

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RASYONEL İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİ
VE
UYGULAMALARI**

Matematikçi Bayram Ali İBRAHİMOĞLU

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iv
TABLO LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Temel Özellikler	7
2.1.1 Rasyonel İnterpolasyon Polinomlarının Özellikleri	7
2.1.2 Rasyonel İnterpolasyon Polinomlarının Tablosu	9
2.1.3 Normalite	13
3 RASYONEL İNTERPOLASYON POLİNOMLARINI HESAPLAMA YÖNTEMLERİ	16
3.1 İnterpolasyon Polinomlarının Devamlı Kesir Halinde Gösterimi	16
3.2 Ters Farklar	19
3.3 Karşılıklı Ters Farklar	24
3.4 QD-Algoritmasının bir genellemesi	28
3.5 Gragg Algoritmasının bir Genellemesi	31
3.6 Genelleştirilmiş ϵ - algoritması	33
3.7 Stoer'in Yineleme Yöntemi	35
4 RASYONEL HERMİT İNTERPOLASYON	38
4.1 Rasyonel Hermit İnterpolasyon Polinomlarının Tanımı	38
4.2 Rasyonel Hermit İnterpolasyon Polinomlarının Tablosu	44
4.3 Determinant Gösterimi	49
4.4 Devamlı Kesir Gösterimi	49
4.5 Thiele'nin Devamlı Kesir Genişlemesi	50
4.6 Rasyonel Hermit İnterpolasyon Polinomlarının Yakınsaklığı	53
5 UYGULAMA	55
5.1 Başlangıç Değer Problemi	55
5.2 Rasyonel İnterpolasyon Polinomlarının Kullanılması	55
5.3 Tahmin Edici-Düzeltilici Yöntemler	57
5.4 Sayısal Sonuçlar	58
6 TARTIŞMA VE SONUÇ	63

KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	65

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 4.1 Test problemi 4.1'deki $f(x)$ ile interpolasyon polinomlarının grafikleri.....	44
Şekil 4.2 Rasyonel Hermite interpolasyon polinomları tablosundaki değişim	48
Şekil 5.1 Test problemi 5.1'deki çözümlerin grafikleri	62

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Örnek 2.1 'in değerleri	5
Tablo 2.2 Rasyonel interpolasyon polinomlarının tablosu.....	9
Tablo 2.3 Rasyonel interpolasyon polinomları tablosundaki kare yapısı.....	12
Tablo 2.4 Rasyonel interpolasyon polinomları tablosundaki kare yapısının bozulması	13
Tablo 3.1 Rasyonel interpolasyon polinomların tablosundaki basamak yapısı.....	18
Tablo 3.2 Ters farklar tablosu.....	20
Tablo 3.3 Örnek 3.2.2 'nin değerlerinin hesaplanması.....	22
Tablo 3.4 Örnek 3.2.2 'nin değerlerinin tekrar düzenlenerek hesaplanması.....	23
Tablo 3.5 T_0 ve T_k daki azalan basamak yapısı.....	28
Tablo 3.6 QD-Algoritmasının katsayıları	31
Tablo 3.7 Gragg algoritmasının katsayıları	33
Tablo 4.1 Test problemi 4.1 'deki $f(x)$ ile interpolasyon fonksiyonlarının değerleri.....	43
Tablo 4.2 Test problemi 4.1 'deki hataların karşılaştırılması.....	43
Tablo 4.3 e^x 'in devamlı kesir genişlemesinin katsayıları.....	53
Tablo 5.1 Test problemi 5.1 'deki çözümlerin karşılaştırılması.....	61

ÖNSÖZ

Matematiksel modellerinin oluşturulması uygulamalı bilim dallarında büyük bir önem taşımaktadır. Bu alanda yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda oldukça büyük bir ilerleme kaydetmiştir. Yapılan araştırmalarda fonksiyonların yaklaşık değerlerini bulma ve interpolasyon yöntemlerinin sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Rasyonel interpolasyon yöntemleri polinom tipi interpolasyon yöntemlerine göre daha iyi sonuç vermektedir. Bu nedenle rasyonel interpolasyon yöntemlerinin araştırılması bilimsel araştırmalar için dikkate değerdir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımı benden esirgemeyen çok değerli hocalarım, Prof. Dr. Mustafa Bayram ve Doç. Dr. Fatih Taşçı' ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Aralık 2007

Bayram Ali İBRAHİMOĞLU

ÖZET

Bu tezde, lineer olmayan interpolasyon yöntemlerinden rasyonel interpolasyon yöntemleri incelendi. Bu yöntemler ile interpolasyon polinomlarının elde edilmesi ve rasyonel interpolasyon polinomlarının hesaplanma yöntemleri açıklandı ve bunlarla ilgili algoritmalar verildi. Ayrıca bu rasyonel interpolasyon yöntemlerinden rasyonel Hermite interpolasyon yöntemi kullanılarak açık ve kapalı formüller elde edildi. Bu formüller adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemine uygulanarak elde edilen yaklaşık çözümler tam çözümler ile karşılaştırıldı.

Anahtar kelimeler: Rasyonel interpolasyon, Rasyonel Hermit interpolasyonu, Thiele'nin devamlı kesir genişlemesi, Rasyonel interpolasyon polinomlarını hesaplama yöntemleri, Başlangıç değer problemi.

ABSTRACT

In this thesis, we have considered rational interpolation techniques, which are techniques of nonlinear type. With the help of these methods, interpolation polynomials are obtained techniques for calculating the rational interpolating polynomials are explained and algorithms related to these are given. Besides Hermite interpolation, which is one of the rational interpolation methods is used to obtain explicit and implicit formulas. The formulas obtained are applied to the initial value problem for ordinary differential equations. The approximate and exact solutions are also compared.

Keywords: Rational interpolation, rational Hermit interpolation, Thiele's continued fraction expansion, Methods to compute rational interpolants, Initial value problem.

1. GİRİŞ

İnterpolasyon kelimesi, elementer anlamda bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden hareketle, bu fonksiyonun bu aralıkta bilinmeyen değerlerini hesaplama işlemidir(Bayram M., 2002). Aynı deyim geniş anlamda, verilen fonksiyonlara yaklaşım yapmak için bir temel yöntemdir(Davis,1965). İnterpolasyon yöntemleri rasyonel interpolasyon, polinom tipi interpolasyonu, spline interpolasyonu ve trigonometrik interpolasyon şeklinde sınıflandırılır(J. Stoer, R. Bulirsch).

Nümerik analizde çeşitli nümerik problemlerin çözümünde fonksiyonların yaklaşık değerlerini bulma ve interpolasyon yöntemlerinin sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Kullanılan bu tekniklerden lineer olmayan yöntemlerin lineer yöntemlerden daha üstün olduğu bilinmesine rağmen bu konuda az sayıda kaynak ve çalışma vardır. Bu çalışmada lineer olmayan tekniklerden biri olan rasyonel interpolasyon yöntemi ele alındı.

Rasyonel interpolasyon konusunda H. Padé 1901 yılında rasyonel interpolasyon polinomlarının tablosunu oluşturmuştur. Padé bu çalışmasında interpolasyon polinomlarının oluşturulmasında devamlı kesirlerin kullanılabileceğini göstermiştir. Thorvald Nicolai THIELE 1906 yılında devamlı kesir temeline dayanan rasyonel interpolasyon polinomlarının hesaplanması için kendi adını taşıyan bir yöntem geliştirmiştir. Thiele aynı zamanda karşılıklı ters farkları (reciprocal differences) ilk tanımlayan kişidir. Thiele bu sayede bir fonksiyonun Taylor açılımına benzer devamlı kesir genişletmesinin elde edilmesini sağlamıştır (Brezinski, 1991).

Rasyonel interpolasyon yöntemi polinom tipi interpolasyon yöntemine göre daha üstündür. Çünkü rasyonel fonksiyonlar polinomların oranı olduğundan polinomlardan çok daha zengin bir fonksiyon sınıfı oluştururlar. Daha büyük olan bu fonksiyonlar sınıfı, daha doğru yaklaştırma olasılığını artırır. Özellikle kutuplara (tekil noktalara) sahip olan fonskiyonlara, örneğin $\tan(x)$, rasyonel interpolasyon tekniği ile yaklaşılması polinom interpolasyon tekniğine göre daha iyi cevap verir, çünkü polinomların tekilliği yoktur(J. Stoer, R. Bulirsch) .

Rasyonel interpolasyon yöntemleri kullanılarak lineer olamayan denklem sistemleri, adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler ve integral denklemler çözülebilir. Bu çalışmada rasyonel interpolasyon polinomlarını hesaplama yöntemleri verilip, bu interpolasyon polinomlarının oluşturduğu tablo yapısı incelenerek interpolasyon polinomlarının hesaplayan algoritmalar verildi. Bir fonksiyonun devamlı kesir şeklinde seriye açılmasını sağlayan ve rasyonel yaklaşım temeline dayandığı için Taylor açılımından daha iyi

sonuç veren Thiele devamlı kesir genişlemesi verilerek, bu teknik başlangıç değeri problemine uygulandı. Başka bir rasyonel interpolasyon yöntemi olan ve diğer rasyonel interpolasyon yöntemlerinden daha genel olan rasyonel Hermite interpolasyon yöntemi verilerek yakınsaklık durumu incelendi. Bu yöntem kullanılarak elde edilen açık çok adım ve kapalı tek adım formüller ile devamlı kesir genişletmesiyle elde edilen formül adi diferansiyel denklemler için başlangıç değeri problemine uygulandı. Elde edilen sonuçlar tam çözüm ile karşılaştırıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1 Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ da her mertebeden türevi varsa,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \cdots \quad (2.1)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ daki Taylor Serisi denir.

2.2 Tanım: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \cdots + a_n (x-c)^n + \cdots \quad (2.2)$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir.

2.3 Tanım: $c_i, b \in R$ ve x_i ler de değişkenler olmak üzere,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = b$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem denir.

$a_{ij}, b_i \in R$ ve x_i bilinmeyenler olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem sistemi adı verilir.

2.4 Tanım (Rasyonel İnterpolasyon Problemi): f , kompleks düzlemin bir alt kümesi olan G üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, G 'ye ait farklı noktaların bir dizisi olsun. p polinomunun tam derecesini ∂p ile gösterelim. f nin (m, n) mertebeden rasyonel interpolasyon problemi,

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

ve

$$q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

polinomlarını bulmaktan oluşur. Burada $p(x)/q(x)$ indirgenemez ve

$$f(x_i) = \frac{p}{q}(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, m+n \quad (2.4)$$

dir. Bu problemi ((2.4)'ü) çözmek yerine, buna karşılık gelen

$$f(x_i)q(x_i) - p(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0, \dots, m+n \quad (2.5)$$

lineer denklem sistemini ele alırız.

Bu (2.5) ifadesi $m+n+1$ tane denklemden oluşan bir homojen denklem sistemidir. Burada, p ve q 'nin a_i ve b_i katsayılarının toplamı $m+n+2$ dir(J. Stoer, R. Bulirsch). Bu nedenle (2.5)'in her zaman en azından bir tane aşikar olmayan(nontrivial) çözümü vardır. (2.5)'in farklı çözümlerini bulmak için şu teoremi verebiliriz.

2.1 Teorem:

p_1, q_1 ve p_2, q_2 polinomlarının her ikisi de (2.5)'i sağlıyorsa, $p_1q_2 = p_2q_1$ olur.

İspat:

$p_1q_2 - p_2q_1$ polinomu için

$$(p_1q_2 - p_2q_1)(x_i) = [(fq_2 - p_2)q_1 - (fq_1 - p_1)q_2](x_i) = 0 \quad i = 0, \dots, m+n \quad (2.6)$$

yazabiliriz.

$\partial(p_1q_2 - p_2q_1) \leq m+n$ olduğundan, yukarıdaki (2.6) ifadesinin sağ tarafındaki ifadenin $m+n$ dereceden büyük dereceli terimleri sıfırlanır. (2.5)'in tüm çözümleri aynı zamanda (2.4)'i sağlamayabilir. (2.5)'i sağlayan p ve q polinomlarının p/q 'yu indirgeyecek şekilde olması mümkündür. Bununla birlikte, 2.1 Teorem den dolayı, (2.5)'in tüm çözümleri aynı indirgenemez biçime sahiptir. (2.5)'i sağlayan p ve q için p/q 'nin indirgenemeyen formunu

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0}{q_0}(x)$$

ile göstereceğiz. Burada $q_0(x)$, $q_0(x_0)=1$ olacak şekilde normalize edilmiştir. $r_{m,n}(x)$ 'e f 'nin (m,n) mertebeden rasyonel interpolasyon polinomu denir(Cuyt ve Wuytack , 1987). Böylece 2.1 Teorem den aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

2.1 Sonuç:

$m,n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, f 'in (m,n) mertebeden tek bir rasyonel interpolasyonu vardır. “İnterpolant” terminolojisi kullanılmasına rağmen $r_{m,n}(x)$, (2.4)’deki interpolasyon koşullarını artık sağlamıyor olabilir (Lübbe W. , 1983). Basit bir örnek ile bunu gösterelim.

2.1 Örnek: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ ve $f(x_0) = 0, f(x_1) = 3, f(x_2) = 3$ olsun. $m = n = 1$ olarak alalım. Bu veriler tablo halinde aşağıdaki şekilde gösterilir.

Tablo 2.1 Örnek 2.1 'in değerleri

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	1	3
2	2	3

Bu tablodaki değerler

$$m = 1 \text{ için, } p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i = \sum_{i=0}^1 a_i x^i = a_0 + a_1 x^1$$

$$n = 1 \text{ için, } q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^1 b_i x^i = b_0 + b_1 x^1$$

ve

$$f(x_i)q(x_i) - p(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, 2$$

formüllerinde kullanılırsa,

$$x_0 = 0 \text{ için } f(x_0)q(x_0) - p(x_0) = 0$$

$$f(0)(b_0 + b_1 x_0^1) - (a_0 + a_1 x_0^1) = 0$$

$$0(b_0 + b_1 0) - (a_0 + a_1 0) = 0$$

$$a_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
x_1 = 1 \quad \text{için} \quad f(x_1)q(x_1) - p(x_1) &= 0 \\
f(1)(b_0 + b_1x_1^1) - (a_0 + a_1x_1^1) &= 0 \\
3(b_0 + b_1) - (a_0 + a_1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 = 2 \quad \text{için} \quad f(x_2)q(x_2) - p(x_2) &= 0 \\
f(2)(b_0 + b_1x_2^1) - (a_0 + a_1x_2^1) &= 0 \\
3(b_0 + 2b_1) - (a_0 + 2a_1) &= 0
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 3(b_0 + b_1) - (a_0 + a_1) = 0 \\ 3(b_0 + 2b_1) - (a_0 + 2a_1) = 0 \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini çözersek,

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, \quad a_1 = 3b_1 \\
b_1 &= 1 \quad \text{için} \\
a_0 &= 0, \quad a_1 = 3, \quad b_0 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu çözümlerden birini

$$p(x) = a_0 + a_1x = 3x$$

ve

$$q(x) = b_0 + b_1x = x$$

dir.

2.1 Teorem den dolayı denklem sisteminin tüm çözümleri

$$r_{1,1}(x) = \frac{p_0}{q_0}(x) = 3$$

indirgenemez formundaki rasyonel interpolasyon polinomunu verir.

$$f(x_i) = \frac{p}{q}(x_i), \quad i = 0, \dots, 2$$

$$x_0 = 0 \text{ için } f(x_0) \neq \frac{p_0}{q_0}(x_0)$$

$$0 \neq 3$$

$$x_1 = 1 \text{ için } f(x_1) = \frac{p_0}{q_0}(x_1)$$

$$3 = 3$$

$$x_2 = 0 \text{ için } f(x_2) = \frac{p_0}{q_0}(x_2)$$

$$3 = 3.$$

Görüldüğü gibi $x_0 = 0$ için $r_{1,1}(x)$, (2.4) deki interpolasyon koşullarını sağlamamaktadır. Yani $f(x)$ e karşılık gelen interpolasyon polinomunun $x_0 = 0$ noktasındaki değeri $f(x)$ in bu noktadaki değerinden farklıdır.

