^{-3}

Çizelgeden görüldüğü gibi, u_2 'nin bulunması için u_1 'in daha aktif kullanılması hataların azalmasına sebep olmuştur. Yani, AHM ile daha uygun çözümler elde edilmiştir.

3.2 Varlık Teoremi

Şimdi, AHM uygulamalarının teorik bakımdan anlamlı olması için bazı teoremleri ifade etmeye çalışalım. AHM'nin yakınsaklığıyla ilgili bazı şeyleri kanıtlamamız gerekir, yoksa bu uygulamaların bir anlamı olmaz.

İkinci mertebeden sınır değer problemleri örneğinde uygun koşullar altında AHM'nin yakınsak olduğunu göstermeye çalışacağız. Yani aşağıdaki gibi problemlere bakacağız:

$$u'' = f(x, u) + g(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b \tag{3.2.1}$$

Kolaylık için $a = b = 0$ alalım ve problemi tekrar aşağıdaki gibi yazalım:

$$u'' = f(x, u) + g(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (3.2.2)$$

Bu tip problemlerle ilgili literatürde birkaç sonuç kanıtlanmıştır. Biz önce (3.2.2)'nin çözümünün varlığı hakkında bir teorem kanıtlamalıyız.

$v_0(x)$, aşağıda verildiği gibi, $f = 0$ olduğu durumda (3.2.2)'nin çözümünü gösterebiliriz:

$$u'' = g(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (3.2.3)$$

$m(x)$ pozitif fonksiyon ve

$$\int_0^1 m(x) dx \leq M$$

olsun. Bu koşullar altında, aşağıdaki teoreme bakalım.

TEOREM: $g(x)$ fonksiyonu $(0,1]$ aralığında sürekli, $[0,1]$ için integrallenebilir ve

$$|f(x, u(x))| \leq m(x), \quad g(x) \leq m(x) \quad (3.2.4)$$

koşulu ile $f(x, u)$, u 'daki her $x \in (0,1]$ için ve

$$|u(x) - v_0(x)| \leq 2M$$

koşulunu sağlayan bütün $u(x)$ 'ler için sürekli olsun. O zaman (3.2.2) sınır değer probleminin çözümü vardır.

İSPAT:

$$c = - \int_0^1 (1-s)g(s)ds$$

iken problem (3.2.3)'ün aşağıdaki gibi tek çözümü vardır:

$$v_0(x) = \int_0^x (x-s)g(s)ds + cx. \quad (3.2.5)$$

Yineleme bağıntılarını şu şekilde yazalım:

$$u_0(x) = v_0(x),$$

$$u_1(x) = \int_0^x (x-s)f(s, u_0(s))ds + c_0x + v_0(x),$$

$$u_2(x) = \int_0^x (x-s)f(s, u_1(s))ds + c_1x + v_0(x), \quad (3.2.6)$$

$\vdots$

$$u_n(x) = \int_0^x (x-s)f(s, u_{n-1}(s))ds + c_{n-1}x + v_0(x).$$

$\vdots$

Burada $c_n = c(u_n)$, u_n 'e bağlı bir sabittir.

$$c_n = c(u_n) = - \int_0^1 (1-s)f(s, u_n(s))ds. \quad (3.2.7)$$

$\{u_n(x)\}$ dizisinin düzgün yakınsak altdizisi olduğunu gösterelim. Gerçekten de (3.2.4), (3.2.5) ve (3.2.6)'dan aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$|u_1(x) - v_0(x)| = \left| \int_0^x (x-s)f(s, u_0(s))ds + c_0x \right| \leq 2M,$$

$$|u_2(x) - v_0(x)| = \left| \int_0^x (x-s)f(s, u_1(s))ds + c_1x \right| \leq 2M,$$

$\vdots$

ve böylece $\{u_n(x) - v_0(x)\}$ dizisi düzgün sınırlıdır.

Ayrıca, $|x - t| < \delta$ ve sabit bir M_1 için,

$$|u_n(x) - v_0(x) - (u_n(t) - v_0(t))| = \left| \int_t^x (x-s)f(s, u_{n-1}(s))ds + v_0(x) - v_0(t) \right|$$

$$\leq M_1|x - t|$$

yazabiliriz. Yani $\{u_n(x) - v_0(x)\}$ düzgün sınırlı ve $[0,1]$ için eşsüreklili (equicontinuous) dizidir.

Ascoli-Arzelà lemmasına göre, kapalı ve sınırlı aralıkta tanımlı olan sürekli fonksiyonların dizisi, düzgün sınırlı ve eşsüreklili ise düzgün yakınsak altdizisi vardır. Bu nedenle, $\{u_n(x)\}$ dizisinin düzgün yakınsak altdizisi vardır, kolaylık için $u_n(x) \rightarrow u(x)$ alalım. O zaman (c_n) yakınsaktır ve Lebesgue dominant yakınsaklık teoreminden (Lebesgue dominated convergence theorem) aşağıdaki ifade elde edilir:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x (x-s)f(s, u_{n-1}(s))ds + Cx + v_0(x)$$

$$= \int_0^x (x-s)f(s, u(s))ds + Cx + v_0(x).$$

Burada,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = - \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds.$$

Şimdi yukarıdaki ifadede her tarafın ikinci türevini alarak $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ fonksiyonunun çözüm olduğunu görebiliriz: Önce her tarafın 1. türevlerini alalım:

$$u'(x) = \left(\int_0^x (x-s)f(s, u(s))ds + Cx + v_0(x) \right)'$$

$$= \left(x \int_0^x f(s, u(s))ds \right)' - \left(\int_0^x s f(s, u(s))ds \right)' + C + v_0'(x).$$

Çarpımın türevini alma kuralını uygular ve sonra integralin türevini alırsak, (ilgili Lagrange kuralına göre $(\int_a^x \varphi(s)ds)' = \varphi(x)$ olduğu düşünülerek)

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int_0^x f(s, u(s)) ds + x \left(\int_0^x f(s, u(s)) ds \right)' - xf(x, u(x)) + C + v_0'(x) \\ &= \int_0^x f(s, u(s)) ds + C + v_0'(x) \end{aligned}$$

bulunur. Her taraftan bir daha türev alarak,

$$u''(x) = f(x, u(x)) + v_0''(x)$$

elde edilir. Diğer taraftan v_0 fonksiyonu (3.2.3) denkleminin çözümüdür ve dolayısıyla

$$v_0''(x) = g(x) \text{ olmalıdır. Yani } u(x) \text{ fonksiyonu için, } u''(x) = f(x, u(x)) + g(x)$$

alınır ve bu da u 'nın çözüm olduğunu kanıtlar.

Böylece (3.2.2)'deki sınır değer problemi için $u(x)$ çözümünün varlığını kanıtladık.

3.3 Yakınsaklık Teoremi

TEOREM: $g(x)$, $(0,1]$ aralığında sürekli, $[0,1]$ 'de integrallenebilir ve $f(x, u)$, u 'daki her $x \in (0,1]$ ve integrallenebilir bir $m(x)$ için

$$|f(x, u(x))| \leq m(x)$$

şartını sağlasın. O zaman (3.2.6)'daki iteratif algoritma, $u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ çözümüne yakınsar.

İSPAT: p 'nin aynı derecelerini eşitleyerek aşağıdakiler elde edilir:

$$Lu_0 = Lv_0,$$

$$Lu_1 = -Lv_0 + Nu_0 + g(x),$$

$$Lu_2 = N(u_1 + u_0) - N(u_0), \tag{3.3.1}$$

$\vdots$

$$Lu_{n+1} = N(u_n + \dots + u_0) - N(u_{n-1} + \dots + u_0).$$

$\vdots$

Burada $Lu = u''$ ve v_0 , $Lu = g(x)$ probleminin çözümüdür.

Şimdi, (3.3.1)'deki ardışık u_k fonksiyonlarını hesaplayarak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$u_0(x) = \int_0^x (x-s)g(s)ds + C_0x,$$

$$u_1(x) = \int_0^x (x-s)f(s, u_0(s))ds + C_1x,$$

$$u_2(x) = \int_0^x (x-s)[f(s, u_0(s) + u_1(s)) - f(s, u_0(s))]ds + C_2x, \dots \quad (3.3.2)$$

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x (x-s)[f(s, u_0 + u_1 + \dots + u_n) - f(s, u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})]ds + C_{n+1}x.$$

⋮

Burada,

$$C_0 = - \int_0^1 (1-s)g(s)ds, \quad C_1 = - \int_0^1 (1-s)f(s, u_0)ds, \dots$$

$$C_n = C(u_n) = - \int_0^1 (1-s)[f(s, u_{n-1}) - f(s, u_{n-2})]ds, \quad n > 1.$$

$y_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k$ kısmi toplamlar dizisi için,

$$\begin{aligned} |y_k(x)| &= \left| \int_0^x (x-s)f(s, u_0 + u_1 + \dots + u_{k-1})ds + u_0(x) + (C_0 + \dots + C_k)x \right| \\ &\leq \int_0^x m(s)ds + |u_0(x)| \\ &\quad + \left| \int_0^1 (1-s)(g(s) + f(s, u_0) + f(s, u_1) - f(s, u_0) \dots + f(s, u_k) - f(s, u_{k-1}))ds \right| \\ &\leq \int_0^x m(s)ds + |u_0(x)| + \left| \int_0^1 (1-s)(g(s) + f(s, u_k))ds \right| \leq K \end{aligned}$$

K sabit olmak üzere bu ifade yazılabilir. Yani, $\{y_k(x)\}$ dizisi düzgün sınırlıdır. Benzer şekilde $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$ için

$$\begin{aligned}
|y_k(x_2) - y_k(x_1)| &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} (x-s)[f(s, u_0 + u_1 + \dots + u_n)]ds + u_0(x_2) - u_0(x_1) \right| \\
&\quad + (x_2 - x_1) \left| \int_0^1 (1-s)f(s, u_{n-1})ds \right| + (x_2 - x_1) \left| \int_0^1 (1-s)g(s)ds \right| \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} m(s)ds + |u_0(x_2) - u_0(x_1)| + (x_2 - x_1) \int_0^1 m(s)ds + (x_2 - x_1) \left| \int_0^1 (1-s)g(s)ds \right| \\
&\leq (x_2 - x_1)K_1,
\end{aligned}$$

K_1 sabit olmak üzere yazılabilir. Bu ise $\{y_k(x)\}$ dizisinin eşsürekliliğini gösterir. Ascoli-Arzelà lemmasından $\{y_n(x)\}$ 'in düzgün yakınsak alt dizisinin olduğu çıkarılır, basitlik için $y_n(x) \rightarrow y(x)$ diyelim. (3.3.2) ifadesinden,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \int_0^x (x-s)f(s, u_0 + u_1 + \dots + u_n)ds + \int_0^x (x-s)g(s)ds + x \sum_{k=1}^n C_k$$

elde edilir ve böylece Lebesgue dominant yakınsaklık teoreminden,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \int_0^x (x-s)f(s, y)ds + \int_0^x (x-s)g(s)ds + Cx$$

çıkarılır. Burada, $C = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$ alınmıştır. y'' hesaplanarak y değeri, problem (3.2.2)'nin çözümü olarak elde edilir.

DENKLEM ÇÖZÜMLERİNDE KARŞILAŞILAN SORUNLAR VE ÇÖZÜMLERİ

4.1 Regüler Denklem Çözümlerindeki Sorunlar

4.1.1 Bazı İkinci Mertebeden Denklemlerin Çözümündeki Sorunlar ve Giderilmesi

Literatürde, ikinci mertebeden denklemlerin çözümü için farklı yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemlerin bazılarının uygulanmasında farklı sorunlar ortaya çıkar. Mesela, seri yaklaşımı çözüme çok yavaş yaklaşır veya hata çok büyük olur. Aşağıda göreceğiz ki, bu hatalar aslında iki sebepten ortaya çıkar:

- 1) Başlangıç iterasyonunun iyi seçilmemesi,
- 2) En uygun yöntemin seçilmemesi.

Aslında, modern bilgisayar tekniklerinin hızla ilerlediğini de düşünerek literatürdeki yöntemleri daha uygun hale getirmek mümkündür. Artık 20 yıl önceki bilgisayar teknikleriyle şimdiki bilgisayar teknikleri aynı değildir. Ama, teori bu kadar ilerlemediğinden eski yöntemlerin modifiye edilmesi zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. İterasyonun her adımında karşımıza çıkan denklemleri 20 yıl önceki kadar basit hale getirmeye gerek yoktur. Çünkü daha zor denklemleri bilgisayar yardımıyla kolayca çözebiliriz.

