

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİNC-GALERKİN YÖNTEMİ İLE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ
VE SINIR ŞARTLARININ İNCELENMESİ**

SELVİ ALTUN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. AYDIN SEÇER**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SİNC-GALERKİN YÖNTEMİ İLE SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ
VE SINIR ŞARTLARININ İNCELENMESİ**

Selvi Altun tarafından hazırlanan tez çalışması tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Sayısal analiz günümüzde büyük ilerlemelerin kaydedildiği bir bilim dalı olup son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayısal yöntemlerin yoğunluğunu ve etkinliğini artırmıştır.

Bu çalışmada, 2. mertebeden singüler, Dirichlet-tip sınır değer problemlerine, sayısal analiz yöntemlerinden biri olan Sinc-Galerkin yöntemi uygulanmış ve verilen sınır koşullarına göre değişimi incelenmiştir.

Çalışmalarım süresince her konuda öneri ve yardımlarıyla beni destekleyen ve yönlendiren tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Aydın SEÇER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan, her konuda maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili annem ve babam Hülya ALTUN ve Muammer ALTUN'a, tez çalışmam esnasında bana destek ve moral veren, yardımını hiç esirgemeyen sevgili kardeşim Samet ALTUN'a teşekkür eder, sevgilerimi sunarım.

Mayıs, 2013

Selvi ALTUN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Orijinal Katkı.....	2
BÖLÜM 2.....	3
ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER	3
2.1 Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması.....	4
2.2 Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	6
2.3 Yüksek Mertebeden Lineer Denklemler	6
BÖLÜM 3.....	9
HİLBERT UZAYLARI.....	9
3.1 Vektör Uzayları.....	9
3.2 Normlu Vektör Uzayları	12
3.3 Pre-Hilbert Uzayları (İç Çarpım Uzayları)	12
3.4 Ortogonal ve Ortonormal Sistemler.....	14
BÖLÜM 4.....	17
KONFORM DÖNÜŞÜMLER	17

4.1	Analitik Fonksiyonlar	17
4.2	Kompleks Fonksiyonun Tanımı	18
4.3	Kompleks Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	19
4.4	Kompleks Fonksiyonlarda Diferansiyellenebilme	20
4.5	Cauchy-Riemann Denklemleri	21
4.6	Analitik Fonksiyonlar	22
4.7	KOMPLEKS FONKSİYONLARIN İNTEGRALI	23
4.7.1	Eğri ve Çevre	23
4.7.2	Kompleks Fonksiyonların İntegrali	23
4.7.3	Cauchy İntegral Teoremi	25
4.7.4	Cauchy Türev Formülü	25
4.8	KONFORM DÖNÜŞÜMLER	26
4.8.1	Konform Dönüşümler	26
4.8.2	Açıların Korunması	26
BÖLÜM 5		30
SİNC-GALERKİN YÖNTEMİ		30
5.1	Reel Düzlemde Nümerik Metodlar	30
5.1.1	İnterpolasyon ve Quadrature	31
5.1.2	Yaklaşık İnterpolasyon ve Quadrature	33
5.2	Γ üzerinde Nümerik Metodlar	36
5.2.1	Γ Üzerinde İnterpolasyon	36
5.2.2	Γ Üzerinde Quadrature	39
5.2.3	Γ Üzerinde Türev	40
5.3	Sinc-Galerkin Yöntemi	42
5.3.1	İç Çarpım Yaklaşımları	43
5.3.2	Ayrık Sistem Kurma ve Hata	49
5.3.3	Sınır Koşullarının İncelenmesi	59
BÖLÜM 6		71
SONUÇ ve ÖNERİLER		71
EK-A		72
HOMOJEN OLMAYAN SINIR KOŞULLARI İÇİN SİNC-GALERKİN ALGORİTMASI		72
KAYNAKLAR		75
ÖZGEÇMİŞ		77

SİMGE LİSTESİ

$(X, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım
D	Türev operatörü
L	Operatör
H	Hilbert uzayı
$B(h)$	Paley-Wiener fonksiyonları
$L_p(a, b)$	Lebesgue uzayı
D	Göz bölgesi
D_s	Sonsuz şerit
$B(D)$	D bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonların kümesi
$\psi(R_n)$	Konform kareler
x_k	Düğüm noktaları
h	Ardışık düğüm noktaları arasındaki uzaklık
d	D_s bölgesinin genişliği
N	Düğüm noktalarının sayısı
ϕ	Konform dönüşüm
$S(k, h)$	Sinc fonksiyonu
$C(f, h)$	Kardinal seri

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 5. 1 Sinc bazları ($S(k, h)(x)$, $k = -1, 0, 1$ ve $h = \pi/4$).....	33
Şekil 5. 2 Genişliği $2d$ olan D_s sonsuz şerit bölgesi, $d > 0$	34
Şekil 5. 3 D ve D_s bölgeleri arasındaki konform dönüşüm	37
Şekil 5. 4 Örnek 5.1 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği	56
Şekil 5. 5 Örnek 5.2 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği	57
Şekil 5. 6 Örnek 5.3 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği	59
Şekil 5. 7 Örnek 5.4 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği	64
Şekil 5. 8 Örnek 5.5 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği	67
Şekil 5. 9 Örnek 5.6 da verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği	70

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5. 1	(5.62) de verilen ayrık sistemin bileşenleri	54
Çizelge 5. 2	$N = 100$ için Örnek 5.1 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	55
Çizelge 5. 3	$N = 100$ için Örnek 5.2 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	57
Çizelge 5. 4	$N = 100$ için Örnek 5.3 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	58
Çizelge 5. 5	$N = 2$ için Örnek 5.4 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	62
Çizelge 5. 6	$N = 25$ için Örnek 5.4 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	63
Çizelge 5. 7	$N = 50$ için Örnek 5.4 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	63
Çizelge 5. 8	$N = 5$ için Örnek 5.5 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	65
Çizelge 5. 9	$N = 50$ için Örnek 5.5 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	66
Çizelge 5. 10	$N = 2$ için Örnek 5.6 da verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	68
Çizelge 5. 11	$N = 50$ için Örnek 5.6 da verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması	69

SİNC-GALERKİN YÖNTEMİYLE SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ VE SINIR ŞARTLARININ İNCELENMESİ

Selvi Altun

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Aydın Seçer

İki sınır şartı ile verilen 2. mertebeden singüler, Dirichlet-tip sınır değer problemlerini nümerik olarak çözmek için pek çok kullanışlı metod vardır. Bunlardan bir tanesi de Sinc-Galerkin metodudur. Bu metod, Whittaker kardinal fonksiyonu kullanılarak fonksiyonlara ve onların türevlerine yaklaştırmaya dayanır. Diferensiyel denklem matris sistemlerini çözmek için gerekli olan hiçbir nümerik integral kullanmadan, iç çarpımların yaklaşımları yardımıyla cebirsel denklem sistemine indirgenir. Bu tezde, böyle problemlerin nümerik çözümünde Sinc-Galerkin metodunun çok etkili bir araç olduğu gösterilmiştir. Tezin sonunda da Sinc-Galerkin metodu, homojen ve homojen olmayan sınır şartlarıyla verilen örneklerle test edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sinc-Galerkin metodu; sinc fonksiyonu; Dirichlet-tip sınır değer problemleri; homojen ve non-homojen sınır şartları; Whittaker kardinal fonksiyonu.

**THE SINC-GALERKIN METHOD FOR SOLVING BOUNDARY VALUE
PROBLEMS AND TREATMENT OF THE BOUNDARY CONDITIONS**

Selvi ALTUN

Department of Mathematical Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Assist. Prof. Dr. Aydın SEÇER

There are few methods practicable to numerically solve second-order singular Dirichlet-type boundary value problems with two-point boundary conditions. In this thesis we indicate that the Sinc-Galerkin method is a very powerful tool in numerically solving such problems. The method is based on approximating functions and their derivatives by using the Whittaker cardinal function. The differential equation is reduced to a system of algebraic equations via new accurate explicit approximations of the inner products without any numerical integration which is needed to solve matrix system. At the end of the thesis, the method was tested on examples with homogeneous and non-homogeneous boundary conditions.

Keywords: Sinc-Galerkin method; sinc-basis functions; Dirichlet-type boundary value problems; boundary conditions; Whittaker cardinal function.

1.1 Literatür Özeti

Sinc metodları Frank Stenger tarafından 1976 yılında öne sürülmüş ve 1979 yılında Sinc-Galerkin metodunun, 2. mertebeden adi diferansiyel denklemlere ve bazı lineer, eliptik ve parabolik kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması incelenmiştir [1], [2]. Sinc fonksiyonu ise ilk olarak Edmund Taylor Whittaker tarafından 1915 yılında, daha sonra oğlu John Macnaghten Whittaker tarafından 1961 yılında analiz edilmiştir [3], [4]. 1986 ve 1992 yıllarında sınır-değer problemlerinin çözümü için sinc metodlarının kapsamlı birer çalışması yapılmıştır [5], [6]. 1987 yılında Sinc-Galerkin yönteminin parabolik , hiperbolik denklemlere ve singüler eliptik denklemlerin bazı türlerine uygulanması detaylı bir şekilde incelenmiştir [7], [8], [9]. 1989 yılında ise simetrik Sinc-Galerkin metodu bulunmuştur [10]. Simetrik Sinc-Galerkin sistemleri için iteratif metodlar Nicomedes Alonso III ve Kenneth L. Bowers tarafından 2009 yılında çalışılmıştır [11]. Sinc Galerkin metodu 2003 yılında Sanoe Koonprasert tarafından zamana bağlı sınır koşulları ile verilen kompleks değerli kısmi diferansiyel denklemlerin bir ailesi için geliştirilmiştir [12]. Sinc metodlarının uygulamaları 1990 yılında Kelly M. Mcarthur, Kenneth L. Bowers ve John R. Lund, 1981 yılında ise Frank Stenger tarafından çalışılmış ve Frank Stenger bugüne kadar sinc nümerik hesaplama yöntemlerinden elde edilen bütün sonuçları 2000 yılında yaptığı çalışmasında özetlemiştir [13-15]. 2004 yılında Jennifer L. Mueller ve Thomas S. Shores tarafından karışık sınır koşulları ile verilen konveksiyon-difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için yeni bir Sinc-Galerkin metodu geliştirilmiştir [16]. 2003 yılında M. El-Gamel, S.H. Behiry ve H. Hashish tarafından homojen ve non-homojen sınır şartları ile verilen 4.

mertebeden non-lineer diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü için Sinc-Galerkin metodu kullanılmıştır [17]. 1996 yılında Nancy J. Lybeck ve Kenneth L. Bowers ise homojen sınır koşulları ile verilen 2. mertebeden diferansiyel denklemin çözümü için sinc metodlarını kullanmıştır [18].

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı homojen ve homojen olmayan sınır şartları ile verilen 2. mertebeden singüler, Dirichlet-tip sınır değer problemlerine Sinc-Galerkin metodunun uygulanması ve elde edilen sonuçların analitik çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmasıdır.

1.3 Orijinal Katkı

Homojen olmayan sınır koşullarına sahip 2. mertebeden singüler, Dirichlet-tip sınır değer probleminin homojen olmayan sınır koşulları homojen hale getirilmiş, daha sonra Sinc-Galerkin yönteminin işlem adımları uygulanmış ve homojen olmayan sınır koşulları için Sinc-Galerkin algoritması geliştirilmiştir.

ADİ DİFARENSİYEL DENKLEMLER

17. yüzyılın başlarında difarensiyel ve integral kavramlarının Leibnitz ve Newton tarafından ortaya atılmasıyla birlikte “diferansiyel denklemler” de matematiğin belki de günümüze kadar en çok araştırılan bir dalı olmuştur. Halen de bu önemini korumaktadır.

İlk kez 1676’da Leibnitz tarafından kullanılan “diferansiyel denklem”, bağımlı değişkeni ve bir ya da daha fazla sayıda bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denklemi ifade eder. Doğadaki olayları açıklamak için en etkin ve sistematik yol “diferansiyel denklem” dilini kullanmaktır. Gerçekten de, fizik, kimya, biyoloji, astronomi, mühendislik, ekonomi ve diğer pek çok uygulamalı bilimler diferansiyel denklemlerin önemli uygulama alanlarıdır. Bunun dışında, şüphesiz pür matematiğin kendi içinde özellikle de geometride diferansiyel denklemler önemli bir rol oynar.

Diferansiyel denklemlerin böyle geniş bir alanda uygulanabilir olmasının nedeni çok açıktır. Bilindiği gibi bize $y = f(x)$ gibi bir fonksiyon verildiğinde, bunun dy/dx türevi, y nin x ’e göre değişim hızı olarak yorumlanabilir.

Doğal olaylarda da, değişkenler ve bunların değişim hızları birbirlerine olayı yöneten bazı temel yasalarla bağlıdır. İşte bu yasalar matematik sembollerle yazıldığında sonuç çoğu zaman bir diferansiyel denklemdir. Örneğin $F = ma$ diye alışık olduğumuz Newton’un 2. Yasası gerçekte bir diferansiyel denklemdir. Düzlem geometride, bir düzlem eğrinin y' eğimi ile (x, y) koordinatları arasındaki ilişki bizi yine bir diferansiyel denkleme götürür [19].

2.1 Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Tanım 2.1 Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir. [19]

Tanım 2.2 Bağımlı değişkenin yalnızca bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir. [19]

Tanım 2.3 Bağımlı değişkenin bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferansiyel denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir. [19]

Örnek 2.1

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dx} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \sin y = 0 \quad (1.1b) \quad (2.2)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \alpha \frac{dy}{dt} + \beta y = 2e^{-t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

Yukarıdaki tanımlara göre, bu örnekteki ilk üç denklem adi diferansiyel, son ikisi de kısmi türevli diferansiyel denklemdir. (2.1) ve (2.2) denklemlerinde x bağımsız, y de bağımlı değişkendir. (2.4) de x, y, z bağımsız, u bağımlı ve (2.5) de x, t bağımsız, u yine bağımlı değişkendir. Fiziksel problemlerde bağımsız değişken genellikle t dir ve zamanı gösterir. Çoğu zaman zamana göre türevi göstermek için üs yerine “.” işareti kullanılır [19].

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Tanım 2.4 Bir diferansiyel denklemde en yüksek türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir. (2.1), 2. mertebe, (2.2), 1. mertebe, (2.3), 3. mertebe, diğer iki denklem de 2. mertebe diferansiyel denklemlerdir.

n . mertebeden en genel adi diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.6)$$

biçiminde yazılır [19].

Tanım 2.5 (2.6) denklemi bütün türevlerine göre bir polinom ise, en yüksek türevli terimin kuvvetine denklemin derecesi denir.

$F(x, y, y') = 0$ denklemi y' türevine göre m . dereceden bir polinom olarak yazılabiliyorsa, denklem 1. mertebeden ve m . dereceden bir diferansiyel denklemdir. Bu tanıma göre her denklemin derecesinden söz edemeyiz.

(2.2) denklemi 2. dereceden (y' türevine göre 2. dereceden bir polinom) diğerleri ise 1. derecedendir.

Şimdi diferansiyel denklemlerde çok önemli bir kavram olan lineerlik tanımı kullanılarak diferansiyel denklemler lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler adı altında iki önemli sınıfa ayrılacaktır [19]:

Tanım 2.6 Bağımlı değişkeni y ve bağımsız değişkeni x olan n . mertebeden lineer bir diferansiyel denklem

$$a_0(x) \frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $a_0(x)$ özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyondur.

Dikkat edilirse lineer bir diferansiyel denklemde bağımlı y değişkeninin kendisi ve türevleri birinci dereceden, ayrıca y nin ve türevlerinin çarpımı ve transandan fonksiyonları gözükmemektedir [19].

Tanım 2.7 Eğer adi bir diferansiyel denklem lineer değilse bu denkleme lineer olmayan adi diferansiyel denklem denir.

(2.1) ve (2.3) lineer, (2.2) ise lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir [19].

2.2 Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Tanım 2.8 n . mertebeden

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.7)$$

diferansiyel denklemini düşünelim.

- $f(x)$ reel bir I aralığında tanımlı ve her $x \in I$ için n . mertebeden türetilebilen reel bir fonksiyon olsun. Eğer $F\left(x, f(x), \dots, f^{(n)}(x)\right)$, $\forall x \in I$ için tanımlı ve $F\left(x, f(x), \dots, f^{(n)}(x)\right) = 0$ ise, $f(x)$ fonksiyonuna diferansiyel denklemin açık çözümü denir. Yani, y ve türevleri yerine $f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevleri konursa (2.7) diferansiyel denklemi I üzerinde bir özdeşlik verir.
- Eğer $g(x, y) = 0$ biçiminde bir bağıntı, belirli bir I aralığında (2.7) diferansiyel denkleminin açık bir çözümü olacak biçimde x değişkeni reel bir f fonksiyonu tanımlıyorsa bu bağıntıya denklemin kapalı çözümü denir.
- Açık ve kapalı çözümlere kısaca çözüm denir [19].