2.1 Temel Özellikler

2.1.1 Rasyonel İnterpolasyon Polinomlarının Özellikleri

$r_{m,n} = p_0 / q_0$, f nin (m, n) mertebeden bir rasyonel interpolasyon polinomu olsun. p_0 ve q_0 , (2.5) koşullarını sağlamıyorsa, p_0 ve q_0 'ı kullanarak (2.5)'in bir çözümü olan p ve q polinomlarını oluşturabiliriz. m' ile p_0 'ın tam derecesini, n' ile q_0 'ın tam derecesini gösterelim.

2.1.1.1 Teorem:

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0}{q_0}(x)$$

f nin (m, n) mertebeden bir rasyonel interpolasyon polinomu ise bu durumda

$$p(x) = p_0(x) \prod_{i=1}^s (x - y_i)$$

ve

$$q(x) = q_0(x) \prod_{i=1}^s (x - y_i)$$

(2.5)'i sağlayacak şekilde $0 \leq s \leq \min(m-m', n-n')$ koşulunu sağlayan bir s tamsayısı ve $\{x_0, \dots, x_{m+n}\}$ in elemanı olan s tane $y_1, \dots, y_s$ noktası vardır.

İspat:

$p_1(x)$ ve $q_1(x)$ (2.5)'in bir çözümü olsun. Bu durumda

$$(f q_1)(x_i) = p_1(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, m+n$$

olur.

Buradan, eğer $q_1(x_i) = 0$ ise $p_1(x_i) = 0$ olur. Buradan $\{y_1, \dots, y_s\}$, $q_1(x)$ 'in $\{x_0, \dots, x_{m+n}\}$ e ait sıfırlarının kümesi olarak yazılabilir. Böylece,

$$t(x) = \prod_{i=1}^s (x - y_i)$$

ifadesini oluştururuz. Eğer

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0}{q_0}(x)$$

ise,

$$p_1(x) = v(x) t(x) p_0(x)$$

$$q_1(x) = v(x) t(x) q_0(x)$$

olacak şekilde bir v polinomu vardır. Sonuç olarak

$$s = \partial t \leq \min(m-m', n-n').$$

$$x_i \in \{x_0, \dots, x_{m+n}\} \setminus \{y_1, \dots, y_s\} \text{ için } q_1(x_i) \neq 0$$

olduğundan dolayı

$$x_i \in \{x_0, \dots, x_{m+n}\} \setminus \{y_1, \dots, y_s\} \text{ için } (f q_0)(x_i) = p_0(x_i)$$

olarak bulunur.

$p(x) = p_0(x)t(x)$ ve $q(x) = q_0(x)t(x)$ olarak alınırsa bu durumda p ve q da aynı zamanda

(2.5) i sağlar. Sonuç olarak, (2.4)'teki rasyonel interpolasyon probleminin bir çözümü ancak ve ancak $p_0(x)$ ve $q_0(x)$ 'in (2.5) koşullarını sağladığı zaman vardır.

2.1.2 Rasyonel İnterpolasyon Polinomlarının Tablosu

f nin (m, n) mertebeden rasyonel interpolasyon polinomları aşağıdaki şekilde bir tablo olarak düzenlenebilir.

Tablo 2.2 Rasyonel interpolasyon polinomlarının tablosu

$r_{0,0}$	$r_{0,1}$	$r_{0,2}$	$\dots$
$r_{1,0}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\dots$
$r_{2,0}$	$r_{2,1}$	$\dots$	
$r_{3,0}$	$r_{3,1}$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$		

Tablo 2.2 (rasyonel interpolasyon polinomlarının tablosu) nin temsil ettiği rasyonel interpolasyon polinomlarını daha açık bir biçimde aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$r_{0,0} = \frac{a_0}{b_0}$	$r_{0,1} = \frac{a_0}{b_0 + b_1 x}$	$r_{0,2} = \frac{a_0}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$	$\dots$
$r_{1,0} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0}$	$r_{1,1} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}$	$r_{1,2} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$	$\dots$
$r_{2,0} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0}$	$r_{2,1} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x}$	$r_{2,2} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$	$\dots$
$r_{3,0} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0}$	$r_{3,1} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x}$	$r_{3,2} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Bu tabloda, ilk sütunda f nin interpolasyon polinomlarını ve ilk satırda $\frac{1}{f}$ 'in interpolasyon

polinomlarının tersleri bulunur. 2.1.1.1 Teorem i yardımıyla,

$r_{m,n}(z_i) = f(z_i)$, $i = 0, \dots, m' + n' + t$ olacak şekilde $\{x_0, \dots, x_{m+n}\}$ içinde, $t \geq 0$ olmak üzere

$\{z_0, \dots, z_{m'+n'+t}\}$ nin en az $m' + n' + t + 1$ tane noktası bulunur.

2.1.2.1 Teorem:

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0}{q_0}(x)$$

ve

$$(a) \quad (f q_0 - p_0)(x_i) = 0 \quad i = 0, \dots, m' + n' + t$$

$$(b) \quad (f q_0 - p_0)(x_i) \neq 0 \quad i = m' + n' + t + 1, \dots, m + n$$

olsun, bu durumda

$$(c) \quad m' \leq k \leq m' + t \quad \text{ve} \quad n' \leq \ell \leq n' + t \text{ 'yi sağlayan } k \text{ ve } \ell \text{ için:}$$

$$r_{k,\ell}(x) = \frac{p_0}{q_0}(x).$$

$$(d) \quad m \leq m' + t \quad \text{ve} \quad n \leq n' + t \quad \text{dir.}$$

İspat:

$$m' \leq k \leq m' + t \quad \text{ve} \quad n' \leq \ell \leq n' + t \text{ yi sağlayan } k \text{ ve } \ell \text{ için, } s = \min(k - m', \ell - n') \text{ ve}$$

$$t(x) = \prod_{i=m'+n'+t+1}^{m'+n'+t+s} (x - x_i)$$

olarak tanımlanır.

$$p(x) = p_0(x)t(x) \quad \text{ve} \quad q(x) = q_0(x)t(x) \quad \text{için (a) dan}$$

$$(f q - p)(x_i) = 0 \quad i = 0, \dots, m' + n' + t + s$$

bulunur.

$$k + \ell \leq m' + n' + t + s \text{ olduğundan dolayı}$$

$$(f q - p)(x_i) = 0 \quad i = 0, \dots, k + \ell$$

olur ve

$$\partial p \leq k$$

$$\partial q \leq \ell$$

olduğu için

$$r_{k,\ell} = \frac{p_0}{q_0}$$

yazılır. p_0/q_0 , p/q nun indirgenemez formu olduğundan dolayı, burada p ve q

$$(fq - p)(x_i) = 0 \quad i=0, \dots, m+n$$

eşitliğini sağlar. 2.1.1.1 Teorem e göre, $m+n \leq m'+n'+t+s$ olacak şekilde $0 \leq s \leq \min(m-m', n-n')$ i sağlayan bir s tamsayısı bulmak mümkündür. s nin üst sınırlarından m ve n nin üst sınırları olan $m'+t$ ve $n'+t$ üst sınırları elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

2.1.2.1 Teorem deki (b) koşulunun, yalnızca (a)'daki t tamsayısının mümkün olabildiğince büyük olmasını sağlamak için gereklidir. Rasyonel interpolasyon polinomları tablosu $\{x_0, \dots, x_{m+n}\}$ interpolasyon noktalarından

$$(fq - p)(x_i) \neq 0$$

koşulunu sağlayan x_i noktalarının interpolasyon kümesinde son noktalar olacak şekilde sıralandığı zaman Tablo 2.2 de gösterilen blok yapısı oluşur. Seçilen m ve n için böyle bir indeksleme her zaman yapılabilir ve bu durumda $r_{m',n'}$ 'den oluşan ve en uç köşesinde $r_{m'+t,n'+t}$ bulunan bir kare içindeki tüm rasyonel interpolasyon polinomlarını düşünersek, bu karenin köşelerindeki interpolasyon polinomlarının p_0/q_0 'a eşit olduğunu görürüz. Bu durumu daha iyi anlamak için şu örneğe bakalım:

$f(x_0)=1$, $f(x_1)=1$, $f(x_2)=5/3$, $f(x_3)=5/2$, $f(x_4)=17/5$, $f(x_5)=13/5$, $x_i=i$ $i=0, \dots, 5$ olsun. Bu durumda,

$$r_{3,2}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} = \frac{1+x^2}{1+x}$$

olur ve $(fq_0 - p_0)(x_5) \neq 0$ iken $(fq_0 - p_0)(x_i) = 0$, $i=0, \dots, 4$ olur. Bu da $r_{2,1} = r_{2,2} = r_{3,1} = r_{3,2}$ olduğunu gösterir. Bu durumu Tablo 2.3 'teki gibi gösterebiliriz.

Tablo 2.3 Rasyonel interpolasyon polinomları tablosundaki kare yapısı

$r_{0,0}$	$r_{0,1}$	$r_{0,2}$	$r_{0,3}$	...
$r_{1,0}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$r_{1,3}$	...
$r_{2,0}$	$r_{2,1}$	$r_{2,2}$	$r_{2,3}$	
$r_{3,0}$	$r_{3,1}$	$r_{3,2}$		
$\vdots$	$\vdots$			

Eğer interpolasyon noktaları 2.1.2.1 Teorem'deki koşulları sağlayacak şekilde numaralandırılmazsa, rasyonel interpolasyon polinomları tablosundaki iki elemanın, eşit elemanlı bir kareye sahip olmaksızın, eşit olmaları mümkündür. 2.1.2.1 Teorem'deki interpolasyon noktalarının numaralandırmasındaki bir karışıklık, blok yapıdaki bir bozukluğu beraberinde getirir. Bu durumu şu şekilde açıklarız.

$x_i = i$, $i=0,...,3$ ve $f(x_0)=2$, $f(x_1)=3/2$, $f(x_2)=4/5$, $f(x_3)=1/2$ olduğunda

$$r_{1,0}(x) = r_{2,1}(x) = 2 - \frac{x}{2}$$

olarak buluruz, fakat

$$r_{2,0}(x) = 2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{10}x^2$$

ve

$$r_{1,1}(x) = \frac{2-5x/7}{1-x/7}$$

dir. Bu durum Tablo 2.4 'te gösterilmiştir.

Tablo 2.4 Rasyonel interpolasyon polinomları tablosundaki kare yapısının bozulması

$r_{0,0}$	$r_{0,1}$	$r_{0,2}$
$r_{1,0}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$
$r_{2,0}$	$r_{2,1}$	
$r_{3,0}$		

(2.4)'de formüle edilen f 'in (k,l) mertebeden rasyonel interpolasyon problemi, k ve l

$$m' \leq k$$

$$n' \leq l$$

$$m' + n' + t \geq k + l$$

eşitsizliklerini sağladığında ve 2.1.2.1 Teorem 'deki koşullar sağlandığında çözüme sahiptir.

2.1.3 Normalite

Tablonun bir elemanı tabloda yalnızca bir kez görünüyorsa, o öğeye normal adı verilir.

$r_{m,n}(x)$ rasyonel interpolasyon polinomları normalitesi için gerekli koşul aşağıdaki teoremden belirtilmiştir.

2.1.3.1 Teorem:

$$r_{m,n} = \frac{p_0}{q_0}$$

normal ve $(fq_0 - p_0)(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, m' + n'$ ise bu durumda

(a) $m = m'$ ve $n = n'$

(b) $(fq_0 - p_0)(x_i) \neq 0$ $i = m + n + 1, m + n + 2$

olur.

İspat:

$$(fq_0 - p_0)(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, m' + n'$$

olduğundan dolayı $r_{m,n} = r_{m',n'}$ dir. Buradan $r_{m,n}$ normal ise $m = m'$ ve $n = n'$ olur.

Şimdi $(fq_0 - p_0)(x_{m+n+1}) = 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$r_{m,n} = r_{m+1,n} = r_{m,n+1}$$

olur. Bu $r_{m,n}$ nin normalitesi ile çelişir.

$$(fq_0 - p_0)(x_{m+n+2}) = 0 \text{ ise,}$$

$$p(x) = (x - x_{m+n+1})p_0(x)$$

ve

$$q(x) = (x - x_{m+n+1})q_0(x)$$

buradan,

$$(fq - p)(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, m + n + 2$$

eşitliği sağlanır. Böylece, $r_{m+n} = r_{m+1,n+1}$ olur ki bu, yine $r_{m,n}$ 'in normalitesi ile çelişir.

2.1.3.1 Teorem deki (b) sonucuna göre

$$(fq_0 - p_0)(x_i) \neq 0, \quad \text{eşitsizliği } i \geq m + n + 1 \text{ için}$$

geçerli olmaz.

(a) ve (b) koşullarının $r_{m,n}(x)$ 'in normalitesini garanti etmeye yeterli olmadığını açıklayalım.

$$x_i = i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \text{ve} \quad f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = 3, \quad f(x_3) = 4, \quad f(x_i) = i, \quad i = 4, 5, 6, \dots$$

olsun. $m=1$ ve $n=0$ için 2.1.3.1 Teorem deki (a) ve (b)'yi sağlayan $r_{m,n}(x) = x$ 'i buluruz.

Ancak $r_{m,n}$ normal değildir, çünkü $k \geq 3$ ve $l \geq 2$ için $r_{m,n} = r_{k,l}$ dir. Bununla birlikte, $r_{m,n}$ 'in normalitesi için yeterli bir koşul düzenlemek mümkündür.

2.1.3.2 Teorem

$$r_{m,n} = \frac{p_0}{q_0}$$

$m = m'$, $n = n'$ ve $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisinden en fazla $m+n+1$ nokta için $(fq_0 - p_0)(x_i) = 0$

ise, $r_{m,n}$ normaldir.

İspat:

$r_{m,n}$ 'in normal olmadığını, diğer bir ifadeyle $k \geq m, l \geq n$ için ve $k+l > m+n$ ile birlikte $r_{m,n} = r_{k,l}$ olduğunu varsayalım. 2.1.1.1 Teorem e göre $0 \leq s \leq \min(k-m, l-n)$ koşullarını sağlayan bir s tamsayısı vardır.

$$p(x) = p_0(x) \prod_{i=1}^s (x - y_i)$$

ve

$$q(x) = q_0(x) \prod_{i=1}^s (x - y_i)$$

polinomları

$$(fq - p)(x_i) = 0, \quad i=0, \dots, k+l$$

yi sağlayacak şekilde s tane $\{y_1, \dots, y_s\}$ noktası bulunur. Böylece $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 'deki en az $k+l+1-s$ nokta için $(fq_0 - p_0)(x_i) = 0$ olur. s , $k-m$ ve $l-n$ ile üstten sınırlı olduğu için, $k+l+1-s > m+n+1$ sonucuna varırız. Bu da $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ noktalarından, en fazla $m+n+1$ nokta için $(fq_0 - p_0)(x_i) = 0$ 'ın sağlanması gerçeği ile çelişir.

3. RASYONEL İNTERPOLASYON POLİNOMLARINI HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

Bundan sonra, her $r_{m,n}(x)$ rasyonel interpolasyon polinomlarının (2.4) interpolasyon koşullarını sağladığını kabul edeceğiz. Örneğin bu $\min(m-m', n-n')=0$ olduğunda sağlanır.

3.1 İnterpolasyon Polinomlarının Devamlı Kesirler Halinde Gösterimi

3.1.1 Tanım: a_i ve b_i reel veya kompleks sayı (veya fonksiyon) olmak üzere

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 \dots} + \frac{a_i}{b_i + \dots}}} \quad (3.1)$$

ifadesine devamlı kesir denir. Bundan sonra devamlı kesri

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_1|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots + \frac{a_i}{|b_i|} + \dots \quad (3.2)$$

veya

$$b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{|b_i|} \quad (3.3)$$

şeklinde göstereceğiz.

$$C_n = b_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{|b_i|}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

ifadesine (3.3) devamlı kesrinin n. yakınsağı denir (Cuyt ve Wuytack , 1987). Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$$

limit değeri mevcut ve sonlu ise devamlı kesir yakınsaktır denir. C ise devamlı kesrin değeridir. C_n nin rasyonel ifadesi

$$C_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n(b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)}{Q_n(b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

3.1.1 Teorem: Eğer

$$P_{-1} = 1, P_0 = b_0, Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$$

ise,

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \end{cases}, \quad n \geq 1 \quad (3.6)$$

eşitlikleri sağlanır.