Bunları daha iyi anlatmak için iki tür diferansiyel denkleme bakacağız: Reaksiyon-difüzyon denklemleri ve çok-noktalı sınır değer problemleri.

4.1.2 Reaksiyon-Difüzyon Denklemi, Uygulaması ve Sorunların Çözümü

Reaksiyon-difüzyon denklemi olarak, aşağıdaki çok basit görünen, ama Taylor serisi türünden yaklaşımların çok yavaş çalıştığı bir problemi göz önüne alacağız:

$$u'' + u^n = 0. \quad (4.1.2.1)$$

Literatürde en yaygın ve fiziksel bakımdan uygulanabilir sınır şartları

$$u(0) = 0, u(l) = 0 \quad (4.1.2.2)$$

şeklindedir. Burada kolaylık için $l = 1$ alacağız.

(4.1.2.1)-(4.1.2.2) probleminin çözümü için literatürde farklı yöntemler vardır. Wang, Si ve Mo [3]'te HPM uygulayarak bu problemi çözmeye çalışmıştır. [4]'te Lesnic, Adomian dekompozisyon yöntemini uygulamış, [5]'te ise Mo, varyasyon iterasyon yöntemini uygulamıştır.

Bu uygulamaların hepsinde ortak bir sıkıntı vardır. Başlangıç iterasyonu çok uygun seçilmemiştir ve dolayısıyla seri çözüm, tam çözüme çok yavaş yaklaşır.

[3]'te $n = 2$ halinde başlangıç iterasyonu,

$$u_0 = ax(1 - x) = v_0 \quad (4.1.2.3)$$

olarak alınmış ve HPM uygulanmıştır. Bu başlangıç iterasyonu, sonuç olarak çok hatalı bir çözüme getirmiştir. Yaklaşık çözüm için bulunan,

$$u = ax(1 - x) + ax^2 - a^2 \left(\frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{12}x^4 \right) - \left(a - \frac{1}{60}a^2 \right)x \quad (4.1.2.4)$$

sonucunun çok hatalı olduğu [6]'da belirtilmiştir. Mesela, $x = 0.9$ olunca hata 40000'den fazla olur, bu da yaklaşımın ne kadar hatalı olduğunu açıkça gösterir.

Şimdi daha düzgün bir HPM yaklaşımını anlatalım. Aslında HPM standart şekilde uygulanabilir:

$$(1 - p)(u'' - v_0'') + p(u'' + u^n) = 0 \quad (4.1.2.5)$$

Dikkat edersek, $p = 0$ olunca $u'' - v_0'' = 0$ gibi basit bir denklem buluruz, $p = 1$ ise $u'' + u^n = 0$ denklemini verir.

(4.1.2.5)'in çözümünü

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (4.1.2.6)$$

şeklinde farz edersek, doğal olarak $p = 1$ için denk gelen çözüm, yani

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad (4.1.2.7)$$

serisi problemimizin çözümü olacaktır.

Ama başlangıç iterasyonu daha mantıklı şekilde seçilirse yaklaşım hızlı ve az hatalı olabilir. Burada akla gelen ilk şey (4.1.2.1)-(4.1.2.2) probleminin, “uçlara göre simetrik” olmasıdır. Bu simetrikliği göz önüne alarak başlangıç iterasyonunu,

$$v_0 = a\sin(\pi x) \quad (4.1.2.8)$$

şeklinde almak en uygun yaklaşım gibi görünmektedir, burada a sabittir ve biraz sonra belirlenecektir. Önce yukarıdaki bilgileri, $n = 2$ için (4.1.2.1)-(4.1.2.2) problemine uygulayalım.

ÖRNEK:

$$u'' + u^2 = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (4.1.2.9)$$

problemini çözelim [6].

u' 'nin (4.1.2.6)'daki ifadesini (4.1.2.5)'te yerine yazarak ve $v_0 = a\sin(\pi x)$ başlangıç iterasyonunu alarak, homotopi uygulayalım:

$$(1 - p)((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)'' - v_0'') \\ + p((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)'' + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2) = 0. \quad (4.1.2.10)$$

Parantezleri açtıktan sonra p 'lerin aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyerek denklemler sistemi buluruz. Bunların birincisi p 'nin sıfırıncı derecelerinin katsayılarının eşitlenmesinden elde edilir:

$$u_0'' = v_0'', \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 0.$$

Bu denklemin çözümü $u_0 = v_0 = a\sin(\pi x)$ fonksiyonudur.

p' 'nin birinci derecelerinin katsayılarının eşitlenmesinden ise,

$$u_1'' = -u_0'' - (u_0)^2, \quad u_1(0) = u_1(1) = 0$$

bulunur. Yani,

$$u_1'' = \pi^2 a \sin(\pi x) - a^2 \sin^2(\pi x). \quad (4.1.2.11)$$

Bu denklemi ve sonraki adımdaki denklemleri çözmek için bilgisayar tekniklerini kullanmak prosedürün etkisini ciddi derecede yükseltir. Mesela LaTeX programının yardımıyla (4.1.2.11) denklemini anında çözerek,

$$u_1 = -\frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{1}{4}a^2x - \frac{1}{8\pi^2}a^2\cos^2\pi x + \frac{1}{8\pi^2}a^2\sin^2\pi x + \frac{1}{8\pi^2}a^2 - a\sin\pi x$$

buluruz. Benzer şekilde p' 'nin ikinci derecelerinin katsayılarının eşitlenmesinden,

$$u_2'' = -2u_0u_1 \\ = -2(a \sin(\pi x)) \left(-\frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{1}{4}a^2x - \frac{a^2\cos^2\pi x}{8\pi^2} + \frac{a^2\sin^2\pi x}{8\pi^2} + \frac{a^2}{8\pi^2} - a \sin\pi x \right)$$

denklemini elde ederiz. Yine LaTeX programının yardımıyla,

$$u_2 = -\frac{1}{2\pi^2}a^3x^2 \sin(\pi x) - \frac{2}{\pi^3}a^3x \cos(\pi x) + \frac{1}{2\pi^2}a^3x \sin(\pi x) \\ - \frac{1}{24\pi^4}a^3\cos^2(\pi x) \sin(\pi x) + \frac{a^3\cos(\pi x)}{\pi^3} + \frac{a^3\sin^3(\pi x)}{72\pi^4} + \frac{27}{8\pi^4}a^3 \sin(\pi x) \\ + \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^2\cos^2\pi x}{4\pi^2} - \frac{a^2\sin^2\pi x}{4\pi^2} - \frac{a^2x}{2} - \frac{a^2(\pi + 4a)}{4\pi^3}$$

buluruz. p' 'nin üçüncü derecelerinin katsayılarının eşitlenmesinden aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$u_3'' = -2u_0u_2 - (u_1)^2$$

Daha önce bulduğumuz u_0 , u_1 ve u_2 değerlerini bu ifadede yerine yazarak u_3'' için bir denklem elde edilir. u_3 'ün bulunması için bu denklemin çözülmesi gerekir. Bilgisayar yardımıyla çözmek, en kısa sürede doğru yanıtı ulaşmamızı sağlar.

Bu denklemi çözersek,

$$\begin{aligned}
u_3 = & \frac{1}{160}a^4x^5 - \frac{1}{192}a^4x^4 - \frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{1}{480}a^4x^6 - \frac{3}{\pi^3}a^3\cos\pi x - \frac{81}{8\pi^4}a^3\sin\pi x \\
& - \frac{2}{\pi^5}a^4\sin\pi x - \frac{3}{32\pi^2}a^4x^3 + \frac{3}{64\pi^2}a^4x^4 - \frac{435}{256\pi^4}a^4x^2 - \frac{1}{8\pi^2}a^2\cos^2\pi x \\
& - \frac{451}{288\pi^6}a^4\cos^2\pi x + \frac{25}{18432\pi^6}a^4\cos^4\pi x + \frac{1}{8\pi^2}a^2\sin^2\pi x - \frac{1}{24\pi^4}a^3\sin^3\pi x \\
& + \frac{451}{288\pi^6}a^4\sin^2\pi x + \frac{25}{18432\pi^6}a^4\sin^4\pi x + \frac{1}{8\pi^4}a^3\cos^2\pi x\sin\pi x + \frac{9}{64\pi^4}a^4x^2\cos^2\pi x \\
& - \frac{9}{64\pi^4}a^4x^2\sin^2\pi x + \frac{6}{\pi^3}a^3x\cos\pi x - \frac{3}{2\pi^2}a^3x\sin\pi x - \frac{25}{3072\pi^6}a^4\cos^2\pi x\sin^2\pi x \\
& + \frac{25}{32\pi^5}a^4\cos\pi x\sin\pi x - \frac{9}{64\pi^4}a^4x\cos^2\pi x + \frac{3}{2\pi^2}a^3x^2\sin\pi x + \frac{9}{64\pi^4}a^4x\sin^2\pi x \\
& - \frac{25}{16\pi^5}a^4x\cos\pi x\sin\pi x + \frac{1}{3840\pi^4}a^2(180\pi^2a^2 + 4\pi^4a^2 + 960\pi^4 + 6525a^2)x \\
& + \frac{9613}{6144\pi^6}a^4 + \frac{3}{\pi^3}a^3 + \frac{1}{8\pi^2}a^2
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $u \approx u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ olarak ve $u'' + u^2 = 0$ denkleminde $x = 0.5$ koyarak $a = 11.569$ buluruz.

Çok ilginçtir ki, Adomian Dekompozisyon Metodu'nu (ADM) da uygularken ilk terimler aynı olur. Bu incelemeleri, "Transaction on IoT and Cloud Computing" (TICC) dergisine kabul edilmiş makalemizde yaptık.

Şimdi her iki başlangıç iterasyonu ile bulunan çözümlerdeki mutlak hataları karşılaştıralım.

Diğer sayfadaki çizelgede, [3]'teki yaklaşımla bizim yaklaşımımızın karşılaştırması verilmiştir.

Çizelge 4.1.2.1 İki farklı başlangıç iterasyonu ile çözümlerin karşılaştırılması

x	$u \approx u_0 + u_1 + u_2 + u_3$	$v_0 = a\sin(\pi x)$ alınarak ADM ve HPM'de bulunan mutlak hata	$v_0 = ax(1 - x)$ alınarak bulunan [3]'teki mutlak hata
0.0	0.0	2.5665×10^{-3}	0.0
0.1	3.2976	2.5942×10^{-2}	5.0045
0.2	6.4691	9.8435×10^{-2}	8.4127
0.3	9.2109	0.13682	3.1097
0.4	11.107	3.5474×10^{-2}	6.2372
0.5	11.788	5.4003×10^{-2}	10.76

Çizelgeden görüldüğü gibi bizim yaklaşımda hata [3]'teki hataya göre çok küçüktür.

4.1.3 Çok-Noktalı Problemlerin Çözümündeki Zorluklar ve AHM ile Giderilmesi

Şimdi çok-noktalı problemlerle ilgileneceğiz. Literatürde bazen bu problemlere lokal olmayan problemler de denir. Son 20-25 yılda çok-noktalı problemlerin çözümünün varlığı ve pozitifliği ile ilgili önemli araştırmalar yapılmıştır. Çok-noktalı ve sınır şartları homojen olmayan problem derken biz aslında,

$$u'' + g(x)f(u) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.1.3.1)$$

denklemine

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{i=1}^m \beta_i u(\gamma_i) + b \quad (4.1.3.2)$$

veya

$$u(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u(\gamma_i) + a, \quad u'(1) = 0 \quad (4.1.3.3)$$

sınır şartlarıyla bakacağız. Burada $g(x)$, $f(u)$ sürekli ve genellikle pozitif fonksiyonlardır.

$$x \in [0,1], u \in [0, \infty),$$

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \gamma_m < 1,$$

$$a, b, \alpha_i, \beta_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m), \quad 0 \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i < 1, \quad 0 \leq \sum_{i=1}^m \beta_i < 1.$$

(4.1.3.1)-(4.1.3.2) ve (4.1.3.1)-(4.1.3.3) gibi problemlerin çözümü için literatürde birkaç önemli uygulama mevcuttur. Genelde bu tür problemlerin çözümü, çok zor hesaplamalar talep ettiği için ve belli bilgisayar algoritmalarını kullanmak zor olduğu için yazarların çoğu aynı tip örnekleri çözmeye çalışmışlar ve bazen bulunan yaklaşık çözümler aslında tam çözüme çok da yakın olmamıştır.