2.3 Yüksek Mertebeden Lineer Denklemler

n . mertebeden lineer bir denklem bağımlı y değişkenine ve $y', y'', \dots, y^{(n)}$ türevlerine göre lineer olan bir denklemdir. Böyle bir denklem

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (2.8)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $a_j(x)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) ve $f(x)$ fonksiyonları reel eksenin bir $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında sürekli ve bu aralıkta $a_0(x) \neq 0$ varsayılıyor. (2.8) denklemi ve

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad x_0 \in I$$

başlangıç koşullarını sağlayan başlangıç-değer problemini düşünelim. Tıpkı 1. mertebeden lineer denklemlerde olduğu gibi, bu problemin I üzerinde tanımlı bir tek çözümü vardır (yüksek mertebeden lineer denklemler için varlık teklik).

Eğer $f(x)=0$ ise, (2.8) denkleminde homojendir denir. Çünkü, sağ yanı sıfır olan bu denklem $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ değişkenlerine göre aynı dereceden homojen bir denklemdir [19].

Operatör Notasyonu:

Eğer $D = \frac{d}{dx}$ türev operatörünü tanımlarsak, (2.10) denkleminin sol yanını

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n \quad (2.9)$$

operatörüne y fonksiyonunu uygulayarak elde edebiliriz. O halde (2.8) denklemi kısaca

$$Ly = f(x) \quad (2.10)$$

biçimini alır. Ayrıca, $D^n = D(D^{n-1})$ ve $D^n y = y^{(n)}$ bağıntıları geçerlidir. (2.8) denklemini için bilinen çözüm yöntemlerini geliştirmeden önce şunu belirtmeliyiz ki, bu denklemin çözümünü genel olarak elementer, yani cebirsel ve transandan fonksiyonlarla ifade etmek mümkün değildir. Ancak çok özel bazı durumlarda çözüm bulunabilir.

Şimdi L operatörüne ilişkin bazı özellikleri verelim. L operatörü lineer bir operatördür, yani c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2$$

yazılabilir. Lineerlik özelliğini kullanarak şu basit sonuca hemen varabiliriz. Eğer y_1 ve y_2 (2.10) denkleminin birbirinden farklı iki çözümü ise

$$Ly_1 = f(x), \quad Ly_2 = f(x)$$

$$Ly_2 - Ly_1 = 0$$

dir. Diğer yandan, $u = y_2 - y_1$ dersek

$$Lu = L(y_2 - y_1) = Ly_2 - Ly_1 = 0 \quad (2.11)$$

yazılabilir. O halde, (2.10) un herhangi iki çözümünün farkı homojen (sağ yanı özdeş olarak sıfır olan) (2.11) denklemini sağlar. Şimdi $Lu = 0$ homojen denkleminin genel çözümünü bulacağız. L operatörü lineer olduğundan, eğer u , (2.11) denkleminin herhangi bir çözümü ise

$$L(cu) = cL(u) = 0$$

bağıntısından dolayı cu da bir çözüm olur. Genel olarak, eğer denklemin n tane özel çözümü varsa, keyfi $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri için

$$L(c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n) = c_1Lu_1 + c_2Lu_2 + \dots + c_nLu_n = 0$$

lineerlik bağıntısından $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$ fonksiyonunun da $Lu = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu ortaya çıkar [19].

Tanım 2.9 $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$ şeklinde verilen bir diferansiyel denklemin sabitleri $x = a$ ve $x = b$ gibi iki noktada verilen şartlar ile belirleniyor ise bu probleme sınır değer ya da iki nokta problemi adı verilir.

Örneğin $y'' = f(x, y, y')$ diferansiyel denkleminin sabitlerini belirlemek için $y(a) = \alpha$ ve $y(b) = \beta$ gibi iki şart verildiğinde bu bir sınır-değer problemidir. Sınır şartları daha genel olarak

$$\begin{aligned} a_1y(a) + a_2y'(a) &= \alpha \\ b_1y(b) + b_2y'(b) &= \beta \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir [20].

BÖLÜM 3

HİLBERT UZAYLARI

3.1 Vektör Uzayları

Tanım 3.1 X boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X, \quad (a, x) \rightarrow ax,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. Her $x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır;
4. Her $x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğinin sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır;
5. Her $x \in X$ için $1 \cdot x = x$;
6. $a(x + y) = ax + ay$;
7. $(a + b)x = ax + bx$;
8. $(ab)x = a(bx)$

Bu durumda X 'e K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) ve elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir reel vektör uzayı ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir kompleks vektör uzayı adı verilir.

0 sembolünün X uzayının vektörü için olduğu gibi, sıfır skaleri için de kullanılması genelde pek fazla yanlışlığa neden olmaz. Ancak biraz daha açıklık getirmek istenirse, sıfır vektörü θ şeklinde gösterilebilir[21].

Tanım 3.2 X bir vektör uzayı ve Y X 'in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y , X vektör uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y 'ye X 'in bir lineer alt uzayı denir [21].

Teorem 3.1 $\emptyset \neq Y \subset X$ kümesinin X 'in bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\forall y_1, y_2 \in Y$ ve $\forall a_1, a_2 \in K$ için $a_1 y_1 + a_2 y_2 \in Y$ olmasıdır.

Örneğin, $\{\theta\}$ ve X , X vektör uzayının aşikar alt uzaylarıdır [21].

Tanım 3.3 X bir vektör uzayı olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ verilsin. $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ olmak üzere

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

şeklindeki bir toplama $x_1, x_2, \dots, x_n$ nin bir lineer kombinasyonu denir.

$$\emptyset \neq M \subset X$$

ise M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer kombinasyonlarının kümesine M 'nin *gereni* ($Span$) denir ve $Span(M)$ ile gösterilir. $Span(M)$, X 'in bir alt uzayıdır ve bu alt uzaya M 'nin ürettiği alt uzay denir. $M = \emptyset$ ise $Span(M) = \theta$ olur [21].

Tanım 3.4 X bir vektör uzayı ve $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ olsun. $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ olmak üzere $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ eşitliği, ancak ve ancak,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

olması halinde gerçekleşiyorsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlıdır denir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ kümesinin lineer bağımlı olması halinde, M 'nin vektörlerinin en az biri diğerlerinin lineer bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Örneğin,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

eşitliği, $a_n \neq 0$ olmak üzere gerçekleşiyorsa M kümesi lineer bağımlı olup, x_n 'i bu eşitlikten faydalanarak bulabiliriz [21].

$$x_n = b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} \quad (b_j = -a_j / a_n, j=1, \dots, n-1)$$

Tanım 3.5 X bir vektör uzayı ve M , X 'in boş olmayan bir alt kümesi için

1. M lineer bağımsızdır;

2. $X = \text{Span}M$ ise

M 'ye X 'in bir tabanı veya bazı denir. Eğer $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, X 'in bir tabanı ise her $x \in X$ vektörü

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in K$$

olmak üzere $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ şeklinde tek bir gösterime sahiptir. Çünkü,

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$$

ise buradan

$$(a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + \dots + (a_n - b_n)x_n = 0$$

elde edilir. $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımsız olduğundan her $k=1, 2, \dots, n$ için $a_k - b_k = 0$ ve buradan da $a_k = b_k$ bulunur.

Eğer X vektör uzayının bir sonlu tabanı varsa X 'e sonlu boyutlu bir vektör uzayı, aksi halde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı adı verilir. Sonlu boyutlu bir X vektör uzayının bir tabanındaki vektörlerinin sayısına X 'in boyutu denir ve $\text{Boy}X$ ile gösterilir [21].

Örnek 3.1 $X = \mathbb{R}^n$ kümesi

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ve benzeri şekilde yazılan, tüm sıralı reel sayı n -lilerin kümesi olsun. $\mathbb{R}$ 'nin bir cisim olduğu dikkate alındığında $x, y \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ kümesinin

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

işlemlerine göre bir vektör uzayı olduğu açıktır. $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesindeki vektörler $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ olarak tanımlandığında M kümesi $\mathbb{R}^n$ için bir tabandır. Bu tabana $\mathbb{R}^n$ 'nin standart (kanonik) tabanı da denir [21].

3.2 Normlu Vektör Uzayları

Vektör uzayı açık bir cebirsel amaç olup, eğer bu amaç üzerinde analizle uğraşmak isteniyorsa onun üzerinde bir uzaklık ölçüm tarzının inşa edilmesi gerekir. Bu, norm denilen kavramın tanımlanması yardımıyla yapılır.

Tanım 3.6 X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$(N2) \quad \|ax\| = |a| \|x\|;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir. (N1)-(N3) özelliklerine norm aksiyomları denir. Bu vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir. K cismine bağlı olarak, reel normlu uzay ve kompleks normlu uzay ifadeleri de kullanılır [21].

3.3 Pre-Hilbert Uzayları (İç Çarpım Uzayları)

Tanım 3.7 H kompleks bir vektör uzayı, $x, y, z \in H$ $a \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\langle, \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$
4. $x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle > 0$

Bu koşulları sağlayan H uzayına bir pre-Hilbert uzayı (iç çarpım uzayı), $\langle, \rangle$ dönüşümüne de iç çarpım denir [22].

Örnek 3.2 $C[0,1] = \{ f / f : [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ sürekli} \}$ olsun. $H = C[0,1]$ alalım.
 $f, g \in C[0,1]$ için

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

çarpım tanımı ile $C[0,1]$ uzayı bir pre-Hilbert uzayıdır [7].

Örnek 3.3 $H = C^n$ olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C^n$ için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

tanımıyla C^n bir pre-Hilbert uzayıdır [22].

Önerme 3.1 H bir pre-Hilbert uzayı, $x, y, z \in H$ ve $a \in \mathbb{C}$ olsun. Şu özellikler doğrudur.

1. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
2. $\langle x, ay \rangle = a \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$
4. $\langle x - y, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle$

$$5. \langle x, y - z \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, z \rangle$$

$$6. \text{ Her } z \in H \text{ için } \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \text{ ise } x = y$$

$$7. \left\langle \sum_{k=1}^n a_k x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_k \langle x_k, y \rangle$$

$$8. \left\langle x, \sum_{k=1}^m b_k y_k \right\rangle = \sum_{k=1}^m b_k \langle x, y_k \rangle$$

$$9. \left\langle \sum_{k=1}^n a_k x_k, \sum_{i=1}^m b_i y_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \langle x_k, y_i \rangle a_k b_i \quad [22].$$

Tanım 3.8 Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsarsa iç çarpım uzayına bir Hilbert uzayı adı verilir [22].

Örnek 3.4 $H = C^n$ bir Hilbert uzayıdır[22].

Örnek 3.5 l_2 uzayı bir Hilbert uzayıdır.

$$l_2 = \left\{ x = (x_n) / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

$x, y \in l_2$ için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

pre-Hilbert uzay aksiyomlarını sağlar. $x = (x_n) \in l_2$ için

$$\|x\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right]^{1/2}$$

tanımıyla l_2 bir tam uzayıdır [22].

3.4 Ortogonal ve Ortonormal Sistemler

Tanım 3.9 H bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in H$ olsun. $\langle x, y \rangle = 0$ ise x vektörü y vektörüne ortogonal denir ve $x \perp y$ gösterilir [22].

Önerme 3.2 H bir iç çarpım uzayı ve $z, x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ olsun. $z, x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerinin herbirine ortogonal ise x_n vektörlerinin lineer kombinasyonuna da ortogondur [22].

İspat Her n için $z \perp x_n$ ve $x = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ olsun.

$$\langle z, x \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{a_k} \langle z, x_k \rangle = 0$$

Tanım 3.10 H bir iç çarpım uzayı ve V, H içinde bir küme olsun. Her $x \neq y \in V$ için $x \perp y$ ise V kümesine ortogonal bir küme denir. O halde bir (x_n) dizisinin ortogonal olması için gerek ve yeter şart $n \neq m$ için $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ olmasıdır [22].

Teorem 3.1 H bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in H$ olsun. $\langle x, y \rangle = 0$ ise

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

İspat

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Şimdi $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ ve ortogonal bir küme oluşturursa tümevarım yöntemi ile

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

elde edilir. Bunun bir sonucu olarak (x_n) bir iç çarpım uzayında ortogonal dizi ise (x_n) lineer bağımsızdır [22].

Tanım 3.11 H bir iç çarpım uzayı ve $V \subset H$ olsun. V ortogonal ve her $x \in V$ için $\|x\|=1$ ise V ye ortonormal bir küme denir. O halde H içinde (x_n) dizisinin

ortonormal olması için gerek ve yeter koşul her n için $\|x_n\|=1$ ve her $n \neq m$ için $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ olmasıdır [22].

KONFORM DÖNÜŞÜMLER**4.1 Analitik Fonksiyonlar**

Tanım 4.1 Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının ε – komşuluğuna

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

olarak tanımlanan z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk adı verilir.

$$D(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$$

kümesine ∞ un R – komşuluğu denir.

$$N_0 = D(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$$

kümesine z_0 ın delinmiş komşuluğu denir [23].

Tanım 4.2 $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $z_0 \in S$ noktasının uygun bir ε – komşuluğu S kümesinde kalıyorsa, z_0 noktasına S ’nin bir iç noktası denir. S kümesinin her noktası bir iç nokta ise S ’ye $\mathbb{C}$ ’de açık küme denir [23].

Tanım 4.3 Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının her delinmiş komşuluğu ile S kümesinin arakesiti boş değilse z_0 noktasına S ’nin yığılma noktasıdır denir [23].

Tanım 4.4 Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının her delinmiş komşuluğunda S kümesinde bulunan ve bulunmayan en az bir nokta varsa z_0 noktasına S kümesinin bir sınır noktasıdır denir [23].

Tanım 4.5 $S \subset \mathbb{C}$ kümesine ait herhangi z_1 ve z_2 gibi iki nokta bir poligon ile birleştirilebiliyorsa S kümesine bağlantılı küme denir [23].

Tanım 4.6 Bağlantılı bir bölge içindeki p noktasını q noktasına birleştiren bütün çizgiler, sürekli kaydırmalarla, bölgenin dışına taşmadan üst üste getirilebiliyorlarsa ve bu özellik her (p, q) nokta çifti için varsa, söz konusu bölge basit bağlantılı bir bölgedir, denir [23].

Tanım 4.7 Kompleks düzlemin bağlantılı ve açık alt kümelerine bölge denir [8].

4.2 Kompleks Fonksiyonun Tanımı

$S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, her $z \in S$ ögesine belirli bir $w \in \mathbb{C}$ ögesi karşılık getiren bir f kuralı varsa, bu kurala S 'den $\mathbb{C}$ 'ye bir kompleks fonksiyon (veya dönüşüm) denir ve

$$f : S \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow w = f(z) \text{ veya } w = f(z), z \in S,$$

şeklinde gösterilir. $z \in S$ için $w = f(z)$ bir kompleks sayı olduğundan, bunun

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

ile gösterilen gerçel ve sanal kısmı vardır. Bir kompleks fonksiyonun gerçel ve sanal kısımları genel olarak iki değişkenli gerçel fonksiyonlardır. Bu nedenle bir kompleks fonksiyon için

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

gösterimi kullanılacaktır [23].

4.3 Kompleks Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik

Tanım 4.8 $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere bir $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu ve $a \in \mathbb{C}$ verilsin. z_0 , S 'nin bir yığılma noktası olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$0 < |z - z_0| < \delta \text{ olduğunda } |f(z) - a| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonunun z_0 noktasında limiti vardır ve limiti a 'dır denir. Bu durum,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \text{ ya da } z \rightarrow z_0 \text{ için } f(z) \rightarrow a$$

gösterimi ile belirtilir [23].

Teorem 4.1 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ ve $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = b$ olsun. Bu durumda

a) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = a + b$

b) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = ab$

c) $\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

d) Eğer h , $f(z)$ noktalarında tanımlı ve $\lim_{w \rightarrow a} h(w) = c$ ise $\lim_{z \rightarrow z_0} h(f(z)) = c$ dir [23].

Teorem 4.2 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında limitinin olması için gerek ve yeter koşul, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonlarının her birinin (x_0, y_0) noktasında limitinin olmasıdır. Bu durumda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y)$$

dir [23].

Tanım 4.9 Bir f fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ise f fonksiyonu z_0 noktasında sürekli denir. Eğer bir f fonksiyonu bir S kümesinin tüm noktalarında sürekli ise, f fonksiyonu S kümesinde sürekli denir [23].

Teorem 4.3 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonlarının (x_0, y_0) noktasında sürekli olmasıdır [23].

Teorem 4.4 f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri S ve $z_0 \in S$ de sürekli olsunlar. Bu durumda $f + g$, $f \cdot g$, f / g ($g(z_0) \neq 0$) fonksiyonları da $z_0 \in S$ de sürekli dirler [23].

Teorem 4.5 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu verilsin. A, C' de açık ise $f^{-1}(A)$ açıktır [23].

4.4 Kompleks Fonksiyonlarda Diferansiyellenebilme

Tanım 4.10 $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının ε – komşuluğunda tanımlı olsun.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

limiti var ve sonlu ise, bu limite $f(z)$ nin z_0 daki türevi denir ve genelde $f'(z_0)$ veya

$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0}$ ile gösterilir. Bu durumda

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

yazılır.

$f(z)$ fonksiyonunun $f'(z_0)$ türevi mevcut ise $f(z)$ ye z_0 noktasında diferansiyellenebilir denir [23].