3.1.2 Teorem:

$$r_{m,n} = \frac{p_1}{q_1}$$

ve

$$r_{m+k,n+\ell} = \frac{p_2}{q_2}, \quad (k, \ell \geq 0)$$

ise,

$$\partial v \leq \max(k-1, \ell-1)$$

ve

$$(p_1 q_2 - p_2 q_1)(x) = v(x) B_{m+n+1}(x)$$

olacak şekilde bir $v(x)$ polinomu vardır. Burada $B_{m+n+1}(x) = \prod_{i=0}^{m+n} (x - x_i)$ dir.

İspat:

$r_{m,n}$ ve $r_{m+k,n+\ell}$ rasyonel polinomlarının her ikisinin de (2.4) ü sağladığını kabul edelim. Bu durumda

$$(f q_1 - p_1)(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, m+n$$

$$(f q_2 - p_2)(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, m+k+n+\ell$$

olur. Sonuç olarak,

$$(p_1 q_2 - p_2 q_1)(x_i) = [(f q_2 - p_2) q_1](x_i) - [(f q_1 - p_1) q_2](x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, m+n$$

olur ve $(p_1 q_2 - p_2 q_1)(x) = v(x) B_{m+n+1}(x)$ olacak şekilde bir $v(x)$ polinomu vardır.

$$\partial(p_1 q_2 - p_2 q_1) \leq \max(m+n+k, m+n+\ell) \text{ olduğundan } \partial v \leq \max(k-1, \ell-1) \text{ yazılır.}$$

$$T_k = \{r_{k,0}, r_{k+1,0}, r_{k+1,1}, r_{k+2,1}, \dots\}, \quad k \geq 0$$

rasyonel interpolasyon polinomları göz önüne alalım.

Tablo 3.1 Rasyonel interpolasyon polinomların tablosundaki basamak yapısı

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$r_{k,0}$	$r_{k,1}$	$r_{k,2}$	$r_{k,3}$	$\dots$
$r_{k+1,0}$	$r_{k+1,1}$	$r_{k+1,2}$	$r_{k+1,3}$	$\dots$
$r_{k+2,0}$	$r_{k+2,1}$	$r_{k+2,2}$	$r_{k+2,3}$	
$r_{k+3,0}$	$r_{k+3,1}$	$r_{k+3,2}$	$\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$			

Bu polinomlar üsteki tabloda gösterildiği gibi bir merdiven basamak yapısı oluşturur. Bu durumda $d_i (i \geq 0)$ katsayılarını

$$d_0 + d_1(x-x_0) + \dots + d_k(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) + \frac{d_{k+1}(x-x_0)\dots(x-x_k)}{1} + \frac{d_{k+2}(x-x_{k+1})}{1} + \frac{d_{k+3}(x-x_{k+2})}{1} + \dots \quad (3.7)$$

devamlı kesrin yakınsaklarının T_k 'nin ardışık elemanları olacak şekilde hesaplayabiliriz.

3.1.3 Teorem: T_k 'daki her üç ardışık eleman birbirinden farklıysa, $d_{k+i} \neq 0$, $i \geq 1$ sağlayan, n . yakınsağın T_k 'nın $(n+1)$. elemanına eşit olduğu (3.7) biçiminde bir devamlı kesir vardır. Şimdi d_i ($i \geq 0$) katsayılarını hesaplamak için kullanılabilecek yöntemleri açıklayalım.

3.2 Ters Farklar

G 'de verilen bir f fonksiyonu için ters farklar

$$\varphi_0[x] = f(x) \quad , \quad G\text{'deki her } x \text{ için}$$

$$\varphi_1[x_0, x_1] = \frac{x_1 - x_0}{\varphi_0[x_1] - \varphi_0[x_0]} \quad , \quad G\text{'deki her } x_0, x_1 \text{ için}$$

$$\varphi_k[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\varphi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \varphi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}$$

şeklinde tanımlanır(Cuyt ve Wuytack, 1987).

$\varphi_k[x_0, \dots, x_k]$ 'ya $x_0, \dots, x_k$ noktalarına göre f 'nin k . ters farkı diyoruz. Ters farklar, son iki noktanın sıralamasından bağımsız olmasına rağmen, genellikle $x_0, \dots, x_k$ noktalarının numaralandırılmasına bağlıdır.

$$d_0 + \frac{x - x_0}{d_1} + \frac{x - x_1}{d_2} + \frac{x - x_2}{d_3} + \dots \quad (3.8)$$

formunda bir devamlı kesrin interpolasyonunu hesaplamak için tablo 3.2 deki ters farkların bulunması gerekir.

Tablo 3.2 Ters farklar tablosu

$\varphi_0[x_0]$				
$\varphi_0[x_1]$	$\varphi_1[x_0, x_1]$			
$\varphi_0[x_2]$	$\varphi_1[x_0, x_2]$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_2]$		
$\varphi_0[x_3]$	$\varphi_1[x_0, x_3]$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$\varphi_0[x_n]$	$\varphi_1[x_0, x_n]$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_n]$	$\dots$	$\varphi_n[x_0, \dots, x_n]$

3.2.1 Teorem:

(3.8) ‘deki devamlı kesirde $d_i = \varphi_i[x_0, \dots, x_i]$ ise $C_n(x_i)$ tanımlı olduğundan (3.8) için

n . yakınsağı olan C_n ,

$$C_n(x_i) = f(x_i) , \quad i = 0, \dots, n$$

eşitliğini sağlar.

İspat:

Ters farkların tanımından, $n \geq 1$ için:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \varphi_0[x] \\
 &= \varphi_0[x_0] + \frac{x - x_0}{\varphi_1[x_0, x]} \\
 &= \varphi_0[x_0] + \frac{x - x_0}{\varphi_1[x_0, x_1] + \frac{x - x_1}{\varphi_2[x_0, x_1, x]}} \\
 &= \varphi_0[x_0] + \frac{x - x_0}{\left| \varphi_1[x_0, x_1] \right|} + \frac{x - x_1}{\left| \varphi_2[x_0, x_1, x_2] \right|} + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{\left| \varphi_n[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \right|}
 \end{aligned}$$

olduğundan,

$d_i = \varphi_i[x_0, \dots, x_i]$ ile birlikte C_n istenen interpolasyon koşullarını sağlar.

$$\varphi_0[x_0] + \frac{x - x_0}{\varphi_1[x_0, x_1]} + \frac{x - x_1}{\varphi_2[x_0, x_1, x_2]} + \dots$$

devamlı kesrine Thiele interpolasyon devamlı kesri denir. Bu tekniği daha iyi anlamak için aşağıdaki örneği inceleyelim.

3.2.1 Örnek:

$$x_i = i, \quad i = 0, \dots, 3 \quad f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 3, \quad f(x_2) = 2 \quad \text{ve} \quad f(x_3) = 4$$

verilerini göz önüne alalım. Ters farklar tanımından

1			
3	1/2		
2	2	2/3	
4	1	4	3/10

değerlerini elde ederiz. Buradan

$$1 + \frac{x}{1/2} + \frac{x-1}{2/3} + \frac{x-2}{3/10} = \frac{5x^2 - 5x - 6}{4x - 6} = r(x)$$

rasyonel fonksiyonu $r(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, 3$ eşitliğini sağlar.

Bir önceki örnekte hem ters farkların hesaplanmasında hem de $r(x_i)$ değerlerini bulmada bir zorlukla karşılaşmadık. Hesaplamadaki güçlüklerin varlığını birkaç örnek ile açıklayalım. Şimdi tekrar $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ olmak üzere $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 3 = f(x_2)$ verilerini ele alalım. Bu durumda ters farklar tablosu şöyle olur:

0		
3	1/3	
3	2/3	3

Buradan

$$r(x) = 0 + \frac{x}{1/3} + \frac{x-1}{3} = \frac{3x}{x}$$

bulunur. Bu interpolasyon polinomu $x = x_0$ için tanımlı değildir. Bundan dolayı $r(x_0) = f(x_0)$ interpolasyon koşulunun sağlanması garanti edilemez.

3.2.2 Örnek: $x_i = i$, $i = 0, \dots, 4$ için $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 2$, $f(x_3) = -2$ ve $f(x_4) = 5$ verilerini dikkate alırsak, $\varphi_2[x_0, x_1, x_3]$ elemanı tanımsız olur. Bu elemanda sayı bölü sıfır tanımsızlığı oluşur. Bu durumu daha açık olarak

Tablo 3.3 Örnek 3.2.2 'nin değerlerinin hesaplanması

i	x_i	$f(x_i) = \varphi_0[x_i]$		
0	0	$\varphi_0[x_0] = 1$		
1	1	$\varphi_0[x_1] = 0$	$\varphi_1[x_0, x_1] = -1$	
2	2	$\varphi_0[x_2] = 2$	$\varphi_1[x_0, x_2] = 2$	$\varphi_1[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{3}$
3	3	$\varphi_0[x_3] = -2$	$\varphi_1[x_0, x_3] = -1$	$\varphi_1[x_0, x_1, x_3] = \frac{2}{0}$
4	4	$\varphi_0[x_4] = 5$	$\varphi_1[x_0, x_4] = 1$	

$$\varphi_1[x_0, x_1] = \frac{x_1 - x_0}{\varphi_0[x_1] - \varphi_0[x_0]} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1,$$

$$\varphi_1[x_0, x_2] = \frac{x_2 - x_0}{\varphi_0[x_2] - \varphi_0[x_0]} = \frac{2 - 0}{2 - 1} = 2,$$

$$\varphi_1[x_0, x_3] = \frac{x_3 - x_0}{\varphi_0[x_3] - \varphi_0[x_0]} = \frac{3 - 0}{-2 - 1} = -1,$$

$$\varphi_1[x_0, x_4] = \frac{x_4 - x_0}{\varphi_0[x_4] - \varphi_0[x_0]} = \frac{4 - 0}{5 - 1} = 1,$$

$$\varphi_2[x_0, x_1, x_2] = \frac{x_2 - x_1}{\varphi_1[x_0, x_2] - \varphi_1[x_0, x_1]} = \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3},$$

$$\varphi_2[x_0, x_1, x_3] = \frac{x_3 - x_1}{\varphi_1[x_0, x_3] - \varphi_1[x_0, x_1]} = \frac{3 - 1}{(-1) - (-1)} = \frac{2}{0}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu, söz konusu rasyonel interpolasyonun olmadığı anlamına gelmez. İnterpolasyon verilerinin basit bir permütasyonu, hesaplamaya devam edilebilmesini sağlar. Bu veriler aşağıdaki şekilde tekrar düzenlenirse, yani

$x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ ve $x_4 = 4$ için,

Tablo 3.4 Örnek 3.2.2 'nin değerlerinin tekrar düzenlenerek hesaplanması

i	x_i	$f(x_i) = \varphi_0[x_i]$				
0	0	$\varphi_0[x_0] = 1$				
1	2	$\varphi_0[x_1] = 2$	$\varphi_1[x_0, x_1] = 2$			
2	1	$\varphi_0[x_2] = 0$	$\varphi_1[x_0, x_2] = -1$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{3}$		
3	3	$\varphi_0[x_3] = -2$	$\varphi_1[x_0, x_3] = -1$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_3] = -\frac{1}{3}$	$\varphi_3[x_0, x_1, x_2, x_3] = -3$	
4	4	$\varphi_0[x_4] = 5$	$\varphi_1[x_0, x_4] = 1$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_4] = -2$	$\varphi_3[x_0, x_1, x_2, x_4] = -\frac{9}{7}$	$\varphi_4[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{7}{12}$

değerlerini elde ederiz. Buradan da

$$r(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x-2}{1/3} + \frac{x-1}{-3} + \frac{x-3}{7/12} = \frac{23x^2 - 85x + 62}{12x^2 - 59x + 62}$$

rasyonel interpolasyon polinomunu elde ederiz. Bu ifade $i = 0, \dots, 4$ için $r(x_i) = f(x_i)$ olur.

Şimdi karşılıklı ters farkları verelim. Bu ters farklar bizi verilerin sıralanmasına bağımlı olmaktan kurtarır.

3.3 Karşılıklı Ters Farklar

G' 'de verilen bir f fonksiyonunun karşılıklı ters farkları

$$\rho_0[x] = f(x) \quad , \quad G' \text{deki her } x \text{ için}$$

$$\rho_1[x_0, x_1] = \frac{x_1 - x_0}{\rho_0[x_1] - \rho_0[x_0]} \quad , \quad G' \text{deki her } x_0, x_1 \text{ için}$$

$$\rho_2[x_0, x_1, x_2] = \frac{x_2 - x_1}{\rho_1[x_0, x_2] - \rho_1[x_0, x_1]} + \rho_0[x_0] \quad , \quad G' \text{deki her } x_0, x_1, x_2 \text{ için}$$

$$\rho_k[x_0, \dots, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\rho_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \rho_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]} + \rho_{k-2}[x_0, \dots, x_{k-2}]$$

şeklinde tanımlanır. G' 'deki her $x_0, \dots, x_k$ için, $\rho_k[x_0, \dots, x_k]$ ifadesine, f fonksiyonun $x_0, \dots, x_k$ noktalarına karşılık gelen, k . karşılıklı ters farkı denir. Ters ve karşılıklı ters farklar arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki teoremdeki gibidir.

3.3.1 Teorem:

$k \geq 2$ için ve G' 'deki tüm $x_0, \dots, x_k$ 'lar için

$$\varphi_0[x_0] = \rho_0[x_0]$$

$$\varphi_1[x_0, x_1] = \rho_1[x_0, x_1]$$

$$\varphi_k[x_0, \dots, x_k] = \rho_k[x_0, \dots, x_k] - \rho_{k-2}[x_0, \dots, x_{k-2}]$$

olur.

İspat :

Yukarıdaki bağıntılar, tanımların sonucudur.

Yukarıdaki teorem aşağıdaki önemli özelliğin ispatı için yardımcıdır.

3.3.2 Teorem:

$\rho_k[x_0, \dots, x_k]$ ifadesi, $x_0, \dots, x_k$ noktalarının indeks sırasına bağlı değildir.

İspat:

(3.8) devamlı kesrini göz önünde bulundurulur ve (3.6) yineleme bağıntısından

$$P_{-1} = 1 \quad , \quad P_0 = d_0 \quad ,$$

$$Q_{-1} = 0 \quad , \quad Q_0 = 1 \quad .$$

$$\begin{cases} P_i = d_i P_{i-1} + (x - x_{i-1}) P_{i-2} \\ Q_i = d_i Q_{i-1} + (x - x_{i-1}) Q_{i-2} \end{cases} \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

yazılır. Buradan k . yakınsağı; $k = 2j$, ($j \in \mathbb{Z}^+$) için,

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_j x^j}{b_0 + b_1 x + \dots + b_j x^j}$$

ve

$k = 2j - 1$ için

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_j x^j}{b_0 + b_1 x + \dots + b_{j-1} x^{j-1}}$$

şeklinde elde ederiz.

Her iki durumda da pay ve paydadaki en yüksek dereceli terimlerin katsayılarını, k . yakınsağı için yineleme bağıntıları ve bir önceki teoremi kullanarak hesaplarız:

k çift olduğu durumda

$$a_j = \rho_k [x_0, \dots, x_k]$$

$$b_j = 1$$

ve k tek iken

$$a_j = 1$$

$$b_{j-1} = \rho_k [x_0, \dots, x_k]$$

elde ederiz.