Burada amacımız, bu tip zorlukların ortadan kaldırılmasıdır. Bunu iki yolla gerçekleştirebiliriz. Birincisi başlangıç şartlarını daha uygun almak, ikincisi ve daha önemlisi ise HPM'nin kendisini modifiye etmektir.

ÖRNEK:

$$u'' = u^3 + 2x(\ln x)u^2 - 4x^3(\ln x)^2 + 4x^3 \ln x - x^3 - \frac{2}{x}$$

denkleme,

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{\sqrt{e}}{2} u\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right),$$

sınır şartlarında bakalım. Tam çözüm $u_{tam} = x - 2x \ln x$ fonksiyonudur.

Burada, $Lu = u''$ ve $Nu = u^3 + 2x(\ln x)u^2$ olarak alınmalıdır.

Problemin yaklaşık çözümünü bulmak için AHM uygulayalım. v_0 için,

$$Lv_0 = -4x^3 (\ln x)^2 + 4x^3 \ln x - x^3 - \frac{2}{x}$$

denklemini,

$$v_0(0) = 0, \quad v_0(1) = \frac{\sqrt{e}}{2} v_0\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

sınır şartlarında çözmemiz gerek.

Buradan,

$$v_0 = x(-0.60290 + 2) + (\ln x) \left(\frac{19}{50} x^5 - 2x \right) - \frac{1}{5} x^5 (\ln x)^2 - \left(\frac{201}{1000} \right) x^5 = u_0$$

buluruz. u_1 için AHM formüllerinden,

$$Lu_1 = N(u_0) = u_0^3 + 2x(\ln x)u_0^2, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1(1) = \frac{\sqrt{e}}{2} u_1 \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right),$$

problemini bilgisayar yardımıyla çözerek,

$$\begin{aligned} u_1 = & -2.9412 \times 10^{-5} x^{17} (\ln x)^6 + 1.8906 \times 10^{-4} x^{17} (\ln x)^5 - 5.1865 \times 10^{-4} x^{17} (\ln x)^4 \\ & + 7.765 \times 10^{-4} x^{17} (\ln x)^3 - 6.6898 \times 10^{-4} x^{17} (\ln x)^2 + 3.1453 \times 10^{-4} x^{17} (\ln x) \\ & - 6.3096 \times 10^{-5} x^{17} - 1.0256 \times 10^{-3} x^{13} (\ln x)^5 + 5.794 \times 10^{-3} x^{13} (\ln x)^4 \\ & - 0.013431 x^{13} (\ln x)^3 + 1.5968 \times 10^{-2} x^{13} (\ln x)^2 - 0.0097416 x^{13} (\ln x) \\ & + 2.4419 \times 10^{-3} x^{13} - 1.1111 \times 10^{-2} x^9 (\ln x)^4 + 6.2652 \times 10^{-2} x^9 (\ln x)^3 \\ & - 0.12895 x^9 (\ln x)^2 + 0.11778 x^9 (\ln x) - 4.0574 \times 10^{-2} x^9 + 0.27942 x^5 (\ln x)^2 \\ & - 0.64186 x^5 (\ln x) + 0.39724 x^5 - 0.61398 x \end{aligned}$$

buluruz.

AHM'nin sonraki adımından u_2 için,

$$\begin{aligned} Lu_2 &= N(u_1 + u_0) - N(u_0) \\ &= (u_1 + u_0)^3 + 2x(\ln x)(u_1 + u_0)^2 - u_0^3 - 2x(\ln x)u_0^2 \end{aligned}$$

denklemini çözerek

$$\begin{aligned} u_2 = & -1.2266 \times 10^{-2} x^{13} (\ln x)^4 + 2.3055 \times 10^{-2} x^{13} (\ln x)^3 \\ & - 2.3251 \times 10^{-2} x^{13} (\ln x)^2 + 1.2189 \times 10^{-2} x^{13} (\ln x) \\ & - 2.6393 \times 10^{-3} x^{13} + 1.5523 \times 10^{-2} x^9 (\ln x)^4 - 0.088277 x^9 (\ln x)^3 \\ & + 0.18208 x^9 (\ln x)^2 - 0.1645 x^9 (\ln x) + 5.5144 \times 10^{-2} x^9 - 0.1228 x^5 (\ln x)^2 \\ & + 0.37824 x^5 (\ln x) - 0.27026 x^5 + 0.37271 x \end{aligned}$$

buluruz.

Eğer HPM uygularsak, u_0 ve u_1 aynı bulunur, ancak u_2 için

$$Lu_2 = 3(u_0)^2 u_1 + 4x (\ln x) u_0 u_1$$

yazılır.

Böylece,

$$\begin{aligned} u_2 = & -1.2944 \times 10^{-2} x^{17} (\ln x)^3 + 1.0854 \times 10^{-2} x^{17} (\ln x)^2 - 5.058 \times 10^{-3} x^{17} (\ln x) \\ & + 1.0148 \times 10^{-3} x^{17} - 2.849 \times 10^{-4} x^{13} (\ln x)^6 + 5.5423 \times 10^{-3} x^{13} (\ln x)^5 \\ & - 0.028102 x^{13} (\ln x)^4 + 6.5775 \times 10^{-2} x^{13} (\ln x)^3 - 8.1185 \times 10^{-2} x^{13} (\ln x)^2 \\ & + 5.1761 \times 10^{-2} x^{13} (\ln x) - 1.3545 \times 10^{-2} x^{13} + 1.5523 \times 10^{-2} x^9 (\ln x)^4 \\ & - 0.10734 x^9 (\ln x)^3 + 0.2581 x^9 (\ln x)^2 - 0.26768 x^9 (\ln x) + 0.10271 x^9 \\ & - 0.1228 x^5 (\ln x)^2 + 0.45363 x^5 (\ln x) - 0.37162 x^5 + 0.48334 x \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi iki yöntemin sonuçlarını kıyaslayalım. Aşağıdaki çizelgede, iki yöntemin mutlak hata değerlerinin karşılaştırması verilmiştir.

Çizelge 4.1.3.1 Çok-nokta problemi için mutlak hataların karşılaştırılması

x	HPM	AHM
	$ u_{tam} - (u_0 + u_1 + u_2) $	$ u_{tam} - (u_0 + u_1 + u_2) $
0.0	0.0	0.0
0.1	2.6638×10^{-2}	1.5577×10^{-2}
0.2	5.3102×10^{-2}	3.1047×10^{-2}
0.3	7.8808×10^{-2}	4.6080×10^{-2}
0.5	0.12341	7.2589×10^{-2}
0.7	0.14969	9.0294×10^{-2}
0.9	0.15092	9.6649×10^{-2}
1.0	0.14306	9.6120×10^{-2}

4.2 Singüler Denklem Çözümlerindeki Sorunlar

4.2.1 Emden-Fowler Tipli Denklemler

Emden-Fowler tipli denklemlerin analitik çözümünün bulunmasıyla ilgili en fazla uygulanan yöntemleri sıralarsak en başta Adomian dekompozisyon yöntemi ve HPM gelir. Biz bu bölümde, literatürdeki bazı uygulamaları analiz edeceğiz ve bazı zorlukların başlangıç iterasyonunu daha uygun seçerek çözülebileceğini göstereceğiz. Bizim tercih ettiğimiz yöntemi, yani AHM'yi de uygulayarak daha hızlı yakınsayan bir yöntem alabileceğimizi göstermeye çalışacağız.

4.2.1.1 Denklemin Modeli

Literatürdeki pek çok problem Lane-Emden ve Emden-Fowler tipindeki denklemlerle modellenir.

$$u'' + \frac{2}{x}u' + f(x, u) = 0, \quad 0 < x \leq 1 \quad (4.2.1.1.1)$$

denklemine,

$$u(0) = A, \quad u'(0) = B$$

başlangıç şartlarıyla bakıyoruz. Burada A ve B sabit, $f(x, u)$ ise reel-değerli sürekli bir fonksiyondur. Yukarıdaki denklemdeki $f(x, u)$ yerine özel fonksiyonlar alınarak çeşitli problemler çözülmüştür. Aynı başlangıç şartlarıyla bakacağımız Emden-Fowler tipindeki denklemlerin bir diğer genellemesi sağ tarafa sürekli bir fonksiyon ekleyerek yazılır:

$$u'' + \frac{k}{x}u' + f(x, u) = g(x), \quad 0 < x \leq 1 \quad (4.2.1.1.2)$$

Bu denklemde $f(x, u) = h(x)v(u)$ gibi ayrılabilirse paralel düzlem yüzeylerine dik, ısı dağılımı modellerine uygun bir problem alınır. $g(x) = 0$ ve $k = 2$ hali genel Emden-Fowler denklemine uygundur. $h(x) = 1$ ve $k = 2$ olunca (4.2.1.1.2) denklemi meşhur Lane-Emden denklemini gösterir ve $v(u) = u^n$ olunca küresel gaz bulutlarının ısı dağılımı modeline denk gelir. $v(u) = (u^2 - C)^{3/2}$ olunca beyaz-cüce yıldızların (white-dwarf stars) yerçekimi potansiyeli modelini verir, $v(u) = e^u$ olunca izotermal gaz küreleri modeline denk gelir vs.

Genel olarak Lane-Emden ve Emden-Fowler tipli denklemler, matematiksel fiziğin ve astrofiziğin çok sayıda doğal olaylarını modelleyerek bilimde çok önemli bir yer tutar. Bu tip denklemlerin çözümünde ortaya çıkan en büyük sorun türevin karşısındaki katsayının $x = 0$ olunca singüler olmasıyla ilgilidir. Aslında yapılan araştırmaların en büyük amacı, bu singülerliği aşmaktan ibarettir.

4.2.1.2 AHM ile HPM Uygulanması ve Karşılaştırılması

ÖRNEK 1:

Daha önce [7]'de HPM uygulanarak çözümü bulunan nonlineer, homojen olmayan Lane-Emden denklemine, verilen başlangıç şartlarıyla bakalım:

$$u'' + \frac{2}{x}u' + u^3 = 6 + x^6$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \quad (4.2.1.2.1)$$

Tam çözümün $u(x) = x^2$ olduğu kolayca anlaşılabilir.

Bu problem için HPM kullanılmıştır, fakat tam çözüme yavaş yakınsandığı görülmüştür. Biz HPM'nin [7]'de nasıl uygulanıp çözüldüğüne bakalım ve sonra AHM uygulayarak tam çözüme daha hızlı ulaşabileceğimizi görelim.

Dikkat edilirse, burada şimdiye kadar baktığımız örneklerden farklı bir durum görülmektedir:

$$Lu = u'' + \frac{2}{x}u' \text{ ve } Nu = -u^3 \text{ olarak alınmalıdır.}$$

Şimdi, problem için HPM uygulayalım [7].

$$u'' + \frac{2}{x}u' - v_0'' - \frac{2}{x}v_0' + p\left(v_0'' + \frac{2}{x}v_0' + u^3 - 6 - x^6\right) = 0$$

denkleminde $u = u_0(x) + pu_1(x) + p^2u_2(x) + \dots$ yazılıp p 'nin aynı derecelerinin katsayıları eşitlenirse denklem sistemi elde edilir. Burada, başlangıç iterasyonunu $v_0(x) = 0$ olarak seçelim.

$$u_0'' + \frac{2}{x}u_0' - v_0'' - \frac{2}{x}v_0' = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0'(0) = 0$$

$$u_1'' + \frac{2}{x}u_1' + v_0'' + \frac{2}{x}v_0' + u_0^3 - x^6 - 6 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0$$

$$u_2'' + \frac{2}{x}u_2' + 3u_0^2u_1 = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 0$$

$$u_3'' + \frac{2}{x}u_3' + 3u_0^2u_2 + 3u_0u_1^2 = 0, \quad u_3(0) = 0, \quad u_3'(0) = 0.$$

Bu sistemi çözerek,

$$u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = x^2 + \frac{1}{72}x^8, \quad u_2(x) = 0, \quad u_3(x) = 0$$

elde edilir. Böylece $u(x)$ için seri çözümü, ilk dört terimin yardımıyla

$$u(x) = x^2 + \frac{1}{72}x^8$$

olarak yazılır. Ancak, tam çözüm $u(x) = x^2$ olduğundan tam çözüme 4 iterasyonda yaklaşamamış ve hata, $x = 1$ olunca $\frac{1}{72}$ olmaktadır. Yani hata değeri, çok da küçümsenmeyecek kadar fazladır.