Teorem 4.6 $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir ise, $f(z)$ fonksiyonu z_0 da sürekli dir [23].

4.5 Cauchy-Riemann Denklemleri

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında türevi mevcut olsun.

Bu durumda, $h = h_1 + ih_2$ olmak üzere,

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

şeklinde yazalım. O halde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[f'(z_0)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right] \\ \operatorname{Im}[f'(z_0)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left[\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right] \end{aligned}$$

olur.

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) + i[u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)]}{h_1 + ih_2}$$

dir. Eğer $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ a x -ekseni üzerinden yaklaşırsa, yani $h_2 = 0$ ise,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[f'(z_0)] &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} = u_x(x_0, y_0) \\ \operatorname{Im}[f'(z_0)] &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1} = v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son iki eşitliğin anlamı;

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \quad (4.1)$$

dir. Burada u_x ve v_x , $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonlarının (x_0, y_0) noktasındaki x e göre kısmi türevleridir.

Benzer şekilde $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ a y -ekseni üzerinden yaklaşırsa, yani $h_1 = 0$ ise,

$$f'(z_0) = -i[u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)] \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.1) ve (4.2) eşitlikleri karşılaştırılırsa,

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \text{ ve } u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu birinci mertebeden kısmi türevli denklemlere Cauchy-Riemann denklemleri denir. Yani $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir ε –komşuluğunda diferansiyellenebilir ise, bu komşulukta;

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır [23].

Teorem 4.7 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasının bir ε –komşuluğunda tanımlı ve bu komşulukta, u ve v fonksiyonlarının x ve y ye göre kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler (x_0, y_0) noktasında,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

şeklindeki Cauchy-Riemann denklemlerini sağlasınlar. O halde $f(z)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında $f'(z_0)$ türevi mevcuttur ve değeri

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

dir [23].

4.6 Analitik Fonksiyonlar

Yukarıda kompleks fonksiyonlar için “bir noktada türevlenebilir olmak” kavramı tanımlanmış ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Burada ise bir açık kümenin tüm noktalarında türevi olan fonksiyonlar incelenecektir.

Tanım 4.11 $w = f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir ε –komşuluğunda tanımlı olsun. $f(z)$ nin z_0 da analitik olması için gerek ve yeter koşul $f(z)$ nin z_0 noktasının ε komşuluğunda türevlenebilir olmasıdır [23].

Tanım 4.12 D bölgesinde tanımlı $w = f(z)$ fonksiyonu D bölgesinin her noktasında diferansiyellenebiliyorsa $f(z)$ ye, D de analitik fonksiyon denir [23].

Teorem 4.8 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında analitik olması için gerek ve yeter koşul, z_0 noktasının uygun bir ε –komşuluğunda, u ve v

fonksiyonlarının x ve y ye göre birinci mertebeden sürekli kısmi türevlerinin mevcut ve Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanmasıdır [23].

4.7 KOMPLEKS FONKSİYONLARIN İNTEGRALI

Bu bölümde kompleks fonksiyonların diferansiyellenebilir eğriler üzerinde integrali tanımlanacaktır.

4.7.1 Eğri ve Çevre

Tanım 4.13 $\gamma:[a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ – düzleminde bir eğri denir. Bir γ eğrisi için $a \leq t \leq b$ olmak üzere $\gamma(t) \in \mathbb{C}$ olduğundan $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ yazılabilir. $\gamma:[a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer γ fonksiyonunun türevi var ve sürekli ise γ fonksiyonuna diferansiyellenebilir eğri denir [24].

Tanım 4.14 γ diferansiyellenebilir bir eğri olmak üzere, $t \in [a,b]$ için $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine düzgün eğri denir.

Bu durumda γ eğrisinin her noktasında bir teğeti vardır. $[a,b]$ aralığının sonlu sayıda noktası dışında γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda γ nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar γ' nun bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşit ise γ eğrisine parçalı diferansiyellenebilir eğri denir [24].

Tanım 4.15 Bir γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ eğrisine basit eğri denir [24].

Tanım 4.16 γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisine basit kapalı eğri denir [24].

Tanım 4.17 Sonlu sayıda parçalı diferansiyellenebilir eğrinin uç uca birleştirilmesiyle oluşan eğriye çevre denir [24].

4.7.2 Kompleks Fonksiyonların İntegrali

Tanım 4.18 $h:[a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu

$$h(t) = u(t) + iv(t)$$

şeklinde tanımlanmış ve $u(t), v(t)$ reel fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında reel analizde belirtilen anlamda integralleri varsa h nın $[a, b]$ aralığındaki integrali

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

olarak tanımlanır [24].

Tanım 4.19 $D, \mathbb{C}'de$ bir açık küme $f : D \rightarrow \mathbb{C}, w = f(z)$ sürekli ve $\gamma(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$ eğrisi $\gamma([a, b]) \subset D$ özelliğinde diferansiyellenebilir bir eğri olsun. γ üzerinde f fonksiyonunun integrali

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz$$

şeklinde gösterilir ve

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

dir.

Eğer γ eğrisi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ parçalı diferansiyellenebilir eğrilerin uç uca eklenmesiyle oluşan çevre ise,

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=0}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

olarak tanımlanır [24].

Teorem 4.9 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu verilsin ve γ eğrisi D içindeki z_1 noktasını, yine D içindeki z_2 noktasına birleştiren diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer D bölgesinde $F' = f$ olacak şekilde bir $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu varsa

$$\int_{\gamma} f = F(z_2) - F(z_1)$$

ve özel olarak $z_1 = z_2$ ise

$$\int_{\gamma} f = 0$$

dir [24].

4.7.3 Cauchy İntegral Teoremi

Kompleks analizin en önemli teoremi Cauchy İntegral Teoremidir. Kompleks analizin birçok önemli özelliği bu teoremin birer sonucu olarak elde edilir.

Teorem 4.10 f fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde ve bu bölgenin γ çevresi üzerinde analitik olsun. Bu durumda

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

dir [24].

4.7.4 Cauchy Türev Formülü

Teorem 4.11 f fonksiyonu basit kapalı bir γ eğrisinin üzerinde ve bu eğrinin sınırladığı bölgede analitik olsun. z_0 noktası γ ile sınırlı bölge içinde bir nokta olmak üzere, $f^{(n)}(z_0)$ türevi var ve değeri

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

şeklindedir [24].

Teorem 4.12 (Paley-Wiener Teoremi) Kabul edelim ki f tam fonksiyon ve $f \in L^2(\mathbb{R})$ olsun. K ve π/h pozitif sabitler olmak üzere her $z \in \mathbb{C}$ için

$$|f(z)| \leq K \exp(\pi|z|/h)$$

dir. O halde $F(f) \in L^2(-\pi/h, \pi/h)$ ve

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} F(f)(x) \exp(-ixz) dx$$

olur [26].

4.8 KONFORM DÖNÜŞÜMLER

4.8.1 Konform Dönüşümler

Reel değişkenli fonksiyonlarda türevin bir geometrik anlamı vardır. Yani $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 daki türevi, fonksiyonun grafiğinin x_0 noktasındaki teğetin eğimini verir.

Bilindiği gibi kompleks fonksiyon genelde kompleks düzlemin bir bölgesini bir başka düzlemin bir bölgesi üzerine resmeder. Resmedilen bölge ile resim bölgesi arasındaki ilginin daha iyi belirlenebilmesi ve bu resmetme işleminden uygulamada yararlanabilmek için herhangi bir kompleks fonksiyon yerine konform dönüşüm yapan analitik fonksiyonlar göz önüne alınır.

Konform dönüşümlerin Dirichlet probleminin çözümünde önemli uygulamaları vardır. Bu uygulamalarda ana ilke şöyle belirtilebilir: Problemi verilen bölge yerine bundan çok daha basit bir bölgede çözmek ve sonucu ters dönüşüm yardımıyla verilen ilk bölgeye taşımaktır. Bunun içinde verilen bölgeyi söz konusu basit bölgeye resmeden bire-bir analitik fonksiyonu bulmak gerekir. Böyle bir analitik fonksiyonun varlığı Riemann Dönüşüm Teoremi ile görülecektir.

4.8.2 Açıların Korunması

f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olduğu zaman $w = f(z)$ dönüşümü altında, bu noktada kesişen eğrilerin arasındaki açının yönünün değişip değişmediğini inceleyelim. f fonksiyonu z_0 da analitik olduğu için z_0 ın komşuluğunda bulunan düzgün yayın görüntüsü, w -düzleminde düzgün yaydır.

$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ olmak üzere $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ türevi vardır ve bu limit Δz

nin sıfıra yaklaşım yolundan bağımsızdır. $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan $f'(z_0)$ sayısının argümanının değerlerinden birine ψ_0 ve $|f'(z_0)| = R_0$ diyelim. Böylece;

$$f'(z_0) = R_0 e^{i\psi_0} \quad (4.3)$$

olur. Buradan

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = R_0 \quad , \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \psi_0$$

eşitlikleri bulunur.

Şimdi C , z_0 noktasından geçen düzgün bir eğri ve S' 'de bu eğrinin $w = f(z)$ dönüşümü altındaki görüntüsü olsun. Eğer C boyunca yine pozitif bir yön alınır, buna karşılık olarak f fonksiyonu S boyunca yine pozitif bir yön belirtir. $z_0 + \Delta z$ noktası C üzerinde z_0 dan itibaren pozitif yönde bir nokta olduğu zaman, $\Delta z \rightarrow 0$ iken Δz nin argümanının limiti C nin z_0 daki yönlenmiş teğetinin α eğim açısıdır. $w_0 = f(z_0)$ ve $z_0 + \Delta z$ nin görüntüsü de $w_0 + \Delta w$ ise buradan Δw nin argümanı S nin w_0 daki yönlenmiş teğetinin β eğim açısına yaklaşır.

$$\Delta w = \Delta z \cdot \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

olduğundan Δw nin argümanının bir değeri

$$\arg(\Delta w) = \arg(\Delta z) + \arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)$$

dir. Buradan

$$\Delta z \rightarrow 0 \text{ ise, } \beta = \alpha + \psi_0$$

elde edilir. Demek ki bir C eğrisinin z_0 daki yönlenmiş teğeti, f nin z_0 da analitik olması ve $f'(z_0) \neq 0$ bulunması koşuluyla, $w = f(z)$ dönüşümü altında $\psi_0 = \arg(f'(z_0))$ açısı kadar döndürülür.

Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında sürekli ise z_0 in yeterince küçük bir komşuluğundaki tüm noktaların resimleri w_0 in belli bir komşuluğuna düşer. Süreklilik bağlantılılığı da koruduğundan, w_0 noktasının ε – komşuluğu da bağlantılı bir küme olur [25].

Teorem 4.13 $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise $w = f(z)$ dönüşümü altında z_0 in belli bir komşuluğu, w_0 in belli bir komşuluğunu tam bir defa örter [25].

Teorem 4.14 f fonksiyonu analitik ve bütün $z \in A$ noktaları için $f(z) \neq 0$ ise f , A daki açık kümeleri açık kümelere resmeder [25]

Teorem 4.15 $w = f(z)$ fonksiyonu bir B bölgesinde bire-bir ve analitik ise B nin f altındaki resmi $f(B)$ yi bir defa örter ve $f(B)$ bir bölgedir [25].

Teorem 4.16 $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 da analitik, $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0 dan geçen bir γ düzgün eğrisinin z_0 daki teğeti x – eksenini ile θ açısı yapıyorsa $\vec{\gamma}$ resim eğrisinin de w_0 da teğeti vardır ve bu teğetin u – eksenini ile yaptığı açı;

$$\phi = \theta + \arg(f'(z_0))$$

dir [25].

Tanım 4.16 D , $\mathbb{C}$ de bir bölge olmak üzere $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0 da aralarında α ile aynı yönde ve büyüklükte açı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 da bir konform dönüşümdür denir. Eğer her $z_0 \in D$ noktasında f konform ise f ye D de konform dönüşümdür denir [25].

Teorem 4.17 f bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f , z_0 da bir konform dönüşümdür [25].

Teorem 4.18

Eğer $f : A \rightarrow B$ dönüşümü konform, bire-bir ve örten ise $f^{-1} : B \rightarrow A$ ters dönüşümü de konformdur.

Eğer $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ dönüşümleri konform, bire-bir ve örtense, $g \circ f : A \rightarrow C$ olan bileşke dönüşümü de konform, bire-bir ve örtendir [25].

Teorem 4.19 (Riemann Dönüşüm Teoremi) D en az iki sınır noktasına sahip basit bağlantılı bölge olsun. Bu durumda D bölgesini $|w| < 1$ birim diski üzerine dönüştüren bire-bir ve analitik $w = f(z)$ fonksiyonu vardır. Eğer dönüşüm D bölgesindeki z_0 noktasını orijine dönüştürecek şekilde ve z_0 noktası ile orijinde önceden verilen yönleri koruyacak biçimde belirtilmiş ise söz konusu dönüşüm tektir [25].

SİNC-GALERKİN YÖNTEMİ

5.1 Reel Düzlemde Nümerik Metodlar

Çeşitli mühendislik problemleri sınır değer/başlangıç değer problemi şeklinde matematiksel olarak modellenebilir. Matematiksel modele ait yönetici denklemler diferansiyel denklem, integral denklem ya da integro-difarensiyel denklem olabilir. Elde edilen bu modelin çözülmesinde kullanılacak çözüm yöntemleri

- Analitik çözüm yöntemleri
- Sayısal çözüm yöntemleri

olmak üzere iki grupta toplanır. Analitik çözüm yöntemleri, bilindiği üzere ele alınan sınır değer/başlangıç değer probleminin yönetici denkleminin, literatürdeki bilinen teknikler yardımıyla çözülmesi ve sınır koşulları veya başlangıç koşullarının sağlatılmasından da integral sabiti veya diğer belirsiz sabitlerin belirlenmesi şeklinde yapılır.

Fakat günümüzde karmaşık malzeme özellikleri (malzeme özellikleri sabit değil, fonksiyon örneğin, kompozit malzeme), karmaşık çözüm bölgesi geometrisi ve karmaşık sınır koşulları nedeniyle analitik çözüm yolları ile çözülebilecek problemlerin sayısı çok kısıtlıdır. Ancak çok basitleştirilmiş hallerde analitik çözümler bulunabilmektedir. Bu nedenle sayısal çözüm yöntemlerinin kullanılması kaçınılmazdır. Eğer bir problemin analitik çözümü yapılabiliyorsa, analitik çözüm tercih edilmelidir.

Sayısal çözüm yöntemleri analitik çözümü mümkün olmayan problemlerin çözümünde başvurulur. Sayısal çözüm yöntemlerinde amaç, sayısal veriler yardımıyla, seçilen sayısal çözüm yöntemine ait bilinen işlem adımları uygulanarak, o yöntemin teklif ettiği çözüm uzayından, ele alınan probleme uygun optimal çözüm olabilecek fonksiyonun belirlenmesidir.

5.1.1 İnterpolasyon ve Quadrature

Tanım 5.1 $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesini göstermek üzere her $z \in \mathbb{C}$ için, sinc fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

$h > 0$ için sinc fonksiyonu şu şekilde de tanımlanabilir:

$$\text{sinc}(k, h)(z) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\pi \frac{z - kh}{h}\right)}{\pi \frac{z - kh}{h}}, & z \neq kh \\ 1, & z = kh \end{cases} \quad (5.2)$$

Tanım 5.2 f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $h > 0$ olmak üzere

$$C(f, h)(x) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \text{sinc}\left(\frac{x - kh}{h}\right)$$

şeklinde tanımlanan seri kardinal fonksiyonu adı verilen f fonksiyonuna yakınsar.

Burada

$$\text{sinc}\left(\frac{x - kh}{h}\right) \equiv \begin{cases} \frac{\sin(\pi(x - kh)/h)}{\pi(x - kh)/h}, & x \neq kh \\ 1, & x = kh \end{cases}$$

şeklindedir [6].

Tanım 5.3 h pozitif bir sabit olsun. $B(h)$ Paley-Wiener fonksiyonları, f tam fonksiyonlarının bir ailesidir öyle ki reel düzlemde $f \in L^2(\mathbb{R})$ ve kompleks düzlemde ise f şu şekilde tanımlanır:

$$|f(z)| \leq K \exp(\pi|z|/h)$$

Burada $K > 0$ dır. $B(h)$ Paley-Wiener sınıf fonksiyonlarının bazı özellikleri [1] ve [26] da verilmiştir. Aşağıda verilen teorem bu sınıfı karakterize etmemizde bize yardımcı olacaktır [6].