$\rho_k[x_0, \dots, x_k]$ rasyonel interpolasyon polinomundaki katsayıların oranı olarak görüldüğünden $x_0, \dots, x_k$ 'nin indeks sırasından bağımsızdır, çünkü rasyonel interpolasyon polinomunun kendisi bu sıralamadan bağımsızdır.

(3.8) formundaki interpolasyon devamlı kesri, şu şekilde de hesaplanabilir: Karşılıklı ters farkların bir tablosu oluşturulur. $d_0 = \rho_0[x_0]$, $d_1 = \rho_1[x_0, x_1]$ ve $i \geq 2$ için $d_i = \rho_i[x_0, \dots, x_i] - \rho_{i-2}[x_0, \dots, x_{i-2}]$

değerleri hesaplanır.

Şimdiye kadar, sadece azalan basamak olan T_0 'da bulunan rasyonel interpolasyon polinomları oluşturduk. T_k , $k > 0$ daki bir rasyonel interpolasyon polinomunu bulmak için şu yöntem izlenir:

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) + \frac{c_{k+1}(x - x_0) \dots (x - x_k)}{1} + \frac{x - x_{k+1}}{d_{k+2}} + \frac{x - x_{k+2}}{d_{k+3}} + \dots \quad (3.9)$$

biçiminde, yakınsakları T_k 'nin elemanları olan devamlı kesir elde edilir.

İlk iki yakınsağı olan $r_{k,0}$ ve $r_{k+1,0}$, f 'nin sırasıyla k ve $k+1$ dereceli polinom interpolasyon polinomları olduğu için, $c_0, \dots, c_{k+1}$ ler $f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_{k+1}]$ 'in bölünmüş farklarıdır.

Örneğin $r_{k+\ell, \ell}$ yi hesaplamak için (3.9)'un (2l) inci yakınsağına ihtiyacımız vardır.

d_{k+i} katsayılarını bulmak için

$$r_{k+\ell, \ell}(x) = p(x) + \frac{q(x)}{s(x)}, \quad i = 2, \dots, 2\ell$$

yazarız, burada

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

$$q(x) = c_{k+1}(x - x_0) \dots (x - x_k)$$

dir. s yi tanımlamak için şöyle devam ederiz:

$$r_{k+\ell, \ell}(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, k + 2\ell$$

koşulları s nin

$$s(x_i) = \frac{q(x_i)}{f(x_i) - p(x_i)}, \quad i = k+1, \dots, k+2\ell$$

eşitliğini sağlaması gerektiğini gösterir. Bu sebeple, $s(x)$

$$1 + \frac{|x - x_{k+1}|}{|d_{k+2}|} + \frac{|x - x_{k+2}|}{|d_{k+3}|} + \dots$$

devamlı kesrinin $(2\ell - 1)$ inci yakınsağıdır. Dolayısıyla $s(x)$

$$\frac{q}{f - p}$$

fonksiyonunun rasyonel interpolasyon polinomları tablosunda azalan basamak olan T_0 'ın elemanıdır. $c_0, \dots, c_{k+1}$ katsayıları bilindiğinde $q/(f - p)$ fonksiyonu kurulabilir ve bunun ters veya karşılıklı ters farkları hesaplanabilir. d_{k+i} , $i \geq 2$ katsayıları bu ters farklardır. Böylece, f fonksiyonu için T_k 'daki bir elemanın hesaplanmasından

$$\frac{q}{f - p}$$

için T_0 'daki bir elemanın bulunmasına indirgenmiştir. Bu durum aşağıdaki tabloda daha açık bir şekilde gösterilmiştir.

Tablo 3.5 T_0 ve T_k daki azalan basamak yapısı

$r_{0,0}$	$r_{0,1}$	$r_{0,2}$	$r_{0,3}$	...
$r_{1,0}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$r_{1,3}$	...
$r_{2,0}$	$r_{2,1}$	$r_{2,2}$	$r_{2,3}$	...
$r_{3,0}$	$r_{3,1}$	$r_{3,2}$	$\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$r_{k,0}$	$r_{k,1}$	$r_{k,2}$	$r_{k,3}$	...
$r_{k+1,0}$	$r_{k+1,1}$	$r_{k+1,2}$	$r_{k+1,3}$	...
$r_{k+2,0}$	$r_{k+2,1}$	$r_{k+2,2}$	$r_{k+2,3}$	
$r_{k+3,0}$	$r_{k+3,1}$	$r_{k+3,2}$	$\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$			

3.4 QD(Quotient Difference)-Algoritmasının Bir Genellemesi

Şimdi,

$$\begin{aligned}
 g_k(x) = c_0 + \sum_{i=1}^k c_i (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1}) + \dots + \frac{c_{k+1}(x-x_0)\dots(x-x_k)}{1} + \frac{-q_1^{(k+1)}(x-x_{k+1})}{1+q_1^{(k+1)}(x_0-x_{k+1})} \\
 + \frac{-e_1^{(k+1)}(x-x_{k+2})}{1+e_1^{(k+1)}(x_0-x_{k+2})} + \frac{-q_2^{(k+1)}(x-x_{k+3})}{1+q_2^{(k+1)}(x_0-x_{k+3})} + \frac{-e_2^{(k+1)}(x-x_{k+4})}{1+e_2^{(k+1)}(x_0-x_{k+4})} + \dots
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

devamlı kesirleri göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

3.4.1 Teorem:

T_k 'daki her üç ardışık eleman birbirinden farklıysa, (3.10) formunda, $i \geq 1$ için $c_{k+1} \neq 0$, $q_i^{(k+1)} \neq 0$, $e_i^{(k+1)} \neq 0$, $1+q_i^{(k+1)}(x_0-x_{k+2i-1}) \neq 0$ ve $1+e_i^{(k+1)}(x_0-x_{k+2i}) \neq 0$ 'ı sağlayan ve n . yakınsağının T_k 'nın $(n+1)$ inci elemanına eşit olduğu bir devamlı kesir vardır.

İspat:

T_k 'daki elemanlar için

$$r_{k+i,j} = \frac{p_{k+i,j}}{q_{k+i,j}} \quad i = j, j+1 \text{ ve } j = 0, 1, 2, \dots$$

ve $g_k(x)$ 'in yakınsakları için

$$C_n = \frac{P_n}{Q_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } Q_0 = Q_1 = 1$$

yazarız. n . yakınsağı

$$\frac{P_n}{Q_n} \quad (n \geq 0)$$

ifadesine eşit olan devamlı bir kesir elde edilir ve bu elde edilen kesire denklik dönüşümü uygulanırsa

$$P_0 + \frac{P_1 - P_0}{1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{P_i Q_{i+1} - P_{i+1} Q_i}{P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i}}{\frac{P_{i+1} Q_{i-1} - P_{i-1} Q_{i+1}}{P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i}} \quad (3.11)$$

olur.

$$C_n = \frac{P_n}{Q_n} = r_{k+\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \frac{p_{k+\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{q_{k+\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

için, 3.1.2 Teorem den, $i \geq 1$ olmak üzere, $a_i \neq 0$ ve $b_i \neq 0$ olmak koşullarıyla

$$\frac{P_i Q_{i+1} - P_{i+1} Q_i}{P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i} = a_i (x - x_{k+i})$$

$$\frac{P_{i+1} Q_{i-1} - P_{i-1} Q_{i+1}}{P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i} = b_i$$

elde ederiz. Böylece (3.11) deki devamlı kesir

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) + \frac{c_{k+1}(x - x_0) \dots (x - x_k)}{1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x - x_{k+i})}{b_i}$$

olur. $r_{k,0} \neq r_{k+1,0}$ olduğundan $c_{k+1} \neq 0$ olur.

Aynı zamanda, (3.11) için

$$P_n = p_{k+\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

$$Q_n = q_{k+\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

ifadeleri de doğrudur. Böylece

$$1 = Q_n(x_0) = b_n Q_{n-1}(x_0) + a_n(x_0 - x_{k+n}) Q_{n-2}(x_0) = b_n + a_n(x_0 - x_{k+n})$$

ya da

$$b_n = 1 - a_n(x_0 - x_{k+n}) \quad n \geq 0$$

elde edilir.

$i \geq 1$ için

$$a_{2i-1} = -q_i^{(k+1)}$$

$$a_{2i} = -e_i^{(k+1)}$$

yazılır ve (3.11)'nin (3.10) şeklinde yazılabileceği görülür.

(3.10)'daki $q_i^{(k+1)}$ ve $e_i^{(k+1)}$ katsayılarını hesaplamak için aşağıdaki yineleme bağıntıları kullanılabilir. Şimdi, $g_k(x)$ devamlı kesrinin çift kısmını ve $g_{k-1}(x)$ devamlı kesrinin tek kısmını hesaplayalım. Bu şekilde hesaplamalar, $r_{k,0}, r_{k+1,1}, r_{k+2,2} \dots$ yakınsakları ile aynı interpolasyon polinomunu verir. Böylece

$k \geq 1$ için

$$e_0^{(k)} = 0$$

$$q_1^{(k)} = \frac{f[x_0, \dots, x_{k+1}]}{f[x_1, \dots, x_{k+1}]}$$

ve $\ell \geq 1$ ve $k \geq 1$ için

$$e_\ell^{(k)} = \frac{q_\ell^{(k+1)} - q_\ell^{(k)} + e_{\ell-1}^{(k+1)} [1 + q_\ell^{(k+1)} (x_0 - x_{k+2\ell-1})]}{1 + q_\ell^{(k)} (x_0 - x_{k+2\ell-1})}$$

$$q_{\ell+1}^{(k)} = \frac{e_\ell^{(k+1)} q_\ell^{(k+1)} [1 + e_\ell^{(k)} (x_0 - x_{h+2\ell})]}{e_\ell^{(k)} [1 + q_\ell^{(h+1)} (x_0 - x_{k+2\ell-1})] + e_\ell^{(h+1)} (e_\ell^{(h)} - q_\ell^{(k+1)}) (x_0 - x_{h+2\ell+1})}$$

yazılabilir (Claessens G, 1981).

Bu katsayılar genellikle aşağıdaki tabloda olduğu gibi sıralanır.

Tablo 3.6 QD-algoritmasının katsayıları

$e_0^{(1)}$				
	$q_1^{(1)}$			
$e_0^{(2)}$		$e_1^{(1)}$		
	$q_1^{(2)}$		$q_2^{(1)}$	
$e_0^{(3)}$		$e_1^{(2)}$		$e_2^{(1)}$
	$q_1^{(3)}$		$q_2^{(2)}$	$\ddots$
$e_0^{(4)}$		$e_1^{(3)}$		$e_2^{(2)}$
	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Yine, üst indis tablodaki bir köşegeni ve alt indis de bir sütunu belirtir.

3.5 Gragg Algoritmasının Bir Genellemesi

Bir önceki algoritma qd-algoritmasının geliştirilmiştir ve alçalan basamaklardaki elemanları hesaplamak için kullanılır. Gragg algoritmasını da genelleştirebiliriz ve yükselen basamaklardaki rasyonel interpolasyon polinomlarını bulabiliriz (Claessens G, 1976). Burada, rasyonel interpolasyon polinomları tablosunun normal olduğunu kabul ediyoruz.

$k \geq 1$ için

$$S_k = \{r_{k,0}, r_{k-1,0}, r_{k-1,1}, r_{k-2,1}, \dots, r_{0,k-1}, r_{0,k}\}$$

basamağını ve

$$f_k(x) = c_0 + \sum_{i=1}^k c_i (x-x_0) \dots (x-x_{i-1}) - \frac{c_k (x-x_0) \dots (x-x_{h-1})}{1} - \frac{f_1^{(k)}}{|x-x_k|} - \frac{s_1^{(k)}}{1} - \frac{f_2^{(k)}}{|x-x_k|} - \dots - \frac{f_h^{(k)}}{|x-x_k|} \quad (3.12)$$

şeklindeki devamlı kesirleri düşünelim.

3.4.1 Teorem'e benzer şekilde, S_k 'nin üç ardışık elemanı birbirinden farklı olduğu sürece,

f_k 'nin ardışık yakınsakları S_k 'nin elemanları olacak şekilde, $f_i^{(k)} \neq 0$ ve $s_i^{(k)} \neq 0$ katsayılarının var olduğu ispatlanabilir.

S_k ve S_{k+1} komşu basamakları arasındaki bağıntıdan yararlanarak, aşağıdaki yineleme bağıntıları yazılabilir:

$k \geq 1$ için

$$w_k = (1/f)[x_0, \dots, x_k] \text{ için}$$

$$s_0^{(k-1)} = 0$$

$$f_k^{(k-1)} = 0$$

$$f_1^{(k)} = \frac{c_{k-1}}{c_k}$$

$$s_k^{(k)} = \frac{w_{k-1}}{w_k}$$

ve

$k \geq 1$ ve $1 \leq \ell \leq k-1$ için

$$s_\ell^{(k)} = s_{\ell-1}^{(k-1)} + f_\ell^{(k-1)} - f_\ell^{(k)} - (x_k - x_{k-1})$$

(3.13)

$$f_{\ell+1}^{(k)} = f_\ell^{(k-1)} \frac{s_\ell^{(k-1)}}{s_\ell^{(k)}}$$

olur.

$f_\ell^{(k)}$ ve $s_\ell^{(k)}$ katsayıları aşağıdaki tabloda görüldüğü gibidir.

Tablo 3.7 Gragg algoritmasının katsayıları

	$f_1^{(0)}$	$f_2^{(1)}$	$\dots$
$s_0^{(0)}$		$s_1^{(1)}$	
	$f_1^{(1)}$	$f_2^{(2)}$	$\dots$
$s_0^{(1)}$		$s_1^{(2)}$	
	$f_1^{(2)}$	$f_2^{(3)}$	$\dots$
$s_0^{(2)}$		$s_1^{(3)}$	
	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$		$\vdots$	

Bu tabloda her bir yukarı eğimli köşegen, (3.12) deki devamlı kesri oluşturmak için gerekli katsayıları içerir.

3.6 Genelleştirilmiş ϵ - Algoritması

Yine, iki komşu basamak olan S_{m+n} ve S_{m+n+1} i göz önüne alalım. Bunların her biri (3.12) şeklindeki devamlı bir kesir tarafından temsil edilir. S_{m+n} 'den oluşan devamlı kesrin ardışık yakınsakları (3.6) 'daki yineleme bağıntıları vasıtasıyla elde edilebilir (Lübbe W. , 1983).

$$r_{m,n} = \frac{p_{m,n}}{q_{m,n}}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$p_{m-1,n+1} = (x - x_{m+n}) p_{m-1,n} - f_{n+1}^{(m+n)} p_{m,n} \quad (3.14)$$

$$q_{m-1,n+1} = (x - x_{m+n}) q_{m-1,n} - f_{n+1}^{(m+n)} q_{m,n}$$

ve

$$p_{m-1,n} = p_{m,n} - s_n^{(m+n)} p_{m,n-1} \quad (3.15)$$

$$q_{m-1,n} = q_{m,n} - s_n^{(m+n)} q_{m,n-1}$$

olur.

Böylece, (3.14)'u kullanarak,

$$\begin{aligned} r_{m-1,n} - r_{m,n} &= \frac{p_{m-1,n+1} + f_{n+1}^{(m+n)} p_{m,n}}{q_{m-1,n+1} + f_{n+1}^{(m+n)} q_{m,n}} - \frac{p_{m,n}}{q_{m,n}} \\ &= \frac{p_{m-1,n+1} q_{m,n} - p_{m,n} q_{m-1,n+1}}{q_{m,n} (q_{m-1,n+1} + f_{n+1}^{(m+n)} q_{m,n})} \end{aligned}$$

eşitliğini, (3.14) ve (3.15)' i kullanarak

$$\begin{aligned} r_{m,n} - r_{m,n-1} &= \frac{p_{m,n}}{q_{m,n}} - \frac{p_{m,n} (x - x_{m+n} - f_{n+1}^{(m+n)}) - p_{m-1,n+1}}{q_{m,n} (x - x_{m+n} - f_{n+1}^{(m+n)}) - q_{m-1,n+1}} \\ &= \frac{p_{m-1,n+1} q_{m,n} - p_{m,n} q_{m-1,n+1}}{q_{m,n} [q_{m,n} (x - x_{m+n} - f_{n+1}^{(m+n)}) - q_{m-1,n+1}]} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu iki bağıntıyı birleştirerek,

$$(r_{m-1,n} - r_{m,n})^{-1} + (r_{m,n} - r_{m,n-1})^{-1} = \frac{(x - x_{m+n}) \frac{q_{m,n}}{q_{m-1,n+1}}}{r_{m-1,n+1} - r_{m,n}}$$

elde ederiz.