Şimdi, biz AHM uygulayarak sonuçları görelim. u_0 olarak (4.2.1.2.1) denkleminde Nu ifadesini, yani nonlinear kısmı yok sayarak aynı başlangıç şartlarında denklemi çözüyoruz. Bu,

$$Lu_0 = u_0'' + \frac{2}{x}u_0' = 6 + x^6$$

denkleminin aynı başlangıç şartlarında çözümünü bulmak demektir. Buradan,

$$u_0 = x^2 + \frac{1}{72}x^8$$

bulunur.

AHM adımlarından, u_1 için benzer şekilde aşağıdaki ifade yazılır:

$$Lu_1 = Nu_0$$

$$u_1'' + \frac{2}{x}u_1' = -(u_0)^3 = -\left(x^2 + \frac{x^8}{72}\right)^3$$

Bu denklem LaTeX ile veya sağ tarafı açıp iki defa integralleyerek çözülür ve

$$u_1 = -\frac{1}{72}x^8 - \frac{1}{5040}x^{14} - \frac{1}{725760}x^{20} - \frac{1}{262020096}x^{26}$$

$$= -1.3889 \times 10^{-2}x^8 - 1.9841 \times 10^{-4}x^{14} - 1.3779 \times 10^{-6}x^{20} - 3.8165 \times 10^{-9}x^{26}$$

elde edilir.

Benzer şekilde AHM'nin sonraki adımından u_2 için,

$$u_2'' + \frac{2}{x}u_2' - N(u_0 + u_1) + N(u_0) = 0$$

$$u_2'' + \frac{2}{x}u_2' + \left(x^2 + \frac{x^8}{72} - \frac{1}{72}x^8 - \frac{1}{5040}x^{14} - \frac{1}{725760}x^{20} - \frac{1}{262020096}x^{26}\right)^3$$

$$- \left(x^2 + \frac{x^8}{72}\right)^3 = 0$$

yazılır ve bilgisayar yardımıyla çözerek

$$u_2 = 8.5787 \times 10^{-30}x^{80} + 1.0848 \times 10^{-26}x^{74} + 6.4806 \times 10^{-24}x^{68}$$

$$+ 2.2724 \times 10^{-21}x^{62} + 4.8155 \times 10^{-19}x^{56} + 5.1442 \times 10^{-17}x^{50}$$

$$- 1.2262 \times 10^{-15}x^{44} - 1.1068 \times 10^{-12}x^{38} - 1.0100 \times 10^{-10}x^{32}$$

$$+ 9.7048 \times 10^{-9}x^{26} + 2.7951 \times 10^{-6}x^{20} + 1.9841 \times 10^{-4}x^{14}$$

buluruz. Şimdi $u \approx u_0 + u_1 + u_2$ ifadesinden u için aşağıdaki çözüm yazılabilir:

$$u \approx 8.5787 \times 10^{-30}x^{80} + 1.0848 \times 10^{-26}x^{74} + 6.4806 \times 10^{-24}x^{68}$$

$$+ 2.2724 \times 10^{-21}x^{62} + 4.8155 \times 10^{-19}x^{56} + 5.1442 \times 10^{-17}x^{50}$$

$$- 1.2262 \times 10^{-15}x^{44} - 1.1068 \times 10^{-12}x^{38} - 1.0100 \times 10^{-10}x^{32}$$

$$+ 5.8883 \times 10^{-9}x^{26} + 1.4172 \times 10^{-6}x^{20} + x^2.$$

Sonuçları daha iyi görmek için diğer sayfadaki çizelge ile HPM ve AHM'nin karşılaştırmasına bakalım. Not edelim ki, bizim yaklaşımımızda daha az terim kullanılmıştır, yani biz 3-terimli yaklaşıma bakıyoruz, ama HPM yaklaşımında daha fazla terime yani 4 terim yaklaşımına bakılmıştır.

Çizelge 4.2.1.2.1 Homojen olmayan Lane-Emden denklemi için karşılaştırma

x	HPM'deki mutlak hata	AHM'deki mutlak hata
0.1	1.3889×10^{-10}	1.4172×10^{-26}
0.2	3.5556×10^{-8}	1.4861×10^{-20}
0.4	9.1022×10^{-6}	1.5583×10^{-14}
0.5	5.4253×10^{-5}	1.3517×10^{-12}
0.7	8.0067×10^{-4}	1.1314×10^{-9}
0.9	5.9787×10^{-3}	1.7268×10^{-7}
1.0	1.3889×10^{-2}	1.423×10^{-6}

ÖRNEK 2:

Yine [7]'de HPM uygulanarak çözümü bulunan başka bir probleme bakalım. Bu problem, nonlinear, homojen bir Lane-Emden tipli denklemin verilen başlangıç koşulu ile çözümünün bulunmasıdır.

$$u'' + \frac{2}{x}u' + 4(2e^u + e^{u/2}) = 0,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

Tam çözüm: $u = -\ln(1 + x^2)$.

$$Lu = u'' + \frac{2}{x}u' \quad \text{ve} \quad Nu = -4(2e^u + e^{u/2}) \quad \text{olarak alınacaktır.}$$

Burada nonlinear kısımdaki fonksiyon, integrasyon bakımından zor fonksiyondur, yani mesela u 'nın yerine x^2 yazarsak integrasyon imkansız hale gelmektedir. Bu tür denklemlerde, genel olarak nonlinear kısımdaki fonksiyonun yerine onun Taylor serisinin birkaç terimini yazmak gerekmektedir. Biz burada [7]'deki gibi 4 terimlik Taylor serisini kullanacağız (bu kıyaslama imkanı da verir). Yani,

$$e^u \approx 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!}$$

$$4(2e^u + e^{u/2}) \approx 4 \left(2 + 2u + u^2 + 2\frac{u^3}{3!} + 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{48} \right)$$

$$\approx \frac{17}{12}u^3 + \frac{9}{2}u^2 + 10u + 12$$

elde edilir. Başlangıç iterasyonu olarak ilk akla gelen değer olan $v_0 = 0$ alalım ve AHM uygulayarak çözümü bulmaya çalışalım.

$$L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - Lv_0 + p\{Lv_0 - Nu_0 - p[(N(u_0 + u_1) - N(u_0))]$$

$$- p^2[(N(u_0 + u_1 + u_2) - N(u_0 + u_1))] - \dots - p^n[(N(u_0 + u_1 + \dots + u_n)$$

$$- N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}))] - \dots - g(x)\} = 0$$

denkleminde p 'nin aynı derecelerinin katsayıları eşitlenerek aşağıdakiler elde edilir.

$$Lu_0 = Lv_0,$$

$$u_0 = v_0 = 0.$$

Birinci derecelerin katsayıları için,

$$Lu_1 + Lv_0 + \frac{17}{12}u_0^3 + \frac{9}{2}u_0^2 + 10u_0 + 12 = 0$$

denklemini verilen başlangıç şartlarında bilgisayar yardımıyla çözülerek,

$$u_1 = -2x^2$$

elde edilir. Aynı şekilde devam edilir.

$$Lu_2 + \frac{17}{12}(u_1 + u_0)^3 + \frac{9}{2}(u_1 + u_0)^2 + 10(u_1 + u_0) + 12 - 12 = 0$$

ifadesinde az önce bulunan u_1 ve u_0 yazılırsa aşağıdaki sonuç çıkar:

$$Lu_2 + \frac{17}{12}(-2x^2)^3 + \frac{9}{2}(-2x^2)^2 + 10(-2x^2) + 12 - 12 = 0$$

ve bu denklem çözülürse u_2 elde edilir:

$$u_2 = x^4 - \frac{3}{7}x^6 + \frac{17}{108}x^8.$$

Sonraki terimi bulmak için devam ederiz.

$$Lu_3 + \frac{17}{12}(u_2 + u_1 + u_0)^3 + \frac{9}{2}(u_2 + u_1 + u_0)^2 + 10(u_2 + u_1 + u_0) + 12$$

$$- \left(\frac{17}{12}(-2x^2)^3 + \frac{9}{2}(-2x^2)^2 + 10(-2x^2) + 12 \right) = 0$$

Buradan,

$$u_3 = -\frac{83521}{10611813888}x^{26} + \frac{4913}{65318400}x^{24} - \frac{521645}{1156788864}x^{22} + \frac{7165619}{3360631680}x^{20}$$

$$- \frac{343927}{43436736}x^{18} + \frac{2075}{84672}x^{16} - \frac{14417}{222264}x^{14} + \frac{118}{819}x^{12} - \frac{529}{1890}x^{10} + \frac{13}{42}x^8$$

$$- \frac{5}{21}x^6$$

bulunur.

Böylece, AHM uygulayarak yaklaşık çözüm için,

$$u \approx u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

ifadesinde bulduğumuz değerler yerine yazılır.

$$u \approx -\frac{83521}{10611813888}x^{26} + \frac{4913}{65318400}x^{24} - \frac{521645}{1156788864}x^{22}$$

$$+ \frac{7165619}{3360631680}x^{20} - \frac{343927}{43436736}x^{18} + \frac{2075}{84672}x^{16} - \frac{14417}{222264}x^{14}$$

$$+ \frac{118}{819}x^{12} - \frac{529}{1890}x^{10} + \frac{13}{42}x^8 - \frac{5}{21}x^6 + x^4 - \frac{3}{7}x^6 + \frac{17}{108}x^8 - 2x^2$$

yazılır ve düzenlenirse,

$$u \approx -\frac{83521}{10611813888}x^{26} + \frac{4913}{65318400}x^{24} - \frac{521645}{1156788864}x^{22} + \frac{7165619}{3360631680}x^{20}$$

$$- \frac{343927}{43436736}x^{18} + \frac{2075}{84672}x^{16} - \frac{14417}{222264}x^{14} + \frac{118}{819}x^{12} - \frac{529}{1890}x^{10}$$

$$+ \frac{353}{756}x^8 - \frac{2}{3}x^6 + x^4 - 2x^2$$

bulunur.

[7]'de HPM uygulanarak bulunan 4 terimlik çözüm ise,

$$u \approx u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{2}{3}x^6 + x^4 - 2x^2$$

olarak bulunmuştur.

Aslında iki çözümü seri şekli ile kıyaslamak, çok önemli ipucu verir: HPM uygulanırken tam çözümün seri şeklinin, en baştaki birkaç terimi vardır, ama bizim yaklaşımımızda seri çözüm daha zengindir. Bu çözümlerin aşağıdaki çizelgede karşılaştırması verilmiştir. Bu çizelge, aslında AHM uygulamasının tam çözüme yaklaşımı ne kadar hızlandırdığını ciddi şekilde gösterir.

Çizelge 4.2.1.2.2 Homojen Lane-Emden denklemi için karşılaştırma

x	[7]'de HPM ile bulunan çözümdeki mutlak hata	AHM ile bulunan çözümdeki mutlak hata
0	0.0	0.0
0.1	4.9603×10^{-9}	3.1886×10^{-10}
0.2	1.2404×10^{-6}	7.3098×10^{-8}
0.4	2.9066×10^{-4}	1.1744×10^{-5}
0.5	1.6296×10^{-3}	4.7386×10^{-5}
0.6	6.5346×10^{-3}	1.1538×10^{-4}
0.8	0.05577	1.3142×10^{-4}
1.0	0.28037	4.2156×10^{-3}

YÜKSEK MERTEBEDEN DENKLEMLERE UYGULAMALAR

5.1 Denklem Modeli

Bu bölümde, AHM'yi yüksek mertebeden denklemlere uygulayıp diğer metotlarla karşılaştıracacağız. Esas amacımız, AHM'nin yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için de genel olarak daha etkili bir seri çözümü verdiğini göstermektir. Başta söylediğimiz gibi artık modern bilgisayar programları ve teknikleri o kadar hızlı çalışıyor ki herhangi bir başlangıç veya başlangıç/sınır şartlarıyla verilen bir problemi uygun algoritma yazarak çözmek mümkündür.

Başlangıç değer problemlerine daha kolay algoritmalar uygulanabildiği için literatürde genel olarak bu tip problemlere daha fazla yer verilmiştir. Biz, literatürde daha az yer verilen sınır değer problemlerine bakacağız. Genel olarak bu tip problemler,

$$u^{(n)}(x) = f(u, u', \dots, u^{(n-1)}) + g(x) \quad (5.1.1)$$

denklemini ve

$$u^{(k_1)}(0) = \alpha_{k_1}, \dots, u^{(k_m)}(0) = \alpha_{k_m}, u^{(l_1)}(1) = \beta_{l_1}, \dots, u^{(l_i)}(1) = \beta_{l_i} \quad (5.1.2)$$

sınır şartlarıyla verilir. Burada f ve g sürekli fonksiyonlar, $\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_m}, \beta_{l_1}, \dots, \beta_{l_i}$ sabitlerdir ve $m + i = n$.