Teorem 5.1 $f \in B(h)$ ise o zaman her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin c\left(\frac{t-z}{h}\right) dt \quad (5.3)$$

Teorem 5.2 $f \in B(h)$ ise o zaman her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \sin c\left(\frac{z-kh}{h}\right) \quad (5.4)$$

ve

$$f(kh) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin c\left(\frac{t-kh}{h}\right) dt \quad (5.5)$$

Sonuç 5.1 Eğer $f \in B(h)$ ve $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise o zaman

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \quad (5.6)$$

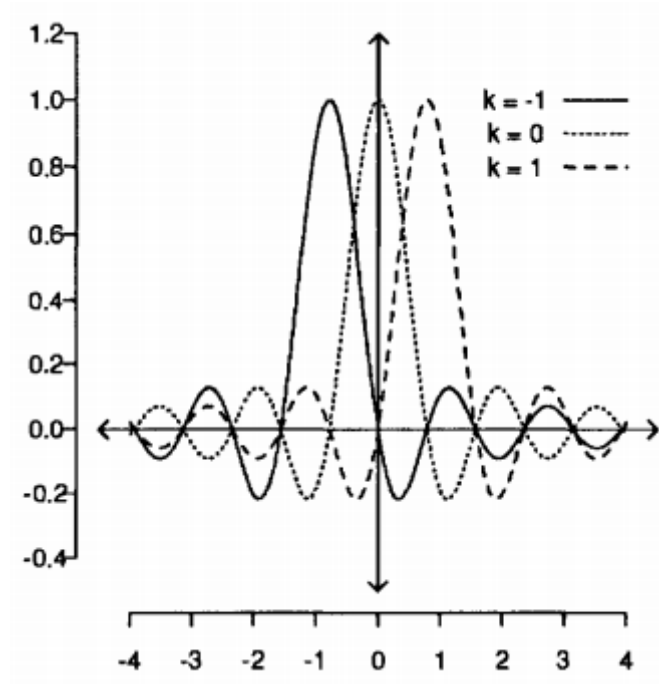
Teorem 5.3 Eğer $f \in B(h)$ ise o zaman her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = C(f, h)(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) S(k, h)(z) \quad (5.7)$$

Burada

$$S(k, h)(z) \equiv \sin c\left(\frac{z-kh}{h}\right) \quad (5.8)$$

dir [6].



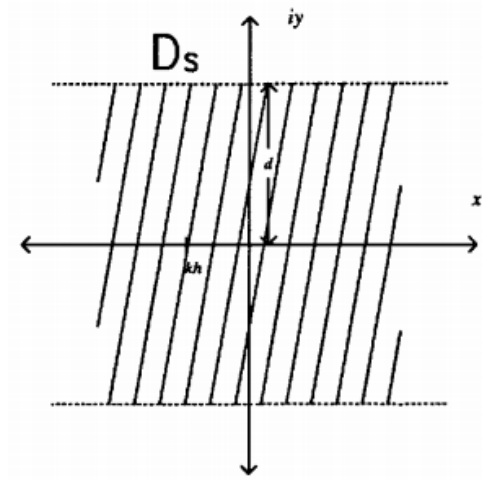
Şekil 5. 1 Sinc bazları ($S(k, h)(x)$, $k = -1, 0, 1$ ve $h = \pi/4$)

5.1.2 Yaklaşık İnterpolasyon ve Quadrature

Tanım 5.4 $d > 0$ olmak üzere

$$D_S \equiv \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \quad |y| < d\} \quad (5.9)$$

olsun.



Şekil 5. 2 Genişliği $2d$ olan D_s sonsuz şerit bölgesi, $d > 0$

$B^p(D_s)$ ise D_s 'de tanımlı analitik fonksiyonların kümesi olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\int_{-d}^d |f(t+iy)dy| = O(|t|^a), \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad 0 \leq a < 1 \quad (5.10)$$

ve

$$N^p(f, D_s) \equiv \lim_{y \rightarrow d^-} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t+iy)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-iy)|^p dt \right)^{1/p} \right\} < \infty \quad (5.11)$$

$p=1$ için $N(f, D_s) = N^1(f, D_s)$ ve $B(D_s) = B^1(D_s)$ olsun [6].

Teorem 5.4 Eğer $f \in B^p(D_s)$ ($p=1$ veya 2) ve $h > 0$ ise o zaman,

$$\begin{aligned} f(x) - C(f, h)(x) &= f(x) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \operatorname{sinc}\left(\frac{x-kh}{h}\right) \\ &\equiv \varepsilon(x) \\ &= S_h(x) I(f, h)(x) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Burada

$$S_h(x) = \frac{\sin(\pi x/h)}{2\pi i} \quad (5.13)$$

ve

$$I(f, h)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{F(x, t - id^-)}{\sin(\pi(t - id^-)/h)} - \frac{F(x, t + id^-)}{\sin(\pi(t + id^-)/h)} \right\} dt$$

$$F(s, u \pm iv) = \frac{f(u \pm iv)}{(u - s \pm iv)}$$

Ayrıca eğer $f \in B^p(D_s)$ ($p=1$ ya da 2) ise o zaman

$$\|f - C(f, h)\|_{\infty} \leq \frac{N^p(f, D_s)}{2(\pi d)^{1/p} \sinh(\pi d/h)} = O(e^{-\pi d/h}) \quad (5.14)$$

Teorem 5.5 $f \in B^p(D_s)$ ($p=1$ ya da 2) ve α, β ve C pozitif sabitler olmak üzere

$$|f(x)| \leq C \begin{cases} \exp(-\alpha|x|), & x \in (-\infty, 0) \\ \exp(-\beta|x|), & x \in [0, \infty) \end{cases} \quad (5.15)$$

şeklinde yazılır.

$$N = \left\lceil \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta} M + 1 \right\rfloor \right\rceil$$

ve

$$h = (\pi d / (\alpha M))^{1/2} \leq (2\pi d) / (\ln 2)$$

seçilirse

$$\|f - C_{M,N}(f, h)\|_{\infty} \leq K_1 M^{1/2} \exp(-(\pi d \alpha M)^{1/2}) \quad (5.16)$$

bulunur. Burada K_1 , f , p ve d ye bağlı bir sabittir [6].

Teorem 5.6 Eğer $f \in B(D_s)$ ve $h > 0$ ise o zaman

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \equiv \eta \quad (5.17)$$

Burada

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx$$

$$= \frac{e^{-\pi d/h}}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(t+id^-) e^{i\pi t/h}}{\sin(\pi(t+id^-)/h)} - \frac{f(t-id^-) e^{-i\pi t/h}}{\sin(\pi(t-id^-)/h)} \right] dt$$

Bu integral şu şekilde sınırlandırılabilir [6].

$$|\eta| \leq \frac{N(f, D_s)}{2 \sinh(\pi d/h)} e^{-\pi d/h}$$

5.2 Γ üzerinde Nümerik Metodlar

5.2.1 Γ Üzerinde İnterpolasyon

$$I = \int_a^b F(u) du$$

integraline

$$\psi: (-\infty, \infty) \rightarrow [a, b]$$

dönüşümü yardımıyla yaklaşılsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$I = \int_a^b F(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi(x)) \psi'(x) dx$$

$$= h \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\psi(kh)) \psi'(kh) + \eta$$

Bu eşitliği elde edebilmek için (5.17) de verilen trapez kuralından faydalanılmıştır. Eğer $f = (F \circ \psi) \cdot \psi'$ fonksiyonuna Teorem 5.6 nin hipotezi uygulandığında iyi sonuçlar elde edilecektir. Bu işlemleri uygulayabilmek için burada Tanım 6.4 den $f \in B(D_s)$ fonksiyonunun D_s bölgesinde analitik olması gerekmektedir [6].

Tanım 5.5 D , $w = u + iv$ düzleminde $a \neq b$ sınır noktaları ile verilmiş bir bölge olsun. $z = \phi(w)$ dönüşümü ise $\varphi: D \rightarrow D_s$ birebir, konform dönüşüm olsun. Burada

$$D_s \equiv \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, |y| < d\} \quad (5.18)$$

ve $\phi(a) = -\infty$, $\phi(b) = \infty$ olur. Şimdi de $w = \psi(z)$ yi ϕ dönüşümünün tersi olarak ele alalım. Yani

$$\Gamma \equiv \{w \in \mathbb{C} : w = \psi(x), x \in \mathbb{R}\} = \psi(\mathbb{R}) \quad (5.19)$$

olsun. Ayrıca $B(D)$, D bölgesinde analitik olan fonksiyonların ailesi olsun. O halde $0 \leq a < 1$ aralığında aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

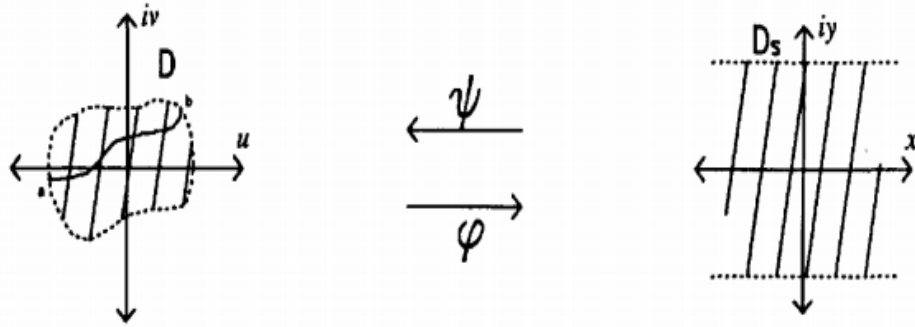
$$\int_{\psi(x+L)} |F(w)dw| = O(|x|^a), \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (5.20)$$

Burada $L = \{iy : |y| < d\}$ ve γ ise D bölgesinde basit kapalı çevredir.

$$N(F, D) \equiv \lim_{\gamma \rightarrow \partial D} \int_{\gamma} |F(w)dw| < \infty \quad (5.21)$$

Ayrıca $h > 0$ için düğüm noktalarını şu şekilde tanımlayalım [6].

$$w_k = \psi(kh), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.22)$$



Şekil 5.3 D ve D_s bölgeleri arasındaki konform dönüşüm

Teorem 5.7 $F \in B(D)$, $h > 0$ ve $\phi : D \rightarrow D_s$ birebir ve konform bir dönüşüm olsun.

Eğer $\psi = \phi^{-1}$ ve $w_k = \psi(kh)$ ise o zaman her $\xi \in \Gamma = \psi(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \varepsilon(F)(\xi) &\equiv \frac{F(\xi)}{\phi'(\xi)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(w_k)}{\phi'(w_k)} \sin c\left(\frac{\phi(\xi) - kh}{h}\right) \\ &= \frac{\sin(\pi\phi(\xi)/h)}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow \partial D} \int_{\gamma} \frac{F(w)dw}{(\phi(w) - \phi(\xi)) \sin(\pi\phi(w)/h)} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca ,

$$\|\varepsilon(F)\|_{\infty} \leq \frac{N(F, D)}{2\pi d \sinh(\pi d / h)}$$

Sonuç 5.2 $F \in B(D)$, $h > 0$ ve $\phi: D \rightarrow D_s$ birebir ve konform bir dönüşüm, $\psi = \phi^{-1}$, $w_k = \psi(kh)$ ve $\Gamma = \psi(\mathbb{R})$ olsun. Ayrıca α, β ve C pozitif sabitlerdir öyle ki

$$\left| \frac{F(\xi)}{\phi'(\xi)} \right| \leq C \begin{cases} \exp(-\alpha |\phi(\xi)|), & \xi \in \Gamma_a \\ \exp(-\beta |\phi(\xi)|), & \xi \in \Gamma_b \end{cases}$$

olur. Burada

$$\Gamma_a \equiv \{\xi \in \Gamma : \phi(\xi) = x \in (-\infty, 0)\}$$

ve

$$\Gamma_b \equiv \{\xi \in \Gamma : \phi(\xi) = x \in [0, \infty)\}$$

Eğer

$$N = \left\lceil \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta} M + 1 \right\rfloor \right\rceil$$

ve

$$h = \left(\frac{\pi d}{\alpha M} \right)^{1/2} \leq \frac{2\pi d}{\ln 2}$$

seçilirse o zaman her $\xi \in \Gamma$ için hata

$$\varepsilon_{M,N}(F)(\xi) \equiv \frac{F(\xi)}{\phi'(\xi)} - \sum_{k=-M}^N \frac{F(w_k)}{\phi'(w_k)} \sin c\left(\frac{\phi(\xi) - kh}{h}\right)$$

aşağıdaki gibi sınırlandırılır:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{M,N}(F)\|_{\infty} &\equiv \sup_{\xi \in \Gamma} |\varepsilon_{M,N}(F)(\xi)| \\ &\leq KM^{1/2} \exp\left(-(\pi d \alpha M)^{1/2}\right) \end{aligned}$$

Burada K, F, d, ϕ ve D ye bağılı bir sabittir [6].

5.2.2 Γ Üzerinde Quadrature

Teorem 5.8 $F \in B(D)$, $h > 0$ ve $\phi: D \rightarrow D_S$ birebir ve konform bir dönüşüm, $\psi = \phi^{-1}$, $w_k = \psi(kh)$ ve $\Gamma = \psi(\mathbb{R})$ olsun. O halde,

$$\eta(F) \equiv \int_{\Gamma} F(\xi) d\xi - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(w_k)}{\phi'(w_k)} = \frac{i}{2} \lim_{\gamma \rightarrow \partial D} \int_{\gamma} \frac{F(w) \kappa(\phi, h)(w)}{\sin(\pi \phi(w)/h)} dw \quad (5.25)$$

Burada

$$\kappa(\phi, h)(w) \equiv \exp \left[\frac{i\pi \phi(w)}{h} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\phi(w))) \right] \quad (5.26)$$

Ayrıca

$$|\eta(F)| \leq \frac{N(F, D)}{2 \sinh(\pi d/h)} e^{-\pi d/h}$$

olur.

Teorem 5.9 $F \in B(D)$, $h > 0$ ve $\phi: D \rightarrow D_S$ birebir ve konform bir dönüşüm, $\psi = \phi^{-1}$, $w_k = \psi(kh)$ ve $\Gamma = \psi(\mathbb{R})$ olsun. Ayrıca α, β ve C pozitif sabitlerdir öyle ki

$$\left| \frac{F(\xi)}{\phi'(\xi)} \right| \leq C \begin{cases} \exp(-\alpha |\phi(\xi)|), & \xi \in \Gamma_a \\ \exp(-\beta |\phi(\xi)|), & \xi \in \Gamma_b \end{cases}$$

Burada

$$\Gamma_a \equiv \{\xi \in \Gamma : \phi(\xi) = x \in (-\infty, 0)\}$$

ve

$$\Gamma_b \equiv \{\xi \in \Gamma : \phi(\xi) = x \in [0, \infty)\}$$

Eğer

$$N = \left\lceil \frac{\alpha}{\beta} M + 1 \right\rceil$$

ve

$$h = \left(\frac{2\pi d}{\alpha M} \right)^{1/2} \leq \frac{2\pi d}{\ln 2}$$

seçilirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$T_{M,N}(F, h, \phi) \equiv h \sum_{k=-M}^N \frac{F(w_k)}{\phi'(w_k)}$$

O halde

$$\eta_{M,N}(F) \equiv \int_{\Gamma} F(\xi) d\xi - T_{M,N}(F, h, \phi)$$

aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$|\eta_{M,N}(F)| \leq K \exp\left(-(2\pi d \alpha M)^{1/2}\right)$$

Burada K , F , d , ϕ ve D ye bağlı bir sabittir [6].

5.2.3 Γ Üzerinde Türev

Teorem 5.10 $\phi'F/g \in B(D)$, $h > 0$, $\phi: D \rightarrow D_S$ birebir ve konform bir dönüşüm,

$\psi = \phi^{-1}$ ve $\Gamma = \psi(\mathbb{R})$ olsun. Ayrıca K bir pozitif sabittir öyle ki her $\xi \in \Gamma$ için

$$\left\| \frac{d^m}{d\xi^m} \left[\frac{g(\xi) \sin(\pi \phi(\xi)/h)}{2\pi i (\phi(w) - \phi(\xi))} \right] \right\|_{w \in \partial D} \leq K h^{-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n)$$

elde edilir. Her $\xi \in \Gamma$ için

$$\frac{d^m}{d\xi^m} [g(\xi) \varepsilon(\phi'F/g)(\xi)] = \frac{d^m F(\xi)}{d\xi^m} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(w_k)}{g(w_k)} \frac{d^m}{d\xi^m} \left[g(\xi) \sin c \left(\frac{\phi(\xi) - kh}{h} \right) \right]$$

olsun. O halde her $m = 0, 1, 2, \dots, n$ için

$$\left\| \frac{d^m}{d\xi^m} [g \varepsilon(\phi'F/g)] \right\|_{\infty} \leq \frac{KN(\phi'F/g, D)}{h^m \sinh(\pi d/h)}$$

Teorem 5.11 $\phi'F/g \in B(D)$, $h > 0$, $\phi: D \rightarrow D_\zeta$ birebir ve konform bir dönüşüm,

$\psi = \phi^{-1}$ ve $\Gamma = \psi(\mathbb{R})$ olsun. Ayrıca K, L bir pozitif sabittir öyle ki her $\xi \in \Gamma$ için

$$\left| \frac{d^m}{d\xi^m} \left[\frac{g(\xi) \sin(\pi\phi(\xi)/h)}{2\pi i(\phi(w) - \phi(\xi))} \right] \right|_{w \in \partial D} \leq Kh^{-m}$$

ve

$$\left| \frac{d^m}{d\xi^m} \left[g(\xi) \operatorname{sinc} \left(\frac{\phi(\xi) - kh}{h} \right) \right] \right| \leq Lh^{-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n)$$

elde edilir. Son olarak α, β ve C pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki eşitliği yazılabilir.

$$\left| \frac{F(\xi)}{g(\xi)} \right| \leq C \begin{cases} \exp(-\alpha|\phi(\xi)|), & \xi \in \Gamma_a \\ \exp(-\beta|\phi(\xi)|), & \xi \in \Gamma_b \end{cases}$$

Burada

$$\Gamma_a \equiv \{\xi \in \Gamma : \phi(\xi) = x \in (-\infty, 0)\}$$

ve

$$\Gamma_b \equiv \{\xi \in \Gamma : \phi(\xi) = x \in [0, \infty)\}$$

olur. Eğer

$$N = \left\lceil \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta} M + 1 \right\rfloor \right\rceil$$

ve

$$h = \left(\frac{\pi d}{\alpha M} \right)^{1/2} \leq \frac{2\pi d}{\ln 2}$$

seçilirse o zaman her $\xi \in \Gamma$ için

$$\frac{d^m}{d\xi^m} [g(\xi) \varepsilon_{M,N}(\phi'F/g)(\xi)] = \frac{d^m F(\xi)}{d\xi^m} - \sum_{k=-M}^N \frac{F(w_k)}{g(w_k)} \frac{d^m}{d\xi^m} \left[g(\xi) \operatorname{sinc} \left(\frac{\phi(\xi) - kh}{h} \right) \right]$$

olsun. O halde

$$\left\| \frac{d^m}{d\xi^m} [g \varepsilon_{M,N} (\phi' F / g)] \right\|_{\infty} \leq K M^{(m+1)^2} \exp\left(-(\pi d \alpha M)^{1/2}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n)$$

elde edilir [6].