S_{m+n+1} üzerinde de benzer işlemler ile,

$$(r_{m,n+1} - r_{m,n})^{-1} + (r_{m,n} - r_{m+1,n})^{-1} = \frac{(x - x_{m+n+1}) \frac{q_{m,n}}{q_{m-1,n+1}}}{r_{m-1,n+1} - r_{m,n}}$$

elde edilir. Son iki ifadeden,

$$\begin{aligned} (x - x_{m+n})^{-1} (r_{m-1,n} - r_{m,n})^{-1} + (x - x_{m+n+1})^{-1} (r_{m+1,n} - r_{m,n})^{-1} \\ = (x - x_{m+n})^{-1} (r_{m,n-1} - r_{m,n})^{-1} + (x - x_{m+n+1})^{-1} (r_{m,n+1} - r_{m,n})^{-1} \end{aligned}$$

sonucuna varırız.

Bu sonucu kullanarak aşağıdaki genelleştirilmiş ϵ - algoritmasını oluşturmak mümkündür.

$$\epsilon_{2n}^{(m-n)} = r_{m,n}(x)$$

ile beraber

$$\epsilon_{-1}^{(m)} = 0 \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\epsilon_{2n}^{(-n-1)} = 0 \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\epsilon_0^{(m)} = r_{m,0}(x) \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\epsilon_{n+1}^{(m)} = \epsilon_{n-1}^{(m+1)} + \frac{1}{(x - x_{m+n+1})(\epsilon_n^{(m+1)} - \epsilon_n^{(m)})} \quad \begin{matrix} m = -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \dots \\ n = 0, 1, \dots \end{matrix}$$

3.7 Stoer'in Yineleme Yöntemi

Yineleme yöntemleri, özellikle bir interpolasyon polinomunun kendisi yerine fonksiyon değerine ihtiyaç duyulduğunda kullanılması önemlidir. Rasyonel interpolasyon problemi için bir kaç yineleme algoritmasından biri genelleştirilmiş ϵ -algoritmasıdır. Şimdi Stoer tarafından tanımlanmış algoritmayı açıklayacağız.

$$p_{m,n}^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

olsun ve

$$q_{m,n}^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

olmak üzere,

$$(fq_{m,n}^{(j)} - p_{m,n}^{(j)})(x_i) = 0 \quad , \quad i = j, \dots, j + m + n$$

olarak tanımlayalım, diğer bir ifade ile (2.5)'deki x_j 'de başlayan interpolasyon problemi çözülür ve bu problemdeki $a_{m,n}^{(j)}$ ve $b_{m,n}^{(j)}$ katsayıları sırasıyla $p_{m,n}^{(j)}$ ve $q_{m,n}^{(j)}$ polinomlarındaki m ve n dereceli katsayılarını gösterebilir. Aşağıdaki bağıntılar, ana köşegen üzerindeki azalan basamakta bulunan rasyonel interpolasyon polinomlarının ardışık sıralanmasını belirtir.

$$\left\{ \frac{p_{0,0}^{(j)}}{q_{0,0}^{(j)}}, \frac{p_{1,0}^{(j)}}{q_{1,0}^{(j)}}, \frac{p_{1,1}^{(j)}}{q_{1,1}^{(j)}}, \frac{p_{2,1}^{(j)}}{q_{2,1}^{(j)}}, \dots \right\}$$

3.7.1 Teorem:

$$p_{0,0}^{(j)}(x) = f_j$$

ve

$$q_{0,0}^{(j)}(x) = 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} p_{n,n}^{(j)}(x) &= (x - x_j) a_{n,n-1}^{(j)} p_{n,n-1}^{(j+1)}(x) - (x - x_j + 2n) a_{n,n-1}^{(j+1)} p_{n,n-1}^{(j)}(x), \\ q_{n,n}^{(j)}(x) &= (x - x_j) a_{n,n-1}^{(j)} q_{n,n-1}^{(j+1)}(x) - (x - x_j + 2n) a_{n,n-1}^{(j+1)} q_{n,n-1}^{(j)}(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ve

$$\begin{aligned} p_{n+1,n}^{(j)}(x) &= (x - x_j) b_{n,n}^{(j)} p_{n,n}^{(j+1)}(x) - (x - x_j + 2n + 1) b_{n,n}^{(j+1)} p_{n,n}^{(j)}(x), \\ q_{n+1,n}^{(j)}(x) &= (x - x_j) b_{n,n}^{(j)} q_{n,n}^{(j+1)}(x) - (x - x_j + 2n + 1) b_{n,n}^{(j+1)} q_{n,n}^{(j)}(x) \end{aligned}$$

olur.

İspat:

Burada yalnızca ilk bağıntılar için ispat yapacağız, çünkü ikinci kısım tamamen birinci kısma benzerdir. $p_{n,n-1}^{(j)}$ ve $p_{n,n-1}^{(j+1)}$ den $p_{n,n}^{(j)}$ 'ye geçilmek istendiğinde payın derecesi yükseltilmez.

(3.16) nın sağ tarafındaki $n + 1$ dereceli terimin katsayısı

$$a_{n,n-1}^{(j)} a_{n,n-1}^{(j+1)} - a_{n,n-1}^{(j+1)} a_{n,n-1}^{(j)} = 0$$

şeklinde. $i = j, \dots, j + 2n$ için x_i 'daki interpolasyon koşullarını kontrol etmek için interpolasyon noktaları kümesini üç altkümeye ayırırız:

$$(a) \quad (f q_{n,n}^{(j)} - p_{n,n}^{(j)})(x_j) = -(x_j - x_{j+2n}) a_{n,n-1}^{(j+1)} (f q_{n,n-1}^{(j)} - p_{n,n-1}^{(j)})(x_j) = 0,$$

$$(f q_{n,n-1}^{(j+1)} - p_{n,n-1}^{(j+1)})(x_i) = 0$$

ve

$$(f q_{n,n-1}^{(j)} - p_{n,n-1}^{(j)})(x_i) = 0$$

olduğundan dolayı

$$(b) \quad (f q_{n,n}^{(j)} - p_{n,n}^{(j)})(x_i) = 0 \quad i = j+1, \dots, j+2n-1$$

olur.

$$(c) \quad (f q_{n,n}^{(j)} - p_{n,n}^{(j)})(x_j + 2n) = (x_j + 2n - x_j) a_{n,n-1}^{(j)} (f q_{n,n-1}^{(j+1)} - p_{n,n-1}^{(j+1)})(x_{j+2n}) = 0.$$

Yine, bu bağıntılar diğer alçalan basamaklardaki rasyonel interpolasyon polinomlarının bulunması için kolayca uyarlanabilirler.

$$\left\{ \frac{p_{k,0}^{(j)}}{q_{k,0}^{(j)}}, \frac{p_{k+1,0}^{(j)}}{q_{k+1,0}^{(j)}}, \frac{p_{k+1,1}^{(j)}}{q_{k+1,1}^{(j)}}, \dots \right\}$$

deki interpolasyon polinomlarını bulmak için

$$p_{k,0}^{(j)} = c_0 + \sum_{i=1}^k c_i (x - x_j) \dots (x - x_{j+i-1})$$

$$q_{k,0}^{(j)} = 1$$

ile başlanır, burada c_i , f' 'nin bölünmüş farklarıdır.

$$\left\{ \frac{p_{0,k}^{(j)}}{q_{0,k}^{(j)}}, \frac{p_{1,k}^{(j)}}{q_{1,k}^{(j)}}, \frac{p_{1,k+1}^{(j)}}{q_{1,k+1}^{(j)}}, \dots \right\}$$

deki interpolasyon polinomlarını bulmak için

$$p_{0,k}^{(j)} = 1$$

$$q_{0,k}^{(j)} = w_0 + \sum_{i=1}^k w_i (x - x_j) \dots (x - x_{j+i-1})$$

ile başlanır, burada w_i , $\frac{1}{f}$ in bölünmüş farklarıdır.

4. RASYONEL HERMİTE İNTERPOLASYONU

4.1 Rasyonel Hermite İnterpolasyon Polinomlarının Tanımı

Şimdi $s_i \in \mathbb{N}$, $(i \geq 0)$ olmak üzere birbirinden farklı $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ noktalarını göz önüne alalım. f fonksiyonunun x_i noktasındaki $f^{(\ell)}(x_i)$ türevlerinin verildiğini kabul edelim. Burada $\ell = 0, \dots, s_i - 1$ dir. Şimdi,

$$1 \leq k \leq s_{j+1}$$

$$m + n + 1 = \sum_{i=0}^j s_i + k$$

sağlayan j, k, m ve n sabit tamsayılarını ele alalım.

f için (m, n) mertebeden rasyonel Hermite interpolasyon problemi,

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

ve

$$q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

polinomlarını bulmaya bağlıdır, p/q indirgenemez ve

$$\left\{ \begin{array}{ll} f^{(\ell)}(x_i) = \left(\frac{p}{q} \right)^{(\ell)}(x_i) & , \ell = 0, \dots, s_i - 1 \text{ ve } i = 0, \dots, j \\ f^{(\ell)}(x_{j+1}) = \left(\frac{p}{q} \right)^{(\ell)}(x_{j+1}) & , \ell = 0, \dots, k - 1 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

eşitliklerini sağlar. Bu interpolasyon probleminde, s_i interpolasyon noktaları x_i ile çakışmaktadır, bu yüzden s_i interpolasyon koşulları, x_i 'de sağlanmak zorundadır. Dolayısıyla, bu tip bir interpolasyon problemi çoğunlukla salınımlı(osculatory) rasyonel interpolasyon problemi olarak adlandırılır (Warner D. , 1974). Her $i \geq 0$ için $s_i = 1$ olduğu durumda problem, (2.4) deki rasyonel interpolasyon problemi ile aynı olur.

(4.1) deki problemi çözmek yerine,

$$\begin{cases} (fq - p)^{(\ell)}(x_i) = 0 & \ell = 0, \dots, s_i - 1 \text{ ve } i = 0, \dots, j \\ (fq - p)^{(\ell)}(x_{j+1}) = 0 & \ell = 0, \dots, k - 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

lineer denklem sistemini ele alabiliriz. Bu problem $m+n+1$ denklem ve $m+n+2$ bilinmeyenden oluşan homojen bir sistem olduğundan $p(x)$ ve $q(x)$ için her zaman aşıkâr olmayan bir çözümü vardır. Yine farklı çözümler aynı p_0/q_0 indirgenemez forma sahiptir ve

$$r_{m,n} = \frac{p_0}{q_0}$$

eşitliğine f 'in (m, n) mertebeden rasyonel Hermite interpolasyon polinomu denir. Burada q_0 , $q_0(x_0) = 1$ olacak şekilde normalize edilmiştir. Rasyonel Hermite interpolasyon problemi, bir Newton-Padé yaklaşım problemi şeklinde yeniden formülasyonu yapılabilir. Şimdi,

$$f[y_i, \dots, y_j]$$

bölünmüş farkında noktalarının birleşimi ile birlikte,

$$y_\ell = x_0 \quad \ell = 0, \dots, s_0 - 1$$

$$y_{d(i)+\ell} = x_i \quad \ell = 0, \dots, s_i - 1 \text{ ve } d(i) = s_0 + s_1 + \dots + s_{i-1} \quad (i \geq 1)$$

$$c_{ij} = 0 \quad i > j$$

$$c_{ij} = f[y_i, \dots, y_j] \quad i \leq j$$

$$B_0(x) = 1$$

olmak üzere,

$$B_j(x) = \prod_{\ell=1}^j (x - y_{\ell-1})$$

alırsak

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{0i} B_i(x)$$

eşitliğini buluruz. Bu seriye f 'nin Newton Serisi denir.

Böylece, (4.2)'deki problem,

$$(f - q - p)(x) = \sum_{i \geq m+n+1} d_i B_i(x) \quad (4.3)$$

olacak şekilde

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i B_i(x)$$

ve

$$q(x) = \sum_{i=0}^n b_i B_i(x)$$

polinomlarının hesaplanması ile eşdeğerdir.

Problem (4.3) e f nin (m, n) mertebeden Newton-Padé yaklaşım problemi denir.

(4.3) ü sağlayan p ve q çözümlerini bulmak için,

$$d_i = (f - q - p)[y_0, \dots, y_i] \quad , \quad i = 0, \dots, m+n$$

bölünmüş farkları hesaplanmalı ve sıfıra eşitlenmelidir. Fonksiyonların çarpımının türevi için kullanılan Leibniz kuralının bir genellemesi olan aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 4.1

$$(f - q)[y_0, \dots, y_i] = \sum_{\ell=0}^i f[y_0, \dots, y_\ell] q[y_\ell, \dots, y_i]$$

olur (Thiele T. , 1909). Şimdi lemma 4.1 i kullanarak, p ve q 'daki a_i ve b_i katsayılarının sağlamak zorunda olduğu doğrusal denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{cases} c_{00}b_0 = a_0 \\ c_{01}b_0 + c_{11}b_1 = a_1 \\ \vdots \\ c_{0m}b_0 + c_{1m}b_1 + \dots + c_{nm}b_n = a_m \end{cases} \quad (4.4a)$$

$$\begin{cases} c_{0,m+1}b_0 + \dots + c_{n,m+1}b_n = 0 \\ \vdots \\ c_{0,m+n}b_0 + \dots + c_{n,m+n}b_n = 0 \end{cases} \quad (4.4b)$$

yazılır. (4.2) ve (4.3) problemleri özdeş olduğundan, $r_{m,n}$ rasyonel fonksiyonuna da f nin

(m, n) mertebeden Newton-Padé yaklaşımı denir.

Rasyonel interpolasyon probleminin ispatındaki aynı yöntemle aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

4.1.1 Teorem:

(4.1) deki rasyonel Hermite interpolasyon problemi ancak ve ancak $r_{m,n} = p_0 / q_0$ rasyonel Hermite interpolasyon polinomu (4.2) yi sağladığı durumda çözüme sahiptir.