Biz bu tür problemlerin çözümünde iki noktaya dikkat edeceğiz:

- 1) Literatürdeki HPM uygulamalarındaki hatalar ve onların ortadan kaldırılması,
- 2) AHM uygulanmasının avantajları.

Literatürde uygulanan bazı HPM yaklaşımlarındaki hatalar başlangıç iterasyonunun çok da etkili olmamasına bağlıdır. Bizim her iki yaklaşımda dikkat ettiğimiz önemli nokta, başlangıç iterasyonunu aşağıdaki denklem ile veriyoruz:

$$v_0 = \alpha_{k_1} \frac{x^{k_1}}{k_1!} + \dots + \alpha_{k_m} \frac{x^{k_m}}{k_m!} + A_{l_1} x^{l_1} + \dots + A_{l_i} x^{l_i} + L^{-1}(g(x)). \quad (5.1.3)$$

Burada,

$$L = \frac{d}{dx^n} (.)$$

en yüksek türev operatörüdür ve tersinin varlığı (5.1.2) şartıyla temin edilmektedir.

$A_{l_1}, \dots, A_{l_i}$ sabitleri ise,

$$\left. \frac{d}{dx^{l_1}} \left(\alpha_{k_1} \frac{x^{k_1}}{k_1!} + \dots + \alpha_{k_m} \frac{x^{k_m}}{k_m!} + A_{l_1} x^{l_1} + \dots + A_{l_i} x^{l_i} \right) \right|_{x=1} = \beta_{l_1}, \quad (5.1.4)$$

⋮

$$\left. \frac{d}{dx^{l_i}} \left(\alpha_{k_1} \frac{x^{k_1}}{k_1!} + \dots + \alpha_{k_m} \frac{x^{k_m}}{k_m!} + A_{l_1} x^{l_1} + \dots + A_{l_i} x^{l_i} \right) \right|_{x=1} = \beta_{l_i}$$

denklemler sisteminden bulunur.

5.2 Uygulamalar

Örnek 1:

[8]'de bakılan aşağıdaki problemin HPM ve AHM ile çözümünü bulalım.

$$u^{(4)}(x) = u(x) + u''(x) + e^x(x - 3). \quad (5.2.1)$$

Sınır şartları:

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = -e.$$

Aşağıdaki bağıntıyı sağlayan bir homotopi kuralım [9],

$$u^{(4)}(x) - v_0^{(4)}(x) + p[v_0^{(4)}(x) - u(x) - u''(x) - e^x(x - 3)] = 0. \quad (5.2.2)$$

Başlangıç iterasyonu olarak,

$$v_0 = 1 + A_2x^2 + A_3x^3 + L^{-1}(e^x(x-3)) \quad (5.2.3)$$

alalım.

A_2 ve A_3 , (5.1.4)'ten hesaplanabilir:

$$(1 + A_2x^2 + A_3x^3)|_{x=1} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(1 + A_2x^2 + A_3x^3)|_{x=1} = -e$$

ve böylece $A_2 = e - 3$, $A_3 = 2 - e$ elde edilir. v_0 tekrar aşağıdaki gibi yazılır:

$$v_0 = 1 + (e - 3)x^2 + (2 - e)x^3 + L^{-1}(e^x(x-3)). \quad (5.2.4)$$

$$u = u_0(x) + pu_1(x) + p^2u_2(x) + \dots$$

ve (5.2.4) denklemini (5.2.2)'de yazılırsa,

$$u_0^{(4)} + pu_1^{(4)} + p^2u_2^{(4)} + \dots - v_0^{(4)}(x) + p[v_0^{(4)}(x) - u_0 - pu_1 - p^2u_2 - \dots - u_0'' - pu_1'' - p^2u_2'' - \dots - e^x(x-3)] = 0.$$

p 'nin aynı derecelerine göre bu ifade düzenlenirse, denklem sistemi elde edilir:

$$u_0^{(4)}(x) - v_0^{(4)}(x) = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad u_0'(0) = 0, \quad u_0(1) = e - 3, \quad u_0'(1) = 2 - e,$$

$$u_1^{(4)} + v_0^{(4)}(x) - u_0 - u_0'' - e^x(x-3) = 0,$$

$$u_1(0) = u_1'(0) = u_1(1) = u_1'(1) = 0,$$

$$u_2^{(4)} - u_1 - u_1'' = 0, \quad u_2(0) = u_2'(0) = u_2(1) = u_2'(1) = 0,$$

$$u_3^{(4)} - u_2 - u_2'' = 0, \quad u_3(0) = u_3'(0) = u_3(1) = u_3'(1) = 0,$$

$\vdots$

Bu denklemler sistemi çözülürse,

$$\begin{aligned} u_0 &= 8 + (e - 3)x^2 + (2 - e)x^3 + 6x - 7e^x + 13x^2e - 7x^3e + xe^x - 33x^2 + 20x^3 \\ &= 6x - 7e^x + 14x^2e - 8x^3e + xe^x - 36x^2 + 22x^3 + 8, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değer, sonraki terimlerin bulunması için kullanılacaktır. Diğer denklemlerin çözümü için aynı şekilde devam edilir.

$$\begin{aligned}
u_1 &= -L^{-1}(v_0^{(4)}(x) - u_0 - u_0'' - e^x(x-3)) \\
&= -0.057x^2 + 7.933 \times 10^{-2}x^3 + 4.66 \times 10^{-3}x^4 - 2.0646 \times 10^{-2}x^5 \\
&\quad - 5.4 \times 10^{-3}x^6 - 8.884 \times 10^{-4}x^7 - 9.92 \times 10^{-5}x^8 - 5.5115 \times 10^{-6}x^9 \\
&\quad + 5.01 \times 10^{-8}x^{11} + 8.35 \times 10^{-9}x^{12} + 9.6354 \times 10^{-10}x^{13} + O(x^{14}), \\
u_2 &= L^{-1}(u_1 + u_1'') \\
&= 52 + 48x - 52e^x + 4xe^x + 22.001x^2 + 6.667x^3 + 1.4953x^4 + 0.27063x^5 \\
&\quad + 3.9 \times 10^{-2}x^6 + 4.365 \times 10^{-3}x^7 + 4.02 \times 10^{-4}x^8 + 2.5 \times 10^{-5}x^9 \\
&\quad + 1.13 \times 10^{-6}x^{10} + 3.8 \times 10^{-8}x^{11}
\end{aligned}$$

bulunur. Sadece 3-terim yaklaşımını kullanarak,

$$\begin{aligned}
u &\approx u_0 + u_1 + u_2 \\
u &\approx 6x - 7e^x + 14x^2e - 8x^3e + xe^x - 36x^2 + 22x^3 + 8 - 0.057x^2 \\
&\quad + 7.933 \times 10^{-2}x^3 + 4.66 \times 10^{-3}x^4 - 2.0646 \times 10^{-2}x^5 - 5.4 \times 10^{-3}x^6 \\
&\quad - 8.884 \times 10^{-4}x^7 - 9.92 \times 10^{-5}x^8 - 5.5115 \times 10^{-6}x^9 + 5.01 \times 10^{-8}x^{11} \\
&\quad + 8.35 \times 10^{-9}x^{12} + 9.6354 \times 10^{-10}x^{13} + O(x^{14}) + 52 + 48x - 52e^x \\
&\quad + 4xe^x + 22.001x^2 + 6.667x^3 + 1.4953x^4 + 0.27063x^5 + 3.9 \times 10^{-2}x^6 \\
&\quad + 4.365 \times 10^{-3}x^7 + 4.02 \times 10^{-4}x^8 + 4.365 \times 10^{-3}x^7 + 4.02 \times 10^{-4}x^8 \\
&\quad + 2.5 \times 10^{-5}x^9 + 1.13 \times 10^{-6}x^{10} + 3.8 \times 10^{-8}x^{11}
\end{aligned}$$

yazılır.

Problemin tam çözümü, $u = e^x(1-x)$ 'dir ve $[0,1]$ 'deki maksimum mutlak hata 1.5135×10^{-4} olarak bulunur.

Şimdi aynı örneğe AHM'yi uygulamaya çalışalım. Yani aşağıdaki gibi homotopi kuralım,

$$\begin{aligned}
&L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - Lv_0 + p\{Lv_0 - Nu_0 - p[(N(u_0 + u_1) - N(u_0)] \\
&- p^2[(N(u_0 + u_1 + u_2) - N(u_0 + u_1))] - \dots - p^n[(N(u_0 + u_1 + \dots + u_n) \\
&- N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})) - \dots - g(x)\} = 0
\end{aligned}$$

Burada L , yine 4. türev operatörüdür, ama unutmamak gerekiyor ki L 'nin sınır şartları, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $u(1) = 0$, $u'(1) = 0$

olmalıdır. Non-lineer operatör ise, $Nu = u + u''$ şeklinde tanımlanır. p 'nin aynı derecelerinin katsayıları eşitlenerek, ilk iki iterasyonun HPM'deki ile aynı olduğu bulunur. Şimdi u_2 'yi hesaplayalım.

$$Lu_2 = N(u_0 + u_1) - N(u_0)$$

formülünden bilgisayarın da yardımıyla,

$$\begin{aligned} u_2 = & 1.6869 \times 10^{-14}x^{17} + 1.9116 \times 10^{-13}x^{16} + 6.1175 \times 10^{-12}x^{15} \\ & + 4.5879 \times 10^{-11}x^{14} - 2.9138 \times 10^{-14}x^{13} - 8.3502 \times 10^{-9}x^{12} \\ & - 1.6227 \times 10^{-7}x^{11} - 2.1736 \times 10^{-6}x^{10} - 1.9166 \times 10^{-5}x^9 \\ & - 9.3655 \times 10^{-5}x^8 - 3.9713 \times 10^{-4}x^7 - 3.0 \times 10^{-6}x^6 + 0.004x^5 \\ & - 0.00475x^4 + 0.16667x^3 - 1.2762 \times 10^{-3} + 0.5x^2 - 2.1052 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

bulunur. 3-terimli seri çözümlerindeki mutlak hataları aşağıdaki çizelgede görebiliriz:

Çizelge 5.2.1 Yüksek mertebeden denklem için karşılaştırma

x	HPM'deki mutlak hata	AHM'deki mutlak hata
0.1	1.0328×10^{-7}	7.1923×10^{-8}
0.2	8.2906×10^{-7}	5.6294×10^{-7}
0.3	2.8345×10^{-6}	1.972×10^{-6}
0.4	6.8935×10^{-6}	4.8034×10^{-6}
0.5	1.4002×10^{-5}	9.417×10^{-6}
0.7	4.2966×10^{-5}	2.3948×10^{-5}
0.8	6.8516×10^{-5}	3.2895×10^{-5}
1.0	1.5315×10^{-4}	4.9043×10^{-5}

ÖRNEK 2:

[10] ve [11]'de çözümü bulunan aşağıdaki probleme bakalım:

$$u^{(5)}(x) = e^{-x}u^2$$

$$u(0) = 1, u'(0) = 1, u''(0) = 1, u(1) = u'(1) = e. \quad (5.2.5)$$

Aşağıdaki bağıntıyı sağlayan bir homotopi kuralım:

$$u^{(5)}(x) - v_0^{(5)}(x) + p[v_0^{(5)}(x) - e^{-x}u^2] = 0 \quad (5.2.6)$$

ve başlangıç iterasyonu olarak,

$$v_0 = 1 + x + 0.5x^2 + Ax^3 + Bx^4$$

alalım. Önceki örnekteki gibi A ve B değerleri (5.1.4)'ten hesaplanabilir:

$$(1 + x + 0.5x^2 + Ax^3 + Bx^4)|_{x=1} = e,$$

$$\frac{d}{dx}(1 + x + 0.5x^2 + Ax^3 + Bx^4)|_{x=1} = e.$$

Buradan, $A = 0.15485$, $B = 6.3436 \times 10^{-2}$ elde edilir ve böylece,

$$v_0 = 1 + x + 0.5x^2 + 0.15485x^3 + 6.3436 \times 10^{-2}x^4$$

bulunur.