5.3 Sinc-Galerkin Yöntemi

$$\begin{aligned} Lu(x) &\equiv -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

şeklinde verilen diferansiyel denklemini Hilbert uzayında düşünelim ve çözümün $u \in H$ olduğunu varsayalım. $\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ise Hilbert uzayında lineer bağımsız bir küme ve $H^N = \text{span}\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ olsun. $u \in H$ çözümünün lineer kombinasyonu $u_N \in H_N$ yaklaşımını tanımlayalım.

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_k(x) \quad (5.28)$$

Burada $\{c_k\}$ katsayıları belirlenecektir. Bunun için bir R_N kalan fonksiyonu tanımlayalım.

$$R_N(x) = (Lu_N - f)(x) \quad (5.29)$$

Daha sonra R_N ' e her biri kendisiyle ortogonal olacak şekilde $\chi_j \in H^N$ elemanlarıyla Hilbert uzayında iç çarpım işlemini uygulayalım. Yani,

$$(R_N, \chi_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (5.30)$$

Buradan c_k katsayılarının belirlenmesi için aşağıdaki işlem uygulanır.

$$\sum_{k=1}^N (L\chi_k, \chi_j) c_k = (f, \chi_j), \quad 1 \leq j \leq N \quad (5.31)$$

Dikkat edilirse eğer $\{\chi_k\}$ (5.27) de verilen sınır şartlarını sağlamazsa, yaklaşık çözümün de sınır şartlarını sağlaması düşünülemez. Bu yüzden Galerkin metodunda seçilen baz fonksiyonlarının (5.27) de verilen sınır şartlarını sağlamasına dikkat edilmelidir.

(5.27) deki problemin Galerkin metoduyla çözümünü Hilbert uzayı üzerindeki iç çarpıma ve $\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty}$ fonksiyonlar kümesinin seçimine bağlıdır. İç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx \quad (5.32)$$

Burada w ağırlık fonksiyonudur. Bu durumda (5.31) denkleminin sol tarafındaki matris elemanları şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} (L\chi_k, \chi_j) &= \int_a^b L\chi_k(x) \chi_j(x) w(x) dx \\ &= -\int_a^b \chi_k''(x) \chi_j(x) w(x) dx + \int_a^b p(x) \chi_k'(x) \chi_j(x) w(x) dx \\ &\quad + \int_a^b q(x) \chi_k(x) \chi_j(x) w(x) dx \end{aligned}$$

(5.31) denkleminin sağ tarafındaki matris elemanları ise;

$$(f, \chi_j) = \int_a^b f(x) \chi_j(x) w(x) dx$$

şeklinde yazılır.

Bu yüzden (5.31) de verilen ayrık sistemin kurulması integrallerin yaklaşımına bağlıdır. Sinc-Galerkin metodu için bu integraller quadrature yardımıyla hesaplanabilir [6].

5.3.1 İç Çarpım Yaklaşımları

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ ve ϕ , (a, b) aralığında birebir ve konform bir dönüşüm olsun. O halde aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$\begin{aligned} \chi_j(x) &\equiv S(j, h) \circ \phi(x) \\ &\equiv \sin c \left[\frac{\phi(x) - jh}{h} \right], \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Yukarıdaki eşitliklerden yararlanarak (5.30) da verilen kalan fonksiyonunun ortogonalizasyonu şu şekilde ifade edilir:

$$(Lu_m - f, S(j, h) \circ \phi) = 0 \quad (5.34)$$

Burada,

$$u_m(x) = \sum_{k=-M}^N u_k S(k, h) \circ \phi(x), \quad m = M + N + 1 \quad (5.35)$$

Kalan fonksiyonunun bu ortogonalizasyonu

$$(Lu - f, S(j, h) \circ \phi) = 0 \quad (5.36)$$

iç çarpımında (5.34) de verilen iç çarpımdan daha iyi sonuçlar verir.

Teorem 5.9 da verilen quadrature kuralı her bir integrale yaklaşmak için kullanıldığında (5.34) den elde edilen ayrık sistemle (5.36) dan elde edilen sistem aynı olur.

İç çarpımlara quadrature kuralını doğrudan uygulamak yerine, Sinc-Galerkin metodu aşağıdaki gibi uygulanır.

$$\begin{aligned} (pu', S(j, h) \circ \phi) &= \int_a^b p(x) u'(x) [S(j, h) \circ \phi(x)] w(x) dx \\ &= B_{T_1} - \int_a^b u(x) (p [S(j, h) \circ \phi] w)'(x) dx \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$B_{T_1} = (up [S(j, h) \circ \phi] w)(x) \Big|_b^a \quad (5.38)$$

Burada w ağırlık fonksiyonunun seçimi B_{T_1} in yok edilmesine bağlıdır.

$$\begin{aligned} u_j(u_m(x_j)) &= u_j \simeq u(x_j), \quad x_j = \phi^{-1}(jh) \\ (u'', S(j, h) \circ \phi) &= \int_a^b u''(x) [S(j, h) \circ \phi(x)] w(x) dx \\ &= B_{T_2} + \int_a^b u(x) ([S(j, h) \circ \phi] w)''(x) dx \end{aligned} \quad (5.39)$$

Burada,

$$B_{T_2} = (u' [S(j, h) \circ \phi] w)(x) \Big|_a^b - (u([S(j, h) \circ \phi] w)')(x) \Big|_a^b \quad (5.40)$$

(5.37) ve (5.39) da verilen integrallerin yaklaşımı metodu Teorem 5.8 de verilen quadrature kuralıyla başlar. Bu yaklaşımları hesaplamak için aşağıdaki eşitliğin verilmesi gerekir.

$$\delta_{jk}^{(p)} \equiv h^p \frac{d^p}{d\phi^p} [S(j, h) \circ \phi(x)] \Big|_{x=x_k}$$

Burada $x_k = \phi^{-1}(kh) = \psi(kh)$ dir. Açık olarak, bu nicelikler ($p=0,1,2,\dots$) aşağıdaki teoremden verilecektir [6].

Teorem 5.12 $\phi: D \rightarrow D_s$ basit bağlantılı, birebir ve konform bir dönüşüm olsun. O halde,

$$\delta_{jk}^{(0)} \equiv [S(j, h) \circ \phi(x)] \Big|_{x=x_k} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\delta_{jk}^{(1)} \equiv h \frac{d}{d\phi} [S(j, h) \circ \phi(x)] \Big|_{x=x_k} = \begin{cases} 0, & j = k \\ \frac{(-1)^{k-j}}{k-j}, & j \neq k \end{cases} \quad (5.42)$$

ve

$$\delta_{jk}^{(2)} \equiv h^2 \frac{d^2}{d\phi^2} [S(j, h) \circ \phi(x)] \Big|_{x=x_k} = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3}, & j = k \\ -\frac{2(-1)^{k-j}}{(k-j)^2}, & j \neq k \end{cases} \quad (5.43)$$

ve

$$\sin c\left(\frac{x-jh}{h}\right) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-ixt} e^{ijht} dt$$

olduğunu hatırlatalım. Böylece aşağıda verilen genel ifadelerle ulaşılmış olur.

$$\frac{d^{4n}}{dx^{4n}} \left[\sin c\left(\frac{x-jh}{h}\right) \right] = \frac{h}{\pi} \int_0^{\pi/h} t^{4n} \cos[t(x-jh)] dt, \quad (5.44)$$

$$\frac{d^{4n+1}}{dx^{4n+1}} \left[\sin c\left(\frac{x-jh}{h}\right) \right] = -\frac{h}{\pi} \int_0^{\pi/h} t^{4n+1} \sin[t(x-jh)] dt, \quad (5.45)$$

$$\frac{d^{4n+2}}{dx^{4n+2}} \left[\sin c \left(\frac{x-jh}{h} \right) \right] = -\frac{h}{\pi} \int_0^{\pi/h} t^{4n+2} \cos[t(x-jh)] dt, \quad (5.46)$$

$$\frac{d^{4n+3}}{dx^{4n+3}} \left[\sin c \left(\frac{x-jh}{h} \right) \right] = \frac{h}{\pi} \int_0^{\pi/h} t^{4n+3} \sin[t(x-jh)] dt, \quad (5.47)$$

$n = 0$ için (5.44)-(5.47) ifadeleri bize (5.41)-(5.43) u verir [6].

Teorem 5.13 $\phi: D \rightarrow D_S$ basit bağlantılı, birebir ve konform bir dönüşüm olsun.

$d, h > 0$ için aşağıdaki ifadeler verilebilir:

$$\left\| \frac{S(j, h) \circ \phi(w)}{\sin(\pi \phi(w)/h)} \right\|_{w \in \partial D} \leq \frac{h}{\pi d} \equiv C_0(h, d) \quad (5.48)$$

$$\left\| \frac{\frac{d}{d\phi} [S(j, h) \circ \phi(w)]}{\sin(\pi \phi(w)/h)} \right\|_{w \in \partial D} \leq \frac{\pi d + h \tanh(\pi d/h)}{\pi d^2 \tanh(\pi d/h)} \equiv C_1(h, d) \quad (5.49)$$

ve

$$\left\| \frac{\frac{d^2}{d\phi^2} [S(j, h) \circ \phi(w)]}{\sin(\pi \phi(w)/h)} \right\|_{w \in \partial D} \leq \frac{2}{d} C_1(h, d) + \frac{\pi}{hd} \equiv C_2(h, d) \quad (5.50)$$

Ayrıca $p = 0, 1, 2, \dots$ için

$$C_p(h, d) = O(h^{1-p}), \quad h \rightarrow 0$$

.

Teorem 5.14 $\phi: D \rightarrow D_S$ basit bağlantılı, birebir ve konform bir dönüşümdür.

$\phi(a) = -\infty$, $\phi(b) = +\infty$ olduğunu varsayalım ve $x_k = \phi^{-1}(kh)$ olsun.

a) $v = f$ yada qu için $vw \in B(D)$ olsun. O halde,

$$\left| \int_a^b (vw [S(j, h) \circ \phi])(x) dx - h \left(\frac{vw}{\phi'} \right) (x_j) \right| \leq \frac{C_0(h, d)}{2} N(vw, D) e^{-\pi d/h} \quad (5.51)$$

b) $B_{T_1} = \left(up \left[S(j, h) \circ \phi \right] w \right) (x) \Big|_a^b$ ve $u \left(p \left[S(j, h) \circ \phi \right] w \right)' \in B(D)$ olmak üzere

$B_{T_1} = 0$ olsun. O halde,

$$\left| \int_a^b \left(pu' \left[S(j, h) \circ \phi \right] w \right) (x) dx + h \sum_{k=-\infty}^{\infty} (upw)(x_k) \frac{\delta_{jk}^{(1)}}{h} + h \left(\frac{u(pw)'}{\phi'} \right) (x_j) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[C_1(h, d) N(upw\phi', D) + C_0(h, d) N(u(pw)', D) \right] e^{-\pi d/h} \quad (5.52)$$

c) $B_{T_2} = \left(u' \left[S(j, h) \circ \phi \right] w \right) (x) \Big|_a^b - \left(u \left(\left[S(j, h) \circ \phi \right] w \right)' \right) (x) \Big|_a^b$ ve

$u \left(\left[S(j, h) \circ \phi \right] w \right)'' \in B(D)$ olmak üzere, $B_{T_2} = 0$ olsun. O halde,

$$\left| \int_a^b \left(u'' \left[S(j, h) \circ \phi \right] w \right) (x) dx - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(x_k) \left[\frac{\delta_{jk}^{(2)}}{h^2} (\phi'w)(x_k) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\delta_{jk}^{(1)}}{h} \left(\frac{\phi''}{\phi'} w + 2w' \right) (x_k) \right] - h \left(\frac{w''u}{\phi'} \right) (x_j) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[C_0(h, d) N(uw'', D) + C_1(h, d) N(u[\phi''w + 2\phi'w'], D) \right.$$

$$\left. + C_2(h, d) N(u(\phi')^2 w, D) \right] e^{-\pi d/h} \quad (5.53)$$

Teorem 5.15 $\phi: D \rightarrow D_s$ basit bağlantılı, birebir ve konform bir dönüşüm olsun.

$\phi(a) = -\infty$ ve $\phi(b) = +\infty$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $x_k = \phi^{-1}(kh)$ olsun. α, β ve

K pozitif sabitler olmak üzere,

$$|f(x)| \leq K \begin{cases} \exp(-\alpha|\phi(x)|), & x \in \Gamma_a \\ \exp(-\beta|\phi(x)|), & x \in \Gamma_b \end{cases} \quad (5.54)$$

Burada $f = upw$, $u\phi'w$, $u \left[\frac{\phi''}{\phi'} w + 2w' \right]$ dir

$$\Gamma_a \equiv \{\xi \in \Gamma : \phi(\xi) = x \in (-\infty, 0)\}$$

ve

$$\Gamma_b \equiv \{\xi \in \Gamma : \phi(\xi) = x \in [0, \infty)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca

$$N = \left\lceil \frac{\alpha}{\beta} M + 1 \right\rceil$$

ve

$$h = \left(\frac{\pi d}{\alpha M} \right)^{1/2}$$

şeklinde seçilirse;

a) $v = f$ ya da $v = qu$ için $vw \in B(D)$ olsun. O halde,

$$\left| \int_a^b (vw[S(j, h) \circ \phi])(x) dx - h \left(\frac{vw}{\phi'} \right) (x_j) \right| \leq L_0 M^{-1/2} \exp(-(\pi d \alpha M)^{1/2}) \quad (5.55)$$

Burada L_0 ; v, w ve d ye bağlı bir sabittir.

b) $u(p[S(j, h) \circ \phi]w)' \in B(D)$ ve $B_{T_1} = 0$ olsun. O halde,

$$\left| \int_a^b (pu'[S(j, h) \circ \phi]w)(x) dx + h \sum_{k=-M}^N (upw)(x_k) \frac{\delta_{jk}^{(1)}}{h} + h \left(\frac{u(pw)'}{\phi'} \right) (x_j) \right| \leq L_1 M^{1/2} \exp(-(\pi d \alpha M)^{1/2})$$

Burada L_1 ; u, p, w, ϕ ve d ye bağlı bir sabittir.

c) $u([S(j, h) \circ \phi]w)'' \in B(D)$ ve $B_{T_2} = 0$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b \left(u'' [S(j, h) \circ \phi] w \right) (x) dx - h \sum_{k=-M}^N u(x_k) \left[\frac{\delta_{jk}^{(2)}}{h^2} (\phi' w)(x_k) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\delta_{jk}^{(1)}}{h} \left(\frac{\phi''}{\phi'} w + 2w' \right) (x_k) \right] - h \left(\frac{w'' u}{\phi'} \right) (x_j) \right| \\
& \leq L_2 M \exp \left(-(\pi d \alpha M)^{1/2} \right)
\end{aligned}$$

Burada L_2 ; u, w, ϕ ve d ye bağılı bir sabittir.

5.3.2 Ayrık Sistem Kurma ve Hata

Teorem 5.15 de elde edilen sonuçlar (5.27) de verilen problem için ifade edilen ayrık Sinc-Galerkin sistemine olan bütün yaklaşımları içerir.

$j = -M, \dots, 0, \dots, N$ için Galerkin denklemleri;

$$\begin{aligned}
0 &= (Lu - f, S(j, h) \circ \phi) \\
&= (u'', S(j, h) \circ \phi) + (pu', S(j, h) \circ \phi) \\
&\quad + (qu, S(j, h) \circ \phi) - (f, S(j, h) \circ \phi)
\end{aligned}$$

Teorem 5.15 den iç çarpımların yaklaşımı aşağıdaki gibi parçalara ayrılabilir:

$$\begin{aligned}
& \left| h \sum_{k=-M}^N u(x_k) \left[\frac{\delta_{jk}^{(2)}}{h^2} (\phi' w)(x_k) + \frac{\delta_{jk}^{(1)}}{h} \left(\frac{\phi''}{\phi'} w + 2w' \right) (x_k) \right] \right. \\
& \quad \left. + h \left(\frac{w'' u}{\phi'} \right) (x_j) + h \sum_{k=-M}^N (upw)(x_k) \frac{\delta_{jk}^{(1)}}{h} \right. \\
& \quad \left. + h \left(\frac{u(pw)'}{\phi'} \right) (x_j) - h \left(\frac{qw u}{\phi'} \right) (x_j) + h \left(\frac{fw}{\phi'} \right) (x_j) \right| \\
& \leq \left| - (u'', [S(j, h) \circ \phi]) + \left\{ h \sum_{k=-M}^N u(x_k) \left[\frac{\delta_{jk}^{(2)}}{h^2} (\phi' w)(x_k) \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| + \frac{\delta_{jk}^{(1)}}{h} \left(\frac{\phi''}{\phi'} w + 2w' \right) (x_k) \right] + h \left(\frac{w'' u}{\phi'} \right) (x_j) \right\} \\
& + \left| \left(Pu', [S(j, h) \circ \phi] \right) + \left\{ h \sum_{k=-M}^N (upw)(x_k) \frac{\delta_{jk}^{(1)}}{h} + h \left(\frac{u(pw)'}{\phi'} \right) (x_j) \right\} \right| \\
& + \left| \left(qu, [S(j, h) \circ \phi] \right) - h \left(\frac{qwu}{\phi'} \right) (x_j) \right| + \left| \left(-f, [S(j, h) \circ \phi] \right) + h \left(\frac{fw}{\phi'} \right) (x_j) \right| \\
& \leq (L_2 M + L_1 M^{1/2} + L_0 M^{-1/2} + L_0 M^{-1/2}) e^{-(\pi d \alpha M)^{1/2}} \\
& \leq (L_2 + L_1 + 2L_0) M e^{-(\pi d \alpha M)^{1/2}} \\
& \equiv C M e^{-(\pi d \alpha M)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Hata terimi olan $O\left(M \exp\left(-(\pi d \alpha M)^{1/2}\right)\right)$ silindiğinde, $u(x_k)$ yerine u_k yazıldığında

ve $(-h)$ ile bölündüğünde ayrık sinc sistemi şu şekli alır:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-M}^N \left[-\frac{1}{h^2} \delta_{jk}^{(2)} \phi'(x_k) w(x_k) - \frac{1}{h} \delta_{jk}^{(1)} \left(\frac{\phi''(x_k) w(x_k)}{\phi'(x_k)} + 2w'(x_k) \right) \right] u_k \\
& - \frac{w''(x_j)}{\phi'(x_j)} u_j - \sum_{k=-M}^N \frac{1}{h} \delta_{jk}^{(1)} p(x_k) w(x_k) u_k \\
& - \frac{(pw)'(x_j)}{\phi'(x_j)} u_j + \frac{q(x_j) w(x_j)}{\phi'(x_j)} u_j = \frac{f(x_j) w(x_j)}{\phi'(x_j)} \tag{5.56}
\end{aligned}$$

Bu sistem vektörlerle tanımlanarak daha uygun bir şekilde ifade edilebilir.

$$\vec{u} \equiv (u_{-M}, u_{-M+1}, \dots, u_0, \dots, u_N)^T$$

ve

$$\vec{f} \equiv (f(x_{-M}), f(x_{-M+1}), \dots, f(x_0), \dots, f(x_N))^T$$

olsun. Buradan $m \times m$ ($m = M + N + 1$) boyutlu bir Toeplitz matris tanımlayalım.

$$I^{(l)} \equiv [\delta_{jk}^{(l)}], \quad l = 0, 1, 2$$

ve diagonal matris,

$$D(g) \equiv \begin{bmatrix} g(x_{-M}) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & g(x_0) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & g(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilsin. $I^{(0)}$ matrisi birim matristir. $I^{(1)}$ ve $I^{(2)}$ matrisleri de aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$I^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{(-1)^{m-1}}{m-1} \\ 1 & & & & \vdots \\ -\frac{1}{2} & & \ddots & & \frac{1}{2} \\ \vdots & & & & 1 \\ \frac{(-1)^m}{m-1} & \dots & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$I^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi^2}{3} & 2 & -\frac{2}{2^2} & \dots & -\frac{2(-1)^{m-1}}{(m-1)^2} \\ 2 & & & & \vdots \\ -\frac{2}{2^2} & & \ddots & & -\frac{2}{2^2} \\ \vdots & & & & 2 \\ -\frac{2(-1)^{m-1}}{(m-1)^2} & \dots & -\frac{2}{2^2} & 2 & -\frac{\pi^2}{3} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

(5.27) de verilen

$$Lu(x) = -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

problemi için (5.56) daki sistem şu şekli alır:

$$\left\{ -\frac{1}{h^2} I^{(2)} D(\phi' w) - \frac{1}{h} I^{(1)} D\left(\frac{\phi'' w}{\phi'} + 2w' + Pw\right) - D\left(\frac{w'' + (Pw)' - Qw}{\phi'}\right) \right\} \vec{u} = D\left(\frac{w}{\phi'}\right) \vec{F}$$

İlerde ortaya çıkacak gelişmelerden dolayı, katsayı matrisinin ikinci türevlere karşılık gelen kısmını ayırmak daha faydalı olacaktır. Yani,

$$A(w) \equiv -\frac{1}{h^2} I^{(2)} - \frac{1}{h} I^{(1)} D\left(\frac{\phi''}{(\phi')^2} + \frac{2w'}{\phi' w}\right) - D\left(\frac{w''}{(\phi')^2 w}\right) \quad (5.59)$$

(5.27) nin yaklaşık çözümünün,

$$u_m(x) = \sum_{k=-M}^N u_k S(k, h) \circ \phi(x), \quad m = M + N + 1 \quad (5.60)$$

olduğunu varsayarsak $\{u_k\}_{k=-M}^N$ nin belirlenmesi için ayrık sinc-Galerkin sistemi

$$\left\{ -\frac{1}{h^2} I^{(2)} D(\phi' w) - \frac{1}{h} I^{(1)} D\left(\frac{\phi'' w}{\phi'} + 2w' + Pw\right) - D\left(\frac{w'' + (Pw)' - Qw}{\phi'}\right) \right\} \vec{u} = D\left(\frac{w}{\phi'}\right) \vec{f}$$

gibi olur [6].

Ağırlık fonksiyonu,

$$w(x) = \frac{1}{\phi'(x)} \quad (5.61)$$

seçilirse

$$\left\{ -\frac{1}{h^2} I^{(2)} D(\phi' w) - \frac{1}{h} I^{(1)} D\left(\frac{\phi'' w}{\phi'} + 2w' + Pw\right) - D\left(\frac{w'' + (Pw)' - Qw}{\phi'}\right) \right\} \vec{u} = D\left(\frac{w}{\phi'}\right) \vec{f}$$

sistemi şu şekli alır:

$$\left\{ A\left(\frac{1}{\phi'}\right) - \frac{1}{h} I^{(1)} D\left(\frac{P}{\phi'}\right) + D\left(-\frac{1}{\phi'} \left(\frac{P}{\phi'}\right)' + \frac{Q}{(\phi')^2}\right) \right\} \vec{u} = D\left(\frac{1}{(\phi')^2}\right) \vec{f} \quad (5.62)$$

(5.59) dan,

$$A\left(\frac{1}{\phi'}\right) \equiv -\frac{1}{h^2} I^{(2)} + \frac{1}{h} I^{(1)} D\left(\frac{\phi''}{(\phi')^2}\right) + D\left(-\frac{1}{(\phi')}\left(\frac{1}{\phi'}\right)''\right) \quad (5.63)$$

bulunur. Burada $\frac{\phi''}{(\phi')^2} + 2\left(\frac{1}{\phi'}\right)' = -\frac{\phi''}{(\phi')^2}$ dir.

Ağırlık fonksiyonunun neden $w = \frac{1}{\phi'}$ seçildiğini görebilmek için $(0,1)$ aralığında problem (5.27) i düşünelim. Kabul edelim ki bu problem $x=0$ ve $x=1$ de regüler, singüler noktalara sahip olsun. (5.62) deki türevleri elde edebilmek için (5.38) ve (5.40) deki sınır koşullarının $(B_{T_j}, j=1,2)$ ortadan kalkması gerekir. Eğer $\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{(1-x)}\right)$ seçilerek bu sınır koşullarının hesaplanmasında kullanılırsa, o zaman problemin regüler, singüler noktalara sahip olması durumunda her bir sınır koşulunun sıfır olduğu görülecektir [6].

O halde α, β ve κ pozitif sabitler olmak üzere problemin regüler, singüler noktalara sahip olması durumunda (5.54) deki eşitsizliği şu şekilde yazabiliriz:

$$|p(x)u(x)| \leq \kappa \begin{cases} x^{\alpha-1}, & x \in (0, 1/2) \\ (1-x)^{\beta-1}, & x \in [1/2, 1) \end{cases}$$

Buradan

$$|u(x)| \leq \kappa \begin{cases} x^{\alpha}, & x \in (0, 1/2) \\ (1-x)^{\beta}, & x \in [1/2, 1) \end{cases} \quad (5.64)$$

bulunur.

Yukarıda anlatılanları bir tabloda özetleyelim:

Diferansiyel Denklem:

$$Lu(x) = -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

$w = \frac{1}{\phi'}$ için Sinc-Galerkin Sistemi:

$$A\left(\frac{1}{\phi'}\right) \equiv -\frac{1}{h^2} I^{(2)} + \frac{1}{h} I^{(1)} D\left(\frac{\phi''}{(\phi')^2}\right) + D\left(-\frac{1}{\phi'} \left(\frac{1}{\phi'}\right)''\right)$$

$$\left\{ A\left(\frac{1}{\phi'}\right) - \frac{1}{h} I^{(1)} D\left(\frac{p}{\phi'}\right) + D\left(-\frac{1}{\phi'} \left(\frac{p}{\phi'}\right)' + \frac{q}{(\phi')^2}\right) \right\} \vec{u} = D\left(\frac{1}{(\phi')^2}\right) \vec{f}$$

Çizelge 5. 1 (5.62) de verilen ayrık sistemin bileşenleri

a	b	ϕ	$\frac{\phi''}{(\phi')^2}$	$\frac{1}{\phi'}$	$-\frac{1}{\phi'} \left(\frac{1}{\phi'}\right)''$
a	b	$\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)$	$\frac{2x-a-b}{b-a}$	$\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}$	$\frac{2(x-a)(b-x)}{(b-a)^2}$
0	1	$\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$	$2x-1$	$x(1-x)$	$2x(1-x)$
0	∞	$\ln x$	-1	x	0
0	∞	$\ln(\sinh(x))$	$-\sec h^2(x)$	$\tanh(x)$	$\frac{2 \tanh^2(x)}{\cosh^2(x)}$
$-\infty$	∞	x	0	1	0
$-\infty$	∞	$\sinh^{-1}(x)$	$-\frac{x}{(x^2+1)^{1/2}}$	$(1+x^2)^{1/2}$	$-\frac{1}{x^2+1}$

ÖRNEKLER:

Örnek 5.1 Aşağıdaki Dirichlet tip sınır değer problemini $[0,1]$ aralığında çözünüz.

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{y(x)}{x(x-1)} = -\frac{72}{1045}x^2 + \frac{12}{1045}x^3 + \frac{1}{209}x^4 + \frac{1}{19}x^5$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Analitik çözümümüz aşağıdaki gibidir;

$$y(x) = \frac{1834592}{887331445}x + \frac{917296}{887331445}x^2 + \frac{458648}{887331445}x^3 - \frac{188072}{34571355} + \frac{14131}{29252685}x^5 + \frac{32}{278597}x^6 + \frac{1}{817}x^7$$

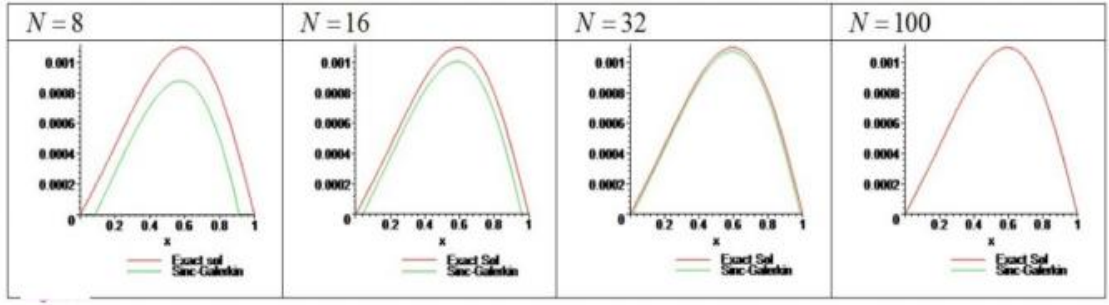
Ağırlık fonksiyonumuz $w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$, $\phi(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ seçildiğinde, ayrıca $d = \frac{\pi}{2}$,

$h = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ve $x_k = \frac{e^{kh}}{1+e^{kh}}$ ($N = 8, 16, 32, 100$) alındığında yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi

olur:

Çizelge 5. 2 $N = 100$ için Örnek 5.1 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Mutlak Hata
0.2	0.000450466988174113	0.000450466929764516	5.8409597E-11
0.4	0.000893654763766436	0.000893654689218907	7.4547529E-11
0.6	0.001096474957106920	0.001096474871619300	8.5487620E-11
0.8	0.000797109647979786	0.000797109574773798	7.3205988E-11



Şekil 5. 4 Örnek 5.1 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği

ÖRNEK 5.2 Aşağıdaki Dirichlet Tip Sınır-değer problemini $[0,1]$ aralığında çözünüz.

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} y(x) + \frac{y(x)}{x(x+1)} = -x^3$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Analitik çözümümüz aşağıdaki gibidir:

$$y(x) = \frac{1}{144} \frac{14 \ln(x+1)x + 14 \ln(x+1) - 14x + 6x^2 - 12x^2 \ln 2 + x^4 - 2x^4 \ln 2 + 9x^5 - 18x^5 \ln 2}{-1 + 2 \ln 2}$$

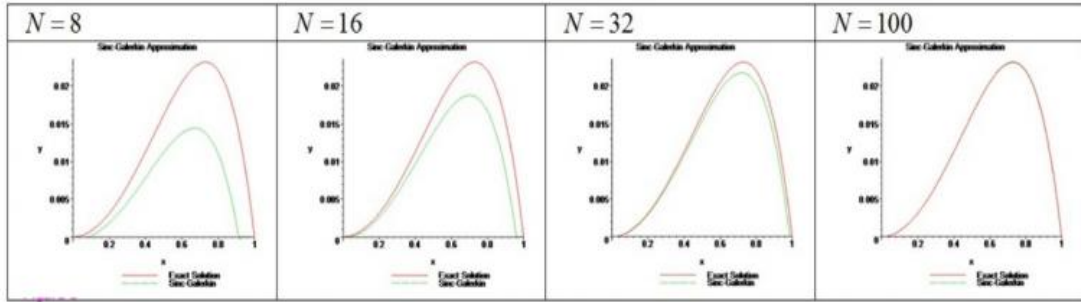
Burada $\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$, $d = \frac{\pi}{2}$, $h = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ve $x_k = \frac{e^{kh}}{1 + e^{kh}}$

alındığında;

($N = 8, 16, 32, 100$) için yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi olur:

Çizelge 5. 3 $N = 100$ için Örnek 5.2 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Mutlak Hata
0.2	0.00314134396980435	0.00314134378138869	1.88415721000000E-10
0.4	0.01128904694197050	0.01128904622846880	7.13501861405898E-10
0.6	0.02049668664764170	0.02049668582683820	8.20803253396388E-10
0.8	0.02205723725961330	0.02205723670616530	5.53448662985227E-10



Şekil 5. 5 Örnek 5.2 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği

ÖRNEK 5.3 Aşağıdaki Dirichlet Tip Sınır-değer problemini $[-1,4]$ aralığında çözünüz.

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - \frac{d}{dx} y(x) = -(x-4)$$

$$y(-1) = 0, \quad y(4) = 0$$

Analitik çözümümüz aşağıdaki gibidir:

$$y(x) = \frac{x^2 e^4 - x^2 e^{-1} + 15e^x - 6xe^4 + 6xe^{-1} - 7e^4 - 8e^{-1}}{2(e^4 - e^{-1})}$$

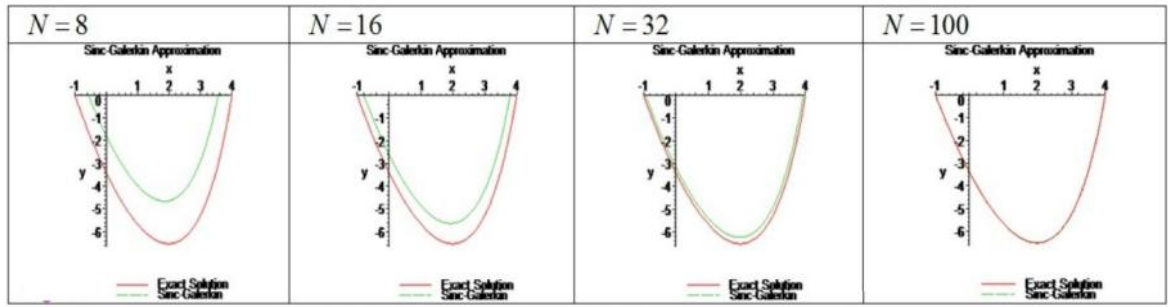
Burada $\phi(x) = \ln\left(\frac{x+1}{4-x}\right)$, $w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$, $d = \frac{\pi}{2}$, $h = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ve $x_k = \frac{-1+4e^{kh}}{1+e^{kh}}$

alındığında;

($N = 8, 16, 32, 100$) için yaklaşık çözüm aşağıdaki gibidir:

Çizelge 5. 4 $N = 100$ için Örnek 5.3 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Mutlak Hata
-0.8	-0.768735600700030	-0.768735573640717	2.7059313E-8
-0.6	-1.494977232326020	-1.494977256431750	2.4105730E-8
-0.4	-2.178172723246240	-2.178172789883010	6.6636770E-8
-0.2	-2.817647649506660	-2.817647724013040	7.4506380E-8
0.0	-3.412578267829700	-3.412578329155590	6.1325890E-8
0.2	-3.961958455904090	-3.961958531301040	7.5396950E-8
0.4	-4.464559333163800	-4.464559424139430	9.0975630E-8
0.6	-4.918879941496040	-4.918880051407700	1.0991166E-7
0.8	-5.323087006521950	-5.323087129044260	1.2252231E-7
1.0	-5.674941361858750	-5.674941494327020	1.3246827E-7
1.2	-5.971708083510550	-5.971708201060930	1.1755038E-7
1.4	-6.210046727765300	-6.210046817516560	8.9751260E-8
1.6	-6.385877267459800	-6.385877325019590	5.7559790E-8
1.8	-6.494216346163350	-6.494216361246050	1.5082700E-8
2.0	-6.528977278586750	-6.528977261410670	1.7176080E-8



Şekil 5. 6 Örnek 5.3 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği

[27].

5.3.3 Sınır Koşullarının İncelenmesi

Sınır şartları homojen olan 2. mertebeden Dirichlet-tip sınır-değer problemleri bir önceki bölümde incelenmiştir. Şimdi ise sınır şartları homojen olmayan sınır-değer problemleri incelenecek ve sınır şartları homojen hale getirilmeye çalışılacaktır.

$$\begin{aligned}
 u''(x) + p(x)u'(x) + q(x) &= f(x) \\
 u(a) &= \theta_0, \quad u(b) = \sigma_0
 \end{aligned}
 \tag{5.65}$$

Dirichlet tip sınır değer problemini ele alalım. Yukarıda verilen homojen olmayan sınır koşullarını homojen hale getirebilmek için;

$$\psi(x) = u(x) - \Lambda(x)$$

dönüşümünü kullanalım. Burada Λ fonksiyonu keyfi bir fonksiyondur.

$$u(a) = \theta_0$$

olduğundan

$$\psi(a) = \theta_0 - \Lambda(a)$$

olur ve buradan

$$\Lambda(a) = \theta_0 \quad \text{ve} \quad \psi(a) = 0$$

yazılabilir. Benzer şekilde;

$$u(b) = \sigma_0$$

olduğundan

$$\psi(b) = \sigma_0 - \Lambda(b)$$

olur ve buradan

$$\Lambda(b) = \sigma_0 \text{ ve } \psi(b) = 0$$

yazılabilir.

$$\Lambda(a) = \theta_0 \text{ ve } \Lambda(b) = \sigma_0$$

ise $\Lambda(x)$ fonksiyonunu şu şekilde yazılabilir:

$$\Lambda(x) = \theta_0 - \frac{a(\theta_0 - \sigma_0)}{a-b} + \left(\frac{\theta_0 - \sigma_0}{a-b} \right) x$$

O halde,

$u(x) = \psi(x) + \Lambda(x)$ dönüşümü (5.65) denkleminde uygulanırsa;

$$[\psi(x) + \Lambda(x)]'' + p(x)[\psi(x) + \Lambda(x)]' + q(x)[\psi(x) + \Lambda(x)] = f(x)$$

elde edilir. Buradan da

$$\psi''(x) + \Lambda''(x) + p(x)[\psi'(x) + \Lambda'(x)] + q(x)[\psi(x) + \Lambda(x)] = f(x)$$

bulunur. Son olarak

$$\psi''(x) + p(x)\psi'(x) + q(x)\psi(x) = f(x) - \Lambda''(x) - p(x)\Lambda'(x) - q(x)\Lambda(x) \quad (5.66)$$

eşitliği yazılabilir.

$$\Lambda(x) = \theta_0 - \frac{a(\theta_0 - \sigma_0)}{a-b} + \left(\frac{\theta_0 - \sigma_0}{a-b} \right) x \quad (5.67)$$

olduğundan

$$\Lambda'(x) = \frac{\theta_0 - \sigma_0}{a-b} \quad (5.68)$$

ve

$$\Lambda''(x) = 0 \quad (5.69)$$

olur. Diğer yandan

$$f(x) - \Lambda''(x) - p(x)\Lambda'(x) - q(x)\Lambda(x) = \bar{f}(x) \quad (5.70)$$

olsun. O halde (5.67)-(5.69) değerleri (5.70) denkleminde yerine konulursa;

$$\bar{f}(x) = f(x) - p(x) \left[\frac{\theta_0 - \sigma_0}{a-b} \right] - q(x) \left[\theta_0 - \frac{a(\theta_0 - \sigma_0)}{a-b} + \left(\frac{\theta_0 - \sigma_0}{a-b} \right) x \right]$$

elde edilmiş olur.

O halde (5.66) denklemi (a,b) aralığında şu şekilde ifade edilir:

$$\psi''(x) + p(x)\psi'(x) + q(x)\psi(x) = \bar{f}(x)$$

$$\psi(a) = 0, \quad \psi(b) = 0 \quad x \in (a,b)$$

Sınır şartlarını homojen hale getirdiğimiz için bir önceki bölümde verilen homojen sınır şartlara sahip Dirichlet-tip sınır değer problemindeki işlem adımları burada da uygulanabilir.

ÖRNEKLER:

Örnek 5.4 Aşağıdaki Dirichlet tip sınır değer problemini [4,5] aralığında çözünüz.

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{d}{dx} y(x) + xy(x) = -x$$

$$y(4) = 3, \quad y(5) = 5$$

Çözüm: Yukarıda verilen diferansiyel denklemi $\psi(x) = y(x) - (2x-5)$ dönüşümü yardımıyla sınır şartları homojen olan şu denkleme dönüştürülebilir:

$$\psi''(x) + \psi'(x) + x\psi(x) = 4x - 2x^2 - 2$$

$$\psi(4) = 0, \quad \psi(5) = 0$$

Bu durumda ağırlık fonksiyonumuz $w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$, $\phi(x) = \ln\left(\frac{x-4}{5-x}\right)$ seçildiğinde,

ayrıca $d = \frac{\pi}{2}$, $h = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ve $x_k = \frac{4+5e^{kh}}{1+e^{kh}}$ ($N = 2, 25, 50$) alındığında yaklaşık çözüm

aşağıdaki gibi olur:

Çizelge 5. 5 $N = 2$ için Örnek 5.4 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

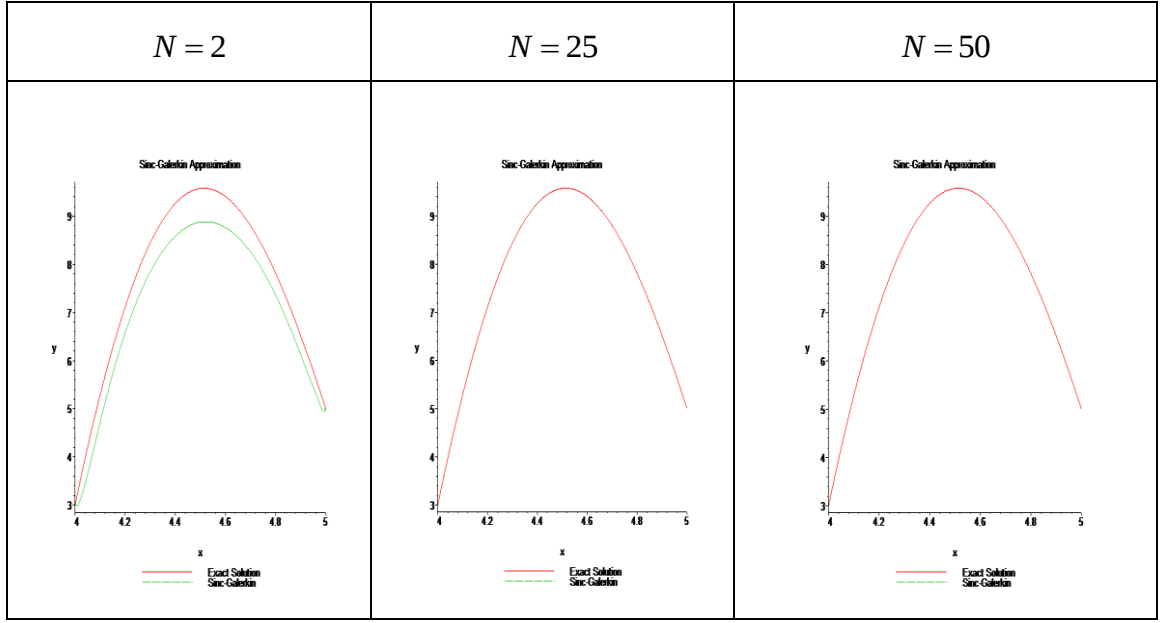
x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Hata
4.01	3.24837931263645	2.99249395178039	0.25588536085606
4.12	5.69317279439807	5.13591168607570	0.55726110832236
4.23	7.56811129823016	7.01926659012397	0.54884470810617
4.34	8.83380338208509	8.19665473414149	0.63714864794360
4.45	9.48045393820920	8.78072159805612	0.69973234015303
4.56	9.52755727923440	8.85287598996678	0.67468128926764
4.67	9.02214665820230	8.44739962991028	0.57474702829198
4.78	8.03566124181426	7.56921137053139	0.46644987128285
4.89	6.65957378702612	6.25522121869284	0.40435256833328

Çizelge 5. 6 $N = 25$ için Örnek 5.4 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Hata
4.01	3.24837931263645	3.24761793093466	0.00076138170179
4.12	5.69317279439807	5.69216988485706	0.00100290954102
4.23	7.56811129823016	7.56693875054215	0.00117254768794
4.34	8.83380338208509	8.83253554362754	0.00126783845764
4.45	9.48045393820920	9.47916373593040	0.00129020227875
4.56	9.52755727923440	9.52631213094993	0.00124514828442
4.67	9.02214665820230	9.02100706400654	0.00113959419576
4.78	8.03566124181426	8.03467649580012	0.00098474601413
4.89	6.65957378702612	6.65878155013920	0.00079223688696

Çizelge 5. 7 $N = 50$ için Örnek 5.4 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Hata
4.01	3.24837931263645	3.24836588619198	0.00001342644447
4.12	5.69317279439807	5.69315498988760	0.00001780451047
4.23	7.56811129823016	7.56809048695052	0.00002081127967
4.34	8.83380338208509	8.83378092572673	0.00002245635834
4.45	9.48045393820920	9.48043107036081	0.00002286784830
4.56	9.52755727923440	9.52753519639600	0.00002208283843
4.67	9.02214665820230	9.02212642954350	0.00002022865876
4.78	8.03566124181426	8.03564377234149	0.00001746947285
4.89	6.65957378702612	6.65955977184326	0.00001401518284



Şekil 5. 7 Örnek 5.4 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği

Örnek 5.5 Aşağıdaki Dirichlet tip sınır değer problemini $[0,5]$ aralığında çözünüz.

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{d}{dx} y(x) + y(x) = x$$

$$y(0) = 1, \quad y(5) = 2$$

Çözüm: Yukarıda verilen diferansiyel denklemi $\psi(x) = y(x) - \left(1 + \frac{1}{5}x\right)$ dönüşümü

yardımıyla sınır şartları homojen olan şu denkleme dönüştürülebilir:

$$\psi''(x) + \psi'(x) + \psi(x) = \frac{4}{5}x - \frac{6}{5}$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(5) = 0$$

Bu durumda ağırlık fonksiyonumuz $w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$, $\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{5-x}\right)$ seçildiğinde,

ayrıca $d = \frac{\pi}{2}$, $h = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ve $x_k = \frac{5e^{kh}}{1+e^{kh}}$ ($N = 5, 10, 50$) alındığında yaklaşık çözüm

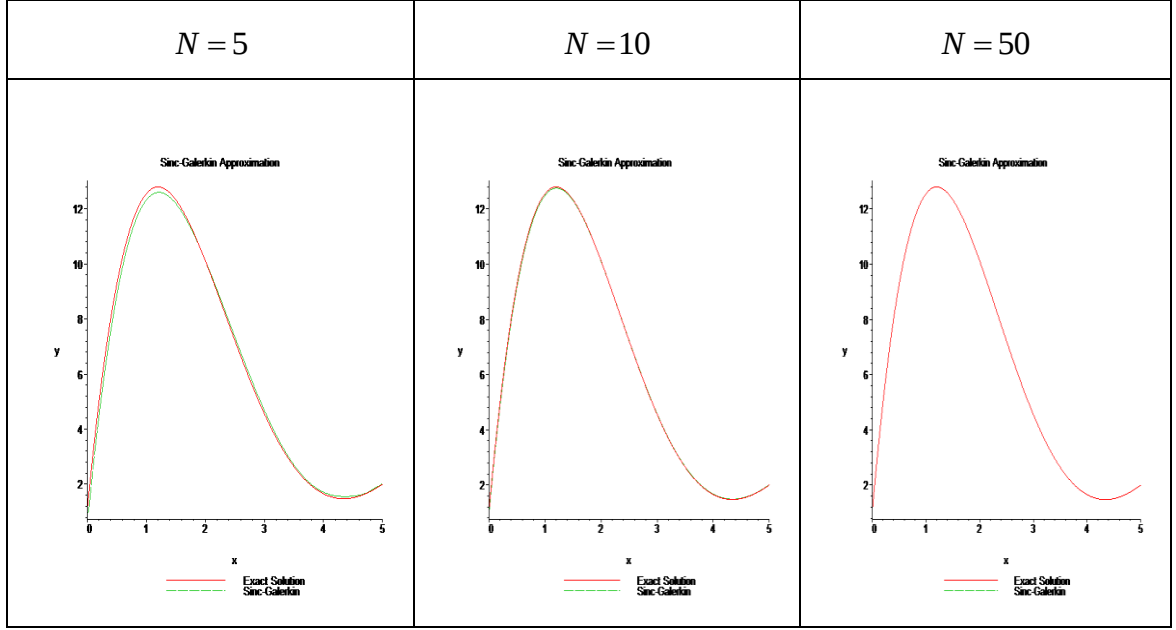
aşağıdaki gibi olur:

Çizelge 5. 8 $N = 5$ için Örnek 5.5 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Hata
0.3	6.59231896061343	6.08232792026070	0.509991040352730
0.6	10.2501879214131	9.88445110694136	0.365736814471720
0.9	12.2158409277531	11.9618740272051	0.253966900548015
1.2	12.7993244322551	12.6016032565812	0.197721175673871
1.5	12.3369940324148	12.1999392286029	0.137054803811852
1.8	11.1587377159028	11.1078052109042	0.050932504998605
2.1	9.56419337472987	9.60779766309878	0.043604288368910
2.4	7.80746482700392	7.92393609995027	0.116471272946354
2.7	6.08931321355532	6.23505570301662	0.145742489461296
3.0	4.55548890955299	4.68485321279215	0.129364303239156
3.3	3.29974117454763	3.38673472601719	0.086993551469560
3.6	2.37006088966939	2.42197631426271	0.051915424593319
3.9	1.77683664775654	1.82862487460864	0.051788226852099
4.2	1.50179885217560	1.57922994529150	0.077431093115900
4.5	1.50685733503920	1.56730560626486	0.060448271225657

Çizelge 5. 9 $N = 50$ için Örnek 5.5 de verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Hata
0.3	6.59231896061343	6.59226283957753	0.000056121035895
0.6	10.2501879214131	10.2501402766472	0.000047644765672
0.9	12.2158409277531	12.2158033085776	0.000037619175512
1.2	12.7993244322551	12.7992970655294	0.000027366725870
1.5	12.3369940324148	12.3369763841789	0.000017648236048
1.8	11.1587377159028	11.1587286608208	0.000009055082016
2.1	9.56419337472987	9.56419140152648	0.000001973203339
2.4	7.80746482700392	7.80746821844359	0.000003391439603
2.7	6.08931321355532	6.08932037275128	0.000007159195989
3.0	4.55548890955299	4.55549827826052	0.000009368707520
3.3	3.29974117454763	3.29975150685076	0.000010332303106
3.6	2.37006088966939	2.37007108622379	0.000010196554390
3.9	1.77683664775654	1.77684599573350	0.000009347976920
4.2	1.50179885217560	1.50180680968876	0.000007957513172
4.5	1.50685733503920	1.50686365990981	0.000006324870558



Şekil 5. 8 Örnek 5.5 de verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği

Örnek 5.6 Aşağıdaki Dirichlet tip sınır değer problemini $[-1,1]$ aralığında çözünüz.

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{d}{dx} y(x) + y(x) = -x \sin x$$

$$y(-1) = -1, \quad y(1) = 1$$

Çözüm: Yukarıda verilen diferansiyel denklemi $\psi(x) = y(x) - x$ dönüşümü yardımıyla sınır şartları homojen olan şu denkleme dönüştürülebilir:

$$\psi''(x) + \psi'(x) + x\psi(x) = -x \sin x - 1$$

$$\psi(-1) = 0, \quad \psi(1) = 0$$

Bu durumda ağırlık fonksiyonumuz $w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$, $\phi(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ seçildiğinde,

ayrıca $d = \frac{\pi}{2}$, $h = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ve $x_k = \frac{-1+e^{kh}}{1+e^{kh}}$ ($N = 2, 15, 50$) alındığında yaklaşık çözüm

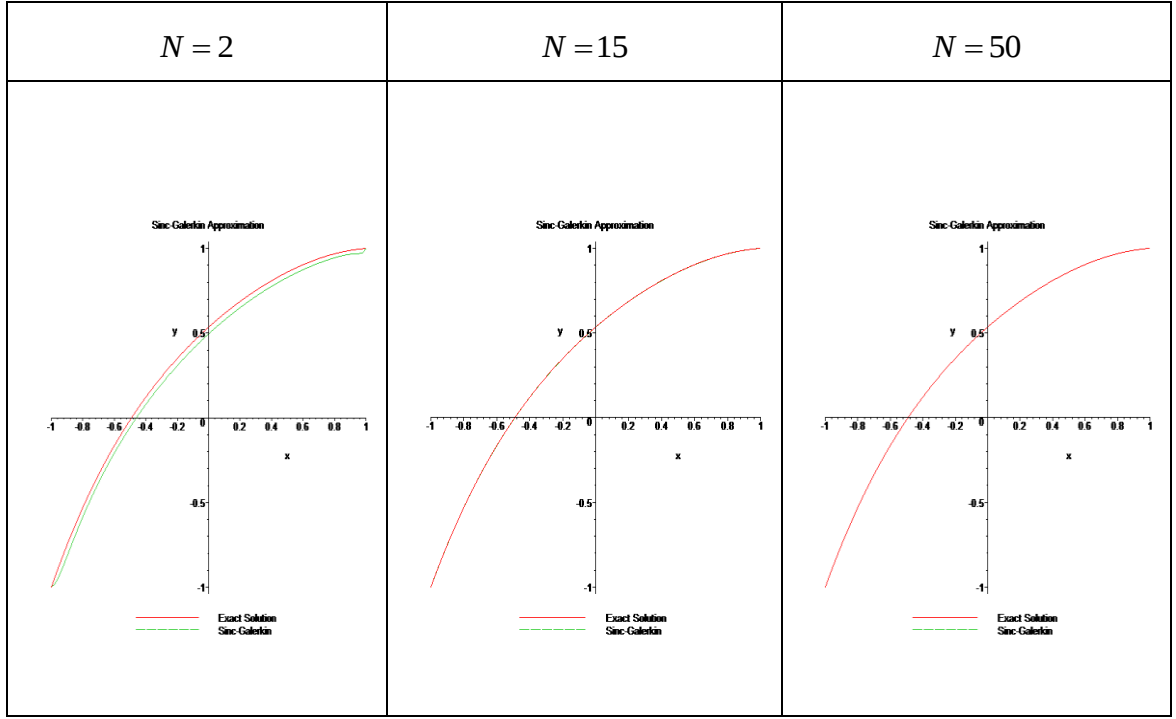
aşağıdaki gibi olur:

Çizelge 5. 10 $N = 2$ için Örnek 5.6 da verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Hata
-0.99	- 0.97344012941099	-0.991203652102618	0.01776352269163
-0.88	- 0.70312369034463	-0.769024777553948	0.06590108720932
-0.77	- 0.46872808024475	-0.521528051154086	0.05279997090934
-0.66	- 0.26488637244198	-0.310530933828274	0.04564456138629
-0.55	- 0.08691515899133	-0.130283814713859	0.04336865572253
-0.44	0.06921860413701	0.026199959697742	0.04301864443927
-0.33	0.20693190466689	0.163995102444321	0.04293680222257
-0.22	0.32906162719569	0.286614419991964	0.04244720720373
-0.11	0.43790249583669	0.396487787568738	0.04141470826795
0.00	0.53524720851379	0.495876895432002	0.03937021308178
0.11	0.62242883154160	0.584199539800486	0.03822929174112
0.22	0.70036539868978	0.663959270695003	0.03640612799478
0.33	0.76960654456062	0.735053508686995	0.03455303587363
0.44	0.83038189869467	0.797737668306150	0.03264423038853
0.55	0.88265087517125	0.852105476532149	0.03054539863910
0.66	0.92615341330065	0.898135028778437	0.02801838452222
0.77	0.96046115890746	0.935600020626140	0.02486113828132
0.88	0.98502852313650	0.962672383732711	0.02235613940379
0.99	0.99924301698668	0.986840517158898	0.01240249982778

Çizelge 5. 11 $N = 50$ için Örnek 5.6 da verilen denklemin analitik çözümü ile Sinc-Galerkin çözümünden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması

x	Analitik Çözüm	Sinc-Galerkin	Hata
-0.99	- 0.97344012941099	-0.973442002825437	0.00000187341447
-0.88	- 0.70312369034463	-0.703125466483632	0.00000177613900
-0.77	- 0.46872808024475	-0.468729765045202	0.00000168480044
-0.66	- 0.26488637244198	-0.264887976152558	0.00000160371058
-0.55	- 0.08691515899133	-0.086916690114092	0.00000153112275
-0.44	0.06921860413701	0.069217137333023	0.00000146680398
-0.33	0.20693190466689	0.206930494347565	0.00000141031933
-0.22	0.32906162719569	0.329060269258520	0.00000135793717
-0.11	0.43790249583669	0.437901183504930	0.00000131233176
0.00	0.53524720851379	0.535245909752640	0.00000129876115
0.11	0.62242883154160	0.622427592724409	0.00000123881719
0.22	0.70036539868978	0.700364187432612	0.00000121125717
0.33	0.76960654456062	0.769605359806471	0.00000118475414
0.44	0.83038189869467	0.830380739832614	0.00000115886205
0.55	0.88265087517125	0.882649740188311	0.00000113498294
0.66	0.92615341330065	0.926152298787679	0.00000111451297
0.77	0.96046115890746	0.960460065873027	0.00000109303443
0.88	0.98502852313650	0.985027452549284	0.00000107058721
0.99	0.99924301698668	0.999241969157796	0.00000104782890



Şekil 5. 9 Örnek 5.6 da verilen denklemin analitik ve yaklaşık çözümünün grafiği

BÖLÜM 6

SONUÇ ve ÖNERİLER

Sinc-Galerkin metodu 2. mertebeden singüler, Dirichlet-tip sınır-değer problemlerine uygulanmış ve analitik çözümlerle karşılaştırıldığında etkili sonuçlar alındığı görülmüştür. Verilen örnekler incelendiğinde hata oranının, sinc grid noktalarının (N) sayısı artırıldığında daha da azaldığı görülecektir. Ayrıca 2. mertebeden singüler, Dirichlet-tip sınır-değer problemlerinin çözümü için etkili ve hızlı bir sinc-Galerkin algoritması geliştirilmiştir. Bir önceki bölümde verilen bütün hesaplamalar ve grafikler Maple’da hazırlanmıştır.

Maple kodları EK-A ‘da verilmiştir.

HOMOJEN OLMAYAN SINIR KOŞULLARI İÇİN SİNC-GALERKİN ALGORİTMASI

```

restart;
with(linalg):
with(LinearAlgebra):
Eq:=diff(y(x),x$2)+P(x)*diff(y(x),x$1)+Q(x)*y(x)=F(x):
N:=50:
d:=Pi/2:
h:=2/sqrt(N):

init_a:=-1:
init_b:=1:
Phi[0]:=-1:
theta[0]:=1:

P(x):=1:
Q(x):=0:
F(x):=-x*sin(x):

Boundaries:=y(init_a)=Phi[0],y(init_b)=theta[0]:
exactSolution:=unapply(rhs(dsolve({Eq,Boundaries})),x):
Lambda(x):=((Phi[0]-theta[0])/(init_a-init_b))*x+Phi[0]-
init_a*(Phi[0]-theta[0])/(init_a-init_b):
LL:=unapply(Lambda(x),x):

```

```
FNew:=lhs(subs(y(x)=0+Lambda(x),Eq)):
```

```
FNew:=F(x)-simplify(FNew):
```

```
EqZeroBoundary:=lhs(Eq)=FNew:
```

```
delta[0]:=unapply(piecewise(j=k,1,j<>k,0),j,k):
```

```
delta[1]:=unapply(piecewise(j=k,0,j<>k,((-1)^(k-j))/(k-j)),j,k):
```

```
delta[2]:=unapply(piecewise(j=k,(-Pi^2)/3,j<>k,-2*(-1)^(k-j)/(k-j)^2),j,k):
```

```
xk:=unapply((init_a+init_b*exp(k*h))/(1+exp(k*h)),k):
```

```
phi:=unapply(log((x-init_a)/(init_b-x)),x):
```

```
Dphi:=unapply(simplify(diff(phi(x),x)),x):
```

```
g:=unapply(1/Dphi(x),x):
```

```
D2phi:=unapply(simplify(diff(phi(x),x$2)),x):
```

```
D3phi:=unapply(simplify(diff(phi(x),x$3)),x):
```

```
D4phi:=unapply(simplify(diff(phi(x),x$4)),x):
```

```
Dg:=unapply(simplify(diff(g(x),x$1)),x):
```

```
D2g:=unapply(simplify(diff(g(x),x$2)),x):
```

```
D3g:=unapply(simplify(diff(g(x),x$3)),x):
```

```
D4g:=unapply(simplify(diff(g(x),x$4)),x):
```

```
sys:=[]:
```

```
for p from -N to N do
```

```
    sys:=[op(sys),
```

```
    h*(
```

```
sum(y[j]*(1/h^2)*delta[2](p,j)*(Dphi(xk(j))*g(xk(j)))+
```

```
    (1/h^1)*delta[1](p,j)*(D2phi(xk(j))/Dphi(xk(j))*g(xk(j))+2*Dg(xk(j)))+
```

```

(1/h^0)*delta[0](p,j)*((D2g(xk(j))/Dphi(xk(j))))
),j=-N..N)
-sum(y[j]*
(1/h^1)*delta[1](p,j)*(subs(x=xk(j),P(x)*g(x)))+
(1/h^0)*delta[0](p,j)*(subs(x=xk(j),diff(P(x)*g(x),x))
/Dphi(xk(j))
),j=-N..N)
+y[p]*subs(x=xk(p),g(x)*Q(x))/Dphi(xk(p))

-subs(x=xk(p),g(x)*FNew(x))/Dphi(xk(p))

)=0]:
od:

evalf(sys):
vars:=seq(y[i],i=-N..N):
A,b:=LinearAlgebra[GenerateMatrix](evalf(sys),[vars]):

c:=linsolve(A,b):
ApproximateSol:=unapply(sum(c[j+N+1]*sin(Pi*(phi(x)-
j*h)/h)/(Pi*(phi(x)-j*h)/h),j=-N..N),x):

plot([exactSolution(x),ApproximateSol(x)+Lambda(x)],x=init_
a..init_b, title = "Sinc-Galerkin
Approximation",labels=["x","y"], legend = ["Exact
Solution", "Sinc-Galerkin"], linestyle = [solid,
longdash]):
Digits := 15:
Exact:=[]:Apprx:=[]:Err:=[]:
for s from init_a+.01 by .11 to init_b-.01
do
    Exact:=[op(Exact),evalf(exactSolution(s))]:
    Apprx:=[op(Apprx),evalf(ApproximateSol(s)+LL(s))]:
    Err:=[op(Err),evalf(abs(ApproximateSol(s)+LL(s)-
exactSolution(s)))] :
od:

```

KAYNAKLAR

-
- [1] Stenger, F., (1976). "Approximations via Whittaker's cardinal function", J. Approx. Theory 17, 222-240.
 - [2] Stenger, F., (1979). "A sinc-Galerkin method of solution of boundary value problems", Math. Comput. 33, 85-109.
 - [3] Whittaker, E.T., (1915). "On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory". Proc. R. Soc. Edinb. 35, 181-194.
 - [4] Whittaker, J.M., (1935), Interpolation Function Theory, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 33. Cambridge University Press, London.
 - [5] Lund, J., (1986). "Symmetrization of the sinc-Galerkin method for boundary value problems", Math. Comput. 47, 571-588.
 - [6] Lund, J. and Bowers, K.L., (1992), Sinc methods for Quadrature and Differential Equations, SIAM, Philadelphia.
 - [7] Lewis, D.L., Lund, J. and Bowers, K.L., (1987). "The space-time sinc-Galerkin method for parabolic problems", Int. J. Numer. Methods Eng. 24, 1629-1644.
 - [8] McArthur, K.M., Bowers K.L. and Lund, J., (1987). "Numerical implementation of the sinc-Galerkin method for second-order hyperbolic equations", Numer. Methods Partial Differ. Equ. 3, 169-185.
 - [9] Bowers, K.L. and Lund, J., (1987). "Numerical solution of singular Poisson problems via the sinc-Galerkin method", SIAM J. Numer. Anal. 24(1), 36-51.
 - [10] Lund, J., Bowers, K.L. and McArthur, K.M., (1989). "Symmetrization of the sinc-Galerkin method with block techniques for elliptic equations", IMA J. Numer. Anal. 9, 29-46.
 - [11] Alonso, N. and Bowers, K.L., (2009). "An alternating-direction sinc-Galerkin method for elliptic problems", J. Complex. 25, 237-252.
 - [12] Koonprasert, S., (2003). The sinc-Galerkin method for problems in oceanography, PhD thesis, Montana State University, Bozeman, Montana.
 - [13] McArthur, K.M., Bowers K.L. and Lund, J., (1990). "The sinc method in multiple space dimensions: model problems", Numer. Math. 56, 789-816.

- [14] Stenger, F., (1981). "Numerical methods based on Whittaker cardinal, or sinc functions", SIAM Rev. 23, 165-224.
- [15] Stenger, F., (2000). "Summary of sinc numerical methods", J. Comput. Appl. Math. 121, 379-420.
- [16] Mueller, J.L. and Shores, T.S., (2004). "A new sinc-Galerkin method for convection-diffusion equations with mixed boundary conditions", Comput. Math. Appl. 47, 803-822.
- [17] El-Gamel, M., Behiry, S.H. and Hashish, H., (2003). "Numerical method for the solution of special nonlinear fourth-order boundary value problems", Appl. Math. Comput. 145, 717-734.
- [18] Lybeck, N.J. and Bowers, K.L., (1996). "Sinc methods for domain decomposition", Appl. Math. Comput. 75, 4-13.
- [19] Güngör, F., (1995). Diferansiyel Denklemler, İkinci Baskı, Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., İstanbul.
- [20] Yaşar, İ.B., (2005). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Üçüncü Baskı, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [21] Musayev, B. ve Alp, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, Birinci Baskı, Balcı Yayınları LTD. ŞTİ., Kütahya.
- [22] Gök, Ö., (1996). Fonksiyonel Analize Giriş, İkinci Baskı, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.
- [23] Başkan, T., (1991). Kompleks Analiz, Birinci Baskı, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.
- [24] Başkan, T., (1996). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Birinci Baskı, Uludağ Üniversitesi Basımevi, Bursa.
- [25] Churchill, R.V., (1989). Complex Variables and Applications, Third Edition, McGraw-Hill. Inc. Literatür Yayıncılık, İstanbul.
- [26] McNamee, J., Stenger, F. and Whitney, E.L., (1971). "Whittaker's Cardinal Function in Restopect", Math. Comp., 25:141-154.
- [27] Secer, A. and Kurulay, M., (2012). "The sinc-Galerkin method and its applications on singular Dirichlet-type boundary value problems", a SpringerOpen Journal, 2012:126.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Selvi ALTUN
Doğum Tarihi ve Yeri : 23.02.1989/BURSA
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : selvialtun89@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi	2011
Lise	Fen Bilimleri	Bursa Kız Lisesi	2007

YAYINLARI

Bildiri

1. Secer, A., Altun, S. and Bayram, M., (2013). "The sinc-Galerkin method for solving singular, Dirichlet-type boundary value problems and treatment of the boundary conditions", ICAAMM 2013, 2-5 June, İstanbul.

ÖDÜLLERİ

1. TÜBİTAK Yurtiçi Doktora Bursu