4.1 Test Problem: $f(x) = \cot(x)$ fonksiyonunun $[-0.5, 0.5]$ aralığındaki değerlerine karşılık gelen aşağıdaki tablodaki noktaları kullanarak rasyonel Hermite interpolasyon polinomunu bululalım. Bulduğumuz rasyonel Hermite interpolasyon polinomunda aralığın diğer noktalarını yazıp fonksiyonun tam değerleri ile karşılaştıralım.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
0	-0.5	-1.830487722		
1	-0.2	-4.933154876	-25.33601703	
2	0.1	9.966644423	-100.3340010	1999.986623
3	0.5	1.830487722		

Çözüm : Bu tablodaki değerleri

$$m = 3 \text{ için, } p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i = \sum_{i=0}^3 a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$n = 3 \text{ için, } q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^3 b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

ve

$$\begin{cases} r_{3,3}(x_i) = f(x_i) = \frac{p(x_i)}{q(x_i)} \Rightarrow f(x_i)q(x_i) - p(x_i) = 0, & i = 0, 1, 2, 3 \\ r'_{3,3}(x_i) = f'(x_i) \Rightarrow f'(x_i)q^2(x_i) - (p'(x_i)q(x_i) - q'(x_i)p(x_i)) = 0, & i = 1, 2 \\ r''_{3,3}(x_i) = f''(x_i) \Rightarrow f''(x_i)q^3(x_i) - (p''(x_i)q^2(x_i) - 2p'(x_i)q'(x_i)q(x_i) \\ \quad + 2p(x_i)(q''(x_i))^2 - p(x_i)q''(x_i)q'(x_i)) = 0, & i = 2 \end{cases}$$

formüllerinde kullanılırsak,

$$\begin{cases}
-1.830487722+0.9152438610b_1-0.4576219305b_2+0.2288109652b_3 = a_0-0.5a_1+0.25a_2-0.125a_3, \\
-4.933154876+0.9866309752b_1-0.1973261950b_2+0.3946523901b_3 = a_0-0.2a_1+0.4a_2-0.8a_3, \\
9.966644423+0.9966644423b_1+0.09966644423b_2+0.009966644423b_3 = a_0+0.1a_1+0.01a_2+0.001a_3, \\
1.830487722+0.9152438610b_1+0.4576219305b_2+0.2288109652b_3 = a_0+0.5a_1+0.25a_2+0.125a_3, \\
-25.33601703(1-0.2b_1+0.04b_2-0.008b_3)^2 = (a_1-0.4a_2+0.12a_3)(1-0.2b_1+0.04b_2-0.008b_3) \\
\quad - (b_1-0.4b_2+0.12b_3)(a_0-0.2a_1+0.04a_2-0.008a_3), \\
-100.3340010(1+0.1b_1+0.01b_2+0.001b_3)^2 = (a_1+0.2a_2+0.03a_3)(1+0.1b_1+0.1b_2+0.001b_3) \\
\quad - (b_1+0.2b_2+0.03b_3)(a_0+0.1a_1+0.01a_2+0.001a_3), \\
1999.986623(1+0.1b_1+0.01b_2+0.001b_3)^3 = -0.002a_2b_1b_2+2a_0b_1^2+0.00006a_1b_3^2 \\
\quad -0.014a_2b_3-0.6a_0b_3-0.6a_1b_2 \\
\quad -0.12a_1b_3+0.06a_3b_1-0.002a_3b_2 \\
\quad +0.0012a_0b_3^2-0.06a_2b_2+0.002a_1b_2^2 \\
\quad +0.002a_3b_1^2+0.000002a_2b_3^2-2a_0b_2 \\
\quad -2a_1b_1+0.6a_0b_2b_1-0.000002a_3b_2b_3 \\
\quad +0.06a_0b_2^2-0.0006a_2b_1b_3+0.0006a_1b_2b_3 \\
\quad -0.00006a_3b_1b_3+2a_2+0.6a_3-0.0012a_3b_3 \\
\quad -0.002a_1b_3b_1+0.016a_0b_2b_3+0.06a_0b_3b_1
\end{cases}$$

yedi denklemden oluşan lineer olmayan denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemini Maple yardımıyla çözersek $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ katsayılarını

$$\begin{aligned}
a_0 &= -155840117.9 & b_0 &= 1 \\
a_1 &= -439625.9767 & b_1 &= -155840137.9 \\
a_2 &= 62424550.98 & b_2 &= -439604.3015 \\
a_3 &= 149137.9980 & b_3 &= 10479171.84
\end{aligned}$$

elde ederiz (burada interpolasyon polinomunun $x=0$ noktasında tanımlı olması için $b_0=1$ olarak normalize ettik). Buradan da rasyonel Hermite interpolasyon polinomunu

$$r_{3,3}(x) = \frac{149137.9980x^3 + 62424550.98x^2 - 439625.9767x - 155840117.9}{10479171.84x^3 - 439604.3015x^2 - 155840137.9x + 1}$$

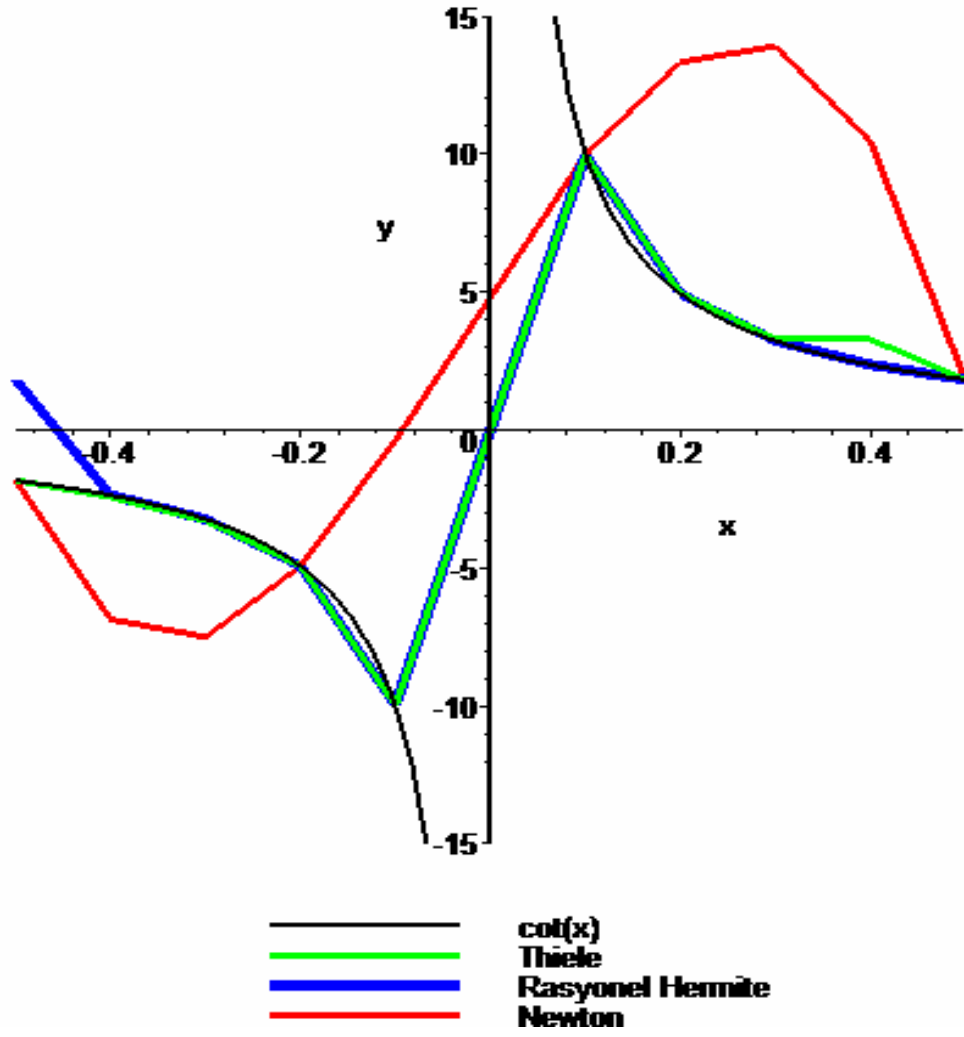
şeklinde elde ederiz. Elde ettiğimiz rasyonel Hermite interpolasyon polinomunda aralığın diğer noktalarını yazarak fonksiyonun bu noktalardaki değerleriyle karşılaştırarak grafiğini çizelim.

Tablo 4.1 Test problemi 4.1 'deki $f(x)$ ile interpolasyon fonksiyonlarının değerleri

x	Fonksiyonun Gerçek Değeri $f(x) = \cot(x)$	Newton İnterpolasyon $r_{3,0}(x)$	Thiele Rasyonel İnterpolasyon $r_{2,1}(x)$	Rasyonel Hermite İnterpolasyon $r_{3,3}(x)$
-0.4	-2.365222420	-6.865212463	-2.435079214	-2.365220555
-0.3	-3.232728144	-7.499389186	-3.284385228	-3.232727399
-0.1	-9.966644423	-.366646518	-9.981543712	-9.966643186
0.2	4.933154876	13.33315305	4.967217298	4.933154338
0.3	3.232728144	13.89938779	3.284519233	3.232725827
0.4	2.365222420	10.46521167	3.284519233	2.365218810

Tablo 4.2 Test problemi 4.1 'deki hataların karşılaştırılması

x	Newton İnterpolasyon Hata $ f(x) - r_{3,0}(x) $	Thiele Rasyonel İnterpolasyon Hata $ f(x) - r_{2,1}(x) $	Rasyonel Hermite İnterpolasyon Hata $ f(x) - r_{3,3}(x) $
-0.4	4.499990043	0.069856794	0.000001865
-0.3	4.266661042	0.051657084	0.000000745
-0.1	9.599997905	0.014899289	0.000001237
0.2	8.399998174	0.034062422	0.000000538
0.3	10.66665965	0.051791089	0.000002317
0.4	8.099989250	0.069899195	0.000003610



Şekil 4.1 Test problemi 4.1'deki $f(x)$ ile interpolasyon polinomlarının grafikleri

4.2 Rasyonel Hermite İnterpolasyon Polinomlarının Tablosu

$r_{m,n}$ interpolasyon polinomlarının tablosu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$r_{0,0}$	$r_{0,1}$	$r_{0,2}$	...
$r_{1,0}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	...
$r_{2,0}$	$r_{2,1}$	$r_{2,2}$	...
$r_{3,0}$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$			

Burada özetlenecek bazı sonuçlar aşağıdaki özelliğe bağlıdır (Claessens G, 1976).

4.2.1 Teorem:

(4.4b) lineer sisteminin rankı $n - t$ ise, (normalizasyona bağlı olarak) (4.4) ün tek bir çözümü olan $\bar{p}(x)$ ve $\bar{q}(x)$,

$$\partial \bar{p} \leq m - t$$

$$\partial \bar{q} \leq n - t$$

eşitsizliklerini sağlar ve üst sınırlardan en az birine ulaşılır. (4.4) ü sağlayan diğer her $p(x)$ ve $q(x)$ çözümü,

$$p(x) = \bar{p}(x) s(x)$$

$$q(x) = \bar{q}(x) s(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\partial s \leq t$ dir.

İspat:

(4.4b) lineer sisteminin rankı $n - t$ olduğu için, homojen sistemin serbest parametrelerini uygun bir biçimde seçerek (4.4) ün p_1, q_1 ve p_2, q_2 çözümleri:

$$\partial p_1 \leq m$$

$$\partial q_1 \leq n - t$$

ve

$$\partial p_2 \leq m - t$$

$$\partial q_2 \leq n$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde oluşturulabilir.

2.1 Teorem'den

$$p_1 q_2 = p_2 q_1$$

olduğu gösterilebilir.

$$\partial(p_2 q_1) \leq m + n - 2t$$

olduğu için ya $\partial p_1 \leq m - t$, yada $\partial q_2 \leq n - t$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\partial \bar{p} \leq m - t$ ve $\partial \bar{q} \leq n - t$

(4.4)'ün bir $\bar{p}$, $\bar{q}$ çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

Şimdi, $0 \leq i \leq t$ için $(f\bar{q} - \bar{p})(x) = \sum_{i \geq m+n+1} d_i B_i(x)$ olduğundan dolayı

$$p_{(i)}(x) = B_i(x) \bar{p}(x)$$

ve

$$q_{(i)}(x) = B_i(x) \bar{q}(x)$$

polinomları da (m, n) mertebeden Newton-Padé yaklaşım problemini de içine alır.

Ayrıca bu polinomlar çözümlerin lineer bağımsız bir kümesidir ve bu yüzden çözüm uzayını gererler. Sonuç olarak, (4.4)'ün diğer tüm p ve q çözümleri, $\bar{p}$ ve $\bar{q}$ nın bir polinom katıdır.

Şimdi eğer $\partial \bar{p} < m - t$ ve $\partial \bar{q} < n - t$ eşitsizliklerinin her ikisi de sağlanırsa, $t + 1$ den fazla lineer bağımsız çözüm buluruz ve bu durumda çözüm uzayının boyutu $t + 1$ den daha büyük olacaktır. Bu da (4.4b) sisteminin rankının $n - t$ ' den küçük olduğunu gösterir. Bu da bir çelişkidir.

Rasyonel Hermite interpolasyon polinomları tablosundaki eşit elemanları içeren kümeleri tanımlamadan önce, tablonun yapısının, tablo seçildiğinde, $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ interpolasyon noktalarının index sıralaması sabit kaldığı durumda incelenebileceğine dikkat edelim.

Bir önceki teoremden oluşturulan $\bar{p}$ ve $\bar{q}$ polinomlarının bazı interpolasyon koşulları kayıp olmadıkça, derecelerinin artık aynı anda azaltılamayacağı özelliğinden dolayı bunları minimal çözüm olarak adlandıracğız. Bu, $\bar{p}/\bar{q}$ 'nun indirgenemez olduğu anlamına gelmez.

Bununla beraber

$$p_0 \bar{q} = \bar{p} q_0$$

eşitliği sağlanır. Burada $p_0/q_0 = r_{m,n}$ dir.

4.2.2 Teorem:

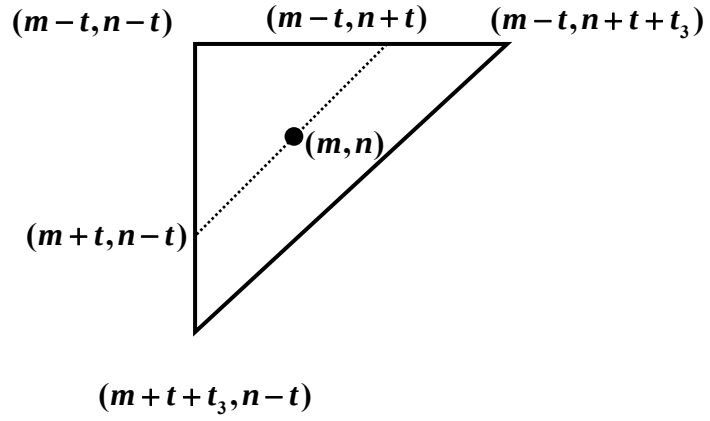
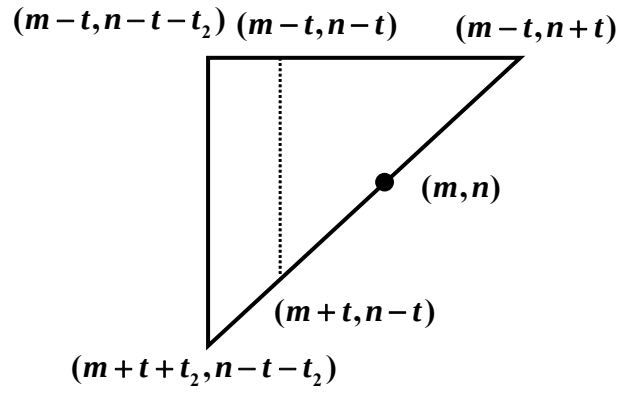
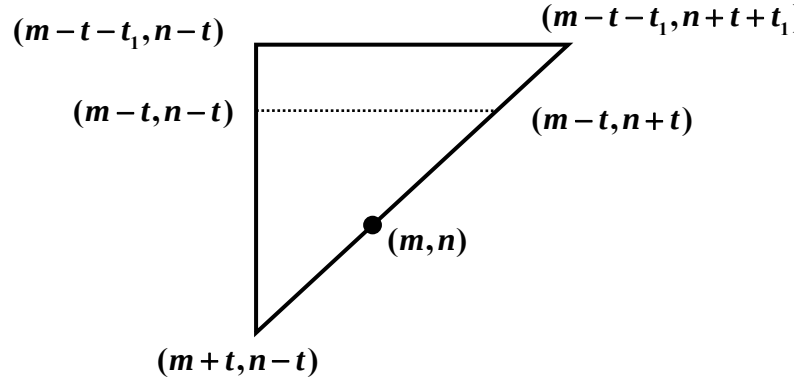
$\bar{p}(x)$ ve $\bar{q}(x)$, f in (m, n) mertebeden Newton-Padé yaklaşım probleminin minimal çözümü ve (4.4b) lineer sisteminin rankı $n - t$ olsun.

(a) $\partial \bar{p} = m - t - t_1$ ise, köşe elemanları $r_{m-t-t_1, n-t}$, $r_{m-t-t_1, n+t+t_1}$ ve $r_{m+t, n-t}$ olan üçgende bulunan tüm rasyonel Hermite interpolasyon polinomları $r_{m-t-t_1, n-t}$ 'e eşittir.