$u = u_0(x) + pu_1(x) + p^2u_2(x) + \dots$ ve (5.2.6) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &u_0^{(5)} + pu_1^{(5)} + p^2u_2^{(5)} + \dots - v_0^{(5)}(x) \\ &+ p[v_0^{(5)}(x) - e^{-x}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki p 'nin aynı dereceleri eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$u_0^{(5)} - v_0^{(5)}(x) = 0, \quad u_0(0) = 1, u_0'(0) = 1, u_0''(0) = 1, u_0(1) = u_0'(1) = e$$

$$u_1^{(5)} + v_0^{(5)}(x) - e^{-x}u_0^2 = 0, \quad u_1(0) = u_1'(0) = u_1''(0) = u_1(1) = u_1'(1) = 0$$

$$u_2^{(5)} - 2e^{-x}u_0u_1 = 0,$$

$$u_3^{(5)} - e^{-x}u_1^2 = 0,$$

$\vdots$

Bu denklem sistemi çözülerek,

$$u_0 = v_0,$$

$$u_1 = -L^{-1}(v_0^{(5)}(x) - e^{-x}u_0^2)$$

$$= -L^{-1}(-e^{-x}(1 + x + 0.5x^2 + 0.15485x^3 + 6.3436 \times 10^{-2}x^4)^2)$$

$$\begin{aligned} u_1 = & 1.1817 \times 10^{-2}x^3 - 2.1764 \times 10^{-2}x^4 + 8.3333 \times 10^{-3}x^5 + 1.3889 \times 10^{-3}x^6 \\ & + 1.9841 \times 10^{-4}x^7 + 2.1284 \times 10^{-5}x^8 + 5.6353 \times 10^{-6}x^9 \\ & - 2.7557 \times 10^{-7}x^{10} - 2.2534 \times 10^{-8}x^{11} - 8.9702 \times 10^{-9}x^{12} \\ & + 7.9662 \times 10^{-9}x^{13} - 5.3451 \times 10^{-9}x^{14} + O(x^{15}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 = & 3.3672 \times 10^{-6}x^3 - 4.6109 \times 10^{-6}x^4 + 3.517 \times 10^{-6}x^8 - 2.8788 \times 10^{-6}x^9 \\ & + 5.5116 \times 10^{-7}x^{10} + 4.5067 \times 10^{-8}x^{11} + 1.7939 \times 10^{-8}x^{12} \\ & - 1.5976 \times 10^{-8}x^{13} + 1.0713 \times 10^{-8}x^{14} + O(x^{15}) \end{aligned}$$

yazılır. 3-terim yaklaşımı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} u \approx & 1 + x + 0.5x^2 + 0.16667x^3 + 4.1667 \times 10^{-2}x^4 + 8.3333 \times 10^{-3}x^5 \\ & + 1.3889 \times 10^{-3}x^6 + 1.9841 \times 10^{-4}x^7 + 2.4801 \times 10^{-5}x^8 + 2.7565 \times 10^{-6}x^9 \\ & + 2.7559 \times 10^{-7}x^{10} + 2.2533 \times 10^{-8}x^{11} + O(x^{12}). \end{aligned}$$

Şimdi aynı örnekte AHM'yi uygulamaya çalışalım. Yani,

$$\begin{aligned} & L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - Lv_0 + p\{Lv_0 - Nu_0 - p[(N(u_0 + u_1) - N(u_0)) \\ & - p^2[(N(u_0 + u_1 + u_2) - N(u_0 + u_1))] - \dots - p^n[(N(u_0 + u_1 + \dots + u_n) \\ & - N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}))] - \dots - g(x)\} = 0 \end{aligned}$$

gibi homotopi kuralım.

Burada L , beşinci türev operatörüdür, ama unutmamak gerekiyor ki L 'nin sınır şartları,

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 0$$

olmalıdır. Non-lineer operatör ise, $Nu = e^{-x}u^2$ şeklinde tanımlanır. p 'nin aynı derecelerinin katsayıları eşitlenerek, ilk iki iterasyonun HPM'deki ile aynı olduğu bulunur.

Şimdi u_2 'yi hesaplayalım.

$$Lu_2 = N(u_0 + u_1) - N(u_0)$$

formülünden bilgisayarın da yardımıyla,

$$\begin{aligned} u_2 = & 1.3884 \times 10^{-19}x^{27} - 5.1643 \times 10^{-19}x^{26} + 1.0665 \times 10^{-18}x^{25} \\ & + 8.6421 \times 10^{-18}x^{24} - 1.7907 \times 10^{-16}x^{23} + 2.324 \times 10^{-15}x^{22} \\ & - 2.6184 \times 10^{-14}x^{21} + 2.6296 \times 10^{-13}x^{20} - 2.3318 \times 10^{-12}x^{19} \\ & + 1.77 \times 10^{-11}x^{18} - 1.1232 \times 10^{-10}x^{17} + 5.684 \times 10^{-10}x^{16} \\ & - 2.1401 \times 10^{-9}x^{15} + 5.3805 \times 10^{-9}x^{14} - 7.8516 \times 10^{-9}x^{13} \\ & + 1.1057 \times 10^{-8}x^{12} + 4.7587 \times 10^{-8}x^{11} + 5.5116 \times 10^{-7}x^{10} \\ & - 2.8788 \times 10^{-6}x^9 + 3.517 \times 10^{-6}x^8 \\ & + 4.1667 \times 10^{-2} (-1.1067 \times 10^{-4})x^4 + 0.16667x^3 \times 2.0205 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

elde edilir.

Problemin tam çözümü $u = e^x$ ve HPM ile çözümün $[0,1]$ 'deki maksimum mutlak hatası (=tam çözüm-seri çözümü) 3.6372×10^{-6} , AHM ile çözümünün maksimum mutlak hatası ise 3.1563×10^{-6} olarak bulunur.

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERE UYGULAMALAR**6.1 Literatür Özeti**

Literatürde dalga-tipli denklemlerin seri çözümüyle ilgili birkaç makale vardır. Ama bunların neredeyse hepsinde bir sorun vardır: Yazılan iterasyon adımlarında bütün sınır şartlarını kontrol etmek mümkün değildir ve uygulanan yöntemler aslında yalnız başlangıç şartları olan problemler için iyi çalışmaktadır. Biz bu sorunu, yeni operatör (dalga operatörü) dahil ederek çözmeye çalışacağız.

Önce sorunu anlamak için hangi tür problemlere bakacağımızı anlatalım:

$$u_{tt} - k(x, t)u_{xx} = f(u, u_x, u_t, u_{xt}) + g(x, t) \quad (6.1.1)$$

denklemini

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \geq 0 \quad (6.1.2)$$

başlangıç ve

$$u(0, t) = h(t) \quad (6.1.3)$$

sınır şartlarıyla çözmeye çalışacağız. Burada f, g, k, ψ, φ bilinen fonksiyonlardır.

(6.1.1)-(6.1.2)-(6.1.3) problemi klasik ve kuantum mekaniğinin birçok probleminin modeli olabilir [12],[13]. Eğer f , yalnız u 'nın fonksiyonuysa ve $k(x, t) = \text{sabit}$ ise Klein-Gordon veya sine-Gordon tipinde denklemler elde ederiz. Bu tip denklemler ile belli non-lineer fenomenler modellenenebilir. Mesela, dalga-tipli denklemler, deprem gerilimini gösterebilir [14]. Geçirgenliği yüksek kablolarda cereyan akımı toplanmasında [15] ve homojen olmayan elastik dalgalarda [16], benzer modeller kullanılabilir.

Chowdhury ve Hashim [17], (6.1.2) başlangıç şartını sağlayan Klein-Gordon veya sine-Gordon tipli denklemlerin çözümü için HPM uygulamıştır. Wazwaz [18], sine-Gordon denkleminin çözümü için *tanh* yöntemini uygulamıştır. Kaya [19] ise sine-Gordon denkleminin çözümü için modifiye edilmiş dekompozisyon yöntemi uygulamıştır. El-Sayed [20], Wazwaz ve Gorgius [21] dalga-tipli ve ısı-tipli denklemlerin çözümü için dekompozisyon yöntemini uygulamışlardır.

HPM aslında Liao [22] ve He [23-26] tarafından farklı denklemlere uygulanmış ve sonraları birçok matematikçi tarafından kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır [27-33].

6.2 Değişken Katsayılı Dalga Tipli Non-Linear Denklemlerin Çözümü için HPM

Yapılan tüm araştırmalarda ortak bir zorluk ortaya çıkmıştır. Çünkü, hepsinde esas operatör olarak $Lu = u_{tt}$ operatörü kullanılmıştır. Ama bu operatör, iterasyon prosedüründe (6.1.2) ve (6.1.3) şartlarının hepsini kontrol edememektedir [32]. [17,19-21,33]'deki uygulamalar, analitik çözümü olan problemler için çok etkilidir, yani bu yöntemlerle bulunan seri çözümler analitik çözüme hızla yaklaşabilmektedir. Ama, eğer beklenen çözüm analitik değilse (yani sadece ikinci türevler süreklirse) ve sınır ile başlangıç şartları çok iyi uyum sağlamıyorlarsa bu yöntemlerin uygulanması zor olabilir.

Bunları daha iyi anlamak için önce HPM'yi hatırlayalım. HPM'nin esas fikri, homotopi parametresi denilen p parametresini dahil etmektir. p , 0 ile 1 arasında değerler alır. $p = 0$ olunca, problem lineer (veya çok basit non-lineer) probleme denk gelir, $p = 1$ değeri ise, problemin kendisine denk gelir. Parametrenin 0'dan 1'e değişmesi işlemi, "deformasyonlara" (veya homotopiklere) denk gelir ve süreklilik mantığının yardımıyla esas problemi bir basit problemin çözümüyle ilişkilendirmiş oluruz.

Uygulayacağımız yöntemde, literatürdeki yöntemlerin aksine, dalga operatörüne esas önemi vereceğiz. Dalga operatörünün en önemli özelliği,

$$\begin{aligned} u_{tt} - cu_{xx} &= g(x, t) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad u(0, t) = h(t) \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

probleminin tek çözümü olmasıdır.

Buradan anlaşılıyor ki, $Lu = u_{tt} - cu_{xx}$ operatörünün tersi var ve her adımda sınır şartlarının tümünü kontrol edebilir. Şimdi görölüyor ki, mesela $Lu = u_{tt}$ operatörü, bu özelliğe sahip değildir ve (6.2.1)'deki şartların yalnız ikisini kontrol edebilir. Böylece, biz (6.1.1) denkemini önce aşağıdaki gibi yazıyoruz:

$$Lu = -cu_{xx} + k(x, t)u_{xx} + f(u, u_x, u_t, u_{xt}) + g(x, t), \quad (6.2.2)$$

burada $Lu = u_{tt} - cu_{xx}$

Aşağıdaki gibi homotopi kuralım:

$$Lu - Lv_0 + p[Lv_0 + (c - k(x, t))u_{xx} - f(u, u_x, u_t, u_{xt}) - g(x, t)] = 0. \quad (6.2.3)$$

Kolayca görüldüğü gibi, $p = 0$ olunca, $Lu - Lv_0 = 0$ gibi lineer bir problem elde edilir, $p = 1$ ise orijinal probleme denk gelir (yani p parametresi 0'dan 1'e kadar değiştikçe, lineer probleminden esas probleme geliriz). Şimdi, (6.2.3) denkleminin çözümünü,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (6.2.4)$$

gibi farz ederek ve bu ifadeyi (6.2.3)'de yerine yazıp p 'nin aynı kuvvetlerinin karşısındaki katsayıları eşitleyerek, denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemleri çözerek u_n 'ler $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ 'lerin yardımıyla yazılabilir. $p = 1$ yazınca (6.2.4)'ten problemin seri çözümü bulunur:

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad (6.2.5)$$

Şimdi yaklaşımımızın ne kadar uygun ve neredeyse seri çözüm bulmak için tek genel yöntem olduğunu görmek için örneklere bakalım.

6.3 Uygulamalar

ÖRNEK 1:

Önce sabit katsayılı probleme bakalım:

$$u_{tt} + u_{xx} = -2u_{xt}, \quad x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = x^3, \quad u_t(x, 0) = -3x^2, \quad u(0, t) = t^3$$

probleminin çözümünün $u = |x - t|^3$ olduğu, kontrol edildiğinde görülebilir. Bilinen yöntemlerle bu problemi çözmeye çalışmanın bir anlamının olmadığını kolayca görebiliriz, çünkü bu yöntemler analitik bir fonksiyon çözümse faydalıdır.

Teoriden bellidir ki, bu problem aslında dalga tipli denklem değildir (dalga tipli denklemler aslında çoğu zaman pozitif bir c için $u_{tt} - cu_{xx} = f$ şeklinde gösterilebilen problemlere denir). Ama yine de bizim yaklaşım faydalıdır.

Aslında “dalga-tipli” derken, sadece fiziksel olarak bir dalgaya denk gelen denklemi düşünmüyoruz. u_{tt} ve u_{xx} türevlerinin bulunduğu ve en yüksek mertebeli türevlerin olduğu denklemlerin hepsine burada “dalga-tipli” denklem diyoruz. Önce denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} = -2u_{xx} - 2u_{xt}$$

şeklinde yazalım ve $L(u) = u_{tt} - u_{xx}$ diyelim. Aşağıdaki gibi homotopi kuralım:

$$Lu - Lv_0 + p(Lv_0 + 2u_{xx} + 2u_{xt}) = 0. \quad (6.3.1)$$

Burada v_0 , dalga denkleminin ya başlangıç şartlarına uygun çözümü olarak ya da $v_0 = 0$ olarak alınabilir. Şimdi, $v_0 = 0$ alalım. u 'nun yerine (6.2.4)'deki ifadeyi yazarsak,

$$L\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k u_k\right) - Lv_0 + p(Lv_0 + 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k (u_k)_{xx}\right) + 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k (u_k)_{xt}\right)) = 0$$

bulunur.

p' 'nin aynı derecelerinin katsayılarını eşitlersek u_0 için aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$Lu_0 = Lv_0, \quad u_0(x, 0) = x^3, (u_0)_t(x, 0) = -3x^2, u_0(0, t) = t^3.$$

Teoriden bu problemin çözümünü kolayca yazabiliriz [34]:

$$u_0 = \frac{1}{2}((x+t)^3 + (x-t)^3) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (3y^2) dy = (x-t)^3, \quad x > t \text{ ise}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}((x+t)^3 + (x-t)^3) - \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} (3y^2) dy + (t-x)^3 = (t-x)^3, \quad x < t \text{ ise.}$$

Benzer şekilde,

$$Lu_1 = -2(u_0)_{xx} - 2(u_0)_{xt} \equiv g(x, t) = 0$$

alırız ve yine teoriden

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds, \quad x > t \text{ için}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \int_{t-x-s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds, \quad x < t \text{ için}$$

formüllerinden $u_1 = u_2 = \dots = 0$ bulunur. Yani tam çözüm birinci yaklaşımda elde edildi.

ÖRNEK 2:

Şimdi, non-lineer ve değişken katsayılı bir başlangıç-sınır değer problemine bakalım:

$$u_{tt} - x^2 u_{xx} = x e^t - (u_x)^2 + e^{2t}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = x, \quad u(0, t) = 0.$$

Bu problemin tam çözümü $u = x e^t$ fonksiyonudur.

$L(u) = u_{tt} - u_{xx}$ ve $v_0 = 0$ alalım. HPM uygulamaya çalışalım:

$$Lu - Lv_0 + p(Lv_0 + (1 - x^2)u_{xx} - x e^t + (u_x)^2 - e^{2t}) = 0. \quad (6.3.2)$$

(6.2.4) formülünü (6.3.2)'de yerine yazarak,

$$L(u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + \dots) - Lv_0 + p(Lv_0 + (1 - x^2)(u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + \dots)_{xx} - x e^t + ((u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + \dots)_x)^2 - e^{2t}) = 0$$

bulunur.

p' 'nin aynı derecelerinin katsayılarını eşitleyerek $u_0, u_1, u_2, \dots$ için denklemler bulunur.

$$Lu_0 = Lv_0, \quad u_0(x, 0) = x, (u_0)_t(x, 0) = x, \quad u_0(0, t) = 0,$$

$$Lu_1 + Lv_0 + (1 - x^2)(u_0)_{xx} - xe^t + (u_0)_x^2 - e^{2t} = 0,$$

$$u_1(x, 0) = (u_1)_t(x, 0) = u_1(0, t) = 0,$$

$$Lu_2 + (1 - x^2)(u_1)_{xx} + 2(u_0)_x(u_1)_x = 0,$$

$$u_2(x, 0) = (u_2)_t(x, 0) = u_2(0, t) = 0, \dots$$

Bu denklemler (problemler) çözülerek,

$$u_0 = \frac{1}{2}((x+t) + (x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} y dy = x(t+1) \quad , \quad x > t \text{ ise}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}((x+t) - (t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} y dy = x(t+1) \quad , \quad x < t \text{ ise}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$Lu_1 = -(1 - x^2)(u_0)_{xx} + xe^t - (u_0)_x^2 + e^{2t} = xe^t - (t+1)^2 + e^{2t}$$

ve dolayısıyla

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds, \quad x > t \text{ için}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \int_{t-x-s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds, \quad x < t \text{ için}$$

formüllerinde $g(y, s) = ye^s - (s+1)^2 + e^{2s}$ almamız gerekir [34]. Bu denklemleri çözerek,

$$u_1 = xe^t - x - tx - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}, \quad x > t \text{ için},$$

$$u_1 = tx^2 - \frac{3}{2}x - t^2x - \frac{t}{3}x^3 - \frac{x}{3}t^3 + \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{e^{2t}}{4e^{2x}} - 2tx$$

$$+xe^t + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{e^{2t}}{4}, \quad x < t \text{ için}$$

elde edilir.

Tam çözümle, iki-terimli yaklaşık $u = u_0 + u_1$ çözümü arasındaki mutlak hataları gösteren çizelge, $[0,1] \times [0,1]$ kümesinin bazı (x, t) noktaları için aşağıda verilmiştir:

Çizelge 6.3.1 Sabit katsayılı dalga tipli denklem için hata değerleri

$t \backslash x$	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9
0.1	9×10^{-6}	9×10^{-6}	9×10^{-6}	9×10^{-6}	9×10^{-6}	9×10^{-6}	9×10^{-6}
0.2	1.4×10^{-4}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-4}
0.4	2×10^{-3}	2.7×10^{-3}	2.9×10^{-3}	2.9×10^{-3}	2.9×10^{-3}	2.9×10^{-3}	2.9×10^{-3}
0.5	4.7×10^{-3}	6.8×10^{-3}	7.6×10^{-3}	7.6×10^{-3}	7.6×10^{-3}	7.6×10^{-3}	7.6×10^{-3}
0.7	1.7×10^{-2}	2.6×10^{-2}	3.3×10^{-2}	3.4×10^{-2}	3.4×10^{-2}	3.4×10^{-2}	3.4×10^{-2}
0.8	2.9×10^{-2}	4.6×10^{-2}	6×10^{-2}	6.2×10^{-2}	6.3×10^{-2}	6.3×10^{-2}	6.3×10^{-2}
0.9	4.6×10^{-2}	7.5×10^{-2}	0.1020	0.10682	0.10888	0.10973	0.10974

Çizelgeden görüldüğü gibi, 2-terimli bir yaklaşım bile makul hatalar oluşturmaktadır. Daha yakın çözüme terimlerin sayısını çoğaltmakla ulaşmak mümkündür.

ÖRNEK 3:

Şimdi başka bir probleme bakalım

$$u_{tt} - tu_{xx} = u^2 - t^2x^4 - 2t^2x^3 - t^2x^2 - 2t^2, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (6.3.3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x + x^2, \quad u(0, t) = 0.$$

Bu problemin tam çözümü $u = xt + x^2t$.

$L(u) = u_{tt} - u_{xx}$ ve $v_0 = 0$ alalım ve HPM uygulayalım:

$$Lu - Lv_0 + p(Lv_0 + u_{xx} - tu_{xx} - u^2 + t^2x^4 + 2t^2x^3 + t^2x^2 + 2t^2) = 0 \quad (6.3.4)$$

(6.2.4)'ü (6.3.4)'te yazarak ve p 'lerin aynı derecelerinin katsayılarını eşitleyerek, denklemler bulunur.

$$Lu_0 = Lv_0, \quad u_0(x, 0) = 0, (u_0)_t(x, 0) = x + x^2, u_0(0, t) = 0,$$

$$Lu_1 + Lv_0 + (1 - t)(u_0)_{xx} - u_0^2 + t^2x^4 + 2t^2x^3 + t^2x^2 + 2t^2 = 0,$$

$$u_1(x, 0) = (u_1)_t(x, 0) = u_1(0, t) = 0,$$

$$Lu_2 + (1 - t)(u_1)_{xx} - 2u_0u_1 = 0, \quad u_2(x, 0) = (u_2)_t(x, 0) = u_2(0, t) = 0, \dots$$

Bu denklemler (problemler) sırasıyla çözülerek, u_0 için aşağıdakiler yazılır:

$$u_0 = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (y + y^2) dy = \frac{1}{3} t(t^2 + 3x^2 + 3x) \quad , \quad x > t \text{ için}$$

$$u_0 = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} (y + y^2) dy = \frac{1}{3} x(x^2 + 3t^2 + 3t) \quad , \quad x < t \text{ için.}$$

u_1 için aşağıdaki denklem yazılır ve çözümü bulunur.

$$Lu_1 = -(1 - t)(u_0)_{xx} + u_0^2 - t^2x^4 - 2t^2x^3 - t^2x^2 - 2t^2$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds, \quad x > t \text{ için}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \int_{t-x-s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds, \quad x < t \text{ için}$$

formüllerinde

$$g(x, t) = -(1 - t)(u_0)_{xx} + u_0^2 - t^2x^4 - 2t^2x^3 - t^2x^2 - 2t^2$$

olduğunu varsayarak u_1 'i bulmaya çalışalım:

$x > t$ için

$$\begin{aligned} g(x, t) &= -(1 - t) \frac{1}{3} t^6 + \left(\frac{1}{3} t(t^2 + 3x^2 + 3x) \right)^2 - t^2x^4 - 2t^2x^3 - t^2x^2 - 2t^2 \\ &= \frac{1}{9} t^6 + \frac{2}{3} t^4 x^2 + \frac{2}{3} t^4 x - 2t \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds = \frac{1}{80} t^8 + \frac{2}{45} t^6 x^2 + \frac{2}{45} t^6 x - \frac{2}{3} t^3.$$

Benzer şekilde $x < t$ için

$$g(x, t) = -(1-t)2x + \left(\frac{1}{3}x(x^2 + 3t^2 + 3t)\right)^2 - t^2x^4 - 2t^2x^3 - t^2x^2 - 2t^2$$

$$= t^4x^2 + 2t^3x^2 - \frac{1}{3}t^2x^4 - 2t^2x^3 - 2t^2 + \frac{3}{2}tx^4 + 2tx + \frac{1}{9}x^6 - 2x,$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \int_{t-x-s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} g(y, s) dy ds$$

$$= -\frac{79}{45}t^7x + \frac{64}{9}t^6x^2 + \frac{1}{45}t^6x - \frac{473}{45}t^5x^3 + \frac{253}{36}t^4x^4 - \frac{8}{9}t^4x^3 - \frac{73}{45}t^3x^5$$

$$+ \frac{23}{6}t^3x^4 - \frac{1}{3}t^3x - \frac{1}{45}t^2x^6 - \frac{35}{6}t^2x^5 + t^2x^2 - t^2x + \frac{1}{45}tx^7$$

$$+ \frac{71}{18}tx^6 + \frac{10}{3}tx^3 - \frac{1}{360}x^8 - \frac{125}{126}x^7 - \frac{23}{6}x^4$$

bulunur. Tam çözümle, iki-terimli, yaklaşık $u = u_0 + u_1$ çözümü arasındaki mutlak hataları gösteren çizelge, $[0,1] \times [0,1]$ kümesinin bazı (x, t) noktaları için aşağıda verilmiştir.

Çizelge 6.3.2 Değişken katsayılı dalga tipli denklem için hata değerleri

$t \backslash x$	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9
0.1	3.2×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}
0.2	1.2×10^{-3}	2.6×10^{-3}	2.6×10^{-3}	2.6×10^{-3}	2.6×10^{-3}	2.6×10^{-3}	2.6×10^{-3}
0.4	3.3×10^{-3}	6.6×10^{-3}	2.1×10^{-2}	2.1×10^{-2}	2.1×10^{-2}	2.1×10^{-2}	2.1×10^{-2}
0.5	5.5×10^{-3}	8.7×10^{-3}	2.6×10^{-2}	4×10^{-2}	4.1×10^{-2}	4×10^{-2}	4×10^{-2}
0.7	1.8×10^{-2}	2.2×10^{-2}	4.8×10^{-3}	8.9×10^{-3}	5.2×10^{-2}	0.10648	0.10507
0.8	3.7×10^{-2}	4.4×10^{-2}	1.9×10^{-3}	2×10^{-2}	1.4×10^{-2}	0.19175	0.14981
0.9	0.07335	9×10^{-2}	1.5×10^{-2}	4.1×10^{-2}	8×10^{-2}	1.6×10^{-2}	0.1997

Daha fazla terim alarak, hataları daha aza indirmek mümkündür.

Hatırlatalım ki, her zaman başlangıç şartı olarak $v_0 = 0$ almak gerekmez. Bazen başlangıç şartı olarak, uygun dalga operatörünün orijinal problemin sınır ve başlangıç şartlarına denk gelen çözümü v_0 olarak alınabilir.

ÖRNEK 4:

Şimdi değişken katsayılı lineer bir probleme bakalım:

$$u_{tt} = \frac{6 - (x - t)^2}{6} u_{xx} + u, \quad x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = x^3, \quad u_t(x, 0) = -3x^2, \quad u(0, t) = 0.$$

Bu problemin tam çözümü

$$u = \begin{cases} (x - t)^3, & x > t \text{ ise} \\ 0, & x < t \text{ ise} \end{cases}$$

olarak bulunabilir. Denklemi, önce

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{-(x - t)^2}{6} u_{xx} + u$$

şeklinde yazalım. Şimdi, v_0 olarak $u_{tt} - u_{xx} = 0$ denkleminin orijinal problemin sınır ve başlangıç şartlarına denk gelen çözümünü alalım:

$$u_0 = \frac{1}{2} ((x + t)^3 + (x - t)^3) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (3y^2) dy = (x - t)^3, \quad x > t \text{ ise}$$

$$u_0 = \frac{1}{2} ((x + t)^3 - (t - x)^3) - \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} (3y^2) dy = 0, \quad x < t \text{ ise.}$$

u_1 için,

$$Lu_1 = \frac{(x - t)^2}{6} (u_0)_{xx} - u_0$$

ve dolayısıyla

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} \left(\frac{(y-s)^2}{6} 6(y-s) - (y-s)^3 \right) dy ds = 0, \quad x > t \text{ için}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \int_{t-x-s}^{x+t-s} 0 dy ds + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} 0 dy ds = 0, \quad x < t \text{ için}$$

Devam edersek $u_2 = u_3 = \dots = 0$ ve dolayısıyla $u_{tam} = u_0 + u_1$ olarak elde edilir.

Bu örnek, bizim uyguladığımız tekniğin ne kadar önemli olduğunu açıkça gösterir.

ÖRNEK 5:

Şimdi değişken katsayılı non-lineer bir probleme bakalım:

$$u_{tt} = \frac{6 + (x - t)^5}{6} u_{xx} - u^2, \quad x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = x^3, \quad u_t(x, 0) = -3x^2, \quad u(0, t) = t^3.$$

Bu problemin tam çözümü,

$$u = \begin{cases} (x - t)^3, & x > t \text{ ise} \\ (t - x)^3, & x < t \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olarak bulunabilir.}$$

Denklemini,

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{(x - t)^5}{6} u_{xx} + u^2$$

şeklinde yazalım ve $Lu = u_{tt} - u_{xx}$ olarak HPM'yi uygulayalım: $Lu = 0$ 'ın aynı sınır/başlangıç şartlarında çözümü,

$$u_0 = \frac{1}{2} ((x + t)^3 + (x - t)^3) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (3y^2) dy = (x - t)^3, \quad x > t \text{ ise,}$$

$$u_0 = \frac{1}{2} ((x + t)^3 - (t - x)^3) - \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} (3y^2) dy + (t - x)^3 = (t - x)^3, \quad x < t \text{ ise}$$

fonksiyonudur. HPM'den u_1 için aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$Lu_1 = \left[\frac{(x - t)^5}{6} (u_0)_{xx} + (u_0)^2 \right]$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} \left(\frac{(y - s)^5}{6} 6(y - s) - (y - s)^6 \right) dy ds = 0, \quad x > t \text{ için}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \int_{t-x-s}^{x+t-s} \left(\frac{(s - y)^5}{6} 6(s - y) - (s - y)^6 \right) dy ds \\ + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} \left(\frac{(s - y)^5}{6} 6(s - y) - (s - y)^6 \right) dy ds = 0, \quad x < t \text{ için.}$$

Yine tam çözüme ilk iterasyonda ulaşabiliriz.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Modern bilgisayar tekniklerinin daha ileri seviyede olmasıyla, diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan yöntemleri geliştirme ihtiyacından oluşan bir yöntem olarak ortaya atılan yeni Alternatif Homotopi Metodu (AHM), farklı denklem türlerine uygulanarak teorik ve sayısal analizler yapılmıştır. Analizler sonucunda, bu yeni yöntemin çoğu örnekte daha az hata ve daha yüksek hızla seri çözümüne ulaştığı ortaya çıkarılmıştır. Adi diferansiyel denklemlerin hesaplama bakımından en zor türlerinden olan bazı denklemlere, örneğin reaksiyon-difüzyon, çok noktalı sınır problemleri vb. problemlere uygulanarak aslında, büyük potansiyeli olan yöntem olduğu da açıkça gösterilmiştir. Çözümlerin bulunmasını kolaylaştırmak için belli bilgisayar teknikleri kullanılarak çözüm bulma sürecinin optimize edilebileceği gösterilmiştir.

Son 10-15 yılda en çok kullanılan ve literatürde çok fazla yer tutan yöntemlerden biri olan Homotopi Pertürbasyon Metodu'nun en zayıf taraflarından biri olan nonlineer fonksiyonun hesaplanmasında yeni parametre dahil edilmesiyle ortaya çıkan zorlukları gidermek için AHM'nin çok önemli olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada, literatürde en fazla uygulanan yöntemlerin daha uygun kullanılması yönünde de sonuçlara ulaşılmıştır. Reaksiyon-difüzyon denklemi örneğinde başlangıç iterasyonunun iyi seçilmesinin önemi, Lane-Emden tipi denklemlerde ise lineer operatörün uygun seçilmesinin önemi analiz edilmiştir.

- [1] He, J.H., (1999). "Homotopy Perturbation Technique", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 178: 257-262.
- [2] Liao, S.J., (2003). *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Press.
- [3] Wang, Y.-X., Si, H.-Y. and Mo, L.-F., (2008). "Homotopy perturbation method for solving reaction-diffusion equations", *Mathematical Problems in Engineering*.
- [4] Lesnic, D., (2007). "A nonlinear reaction-diffusion process using the Adomian decomposition method", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 34 (2): 129-135.
- [5] Mo, L.-F., (2007). "Variational approach to reaction-diffusion process", *Physics Letters A*, 368 (3-4): 263-265.
- [6] Aslanov, A., (2012). "Comments on Homotopy Perturbation Method for Solving Reaction-Diffusion Equations", *Mathematical Problems in Engineering*.
- [7] Hashim, I. and Chowdury, M.S.H., (2007). "Solutions of a class of singular second-order IVPs by homotopy perturbation method", *Physics Letters A*, 365: 439-447.
- [8] Mohyud-Din, S. T. and Noor, M. A., (2007). "Homotopy perturbation method for solving fourth-order boundary value problems", *Mathematical Problems in Engineering*.
- [9] Aslanov, A. (2011). "Analyzing Homotopy perturbation method for solving fourth-order boundary value problems", *Mathematical Problems in Engineering*.
- [10] Mohyud-Din, S. T. and Noor, M. A., (2007). "An efficient algorithm for solving fifth-order boundary value problems", *Mathematics and Computer Modelling*, 45: 954-964.
- [11] Wazwaz, A. M. (2001). "The numerical solution of fifth-order boundary value problems by Adomian decomposition", *J. Comput. Appl. Math.*, 136: 259-270.
- [12] Caudray, P.J., Eilbeck, I.C. and Gibbon, J.D. (1975). "The sine-Gordon equation as a model classical field theory", *Nuovo Cimento.*, 25: 497-511.
- [13] Dodd, R.K., Eilbeck, I.C. and Gibbon, J.D., (1982). *Solitons and nonlinear wave equations*, Academic, London.

- [14] Holliday, J.R., Rundle, J.B., Tiampo, K.F. et al., (2006). "Modification of the pattern informatics method for forecasting large earthquake events using complex eigenfactors", *Tectonophysics*, 413: 87-91.
- [15] Akhmetov, A.A., (2003). "Long current loops as regular solutions of the equation for coupling currents in a flat two-layer superconducting cable", *Cryogenics*, 43 (3-5): 317-322.
- [16] Manolis, G.D., George, D. and Rangelov, T.V., (2006). "Non-homogeneous elastic waves in soils: Notes on the vector decomposition technique", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26 (10): 952-959.
- [17] Chowdhury, M.S.H. and Hashim, I., (2009). "Application of homotopy perturbation method to Klein-Gordon and sine-Gordon equations", *Chaos, Solitons & Fractals*, 39: 1928-1935.
- [18] Wazwaz, A.M., (2005). "The tanh method: exact solutions of the sine-Gordon and the sinh-Gordon equations", *Applied Mathematics and Computation*, 167: 1196-1210.
- [19] Kaya, D., (2003). "A numerical solution of the sine-Gordon equation using the modified decomposition method", *Applied Mathematics and Computation*, 143: 309-317.
- [20] El-Sayed, S.M., (2003). "The decomposition method for studying the Klein-Gordon equation", *Chaos, Solitons & Fractals*, 18 (5): 1025-1030.
- [21] Wazwaz, A.M. and Gorguis, A., (2004). "Exact solutions for heat-like and wave-like equations with variable coefficients", *Applied Mathematics and Computation*, 149 (1): 15-29.
- [22] Liao, S.J., (1992). The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University.
- [23] He, J.H., (1999). "Variational iteration method-a kind of non-linear technique: some examples", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 34: 699-708.
- [24] He, J.H., (2006). "New interpretation of homotopy perturbation method", *International Journal of Modern Physics. B*, 20 (18): 2561-2568.
- [25] He, J.H.,(2000). "A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 35 (1): 37-43.
- [26] He, J.H., (2006). Non-perturbative methods for strongly nonlinear problems, Germany: Die Deutsche bibliothek.
- [27] Ablowitz, M.J., Herbst, B.M. and Schober, C., (2006). "Homotopy perturbation method and axisymmetric flow over a stretching sheet", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7 (4): 399-406.
- [28] Berberler, M.E. and Yıldırım, A.,(2009). "He's homotopy perturbation method for solving the shock wave equations", *Applicable Analysis*, 88 (7): 997-1004.

- [29] Cveticanin, L., (2005). "The homotopy perturbation method applied for solving complex-valued differential equations with strong cubic nonlinearity", *Journal of Sound and Vibration*, 285: 1171-1179.
- [30] Ganji, D.D. and Rajabi, A., (2006). "Assessment of homotopy-perturbation and perturbation methods in heat radiation equation", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 33: 391-400.
- [31] Ganji, D.D. and Sadighi, A., (2004). "Application of homotopy-perturbation and variational iteration methods to nonlinear heat transfer and porous media equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207 (1): 24-34.
- [32] Aslanov, A., (2011). "Homotopy Perturbation Method for Solving Wave-Like Nonlinear Equations with Initial-Boundary Conditions", *Discrete Dynamics in Nature and Society*.
- [33] Chun, C., Jafari, H. and Kim, Y., (2009). "Numerical method for the wave and nonlinear diffusion equations with the homotopy perturbation method", *Computers and Mathematics with Applications*, 57: 1226-1231.
- [34] Strauss, W.A. (1992). *Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Günay ASLANOVA
Doğum Tarihi ve Yeri : 01.02.1990, Azerbaycan
Yabancı Dili : İngilizce, Rusça
E-posta : gulya90@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2011
Lise	Fen	75. Yıl Cumhuriyet Lisesi	2007

YAYINLARI

Makale

1. Günay Aslanova, Elif Tekin Tarım, “*Note on a nonlinear reaction-diffusion process*”, Transaction on IoT and Cloud Computing (TICC), ISSN: 2331-4761, sayı 2, no 2, 2014.
2. Günay Aslanova, Afgan Aslanov, Elif Tekin Tarım, “*A new efficient method for solving nonlinear multi-point boundary value problems*”, Nonlinear Science Letters A: Mathematics, Physics and Mechanics, ISSN: 2076-2275, 2014.