(b) $\partial \bar{q} = n - t - t_2$ ise, köşe elemanları $r_{m-t, n-t-t_2}$, $r_{m-t, n+t}$ ve $r_{m+t+t_2, n-t-t_2}$ olan üçgende bulunan tüm rasyonel Hermite interpolasyon polinomları $r_{m-t, n-t-t_2}$ 'e eşittir.

(c) $(f \bar{q} - \bar{p})(x) = \sum_{i \geq m+n-2t+t_s+1} d_i B_i(x)$

ve $d_{m+n-2t+t_s+1} \neq 0$ ise, köşe elemanları $r_{m-t, n-t}$, $r_{m+t+t_s, n-t}$ ve $r_{m-t, n+t+t_s}$ olan üçgende bulunan tüm rasyonel Hermite interpolasyon polinomları $r_{m-t, n-t}$ 'e eşittir (Claessens G, 1978).



Şekil 4.2 Rasyonel Hermite interpolasyon polinomları tablosundaki değişim

4.3 Determinant Gösterimi

4.3.1 Teorem:

(4.4b)'deki denklem sisteminin rankı maksimal ise,

$$r_{m,n} = \frac{p_0}{q_0},$$

$$p_0(x) = \begin{vmatrix} F_{0,m}(x) & F_{1,m}(x) & \dots & F_{n,m}(x) \\ c_{0,m+1} & c_{1,m+1} & \dots & c_{n,m+1} \\ c_{0,m+2} & c_{1,m+2} & \dots & c_{n,m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,m+n} & c_{1,m+n} & \dots & c_{n,m+n} \end{vmatrix}$$

$$q_0(x) = \begin{vmatrix} B_0(x) & B_1(x) & \dots & B_n(x) \\ c_{0,m+1} & c_{1,m+1} & \dots & c_{n,m+1} \\ c_{0,m+2} & c_{1,m+2} & \dots & c_{n,m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,m+n} & c_{1,m+n} & \dots & c_{n,m+n} \end{vmatrix}$$

ile verilir. Burada

$$F_{i,j}(x) = \sum_{\ell=i}^j c_{i\ell} B_\ell(x), \quad i \leq j$$

ve

$$F_{i,j}(x) = 0, \quad i > j$$

dır.

4.4 Devamlı Kesir Gösterimi

Rasyonel Hermite interpolasyon polinomları tablosundaki

$$T_k = \{r_{k,0}, r_{k+1,0}, r_{k+1,1}, r_{k+2,1}, \dots\}$$

basamaklarını düşünürsek, yine ardışık yakınsakları T_k nın elemanlarına olan devamlı kesirleri oluşturabiliriz. Bu devamlı kesirler

$$d_0 + d_1 B_1(x) + \dots + d_k B_k(x) + \frac{d_{k+1} B_{k+1}(x)}{1} + \frac{d_{k+2} (x - y_{k+1})}{1} + \frac{d_{k+3} (x - y_{k+2})}{1} + \dots$$

şeklindedir.

$d_0, \dots, d_{k+1}$ katsayıları bölünmüş farklardır ve diğer katsayılar yine genelleştirilmiş qd-algoritması ile elde edilebilir. Gragg algoritmasının genellemesi ve genelleştirilmiş ϵ -algoritması da rasyonel Hermite interpolasyon polinomlarını bulmada geçerlidir.

4.5 Thiele'nin Devamlı Kesir Genişlemesi

3.2.1 Teorem'den

$$f(x) = \varphi_0[x_0] + \frac{x - x_0}{\varphi_1[x_0, x_1]} + \frac{x - x_1}{\varphi_2[x_0, x_1, x_2]} + \dots + \frac{x - x_{i-1}}{\varphi_i[x_0, \dots, x_i]} + \dots \quad (4.5)$$

yazabiliriz. Şimdi limit durumunu ele alırsak;

$$x_i \rightarrow x_0, i \geq 1 \text{ için}$$

$$\varphi_j(x) = \lim_{\substack{x_i \rightarrow x \\ i=0, \dots, j}} \varphi_j[x_0, \dots, x_j]$$

olur. Buradan (4.5)

$$f(x) = \varphi_0(x_0) + \frac{x - x_0}{\varphi_1[x_0]} + \frac{x - x_1}{\varphi_2[x_0]} + \dots + \frac{x - x_{i-1}}{\varphi_i[x_0]} + \dots \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır. Bu x_0 civarında f nin bir devamlı kesir genişlemesidir. Taylor serisi genişletmesinin Newton'un interpolasyon formülünden elde edilmesi gibi aynı yolla (4.5) den (4.6) formülü elde edilir. (4.6) formal olduğundan x in hangi değerleri için sağ taraf gerçekten $f(x)$ 'e yakınsadığı kontrol edilmelidir. Thiele yöntemi kullanarak $\varphi_j(x)$ i hesaplayabiliriz. Böylece,

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_1(x) = \lim_{x_0, x_1 \rightarrow x} \varphi_1[x_0, x_1] = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x - x_1}{\varphi_0[x] - \varphi_0[x_1]} = \frac{1}{f'(x)}$$

yazılır.

$$\rho_j(x) = \lim_{\substack{x_i \rightarrow x \\ i=0, \dots, j}} \rho_j[x_0, \dots, x_j]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \lim_{\substack{x_i \rightarrow x \\ i=0, \dots, j}} \frac{x_j - x_{j-1}}{\rho_{j-1}[x_0, \dots, x_{j-2}, x_j] - \rho_{j-1}[x_0, \dots, x_{j-2}, x_{j-1}]} \\ &= \lim_{x_j \rightarrow x} \frac{x - x_j}{\rho_{j-1}[x, \dots, x] - \rho_{j-1}[x, \dots, x_j]} \\ &= \left[\frac{\partial \rho_{j-1}[x, \dots, x, y]}{\partial y} \Big|_{y=x} \right]^{-1} \end{aligned}$$

olur.

Burada $\rho_{j-1}[x_0, \dots, x_{j-1}]$ ifadesi $x_0, \dots, x_{j-1}$ noktalarının index sıralanmasından bağımsızdır.

Böylece,

$$\frac{d\rho_{j-1}[x, \dots, x]}{dx} = j \frac{\partial \rho_{j-1}[x, \dots, x, y]}{\partial y} \Big|_{y=x}$$

olur. Sonuç olarak

$$\varphi_j(x) = j \left(\frac{d\rho_{j-1}(x)}{dx} \right)^{-1} \quad (4.7a)$$

elde edilir.

$$\frac{d\rho_{j-1}(x)}{dx}$$

ifadesini hesaplamak için

$$\rho_j(x) = \rho_{j-2}(x) + \varphi_j(x) \quad (4.7b)$$

bağıntısı kullanılır.

4.5.1 Örnek:

Konunun daha iyi anlaşılması için $x_0 = 1$ civarında $f(x) = e^x$ in devamlı kesir genişlemesini oluşturalım. Bunun için (4.7) formüllerini kullanacağız. Şimdi (4.7a) ve (4.7b) yi kullanarak $\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_i(x_0)$ sayılarını hesaplayalım.

$$\varphi_0(x) = p_0(x) = f(x) = e^x \Rightarrow \varphi_0(x_0) = e$$

$$\varphi_1(x) = p_1(x) = \frac{1}{f'(x)} = e^{-x} \Rightarrow \varphi_1(x_0) = -\frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= j \left(\frac{d\rho_{j-1}(x)}{dx} \right)^{-1} \Rightarrow \varphi_2(x) = 2 \left(\frac{d\rho_1(x)}{dx} \right)^{-1} \\ &= 2 \left(\frac{d(e^{-x})}{dx} \right)^{-1} \\ &= -2e^x \end{aligned}$$

Buradan $\varphi_2(x_0) = -2e$ olarak buluruz. $\rho_j(x) = \rho_{j-2}(x) + \varphi_j(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \rho_2(x) &= \rho_0(x) + \varphi_2(x) \\ &= e^x - 2e^x \\ &= -e^x \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\varphi_3(x)$ hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= 3 \left(\frac{d\rho_2(x)}{dx} \right)^{-1} \\ &= 3 \left(\frac{d(-e^x)}{dx} \right)^{-1} \\ &= -3e^{-x} \end{aligned}$$

olur. Buradan da $\varphi_3(x_0) = -\frac{3}{e}$ olarak buluruz. Benzer şekilde aynı işlemleri tekrarlırsak aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

Tablo 4.3 e^x 'in devamlı kesir genişlemesinin katsayıları

$\rho_0(x) = e^x$	$\varphi_1(x) = e^{-x}$	$\varphi_1(x_0) = \frac{1}{e}$
$\rho_1(x) = e^{-x}$	$\varphi_2(x) = -2e^x$	$\varphi_2(x_0) = -2e$
$\rho_2(x) = -e^x$	$\varphi_3(x) = -3e^{-x}$	$\varphi_3(x_0) = -\frac{3}{e}$
$\rho_3(x) = -2e^{-x}$	$\varphi_4(x) = 2e^x$	$\varphi_4(x_0) = 2e$
$\rho_4(x) = e^x$	$\varphi_5(x) = 5e^{-x}$	$\varphi_5(x_0) = \frac{5}{e}$

Böylece

$$e^x = e + \frac{x-1}{\left| \frac{1}{e} \right|} + \frac{x-1}{\left| -2e \right|} + \frac{x-1}{\left| \frac{-3}{e} \right|} + \frac{x-1}{\left| 2e \right|} + \frac{x-1}{\left| \frac{5}{e} \right|} + \dots$$

elde ederiz.

4.6 Rasyonel Hermit İnterpolasyon Polinomlarının Yakınsaklığı

Burada rasyonel Hermite interpolasyon polinomları tablosundaki sütunların yakınsamasına yönelik bazı sonuçlar verilecektir. 4.6.1 Teoremi ilk sütunla $\{r_{0,0}, r_{1,0}, r_{2,0}, \dots\}$ ile ilgilidir, diğer bir ifadeyle bu teorem, interpolasyon polinomları için bir yakınsama teoremidir.

Kelebek eğrisi, verilen $\{z_0, \dots, z_j\}$ kompleks noktaları için

$$B(z_0, \dots, z_j, r) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_j) \right| = r \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Genelde, interpolasyonun keyfi bir serisinin yakınsaklığı, y_i interpolasyon noktalarının dizisinin tamamına bağlı değildir ancak bir sonraki teoremden de göreceğimiz gibi sadece bu dizinin asimtotik karakterine bağlıdır.

4.6.1 Teorem:

$\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ interpolasyon noktaları,

$$\{z_0, z_1, \dots, z_j, z_0, z_1, \dots, z_j, z_0, z_1, \dots, z_j, \dots\}$$

dizisine,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{k(j+1)+i} = z_i, \quad i = 0, \dots, j$$

anlamında asimtotik olsun.

$f(x)$ fonksiyonu, $B(z_0, \dots, z_j, r)$ kelebek eğrisinin iç kısmı boyunca analitik ise, $r_{m,0}$, $B(z_0, \dots, z_j, r)$ 'nin içinde f fonksiyonuna yakınsar. Bu yakınsama, $B(z_0, \dots, z_j, r)$ 'nin iç kısmındaki her kapalı ve sınırlı kümede düzgündür.

Şimdi, $w_1, \dots, w_n$ kutuplarına sahip f meromorf fonksiyonunu düşünelim. (m, n) mertebeden rasyonel Hermite interpolasyon polinomu için

$$r_{m,n} = \frac{p_{m,n}}{q_{m,n}}$$

ve (m, n) mertebeden Newton-Padé yaklaşım probleminin minimal çözümü için $\bar{p}_{m,n}(x)$ ve $\bar{q}_{m,n}(x)$ yazarız. Newton-Padé yaklaşım probleminin minimal çözümler tablosu normal olsun.

$\partial \bar{q}_{m,n} = n$ dir (Claessens G., 1978). $m = 0, 1, 2, \dots$ ve $i = 1, \dots, n$ olmak üzere, $w_i^{(m)}$, $q_{m,n}$ 'in sıfırları ve bir α pozitif sabiti için

$$\rho_i = |(w_i - z_0)(w_i - z_1) \dots (w_i - z_j)|, \quad 0 < \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n \leq \alpha r < r \text{ olsun.}$$

4.6.2 Teorem: $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ interpolasyon noktaları, $\{z_0, z_1, \dots, z_j, z_0, z_1, \dots, z_j, z_0, z_1, \dots, z_j, \dots\}$ dizisine asimtotik, $w_1, \dots, w_n$ katlı kutup noktaları olmak üzere, f fonksiyonu, $B(z_0, \dots, z_j, r)$ nin içinde meromorf ve Newton-Padé yaklaşım problemlerinin minimal çözümler tablosu normal ise, $w_1, \dots, w_n$ noktalarını içermeyen $B(z_0, \dots, z_j, r)$ 'nin iç kısmındaki her kapalı ve sınırlı altkümeye

$$w_i^{(m)} = w_i + O(\alpha^m), \quad i = 1, \dots, n$$

olur ve buradan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{m,n}(x) = f(x)$$

eşitliğinin düzgün olduğu sonucu çıkar (Claessens G, 1976).

5. UYGULAMA

5.1 Başlangıç Değer Problemi

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \quad x \in [a, b] \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

(5.1) sayısal olarak çözüldüğünde, sonuçta, $y(x)$ 'i x 'in bir fonksiyonu olacak şekilde veren açık bir formül aramıyoruz, fakat, $[a, b]$ aralığındaki birkaç x_i noktasında $y(x_i)$ değerlerini bulmakla uğraşacağız.

$[a, b]$ aralığını alt aralıklara bölersek,

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^k [x_{i-1}, x_i]$$

olur. Burada,

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, k$$

ve

$$k > 0 \text{ için } h = \frac{b-a}{k}$$

dır. Böylece, (5.1) in çözümü olan $y(x)$ in x_i noktasındaki yerel yaklaşımlarını bularak $y(x_{i+1})$ için y_{i+1} yaklaşımlarını hesaplayabiliriz. Biz burada sadece lineer olmayan yaklaşımların kullanımına dayalı yöntemleri inceleyeceğiz.

5.2 Rasyonel İnterpolasyon Polinomlarının Kullanılması

İnterpolasyon koşulları birkaç noktayla verilmişse, y_{i+1} 'i bulmak için birkaç $x_{i-\ell}$ ve $y_{i-\ell}$ ($\ell=0,1,\dots$) i hesaplamamız gerekir. Böyle yöntemlere çok adımlı yöntemler denir.

$r_i(x)$, (m, n) mertebeden rasyonel Hermite interpolasyon polinomu olsun.

$$(j+1)(s+1) = m+n+1$$

olduğunda,

$$r_i(x_{i-\ell}) = y_{i-\ell} \quad \ell = 0, \dots, j$$

$$r_i^{(t)}(x_{i-\ell}) = f^{(t-1)}(x_{i-\ell}, y_{i-\ell}) \quad \ell = 0, \dots, j \text{ ve } t = 1, \dots, s$$

olur.

Burada

$$f^{(t)}(x, y) = \frac{d^t f(x, y)}{dx} = \frac{\partial f^{(t-1)}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f^{(t-1)}(x, y)}{\partial y} f(x, y)$$

dir. Böylece $y(x_{i+1})$ in bir yaklaşımı,

$$y_{i+1} = r_i(x_{i+1})$$

olarak bulabiliriz.

Bu bir lineer olmayan çok basamaklı açık yöntemdir. Örneğin $j = 1, m = 2, n = 1$ ve $s = 1$

alınır ve 4.3.1 Teorem' i kullanılarak,

$$y_{i+1} = \frac{4}{3}y_i - \frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{2h}{9}(2f_i + f_{i-1}) + \frac{4h^2}{9} \frac{(f_i - f_{i-1})^2}{3(y_i - y_{i-1}) - h(f_i + 2f_{i-1})} \quad (5.2)$$

iki basamaklı formülünü elde ederiz. Burada $f_i = f(x_i, y_i)$ ve $f_{i-1} = f(x_{i-1}, y_{i-1})$ dir.

Aynı zamanda y_{i+1} 'in kendisinin hesaplanması için bir y_{i+1} yaklaşımı gerektiren kapalı yöntemleri,

$$r_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$r_i(x_{i-\ell}) = y_{i-\ell} \quad , \quad \ell = 0, \dots, j$$

$$r_i^{(t)}(x_{i-\ell}) = f^{(t-1)}(x_{i-\ell}, y_{i-\ell}) \quad \ell = -1, 0, \dots, j \text{ ve } t = 1, \dots, s$$

olarak elde edebiliriz.

Burada $(j+2)(s+1)-1 = m+n+1$ dir. Böylece,

$m = 1 = n$, $j = 0$ ve $s = 1$ için

$$y_{i+1} = y_i + h^2 \frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) f(x_i, y_i)}{y_{i+1} - y_i} \quad (5.3)$$

formülünü elde ederiz (Lambert J.D. ve Shaw B., 1966).

Çok adımlı yöntemler hiçbir zaman kendi kendilerine başlamaz. Açık ve kapalı ($j + 1$) basamaklı yöntemlerin ikisi de

$$y_{i+1} = \sum_{\ell=0}^j \alpha_{\ell} y_{i-\ell} + hg(x_{i+1}, \dots, x_{i-j}, y_{i+1}, \dots, y_{i-j}, h)$$

formundadır ve g nin Taylor serisi açılımı

$$y(x_{i+1}) - \sum_{\ell=0}^j \alpha_{\ell} y(x_{i-\ell}) - hg(x_{i+1}, \dots, x_{i-j}, y(x_{i+1}), \dots, y(x_{i-j}), h) = O(h^{p+1})$$

eşitliğini sağlıyorsa, bu yöntemlerin mertebesi p dir.

Buradan eğer başlangıç değerleri üçüncü mertebeden ise (5.2) üçüncü mertebeden, ikinci mertebeden ise, (5.3) ikinci mertebeden bir yöntemdir.

5.3 Tahmin Edici-Düzeltilici Yöntemler

(5.1) deki başlangıç değer probleminin çözümü için

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad \forall x \in [a, b]$$

dir. Bu denklemin $[x_{i-j}, x_{i+\ell}]$ $j, \ell \geq 0$, aralığında integralini alırsak,

$$y(x_{i+\ell}) - y(x_{i-j}) = \int_{x_{i-j}}^{x_{i+\ell}} f(x, y(x)) dx$$

elde ederiz. Şimdi f , $(x_i, f(x_i, y_i))$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}, y_{i-1}))$, $\dots$ noktalarından geçen bir interpolasyon fonksiyonu ile yer değiştirilebilir ve integrali de kolayca alınabilir.

$\ell = 1$ ise tahmin edici yöntemler elde ederiz, çünkü bunlar açık yöntemdir. Yani $y(x_{i+1})$ in değerini bulmak için bundan önceki terimlere gereksinim vardır. $\ell = 0$ ise düzeltilici yöntemleri elde ederiz, çünkü y_i eşitliğin her iki tarafında olduğu için y_i değerine y_i nin bulunması için ihtiyacımız vardır. Bu kapalı formüller iteratif olarak $y(x_i)$ ' nin tahmini

değerini güncellemek için kullanılabilir.

f , interpolasyon polinomu ile yer değiştirilirse, Adams-Bashforth ($j = 0$ ve $\ell = 1$) ve Adams-Moulton ($j = 1$ ve $\ell = 0$) yöntemlerini elde ederiz. f , interpolasyon polinomu bir rasyonel interpolasyon fonksiyonu ile yer değiştirilirse tahmin edici yada düzeltici tipte lineer olmayan formüller elde ederiz.

Rasyonel interpolasyon polinomlarının integralini almak zorunda olduğumuz için, paydası düşük dereceli olan rasyonel fonksiyonlar seçeriz.

5.4 Sayısal Sonuçlar

5.4.1 Test Problemi:

$$y' = 1 + y^2, \quad x \geq 0$$

$$y(0) = 1$$

denklemlerinin çözümü için kapalı tek adım, açık çok-adım ve Thiele devamlı kesir genişlemesi yöntemlerini kullanarak elde ettiğimiz sonuçları karşılaştıralım.

Gerçek çözüm, $y = \tan(x + \pi/4)$ dir. Adım boyunu $h = 0.05$ olarak alalım.

Şimdi açık çok- adım yöntemini kullanarak yaklaşık çözümleri elde edelim. Bunun için (5.2) formülünü kullanacağız. İlk olarak y_0 ve y_1 başlangıç değerlerini hesaplayalım. $y_0 = 1$ dir. y_1 değerini ise gerçek çözümden $y_1 = \tan(0.05 + \pi/4) = 1.110536$ şeklinde alırız. Bu değerler yardımıyla (5.2) den y_2 değerini

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{4}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_0 + \frac{2(0.05)}{9}(2(1+y_1^2) + (1+y_0^2)) \\ &\quad + \frac{4(0.05)^2}{9} \frac{((1+y_1^2) - (1+y_0^2))^2}{3(y_1 - y_0) - (0.05)((1+y_1^2) + 2(1+y_0^2))} \\ &= 1.223055519 \end{aligned}$$

olarak buluruz. Diğer y_i değerlerini benzer şekilde hesaplarız.

Şimdi de kapalı tek - adım yöntemini kullanarak yaklaşık çözümleri elde edelim. Bunun için (5.3) formülünde $f(x_i, y_i) = 1 + y_i^2$ ifadesi yerine yazılırsa

$$y_{i+1} = y_i + h^2 \frac{(1+y_{i+1}^2)(1+y_i^2)}{y_{i+1} - y_i}$$

formülü elde edilir. Burada oluşan ikinci dereceden denklem çözülerek y_{i+1} değerlerini bulabiliriz. Şimdi y_{i+1} değerlerini hesaplayalım. $y_0 = 1$ olarak verildi. y_1 değerini ise aşağıdaki gibi buluz.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h^2 \frac{(1+y_1^2)(1+y_0^2)}{y_1 - y_0} \\ &= 1 + (0.05)^2 \frac{(1+y_1^2)(1+1^2)}{y_1 - 1} \end{aligned}$$

Burada oluşan ikinci dereceden denklemi çözersek y_1 değerini $y_1 = 1.105401931$ olarak buluruz. Benzer şekilde diğer y_i değerlerini hesaplarız.

$x_0 = 0$ da y nin devamlı kesir genişlemesini $m = 2, n = 2$ olacak şekilde oluşturalım. Bunun için (3.19.) formülünü kullanırız. Şimdi (4.7a) ve (4.7b) yi kullanarak $\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \varphi_3(x_0), \varphi_4(x_0)$ sayılarını hesaplayalım.

$$\varphi_0(x_0) = y_0 = 1$$

$$\varphi_1(x) = p_1(x) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \varphi_1(x_0) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= j \left(\frac{d\rho_{j-1}(x)}{dx} \right)^{-1} \Rightarrow \varphi_2(x) = 2 \left(\frac{d\rho_1(x)}{dx} \right)^{-1} \\ &= 2 \left(\frac{d\left(\frac{1}{1+y^2}\right)}{dx} \right)^{-1} \\ &= -\frac{1+y^2}{y} \end{aligned}$$

Buradan $\varphi_2(x_0) = -2$ olarak buluruz .

$$\begin{aligned}
\rho_0(x) &= y & \varphi_1(x) &= \frac{1}{1+y^2} & \varphi_1(x_0) &= \frac{1}{2} \\
\rho_1(x) &= \frac{1}{1+y^2} & \varphi_2(x) &= -\frac{1+y^2}{y} & \varphi_2(x_0) &= -2 \\
& & \varphi_3(x) &= \frac{3y^2}{1+y^2} & \varphi_3(x_0) &= \frac{3}{2} \\
& & & & \varphi_4(x_0) &= 2
\end{aligned}$$

Bu değerleri (4.6) formülünde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
y &= 1 + \frac{x}{\left| \frac{1}{2} \right|} + \frac{x}{\left| -2 \right|} + \frac{x}{\left| \frac{3}{2} \right|} + \frac{x}{\left| 2 \right|} \\
&= \frac{(1+x-\frac{1}{3}x^2)}{(1-x-\frac{1}{3}x^2)}
\end{aligned}$$

y ' nin yaklaşık fonksiyonunu elde ederiz. Böylece

$$y_i = \frac{(1+x_i-\frac{1}{3}x_i^2)}{(1-x_i-\frac{1}{3}x_i^2)}$$

formülünden y_i değerlerini

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{(1+(0.05)-\frac{1}{3}(0.05)^2)}{(1-(0.05)-\frac{1}{3}(0.05)^2)} = 1.105355575 \\
y_2 &= \frac{(1+(0.10)-\frac{1}{3}(0.10)^2)}{(1-(0.10)-\frac{1}{3}(0.10)^2)} = 1.223048327 \\
&\vdots \\
y_{15} &= \frac{(1+(0.75)-\frac{1}{3}(0.75)^2)}{(1-(0.75)-\frac{1}{3}(0.75)^2)} = 25.00000000
\end{aligned}$$

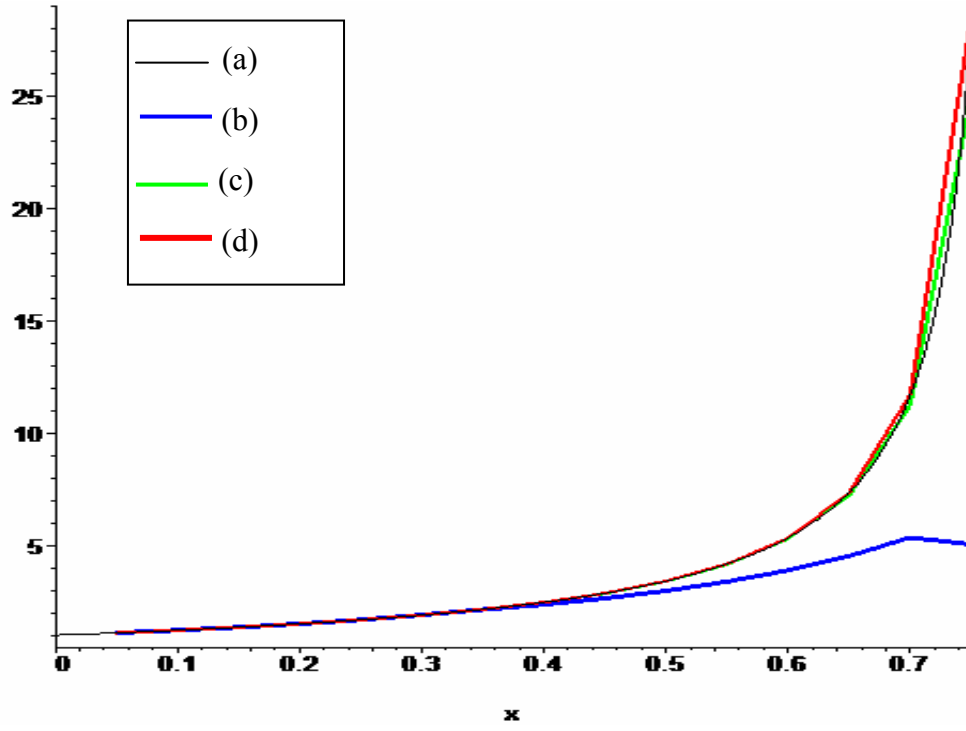
şeklinde hesaplarız. Benzer şekilde diğer y_i değerlerini de hesaplayarak Tablo 5.1'i elde

ederiz.

Tablo 5.1 Test problemi 5.1 'deki çözümlerin karşılaştırılması

i	x_i	Gerçek Çözüm $\tan(x_i + \pi/4)$	m = 2, n = 2 Thiele devamlı kesir genişlemesi	m = 2, n = 1 açık çok-adım	m = n = 1 kapalı tek-adım
1	0.05	0.110536 E+01	1.105355575	1.105355591	1.105401931
2	0.10	0.122305 E+01	1.223048327	1.223055519	1.223152996
3	0.15	0.135609E+01	1.356083086	1.356062868	1.356265501
4	0.20	0.150850 E+01	1.508474577	1.508673726	1.508770952
5	0.25	0.168580 E+01	1.685714286	1.684839553	1.686197136
6	0.30	0.189577 E+01	1.895522388	1.904543763	1.896340145
7	0.35	0.214975 E+01	2.149110808	2.139006544	2.150568609
8	0.40	0.246496 E+01	2.463414635	2.366264759	2.466143909
9	0.45	0.286888 E+01	2.865284974	2.644953028	2.870617626
10	0.50	0.340822 E+01	3.400000001	2.979167614	3.410856601
11	0.55	0.416936 E+01	4.150357996	3.385364611	4.173585731
12	0.60	0.533186 E+01	5.285714286	3.888450155	5.339230513
13	0.65	0.734044 E+01	7.215139443	4.525410398	7.355346853
14	0.70	0.116814 E+02	11.24390244	5.352987003	11.72164718
15	0.75	0.282383 E+02	25.00000000	5.044978674	28.49025964

Tablo 5.1 de görüldüğü gibi kapalı tek adım yöntemi, açık çok-adım ve Thiele devamlı kesir genişletmesi yönteminden daha iyi sonuç vermiştir. Bu durum aşağıdaki grafikte daha açık bir şekilde görülmektedir.



Şekil 5.1 Test problemi 5.1'deki çözümlerin grafikleri grafikleri

(a) Gerçek çözüm, (b) açık çok –adım,

(c) Thiele devamlı kesir genişlemesi, (d) kapalı tek-adım

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada sunulan problemlerde gerçek çözümlerle, interpolasyon çözümü ile elde edilen sayısal çözümler tablolar ve şekiller üzerinde karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucunda rasyonel Hermite interpolasyon tablosunun köşegen elemanlarından birinin kullanılmasına dayanan çözümlerin iyi sonuç verdiği görüldü.

KAYNAKLAR

Brezinski, C., (1991), History of Continued Fractions and Padé Approximants, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg.

Claessens G., (1976), Some aspects of the rational Hermite interpolation table and its applications Ph. Dr., University of Antwerp.

Claessens G., (1976), A new algorithm for osculatory rational interpolation Numer. Math. 27, 77-83.

Claessens G., (1978), On the Newton-Padé approximation problem. J. Approx Theory 22, 150-160.

Claessens G., (1978), A useful identity for the rational Hermite interpolation table. Numer. Math. 29, 227-231.

Claessens G., (1981), A generalization of the qd-algorithm. J. Comput. Appl. Math. 7, 237-247.

Cuyt, A. ve Wuytack, L., (1987), Nonlinear Methods in Numerical Analysis, Amsterdam.

Della Dora J., (1980), Contribution á l'approximation de fonctions de la variable complexe au sens Hermite-Padé et de Hardy. Ph. D., University of Grenoble.

J. Stoer ve R. Bulirsch, (1992), Introduction to Numerical Analysis, second ed., Springer, Berlin.

Lambert J.D. ve Shaw B., (1965), On the Numerical Solution of $y' = f(x, y)$ by a Class of Formulae Based on Rational Approximation Mathematics of Computation, Vol. 19, No. 91., pp. 456-462.

Lambert J.D. ve Shaw B., (1966), A method for the numerical solution of $y' = f(x, y)$ based on a self-adjusting non-polynomial interpolant. Math. Comp. 20, 11-20.

Lübbe W., (1983), Ueber ein allgemeines Interpolationsproblem und lineare Identitäten zwischen benachbarten Lösungssystemen. Ph. Dr., University of Hannover.

Salzer H., (1962), Note on osculatory rational interpolation. Math. Comp. 16, 486-491.

Thiele T., (1909), Interpolationsrechnung. Teubner, Leipzig.

Walsh J., (1969), Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc, Providence Rhode Island.

Warner D., (1974), Hermite interpolation with rational functions. Ph. Dr, University of California.

Werner H. ve Bünger, (1984), H. Padé approximation and its applications. Lecture Notes in Mathematics 1071, Springer, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 02.09.1977

Doğum yeri Of / TRABZON

Lise 1991-1994 Rıfat Canayakın Lisesi

Lisans 1994-1998 Ege Üniversitesi Fen Fak.
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

1999-2006 Milli Eğitim Bakanlığı

2006-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi