

DİKDÖRTGEN DELİK İÇEREN ŞERİT-LEVHAYA AİT BİR
NON-LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMİNİN FEM İLE
İNCELENMESİ

Hakan AĞIT

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU(YTÜ)

Y. Yahnioğlu
Y. Yahnioğlu
Y. Yahnioğlu

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Kompozit Malzemelere Ait Genel Bilgiler	1
1.2 Tez Konusuna Ait Mevcut Çalışmalar	4
1.3 Yapılan Araştırmanın Amaçları.....	5
2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU VE SONLU ELEMAN MODELLEMESİ.....	6
2.1 Ele Alınan Problemin Matematiksel Modeli	6
2.2 Ele Alınan Problemin Varyasyonel Formülasyonu	8
2.3 Sonlu Eleman Modellemesi.....	16
2.4 Newton-Raphson Yöntemi ve Teğet Rijidlik Matrisinin Oluşturulması.....	20
2.5 Gerilmelerin Belirlenmesi	24
3. SAYISAL SONUÇLAR.....	27
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	57
KAYNAKLAR.....	58
ÖZGEÇMİŞ.....	60

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1	Lifli ve levhalı parçalı homojen malzemelerin, eşdeğer anizotrop homojen malzemelere dönüştürülme şeması.....3
Şekil 2.1	Ele alınan şerit-levhanın geometrisi.....6
Şekil 2.2	Örnek eleman ve düğüm noktaları.....16
Şekil 3.1	σ_{11}/q gerilmesinin farklı P/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 0$, b) $x_2/\ell = 2h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, e) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, f) $x_2/\ell = 12h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....30
Şekil 3.2	σ_{22}/q gerilmesinin farklı P/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 0$, b) $x_2/\ell = 2h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, e) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, f) $x_2/\ell = 12h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....33
Şekil 3.3	σ_{12}/q gerilmesinin farklı P/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 0$, b) $x_2/\ell = 2h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, e) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, f) $x_2/\ell = 12h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....35
Şekil 3.4	σ_{11}/q gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....37
Şekil 3.5	σ_{22}/q gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....38
Şekil 3.6	σ_{12}/q gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....39
Şekil 3.7	σ_{11}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 1$ için, a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....41
Şekil 3.8	σ_{11}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 10$ için, a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....43
Şekil 3.9	σ_{22}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 1$ için, a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....45
Şekil 3.10	σ_{22}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 10$ için, a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....46
Şekil 3.11	σ_{12}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 1$ için, a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....47
Şekil 3.12	σ_{12}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 10$ için, a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....48
Şekil 3.13	σ_{11}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için izotrop durumda a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.....50

Şekil 3.14	σ_{11}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için anizotrop durumda a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ’ den bağımlılığı.....	52
Şekil 3.15	σ_{22}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için izotrop durumda a) $x_2/\ell = (h_A + h_O + h_U/2)/\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ’ den bağımlılığı.....	53
Şekil 3.16	σ_{22}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için anizotrop durumda a) $x_2/\ell = (h_A + h_O + h_U/2)/\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ’ den bağımlılığı.....	54
Şekil 3.17	σ_{12}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için izotrop durumda a) $x_2/\ell = (h_A + h_O + h_U/2)/\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ’ den bağımlılığı.....	55
Şekil 3.18	σ_{12}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için anizotrop durumda a) $x_2/\ell = (h_A + h_O + h_U/2)/\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ’ den bağımlılığı.....	56



ÖNSÖZ

Master tezimin başlangıcından bitişine kadar geçen süre zarfında, tezimin bütün aşamalarında, desteğinden, yardımlarından, ve eğitici yönünden faydalandığım danışman hocam sayın Doç. Dr. Nazmiye Yahnioğlu' na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kıbrısta başlayan ve İstanbulda devam etmiş olan eğitim sürecimin her döneminde, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili babam Hasan Ağıt ve sevgili annem Sevin Ağıt' a teşekkürlerimi sunarım. Sevgili abim Erhan ve kızkardeşim Nazikter' e, çok teşekkürlerimi sunarım.

Dostluklarından ve yardımlarından dolayı sevgili Emre Koyuncuoğlu' na, Emre Serdar' a ve Ömür Köken' e teşekkürlerimi belirtmek isterim.



ÖZET

Bu çalışmada yapısında delik bulunan ve karşılıklı iki kenarından basit mesnetle tutturulmuş anizotrop şerit-levhanın, üst yüzeyine etkiyen düzgün yayılı basınç yükü etkisinde eğilmesi problemi ele alınmıştır. Problemin matematiksel formülasyonu düzlem şekil değiştirme durumunda ve yapı elemanındaki şekil değiştirmelerin büyük olduğu kabulü altında Elastisite Teorisinin kesin geometrik non-lineer denklemleri çerçevesinde yapılmıştır. Ele alınan probleme karşı gelen değişken katsayılı kısmi türevli non-lineer denklemler takımının, göz önüne alınan sınır koşulları altında çözülmesi problemi ancak sayısal çözüm yöntemleri yardımıyla mümkün olduğundan, çözüm için Sonlu Elemanlar Yöntemi'nden yararlanılmıştır. Çözüm algoritmi non-lineer denklemler takımının lineerleştirilmesi, yani Newton-Raphson Yöntemine esaslanmıştır.

Ele alınan tez dört bölüm ve Kaynaklar'dan oluşmaktadır. Birinci Bölüm'de şerit-levhanın malzemesine ait temel bilgiler, tez konusuna ait temel bilgiler ve yapılan araştırmanın amaçları verilmektedir.

İkinci Bölüm'de, ele alınan problemin matematiksel formülasyonu, non-lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler takımına ait sınır değer probleminin SE modellenmesi aracılığı ile non-lineer cebirsel denklemler takımına indirgenmesi ve bu denklemler takımının Newton-Raphson Yöntemi ile çözülmesi açıklanmıştır.

Üçüncü Bölüm'de, yapılan algoritma ve programlardan elde edilen, şerit-levhaya ait çeşitli malzeme ve geometrik parametrelerin yapıdaki gerilme birikimine etkisini gösteren çok sayıda grafik ve bu grafiklerin yorumları verilmektedir.

Son Bölüm'de, Tez çerçevesinde elde edilen sonuçlar ve değerlendirmesi yapılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Geometrik non-lineer, dikdörtgen delik, FEM, kompozit, gerilme birikimleri.

ABSTRACT

In this study, the problem of a bending of an anisotrop strip-plate which has a hole in its structure, supported simply from two edges correspondingly, and under the effect of uniformly distributed pressure force to the top surface is considered. The problem is considered in the plane strain state and the structure of the element is assumed under the greater strain status so that the mathematical formulation of the problem is established in the framework of geometric non-linear exact equations of the Elasticity Theory. The solution of the problem, under the considered boundary-values of the second order partial non-linear differential equations set with variable coefficient, is possible by the help of numerical solution methods. Therefore for the solution, the Finite Element Method is used. The algorithm of the solution, linearization of non-linear equations set, is based on Newton-Raphson Method.

This thesis is composed of four chapter and a bibliography. In the first chapter, the basic knowledge of the strip plate' s material, the introduction of the thesis concept and the object of the study are given.

In the second chapter, the mathematical formulation of the problem, the reduction of the non-linear partial differential equations set to non-linear algebraic equations set by Finite Element Model, and the solution of this equations set by Newton-Raphson Method are explained.

In the third chapter, with the results of algorithms and programs from various materials and geometric parameters concerning to the strip-plate that show the effect of stress accumulation to the structure, various examples of graphics and their representation are presented.

In the last chapter, the results from the thesis and their discussion are given.

Keywords: Geometric non-linear, rectangular hole, FEM, composite, stress concentration.

1. GİRİŞ

1.1 Kompozit Malzemelere Ait Genel Bilgiler

Kompozit malzeme, iki yada daha fazla sayıdaki farklı malzemenin aralarında kimyasal etki olmaksızın bir araya getirilmesi ile oluşturulan malzemelerdir. Kompozit malzemeyi oluşturan, mekanik özellikleri farklı, her bir malzemeye kompozit malzemenin bileşenleri denir. Bu bileşenler kompozit içerisindeki üstlendikleri göreve göre matris ve güçlendirici (takviye) malzeme adını alırlar. Matris malzemesinin kompozit içerisindeki görevi: Güçlendirici bileşenlerin birliğini sağlamak, uygulanan dış yükü güçlendiricilere iletmek ve dağılımını sağlamaktır. Bunlara ilaveten pek çok durumda süneklik, sertlik veya elektriksel iletkenlik gibi bazı gerekli niteliklere katkıda bulunurlar. Güçlendiriciler genellikle kompozit malzemede yük taşıma görevini üstlenirler. Buradan görüldüğü üzere kompozit malzemeler bileşenlerinin her birinin tek başına sahip olmadığı özelliklere sahip olurlar. Bu özellikleri nedeniyle mühendislik teknolojisinde yaygın kullanım alanları bulurlar. Pek çok bilim dalındaki bilim adamları tarafından bu malzemelerin üretim teknolojileri, mekanik ve kimyasal özelliklerinin araştırılması ve geliştirilmesi üzerinde artan yoğunlukta çalışılmaktadır.

Çeşitli mühendislik uygulamalarında teknolojiye paralel olarak kullanımı gün geçtikçe artan kompozit malzemenin tercih edilmesinin temel nedenleri, bu malzemelerin aşağıda verilen özelliklerden birine veya birkaçına aynı anda sahip olabilmeleridir. Bu özelliklerden başlıcaları;

- a. Mekanik dayanım, basınç, çekme, eğilme ve çarpma dayanımı,
- b. Yorulma dayanımı aşınma direnci,
- c. Korozyon direnci,
- d. Kırılma tokluğu,
- e. Yüksek sıcaklığa dayanıklılık,
- f. Isı iletkenliği veya ısı direnci,
- g. Elektrik iletkenliği veya elektriksel direnç,
- h. Akustik iletkenlik, ses tutuculuğu veya ses yutuculuğu,
- i. Rijidlik,

j. Ağırlık,

k. Görünüm

ve benzeri özellikler şeklinde sıralanabilir (Ersoy (2001)). Bu açıdan, yapay şekilde oluşturulan kompozit malzemelerde güçlendirici olarak bor, cam, grafit veya karbon, armire edilmiş polimerler, silikon karbür ve benzeri malzemeler, matris için ise, çeşitli polimerler (epoksi, polyester gibi), metaller (alüminyum, titanyum, magnezyum ve bunların alaşımları gibi) ve seramikler kullanılır.

Kompozit malzemelerin her bilim dalına göre ve birçok açıdan sınıflandırılması literatürde vardır. Fakat en genel şekilde sınıflandırma Akbarov ve Guz (2000)' de;

1. Yapısal dizayna göre sınıflandırma,
2. Malzemeye göre sınıflandırma,
3. Üretim teknolojisine göre sınıflandırma

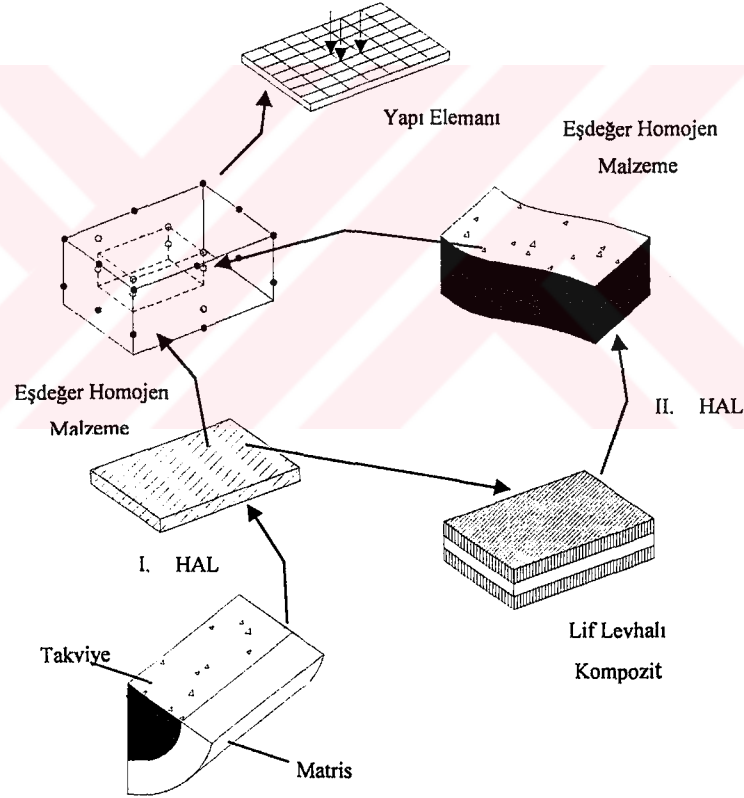
şeklinde verilmektedir. Yapısal dizayna göre sınıflandırma; güçlendirici elemanların geometrik formlarına göre, malzemeye göre sınıflandırma; güçlendirici ve/veya matris malzemelerinin özelliklerine göre, üretim teknolojisine göre sınıflandırma; kompozit malzemenin üretiminde kullanılan farklı teknolojik işlemlere göre sınıflandırmayı içermektedir. Her bilim dalı yukarıdaki üç sınıflandırmayı kendi açısından tekrar alt kısımlara ayırmaktadır. Örneğin yapısal dizayna göre sınıflandırma için kendi içinde en çok kullanılan alt sınıflandırma a)levhali, b)lifli ve c)tanecik takviyeli kompozit malzemeler şeklindeki sınıflandırmadır. Bu sınıflandırma Cristensen (1979) kaynağında i)Plak şekilli güçlendiricili, ii)Silindir şekilli güçlendiricili, iii)Küre şekilli güçlendiricili kompozitler şeklinde ifade edilmektedir. Belirtelim ki, tez çerçevesinde ele alınan yapı elemanının malzemesinin, levhali veya plak şekilli güçlendiricili kompozitler sınıfından olup, birbirini tekrarlayan farklı iki levhadan oluşan çok katlı (levhali) kompozit malzeme olduğu kabul edilecektir.

Literatürde tez kapsamında ele alınacak olan levhali çok katlı kompozit malzemelerden yapılmış yapı elemanlarının mekanik problemlerinin teorik incelenmesi, Sürekli Ortamlar Mekaniği açısından, bu elemanların malzemesinin iki tür modellenmesi çerçevesinde yapılır.

Bunlar,

1. Parçalı homojen malzeme,
2. Eşdeğer homojen anizotrop malzeme

olarak modellenmesidir. Birinci tip modellemede ele alınan problem, çok katlı kompozit malzemeyi oluşturan her bir katman için Sürekli Ortamlar Mekaniği'nin denklemleri ile levhalar arasında ideal temas koşulları yazılarak, ele alınan dış kuvvetler çerçevesinde çözülmeye çalışılır. Levha sayısı arttıkça problemin incelenmesi, artan denklem sayısı nedeniyle zorlaşır. Genelde bu tip yaklaşımda, Elastisite Teorisi'nin kesin denklemleri yerine her bir katman için yaklaşık plak teorileri kullanılarak çözümler aranır. İkinci tip modellemede parçalı homojen çok katlı malzeme, homojenleştirme işlemi (homogenisation procedure) kullanılarak, *eşdeğer homojen anizotrop malzeme* ile yer değiştirilir (Şekil 1.1). Eşdeğer homojen anizotrop malzemenin mekanik sabitleri bilinen tekniklerle bulunur (Cristensen 1979, Akbarov ve Guz 2000). Eşdeğer homojen anizotrop malzemenin mekanik özelliklerine *normalize edilmiş mekanik özellikler* denir.



1.1 Lifli ve levhali parçalı homojen malzemelerin, eşdeğer anizotrop homojen malzemelere dönüştürülme şeması

Bu çalışmada ele alınan çok katlı kompozit malzeme yukarıda verilen ikinci tür model çerçevesinde modellenerek yani, yapı elemanının malzemesi eşdeğer homojen anizotrop

malzeme şeklinde alınacak ve teorik hesaplamalarda kullanılan malzemeye ait mekanik özellikler normalize edilmiş mekanik özellikler olacaktır.

1.2 Tez Konusuna Ait Mevcut Çalışmalar

Literatürde farklı geometrik formda delik içeren yapı elemanlarına ait pek çok çalışma vardır. Bu alanda kapsamlı ilk çalışmalar Savin (1961) olarak verilebilir. Bu ve bundan sonraki pek çok çalışmalarda, ele alınan yapı elemanındaki delik, konform dönüşüm yardımıyla birim daire'ye dönüştürülerek, çözüm çoğunlukla analitik olarak yapılmıştır. Ele alınan dikdörtgen vb. geometrik formdaki deliği birim daire'ye dönüştüren konform dönüşüm sonsuz terimli bir seri ile temsil edilebilmektedir. İşlemlerin gerçekleştirilebilmesi için, bu sonsuz terimli serinin baştan sonlu adet teriminin ele alınabilmesinden dolayı, çoğunlukla keskin köşelere sahip (dikdörtgen) delik yerine, köşeleri yuvarlatılmış (dikdörtgen) delik ele alınabilmektedir (Lei vd. 2001, Jong 1981) . Bundan başka yine bu alandaki çalışmalar çoğunlukla sonsuz ve homojen plaklar için yapılabilmektedir. Anizotrop malzemeden yapılmış delik içeren sonlu plaklara ait çalışmalar sayısal çözüm yöntemleri kullanılarak, yapılmış hazır paket programlar (örneğin SAP2000 (Lei vd. 2001)) yardımıyla gerçekleştirilmiştir.

Dikdörtgen delik içeren yapı elemanlarına ait son yıllarda yapılan çalışmalar Yücel (2002), Yahnioğlu ve Mermer (2001), Yahnioğlu ve Yücel (2002), Yahnioğlu ve Yücel (2003) verilebilir. Bu çalışmalarda, literatürdeki çalışmalardan farklı olarak, keskin köşelere sahip dikdörtgen veya kare delik içeren anizotrop sonlu şerit-levhaların, ele alınan mesnet koşulları ve yükleme durumunda delik civarında oluşan gerilme yığılmaları, hazır paket programlar kullanılmaksızın, yazarlar tarafından yapılan programlar dahilinde, lineer Elastisite Teorisi çerçevesinde Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla yapılmıştır.

Sürekli ortamlar mekaniğinin non-lineer problemleri üç kısma ayrılabilir: Bunlar a) şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntıları non-lineer (geometrik non-lineer) olan problemler, b) bünye bağıntıları non-lineer (fiziksel non-lineer) olan problemler, c) geometrik ve fiziksel non-lineer problemlerdir. Ele alınan çalışmada Elastisite Teorisinin kesin geometrik non-lineer problemleri inceleneceğinden dolayı bu alanda yapılmış olan çalışmalara kısaca değinilecektir. Belirtelim ki, Bu alanda ele alınan çalışmaya, en yakın çalışma Selim (1999) çalışması verilebilir. Bu çalışmada, Elastisite Teorisi'ne ait bazı geometrik non-lineer sınır değer problemleri sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmiştir. Benzeri çalışmalar Yahnioğlu ve Selim (1997), Yahnioğlu ve Selim (1998a), Yahnioğlu ve Selim (1998b) ve Yahnioğlu ve

Selim (2000) olarak verilebilir. Listelenen bu çalışmalarda, çok katlı kompozit malzemeden yapılmış veya eğrisel yapıya sahip çok katlı kompozit malzemeden yapılmış, geometrik süreksizlik içermeyen şerit-levhaların farklı sınır koşulları altında gerilme yayılımları, geometrik non-lineer durumda, Elastisite Teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde, düzlem şekil değiştirme durumunda incelenmiştir.

Yukarıda belirtilen çalışmalar dahilinde, bu çalışmada, Selim (1999) ve Yücel (2002) çalışmalarının birleştirilmesi örnek uygulama çerçevesinde gerçekleştirilmiştir. Yani bu tez çerçevesinde, dikdörtgen delik içeren anizotrop şerit-levhaların ele alınan sınır koşulu ve yükleme altında, delik civarında oluşan gerilme birikimleri, düzlem şekil değiştirme durumunda, Elastisite Teorisi'nin kesin geometrik non-lineer denklemleri kullanılarak incelenmiştir.

1.3 Yapılan Araştırmanın Amaçları.

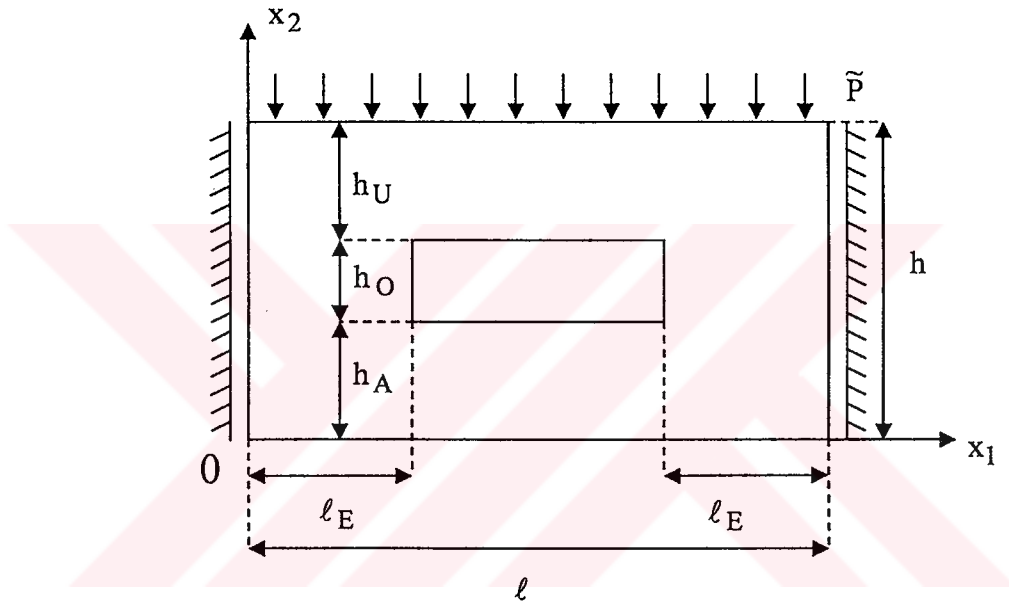
Bu çalışmada yapılan araştırmanın amaçları aşağıda özetlenmiştir.

1. Dikdörtgen formda delik içeren ve kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş şerit plakta, ele alınan yükleme altında delik civarında oluşan gerilme birikiminin incelenmesine ait sınır değer probleminin Elastisite Teorisi'nin düzlem şekil değiştirme durumunda ve geometrik non-lineer kesim denklemleri çerçevesinde formülasyonu,
2. Formülasyonu yapılmış non-lineer sınır değer probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle modellenmesi,
3. Problemin sayısal incelenebilmesi için gerekli algoritmaların geliştirilmesi ve bilgisayar programlarının yapılması,
4. Farklı problem parametreleri için iterasyonlar sonucunda elde edilen sayısal sonuçların yakınsaklığını sağlayan sınırlarının belirlenmesi,
5. Yapıda bulunan geometrik süreksizliğin ele alınan sınır değer problemi misalinde şerit-levhadaki gerilme birikimlerine etkisinin geometrik ve malzeme parametreleri açısından belirlenmesi,
6. Elde edilen sayısal sonuçların yorumlanması.

2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU VE SONLU ELEMAN MODELLEMESİ

2.1 Ele Alınan Problemin Matematiksel Modeli

Ele alınan problemin matematiksel modeli düzlem şekil değiştirme durumunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Plağa bağlı Ox_1x_2 kordinat takımı ve plağın geometrik boyutları Şekil (2.1)'de gösterildiği gibi kabul edilsin.



Şekil 2.1 Ele alınan şerit-levhanın geometrisi

Dolayısı ile ele alınan problemin çözüm bölgesi $\Omega \setminus \Omega_D$ olur. Burada,

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq l; 0 \leq x_2 \leq h\}, \quad \Omega_D = \{\ell_E \leq x_1 \leq l - \ell_E; h_A \leq x_2 \leq h_A + h_O\} \quad (2.1)$$

dır. Ele alınan bölgede sağlanan non-lineer denge denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

bünye denklemleri,

$$\sigma_{11} = A_{11} \varepsilon_{11} + A_{12} \varepsilon_{22}, \sigma_{22} = A_{12} \varepsilon_{11} + A_{22} \varepsilon_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2 A_{66} \varepsilon_{12} \quad (2.3)$$

yerdeğiştirme ile şekildeğiştirme bağıntıları,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right], \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

ve sınır koşulları,

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \Big|_{x_2=0;h} &= 0, \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \Big|_{x_2=0} = 0, \\ \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \Big|_{x_2=h} &= -\tilde{P}, \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \\ u_2 \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0 \\ \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \Big|_{\substack{x_2=h_A;h_A+h_O \\ x_1 \in (\ell_E;\ell-\ell_E)}} &= 0, \\ \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \Big|_{\substack{x_2=h_A;h_A+h_O \\ x_1 \in [\ell_E;\ell-\ell_E]}} &= 0, \\ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \Big|_{\substack{x_1=\ell_E;\ell-\ell_E \\ x_2 \in [h_A;h_A+h_O]}} &= 0, \\ \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \Big|_{\substack{x_1=\ell_E;\ell-\ell_E \\ x_2 \in [h_A;h_A+h_O]}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde verilebilir. Belirtelim ki, (2.2)-(2.5) ifadelerinde bilinen notasyonlar kullanılmıştır.

(2.3) de A_{ij} 'ler ele alınan çok katlı kompozit malzemeye ait normalize edilmiş mekanik

özelliklerdir. Dolayısı ile ele alınan problemin matematiksel modeli Lagrange koordinatları ile yazılmış (2.2)-(2.4) geometrik non-lineer denklemler takımının (2.5) sınır koşulları çerçevesinde çözülmesine getirilir. Belirtelim ki, yukarıda verilen matematiksel formülasyon; karşılıklı iki kenarından basit mesnetle tutturulmuş, dikdörtgen delik içeren şerit-levhanın, içerdği deliğin kenarlarından hiçbir yükleme olmadığı, sadece üst yüzeyinden şiddeti $\tilde{P}$ olan düzgün yayılı basınç yükü etkisinde olması durumuna karşı gelmektedir.

Yukarıda verilen sınır değer probleminin çözümü analitik olarak mümkün olmadığından, ele alınan problemin çözümü için sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılacaktır.

2.2 Ele Alınan Problemin Varyasyonel Formülasyonu

Ele alınan geometrik non-lineer sınır değer probleminin Sonlu Elemanlar Modellemesi için aşağıda verilen fonksiyonel kullanılır.

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega \setminus \Omega_D} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_S \tilde{P}_i u_i dS - \int_{S_D} Q_i u_i dS \quad (2.6)$$

Burada,

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell; 0 \leq x_2 \leq h\}, \quad \Omega_D = \{\ell_E \leq x_1 \leq \ell - \ell_E; h_A \leq x_2 \leq h_A + h_O\}$$

$$S = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4;$$

$$L_1 = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0; x_1 \in [0, \ell]\}, \quad L_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 = \ell; x_2 \in [0, h]\},$$

$$L_3 = \{(x_1, x_2) | x_2 = h; x_1 \in [0, \ell]\}, \quad L_4 = \{(x_1, x_2) | x_1 = 0; x_2 \in [0, h]\},$$

$$S_D = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4;$$

$$\ell_1 = \{(x_1, x_2) | x_2 = h_A; x_1 \in [\ell_E, \ell - \ell_E]\}, \quad \ell_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 = \ell - \ell_E; x_2 \in [h_A, h_A + h_O]\},$$

$$\ell_3 = \{(x_1, x_2) | x_2 = h_A + h_O; x_1 \in [\ell_E, \ell - \ell_E]\},$$

$$\ell_4 = \{(x_1, x_2) | x_1 = \ell_E; x_2 \in [h_A, h_A + h_O]\} \quad (2.7)$$

dir. (2.6) fonksiyonelinin birinci varyasyonelinin sıfıra eşitliğinden (2.2) diferansiyel denklemi ve (2.5)' te verilen gerilmelere göre sınır koşulları elde edilir. Yani (2.2) diferansiyel denklemleri (2.6) fonksiyonelinin Euler denklemleridir. Bunu göstermek için

(2.6) fonksiyonelinin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğini ele alalım,

$$\delta \Pi = \iint_{\Omega \setminus \Omega_D} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_S \tilde{P}_i \delta u_i dS - \int_{S_D} Q_i \delta u_i dS = 0. \quad (2.8)$$

(2.8) de $\tilde{P}$ ve Q sırasıyla S ve S_D sınırlarına etki eden dış kuvvetlerdir. Ayrıca, $\delta \varepsilon_{ij}$ ler;

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad (2.9)$$

den elde edilirler:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{11} &= \left(\delta_1^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_1}, \quad \delta \varepsilon_{22} = \left(\delta_2^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_2} \\ \delta \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\delta_1^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\delta_2^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_1} \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

olur. Daha sonra (2.10), (2.8) de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \iint_{\Omega \setminus \Omega_D} (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12}) d\Omega - \int_S (\tilde{P}_1 \delta u_1 + \tilde{P}_2 \delta u_2) dS - \\ &\int_{S_D} (Q_1 \delta u_1 + Q_2 \delta u_2) dS = 0 \\ \delta \Pi &= \iint_{\Omega \setminus \Omega_D} \left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] (\delta u_1)_{,1} + \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] (\delta u_2)_{,2} + \right. \\ &\left. \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] (\delta u_1)_{,2} + \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] (\delta u_2)_{,1} \right\} d\Omega - \\ &\int_S (\tilde{P}_1 \delta u_1 + \tilde{P}_2 \delta u_2) dS - \int_{S_D} (Q_1 \delta u_1 + Q_2 \delta u_2) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

bulunur. Burada, $(\delta u_i)_{,j} = \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j}$ ve (2.11) de,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \setminus \Omega_D} (.) d\Omega &= \int_0^{\ell_E} \int_0^h (.) dx_2 dx_1 + \int_{\ell_E}^{\ell-\ell_E} \int_0^{h_A} (.) dx_2 dx_1 + \int_{\ell_E}^{\ell-\ell_E} \int_{h_A+h_0}^h (.) dx_2 dx_1 + \int_{\ell-\ell_E}^{\ell} \int_0^h (.) dx_2 dx_1 \\ \int_S (.) dS &= \int_0^{\ell} (.)|_{x_2=0} dx_1 + \int_0^h (.)|_{x_1=\ell} dx_2 + \int_0^{\ell} (.)|_{x_1=h} dx_1 + \int_0^h (.)|_{x_1=0} dx_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{S_D} (.) dS = & \int_{\ell_E}^{\ell-\ell_E} (.)|_{x_2=h_A} dx_1 + \int_{h_A}^{h_A+h_O} (.)|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2 + \\ & \int_{\ell_E}^{\ell-\ell_E} (.)|_{x_1=h_A+h_O} dx_1 + \int_{h_A}^{h_A+h_O} (.)|_{x_1=\ell_E} dx_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

dir. (2.11) ifadesini kısaca,

$$\delta \Pi = \sum_{k=1}^4 [\delta \Pi_{k11} + \delta \Pi_{k22} + \delta \Pi_{k12} + \delta \Pi_{k21} - \delta I_k - \delta J_k] = 0 \quad (2.13)$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada,

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{k11} = & \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left[\int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left(\left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial (\delta u_1)}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] dx_2 \\ \delta \Pi_{k22} = & \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left[\int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left(\left[\sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \frac{\partial (\delta u_2)}{\partial x_2} \right) dx_2 \right] dx_1 \\ \delta \Pi_{k12} = & \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left[\int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left(\left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial (\delta u_1)}{\partial x_2} \right) dx_2 \right] dx_1 \\ \delta \Pi_{k21} = & \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left[\int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left(\left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \frac{\partial (\delta u_2)}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] dx_2, \quad k=1,2,3,4 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\delta I_1 = \int_0^\ell (\tilde{P}_1 \delta u_1 + \tilde{P}_2 \delta u_2) \Big|_{x_2=0} dx_1, \quad \delta I_2 = \int_0^h (\tilde{P}_1 \delta u_1 + \tilde{P}_2 \delta u_2) \Big|_{x_1=\ell} dx_2,$$

$$\delta I_3 = \int_0^\ell (\tilde{P}_1 \delta u_1 + \tilde{P}_2 \delta u_2) \Big|_{x_2=h} dx_1, \quad \delta I_4 = \int_0^h (\tilde{P}_1 \delta u_1 + \tilde{P}_2 \delta u_2) \Big|_{x_1=0} dx_2$$

$$\delta J_1 = \int_{\ell_E}^{\ell-\ell_E} (Q_1 \delta u_1 + Q_2 \delta u_2) \Big|_{x_2=h_A} dx_1,$$

$$\begin{aligned}
\delta J_2 &= \int_{h_A}^{h_A+h_O} \left(Q_1 \delta u_1 + Q_2 \delta u_2 \right) \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2, \\
\delta J_3 &= \int_{\ell_E}^{\ell-\ell_E} \left(Q_1 \delta u_1 + Q_2 \delta u_2 \right) \Big|_{x_2=h_A+h_O} dx_1, \\
\delta J_4 &= \int_{h_A}^{h_A+h_O} \left(Q_1 \delta u_1 + Q_2 \delta u_2 \right) \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2
\end{aligned} \tag{2.15}$$

(2.14) de,

$$\begin{aligned}
h_1^{(1)} = h_1^{(2)} = h_1^{(4)} = 0, \quad h_2^{(1)} = h_2^{(3)} = h_2^{(4)} = h, \quad h_2^{(2)} = h_A, \quad h_1^{(3)} = h_A + h_O \\
\ell_1^{(1)} = 0, \quad \ell_2^{(1)} = \ell_1^{(2)} = \ell_1^{(3)} = \ell_E, \quad \ell_2^{(2)} = \ell_2^{(3)} = \ell_1^{(4)} = \ell - \ell_E, \quad \ell_2^{(4)} = \ell
\end{aligned} \tag{2.16}$$

işaretlemleri kullanılmıştır. (2.14) ifadelerine kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{k11} &= \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_2^{(k)}} dx_2 - \\
&\quad \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_1^{(k)}} dx_2 - \\
&\quad \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right) \delta u_1 dx_1 dx_2 \\
\delta \Pi_{k21} &= \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_2^{(k)}} dx_2 - \\
&\quad \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_1^{(k)}} dx_2 - \\
&\quad \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right) \delta u_2 dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{k12} = & \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_2=h_2^{(k)}} dx_1 - \\
& \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_2=h_1^{(k)}} dx_1 - \\
& \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right) \delta u_1 dx_1 dx_2 \\
\delta \Pi_{k22} = & \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_2=h_2^{(k)}} dx_1 - \\
& \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_2=h_1^{(k)}} dx_1 - \\
& \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right) \delta u_2 dx_1 dx_2, \quad k=1,2,3,4 \quad (2.17)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.15) ve (2.17) ifadeleri (2.13)' de yerine yazılır sonra δu_1 ve δu_2 ' lere göre gruplaştırma yapılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\delta \Pi = \sum_{k=1}^4 [L_{k11} + L_{k12} + L_{k21} + L_{k22}] + W = 0 \quad (2.18)$$

Burada,

$$L_{k11} = \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - T_{k11} \right\} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_2^{(k)}} -$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - T_{k11} \right\} \delta u_1 \Big|_{x_1 = \ell_1^{(k)}} \Big) dx_2 \\
L_{k12} = & \int_{h_1^{(k)}}^{h_2^{(k)}} \left(\left\{ \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - T_{k12} \right\} \delta u_2 \Big|_{x_1 = \ell_2^{(k)}} - \right. \\
& \left. \left\{ \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - T_{k12} \right\} \delta u_2 \Big|_{x_1 = \ell_1^{(k)}} \right) dx_2 \\
L_{k21} = & \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left(\left\{ \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - T_{k21} \right\} \delta u_1 \Big|_{x_2 = h_2^{(k)}} - \right. \\
& \left. \left\{ \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - T_{k21} \right\} \delta u_1 \Big|_{x_2 = h_1^{(k)}} \right) dx_1 \\
L_{k22} = & \int_{\ell_1^{(k)}}^{\ell_2^{(k)}} \left(\left\{ \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - T_{k22} \right\} \delta u_2 \Big|_{x_2 = h_2^{(k)}} - \right. \\
& \left. \left\{ \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - T_{k22} \right\} \delta u_2 \Big|_{x_2 = h_1^{(k)}} \right) dx_1 \tag{2.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = & - \iint_{\Omega \setminus \Omega_D} \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right\} \delta u_1 + \right. \\
& \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right\} \delta u_2 \right) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

(2.20)

(2.19)' da T_{kij} lerin değerleri ele alınan sınırdeğer problemi için aşağıdaki şekilde olur.

$$T_{111}|_{\substack{x_1=\ell_E \\ x_2 \in (h_A, h_A+h_O)}} = 0, \quad T_{111}|_{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in (0,h)}} = 0,$$

$$T_{112}|_{\substack{x_1=\ell_E \\ x_2 \in (h_A, h_A+h_O)}} = 0, \quad T_{112}|_{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in (0,h)}} = 0,$$

$$T_{121}|_{\substack{x_2=h \\ x_1 \in (0,\ell_E)}} = 0, \quad T_{121}|_{\substack{x_2=0 \\ x_1 \in (0,\ell_E)}} = 0,$$

$$T_{122}|_{\substack{x_2=h \\ x_1 \in (0,\ell_E)}} = -\tilde{P}, \quad T_{122}|_{x_2=0} = 0,$$

$$T_{221}|_{\substack{x_2=h_A \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0, \quad T_{221}|_{\substack{x_2=0 \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0,$$

$$T_{222}|_{\substack{x_2=h_A \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0, \quad T_{222}|_{\substack{x_2=0 \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0,$$

$$T_{321}|_{\substack{x_2=h \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0, \quad T_{321}|_{\substack{x_2=h_A+h_O \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0,$$

$$T_{322}|_{\substack{x_2=h \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = -\tilde{P}, \quad T_{322}|_{\substack{x_2=h_A+h_O \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0,$$

$$T_{411}|_{\substack{x_1=\ell \\ x_2 \in (0,h)}} = 0, \quad T_{411}|_{\substack{x_1=\ell-\ell_E \\ x_2 \in (h_A, h_A+h_O)}} = 0,$$

$$T_{412}|_{x_1=\ell} = 0, \quad T_{412}|_{\substack{x_1=\ell-\ell_E \\ x_2 \in (h_A, h_A+h_O)}} = 0,$$

$$T_{421}|_{\substack{x_2=h \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0, \quad T_{421}|_{\substack{x_2=0 \\ x_1 \in (\ell_E, \ell-\ell_E)}} = 0,$$

$$T_{422}|_{\substack{x_2=h \\ x_1 \in (\ell-\ell_E, \ell)}} = -\tilde{P}, \quad T_{422}|_{\substack{x_2=0 \\ x_1 \in (\ell-\ell_E, \ell)}} = 0,$$

$$\int_0^{h_A} T_{111} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2 = \int_0^{h_A} T_{211} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2,$$

$$\int_{h_A+h_O}^h T_{111} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2 = \int_{h_A+h_O}^h T_{311} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{h_A} T_{112} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2 &= \int_0^{h_A} T_{212} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2, \\
\int_{h_A+h_O}^h T_{112} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2 &= \int_{h_A+h_O}^h T_{312} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_E} dx_2, \\
\int_0^{h_A} T_{211} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2 &= \int_0^{h_A} T_{411} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2, \\
\int_0^{h_A} T_{212} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2 &= \int_0^{h_A} T_{412} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2, \\
\int_{h_A+h_O}^h T_{311} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2 &= \int_{h_A+h_O}^h T_{411} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2, \\
\int_{h_A+h_O}^h T_{312} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2 &= \int_{h_A+h_O}^h T_{412} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell-\ell_E} dx_2,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ayrıca ele alınan problem için (2.5)' te verilen yer değiştirme (u_i) ' lere göre sınır koşullarını δu_i ' lerde sağladığından,

$$\delta u_2|_{x_1=\ell} = \delta u_2|_{x_1=0} = 0 \tag{2.22}$$

olur. Dolayısıyla L_{112} nin ikinci terimi ve L_{412} nin birinci terimlerinin integrali sıfır olur.

Ayrıca (2.18) ve açık şekilde (2.19) ile (2.20) ifadelerinde görüldüğü üzere,

$$\delta u_1|_{x_1=0;\ell}, \quad \delta u_i|_{x_2=0;h}, \quad \delta u_i|_{x_1=\ell_E;\ell-\ell_E}, \quad \delta u_i|_{x_2=h_A;h_A+h_O} \quad i=1,2 \tag{2.23}$$

büyüklikleri keyfi olduğundan, bu büyüklüklere ait katsayıların integralleri sıfır olmalıdır. Gerekli düzenlemeler yapılarak ele alınan (2.2)-(2.5) sınır değer problemine ait alan denklemleri ve gerilmelere göre sınır koşulları elde edilir. Dolayısıyla ele alınan (2.6) fonksiyoneli (2.2)-(2.5) sınır değer problemine denk bir fonksiyonel olduğu gösterilmiş olunur.

Buna göre (2.18) denklemi ele alınan (2.2)-(2.5) problemi için,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \setminus \Omega_D} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right] \delta u_1 + \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right] \delta u_2 \right\} dx_1 dx_2 - \\ & \left. \int_0^\ell \tilde{P} \delta u_2 \right|_{x_2=h} dx_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

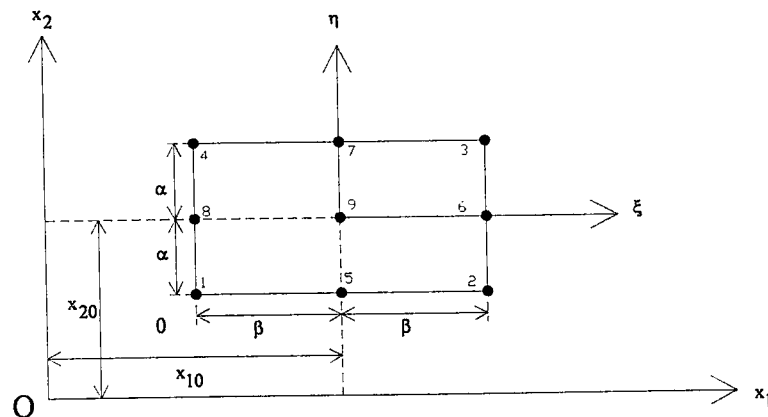
şeklinde yazılabilir.

2.3 Sonlu Eleman Modellemesi

Ele alınan problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözümü için, problemin çözüm bölgesi $\Omega \setminus \Omega_D$ (Şekil (2.1)) sonlu adet alt bölgelere yani, sonlu elemanlara Ω_k ($k = 1, 2, \dots, M$) ayrıklaştırılır. Bütün sonlu elemanların birleşiminin çözüm bölgesini verdiği kabul edilir.

$$\Omega \setminus \Omega_D = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (2.25)$$

dir.



2.2 Örnek eleman ve düğüm noktaları

Ele alınan problemin çözüm bölgesi, düzgün dikdörtgen formda olduğundan, buna uygun olarak, alt bölgeler, yani sonlu elemanlar da dikdörtgen geometrik formda seçilmiştir.

Her sonlu eleman üzerinde yapılması gereken sayısal işlemler, bu sonlu elemanların her birinin ayrı ayrı örnek elemana (Şekil 2.2) dönüştürülmesiyle, örnek eleman üzerinde gerçekleştirilir. Bunun için, Global Ox_1x_2 kartezyen koordinat sisteminden, oğn dik koordinat sistemine dönüşümü sağlayan bağıntı:

$$\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta}, \quad \eta = \frac{x_2 - x_{21}}{\alpha} \quad (2.26)$$

şeklinde verilebilir. Her bir sonlu elemanda dokuz düğüm noktası (nod) seçilmiştir. Aynı şekilde örnek eleman üzerinde de dokuz nod belirlenir. Örnek elemandaki nodlara ait İkinci Dereceden Standart Lagrange Şekil Fonksiyon'ları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); & N_4 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); & N_7 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); & N_5 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta); & N_8 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta); & N_6 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1); & N_9 &= (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ele alınan problemin çözümü, yöntem gereği, her bir sonlu elemanda polinom şeklinde seçilir, Bu çalışmada, Yerdeğıştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanıldığından her bir sonlu elemanda aranan fonksiyon yerdeğıştirme fonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$u^{(k)} \approx N^{(k)} a^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (2.28)$$

seçilir. (2.28)' de altı çizili indislere göre Einstein toplama uylasımlı uygulanmayacaktır. Ayrıca (2.28)' de

$$\left(u^{(k)} \right)^T = \left(u_1^{(k)}(x_1, x_2) \quad u_2^{(k)}(x_1, x_2) \right)$$

$$\left(a^{(k)} \right)^T = \left(u_{11}^{(k)} \quad u_{21}^{(k)} \quad \dots \quad u_{19}^{(k)} \quad u_{29}^{(k)} \right)$$

$$N^{(k)} = \begin{pmatrix} N_1^{(k)} & 0 & N_2^{(k)} & 0 & N_3^{(k)} & 0 & N_4^{(k)} & 0 & N_5^{(k)} & 0 & N_6^{(k)} & 0 & N_7^{(k)} & 0 & N_8^{(k)} & 0 & N_9^{(k)} & 0 \\ 0 & N_1^{(k)} & 0 & N_2^{(k)} & 0 & N_3^{(k)} & 0 & N_4^{(k)} & 0 & N_5^{(k)} & 0 & N_6^{(k)} & 0 & N_7^{(k)} & 0 & N_8^{(k)} & 0 & N_9^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, M \quad (2.29)$$

dir. (2.28) ve (2.29)' de (k) üst indisi ele alınan büyüklüğün Ω_k sonlu elemanına ait olduğunu göstermektedir. $a^{(k)}$ vektörünün (2.29)' da gösterilen bileşenleri, Ω_k sonlu elemanının nodlarındaki yer değiştirmelerdir. Her bir bileşenin, birinci alt indisi yer değiştirmenin doğrultusunu, ikinci alt indisi nodun yerel numarasını göstermektedir. Her sonlu elemanda (2.28) şeklinde seçilen çözümler (2.24)'de yerine yazılırsa, belirli integral sonlu elemanlar üzerindeki integrallerin toplamı şeklinde ayrıklaştırılabilir. Yani,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \left\langle \iint_{\Omega_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11}^{(k)} \left(1 + \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12}^{(k)} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{12}^{(k)} \left(1 + \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22}^{(k)} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_2} \right] \right\} \delta u_1^{(k)} + \right. \\ & \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11}^{(k)} \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(k)} \left(1 + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21}^{(k)} \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(k)} \left(1 + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2} \right) \right] \right\} \delta u_2^{(k)} \right\rangle dx_1 dx_2 - \\ & \sum_{k=1}^{M_S} \left\langle \int_{S^{(k)}} \tilde{P} \delta u_2^{(k)} \Big|_{x_2=h} dx_1 \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

şeklinde olur. (2.30) denkleminde M, çözüm bölgesinin ayrıklaştırıldığı toplam sonlu eleman adedini, M_S , bölgenin $x_2 = h$ sınırına sahip toplam sonlu eleman adedini, Ω_k , k. Sonlu elemanı ve $S^{(k)}$, k. sonlu elemanın $x_2 = h$ sınırını göstermektedir. (2.30) denklemi bilinen işlemler sonucunda,

$$\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{r} \quad (2.31)$$

şeklinde non-lineer cebirsel denklemlere dönüştürülür. Burada $\mathbf{a}^T = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(M)})$ dir. $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(M)}$ 'nin ifadeleri (2.29)'de verilmektedir. (2.31)'in sol tarafındaki $\mathbf{r}$ vektörünün bileşenleri (2.30)'daki son terimden belirlenir. $\Psi(\mathbf{a})$ ise,

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{a}) &= \sum_{k=1}^M \Psi^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}) \\ \left(\Psi^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}) \right)^T &= \left(\Psi_1^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}), \Psi_2^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}), \dots, \Psi_1^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}), \Psi_2^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}) \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

şeklindedir. Burada aşağıda verilen işaretlemeler kabul edilmiştir.

$$\Psi_1^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}) = \iint_{\Omega_k} \left(\Psi_{11}^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}) \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \Psi_{12}^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}) \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) d\Omega_k$$

$$\Psi_2^{i(k)}(a(k)) = \iint_{\Omega_k} \left(\Psi_{21}^{(k)}(a(k)) \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \Psi_{22}^{(k)}(a(k)) \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) d\Omega_k$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^{(k)}(a(k)) = & \left(A_{11} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \right)^2 \right) \right) + \right. \\ & A_{12} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right)^2 \right) \right) \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \right) + \\ & A_{66} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} \right) \\ \Psi_{12}^{(k)}(a(k)) = & A_{66} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \right. \\ & \left. \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right) \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \right) + \\ & \left(A_{12} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \right)^2 \right) \right) + \right. \\ & A_{22} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right)^2 \right) \right) + \\ & \left. \left. \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right) \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\Psi_{21}^{(k)}(a(k)) = \left(A_{11} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \right)^2 \right) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& A_{12} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right)^2 \right) \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \\
& A_{66} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right) \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \right) \\
\Psi_{22}^{(k)}(a^{(k)}) = & A_{66} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \\
& \left(A_{12} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \right)^2 \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. A_{22} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)} \right)^2 \right) \right) \right) \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} \right)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

dir. Sonuçta, ele alınan (2.2)-(2.4) non-lineer sınırdeğer probleminin (2.5) sınır koşulları çerçevesinde incelenmesi Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla (2.31)-(2.33) non-lineer cebirsel denklemler takımının incelenmesine getirilmiş olunur. Belirtelim ki, (2.31)-(2.33) denklemlerinde non-lineer terimler ihmal edilirse, (2.31) denklemleri Yücel (2002) de verilen,

$$K\mathbf{a} = \mathbf{r} \tag{2.34}$$

lineer cebirsel denklemlere dönüşmektedir.

2.4 Newton-Raphson Yöntemi ve Teğet Rijidlik Matrisinin Oluşturulması

(2.31) non-lineer cebirsel denklemler takımı Newton-Raphson yöntemi yardımıyla lineerleştirilerek, iterasyonlarla çözülecektir. Bu yöntemle göre, keyfi bir çözüm vektörü örneğin,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 \quad (2.35)$$

seçilmiş olsun. Bu çözüm (2.31) cebirsel denklemler takımının kesin çözümü olmadığından, (2.31)' de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_0) \quad (2.36)$$

şeklinde bir hata meydana gelir. Böyle bir hatanın oluşmaması için (2.35) şeklinde seçilen ilk çözüme bir artım verilerek,

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1 \quad (2.37)$$

şeklinde yeni bir çözüm vektörü yazılır. Burada $\delta \mathbf{a}_1$ (2.36)' daki hatayı sıfırlayacak şekilde belirlenmesi gereken bir çözümdür yani,

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1) = \mathbf{r} \quad (2.38)$$

denkleminin sağlandığı kabul edilir. $\delta \mathbf{a}_1$ ' in bulunması için (2.38) denklemini lineerleştirilirse,

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1) \approx \Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 \quad (2.39)$$

olur. Buradan (2.39) (2.38)' de yerine yazılırsa

$$\Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r} \quad (2.40)$$

elde edilir. (2.40), (2.36)' da göz önüne alınırsa,

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \quad (2.41)$$

şeklinde olur. Bu ifade basitçe,

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0) \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \quad (2.42)$$

şeklinde gösterilir. Burada $\mathbf{K}_T$ matrisine *Teğet Stiffness Matrisi* adı verilir ve

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \quad (2.43)$$

dir. (2.42) lineer cebrik denklem sisteminden $\delta \mathbf{a}_1$ belirlenir (2.37)' de yerine yazılırsa (2.31) denklemler sistemine çözüm olabilecek bir vektör elde edilir. Eğer elde edilen (2.37) çözümü

kesin çözüm ise (2.31) non-lineer denklemler sistemini özdeşlikle sağlar. Aksi halde (2.36)' dakine benzer şekilde,

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_1) \quad (2.44)$$

bir hata meydana gelir. (2.37)-(2.43) işlemleri, (2.44) göz önüne alınarak $\mathbf{a}_0$ yerine $\mathbf{a}_1$ çözümü kullanılarak tekrarlanır, son elde edilen çözümün istenilen hassasiyetle (2.31) denklemini sağladığı durumda iterasyon işlemleri sonlandırılır.

Belirtelim ki, ele alınan sınır değer problemine ait (2.31) non-lineer cebirsel denklemler takımının çözümü yukarıda verilen (2.36)-(2.43) iterasyonu kullanılarak yapılmıştır. İterasyona giren ilk çözüm olarak (2.34) denklem takımının çözümü seçilmiştir. Belirtelim ki, (2.34) denklemleri, ele alınan non-lineer sınır değer problemine karşı gelen lineer sınır değer probleminin sonlu elemanlar formülasyonu yardımıyla elde edilmiş olan lineer cebirsel denklemler takımındır.

(2.43)' te verilen $\mathbf{K}_T$ matrisinin bileşenleri aşağıdaki şekilde belirlenir

$$\mathbf{K}_T = \sum_{k=1}^M \mathbf{K}_T^{(k)} \quad (2.45)$$

Burada,

$$\mathbf{K}_{Tij}^{(k)} = \iint_{\Omega_k} \mathbf{G}_{ij}^{(k)} d\Omega_k, \quad i, j = 1, \dots, 9, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (2.46)$$

dir. (2.46)' da

$$\mathbf{G}_{ij}^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Psi_{21}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_{21}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

şeklinde bir matristir. (2.47)' de

$$\frac{\partial \Psi_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} = \frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)}\right) + \sigma_{11}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \sigma_{12}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} &= \frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)}\right) + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} \\
\frac{\partial \Psi_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} &= \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)}\right) + \sigma_{12}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \Psi_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} &= \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^{(k)}\right) + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^{(k)} \\
\frac{\partial \Psi_{21}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} &= \frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)}\right) \\
\frac{\partial \Psi_{21}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} &= \frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \sigma_{11}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)}\right) + \sigma_{12}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \Psi_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} &= \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)}\right) \\
\frac{\partial \Psi_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} &= \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^{(k)} + \sigma_{12}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^{(k)}\right) + \sigma_{22}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

şeklinde ve (2.48)' de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} &= A_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} + A_{12} \frac{\partial \varepsilon_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} + 2A_{16} \frac{\partial \varepsilon_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \\
\frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} &= A_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} + A_{12} \frac{\partial \varepsilon_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} + 2A_{16} \frac{\partial \varepsilon_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \\
\frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} &= A_{16} \frac{\partial \varepsilon_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} + A_{26} \frac{\partial \varepsilon_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} + 2A_{66} \frac{\partial \varepsilon_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} \\
\frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} &= A_{16} \frac{\partial \varepsilon_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} + A_{26} \frac{\partial \varepsilon_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} + 2A_{66} \frac{\partial \varepsilon_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} = A_{12} \frac{\partial \epsilon_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} + A_{22} \frac{\partial \epsilon_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} + 2A_{26} \frac{\partial \epsilon_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} = A_{12} \frac{\partial \epsilon_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} + A_{22} \frac{\partial \epsilon_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} + 2A_{26} \frac{\partial \epsilon_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{11}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} = \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{2n}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \epsilon_{11}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} = \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{2n}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \epsilon_{22}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} = \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{1n}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \epsilon_{22}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} = \frac{\partial N_j}{\partial x_2} + \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{2n}^{(k)} + \frac{\partial N_j}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \epsilon_{12}^{(k)}}{\partial u_{1j}^{(k)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_2} + \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{1n}^{(k)} + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{1n}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{12}^{(k)}}{\partial u_{2j}^{(k)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{2n}^{(k)} + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{2n}^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \right) \quad (2.50)$$

dir.

2.5 Gerilmelerin Belirlenmesi

Bu tez çerçevesinde *Yerdeğiştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi* kullanıldığından, her bir nodda bilinmeyen olarak sadece yerdeğiştirmeler alınmıştır. Yani Sonlu Eleman çözümü bize ancak nodlardaki yerdeğiştirmeleri verecektir. Gerilme fonksiyonlarının elde edilmesi ise, Hooke Yasası yardımıyla bulunur (Timoshenko ve Goodier 1970). Yani,

$$\hat{\sigma} = D\epsilon, \quad \sigma^T = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}\}, \quad \epsilon^T = \{\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{12}\} \quad (2.51)$$

burada,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

dir.

Bilindiği üzere sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözüm, bütün bölgede C^0 sürekliliğine sahiptir. Eğer bu çözümden türev alırsa, elde edilen fonksiyon sonlu eleman sınırlarında sıçrama alır yani, süreksiz olur. Dolayısıyla ele alınan problem için bulunan yerdeğiştirme fonksiyonu kullanılarak bulunan gerilme fonksiyonu, sonlu eleman sınırlarında süreksiz olur. Bu ise, ancak yöntemden kaynaklanan bir durumdur. Gerçek gerilme dağılımları bütün bölgede, ele alınan durum için süreksiz olamaz.

Böyle bir durumu ortadan kaldırmak için iki yol izlenir. Bunlardan ilki; Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi (Mixed Finite Elements Method)'nin kullanılmasıdır. Yani her bir noda sadece yerdeğiştirmeler değil, gerilmelerinde bilinmeyen olarak ele alınması, şeklindeki yaklaşımdır. Açıktır ki, bu yaklaşım bilinmeyen adedini çok fazla artırarak, lineer denklem sisteminin boyutunu çok büyütecektir. Bilgisayarların çözebileceği denklem sayısı kısıtlı olduğundan, bilinmeyen sayısını belirli sayıda tutmak için sonlu eleman sayısının düşürülmesi gerekir. Bu durum elde edilen çözümün hassasiyetini düşürebilir. Diğer yaklaşım ise, İki Aşamalı Karışık Formülasyon'dur. Bu yaklaşıma göre; ilk aşamada yerdeğiştirmeler bulunur, ikinci aşamada ise, gerilme fonksiyonları tekrar sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla modellenerek, sonlu eleman çözümü yapılır. Bu yöntem ise ilk yaklaşıma göre uzun ve külfetlidir. Ancak her iki yaklaşım sonucunda hem yerdeğiştirme hemde gerilme fonksiyonları tüm bölgede sürekli fonksiyonlar olarak elde edilir.

Belirtelim ki, sürekli gerilme dağılımlarının elde edilmesinde bu Tez çerçevesinde İki Aşamalı Karışık Formülasyon kullanılmıştır (Zienkiewicz ve Taylor 1989). İlk aşamada yerdeğiştirme fonksiyonları ve ikinci aşamada gerilme fonksiyonları elde edilmiştir. Aşağıda gerilmelere ait sonlu eleman modellemesi verilmektedir.

Gerilme fonksiyonlarına ait sonlu eleman modellemesi, yerdeğiştirmelere ait sonlu eleman modellemesi ile aynı alınmıştır. Buna göre, her sonlu elemanda gerilme fonksiyonu (2.28)'e benzer şekilde,

$$\sigma^{(k)} \approx N_{\sigma}^{(k)} \bar{\sigma}^{(k)} \quad (2.53)$$

alınır. Burada,

$$\sigma^{(k)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(k)} \\ \sigma_{22}^{(k)} \\ \sigma_{12}^{(k)} \end{pmatrix}; \quad \bar{\sigma}^{(k)} = \left(\bar{\sigma}^{(1)}, \bar{\sigma}^{(2)}, \dots, \bar{\sigma}^{(M)} \right)$$

$$\bar{\sigma}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11}^{(k)} \\ \bar{\sigma}_{22}^{(k)} \\ \bar{\sigma}_{12}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

$$N_{\sigma}^{(k)} = \left(N_{\sigma}^{(1)}, N_{\sigma}^{(2)}, \dots, N_{\sigma}^{(M)} \right) \quad (2.54)$$

ve (2.54) de,

$$N_{\sigma}^{(k)} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \dots & N_9 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \dots & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots & 0 & 0 & N_9 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

şeklindedir. Belirtelim ki, gerilme fonksiyonlarına ait sonlu eleman ağı yerdeğiştirme fonksiyonlarına ait olan sonlu eleman ağı ile aynı alınmıştır. Dolayısıyla yerdeğiştirmelerin bilindiği noktalarda gerilme değerleride belirlenmiştir. Ayrıca (2.55) de kullanılan Şekil fonksiyonları yerdeğiştirmelerin bulunmasında kullanılan şekil fonksiyonları olarak seçilmiştir. (2.53) yardımıyla elde edilen gerilme fonksiyonu ile (2.51) yardımıyla elde edilen süreksiz gerilme fonksiyonu arasında En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla,

$$Q = \iint_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^2 d\Omega \quad (2.56)$$

fonksiyoneli kurulur. Bu fonksiyonel yardımı ile (2.53)' deki nodlarda bilinmeyen gerilme değerleri

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ijk}} = 0, \quad i, j = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (2.57)$$

den belirlenir. Dolayısıyla bütün bölgede sürekli gerilme dağılımları elde edilir.

3. SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal sonuçların elde edilmesinde ele alınan yapı malzemesinin, $x_2 = 0$ düzlemine paralel yerleştirilen ve birbirini tekrar eden farklı iki tür levhadan oluşan, çok katlı kompozit malzemedan yapıldığı kabul edilmiştir. Ele alınan kompozit malzemenin bileşenlerinden matris malzemesine ait büyüklükler alt indis 1, güçlendirici malzemeye ait büyüklükler alt indis 2 ile gösterilecektir. Buna göre ele alınan kompozit malzemenin bileşenlerinin mekanik sabitleri: Matris (güçlendirici) malzemesinin E_1 (E_2) Elastisite Modülü, ν_1 (ν_2) Poisson oranı, λ_1 (λ_2) Lamé sabiti, μ_1 (μ_2) Kayma Modülü ve η_1 (η_2) kompozit malzeme içerisindeki hacim oranıdır. Buna göre ele alınan kompozit malzemenin mekanik sabitleri, onu oluşturan bileşenlerin mekanik sabitleri yardımıyla, Akbarov ve Guz (2000), Christensen (1979), Yahnioğlu (1996) ve diğer birçok kaynakta verildiği gibi,

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + (\mu_1 + \lambda_1) \eta_1 + (\mu_2 + \lambda_2) \eta_2 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1}; \\
 A_{12} &= \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \eta_1 \eta_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1}; \\
 A_{22} &= (2\mu_1 + \lambda_1) \eta_1 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{[(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)]^2}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1}; \\
 A_{66} &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

şeklinde bulunur.

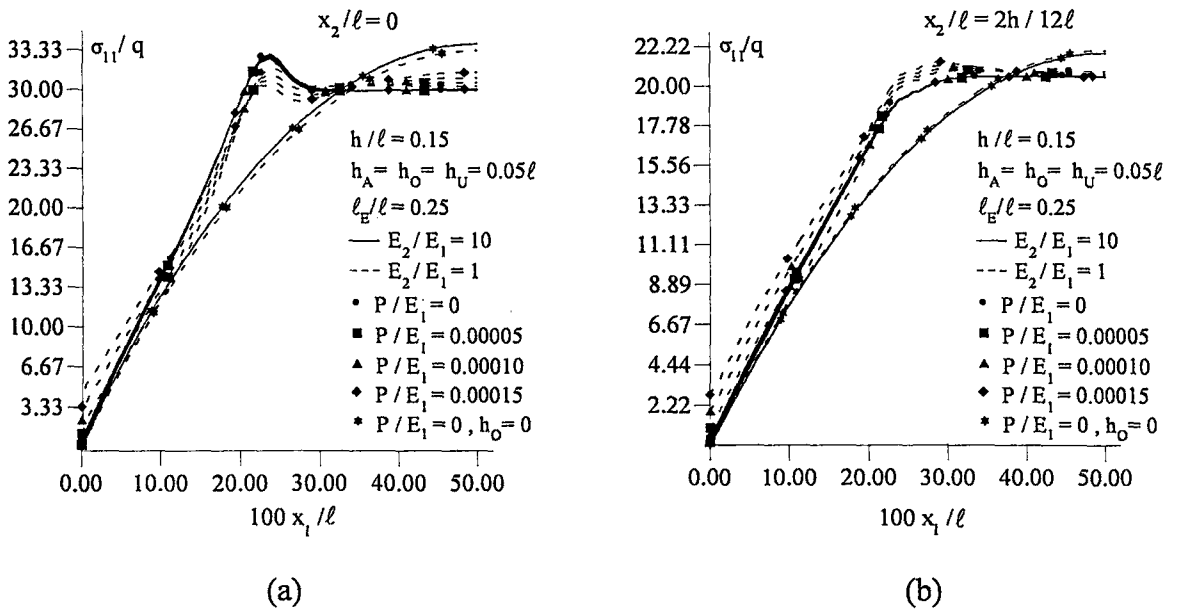
Ele alınan yükleme durumu ve sınır koşulu için (2.2)-(2.5) geometrik non-lineer sınır değer probleminin incelenmesinde, yapıda bulunan dikdörtgen delikten dolayı, delik civarında oluşan gerilme birikimlerine, yapı elemanına ait geometrik ve malzeme parametrelerinin etkisi detaylı olarak ele alınmıştır. Problemin incelenmesinde bu parametrelerin yakınsaklık sınırlarının belirlenmesi gerekir. Çünkü, seçilen parametrenin her değerinde sayısal sonuçlar yakınsak çıkmaz. Belirtelim ki, bu tez çerçevesinde parametrelerin yakınsaklık aralığı Selim (1999)' da verilen aralıklar ($P/E_1 < 0.0002$) olarak ele alınmış, ayrıca belirlenmemiştir.

Tez çerçevesinde sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılan program ve algoritmalar tarafımızdan yapılmış olup, Sonlu Eleman Modellemesinde 480 sonlu eleman, 2025 nod ve 4000 serbestlik derecesi (NDOF) kullanılmıştır. Ele alınan non-lineer sınır değer problemine karşı gelen lineer problem için elde edilen sayısal sonuçlar Mermer (2002) doktora tezinde

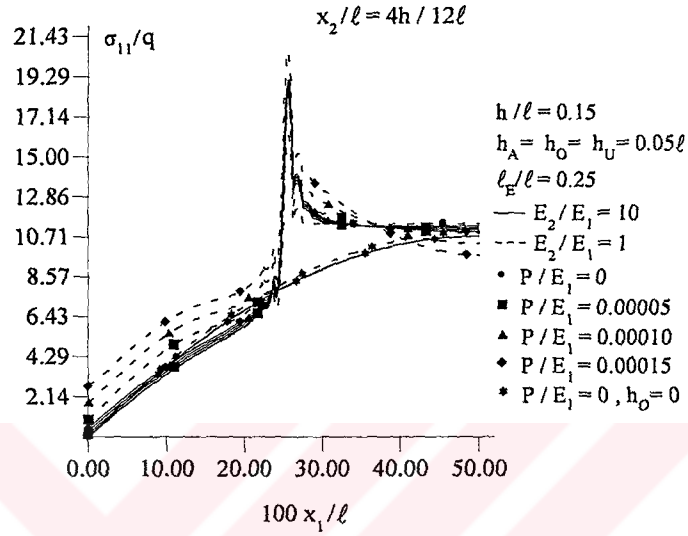
elde edilen sayısal sonuçlar ile; yapıda delik olmaması durumunda elde edilen geometrik non-lineer sınır değer problemine ait sayısal sonuçlar, Selim (1999) doktora tezinde elde edilen sayısal sonuçlarla test edilerek, tarafımızdan yapılan algoritma ve programlarla elde edilen sayısal sonuçların belirtilen tezlerdeki uygun sayısal sonuçlarla büyük hassaslıkla üstüste düştüğü görülmüştür.

Aşağıda, bazı geometrik ve malzeme parametrelerinin ele alınan problem için dikdörtgen delik civarında oluşan gerilme birikimine etkisi, geometrik lineer ve geometrik non-lineer durumda karşılaştırmalı olarak grafikler şeklinde verilmiştir. Ele alınan parametre değerleri şekiller üzerinde gösterilmektedir. Belirtelim ki, ele alınan şerit-levhanın üst yüzeyinden etki eden $\tilde{P}$ basınç kuvveti, grafikler üzerinde q ile temsil edilmiştir ($q = \tilde{P}$).

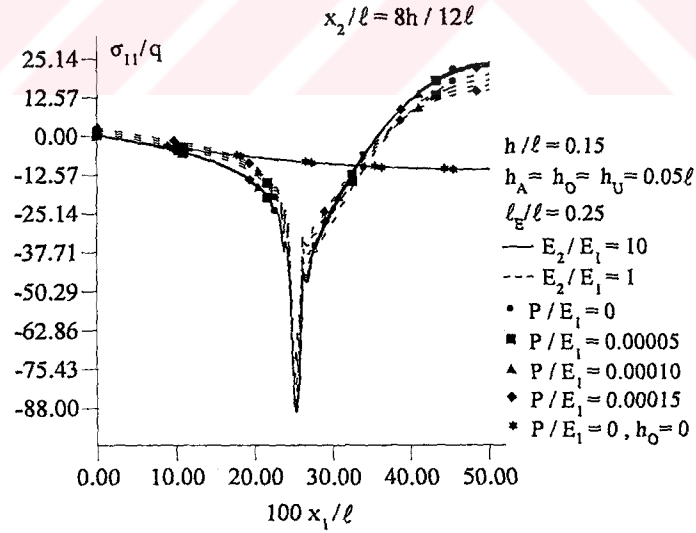
Şekil 3.1'de, σ_{11}/q gerilmesinin non-lineerlik çarpanı P/E_1 'in farklı değerleri için altı ayrı kesitte, izotrop ($E_2/E_1 = 1$) ve anizotrop ($E_2/E_1 = 10$) durumda x_1/ℓ 'ye göre dağılımı verilmektedir. Parametrelerin değerleri şekil üzerinde gösterilmekte olup, kesikli çizgiler ile gösterilen grafikler izotrop, sürekli çizgiler ile gösterilen grafikler anizotrop durumda elde edilmiştir. Ayrıca ele alınan geometrik non-lineer probleme karşı gelen uygun lineer problemin, yapı elemanında dikdörtgen delik olmaması durumunda elde edilen gerilme grafikleri de yine Şekil 3.1'de verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi yapı elemanında dikdörtgen delik olması gerilme dağılımını önemli ölçüde etkilemektedir. Bu etki, dikdörtgen deliğin köşeleri civarında çok daha fazladır (Şekil 3.1c, 3.1d). Bu köşe noktaları civarında oluşan gerilme dağılımları birbiriyle kıyaslandığında özellikle yüklemeye yakın olan köşe civarındaki gerilmenin (Şekil 3.1d) diğerine göre daha büyük olduğu görülmektedir.



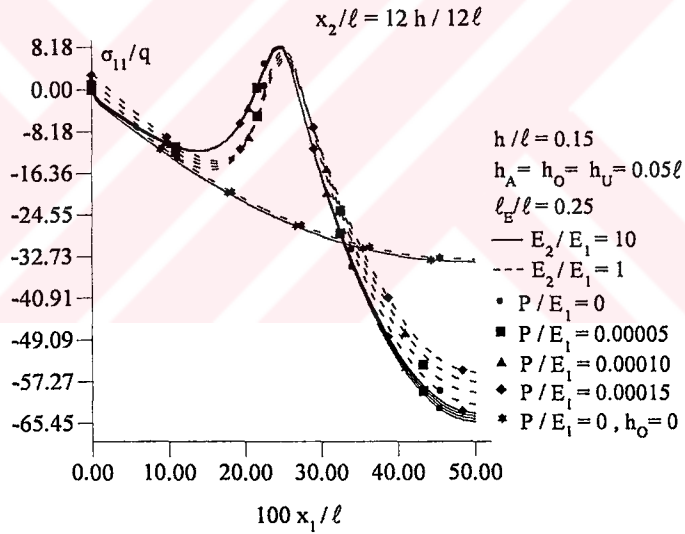
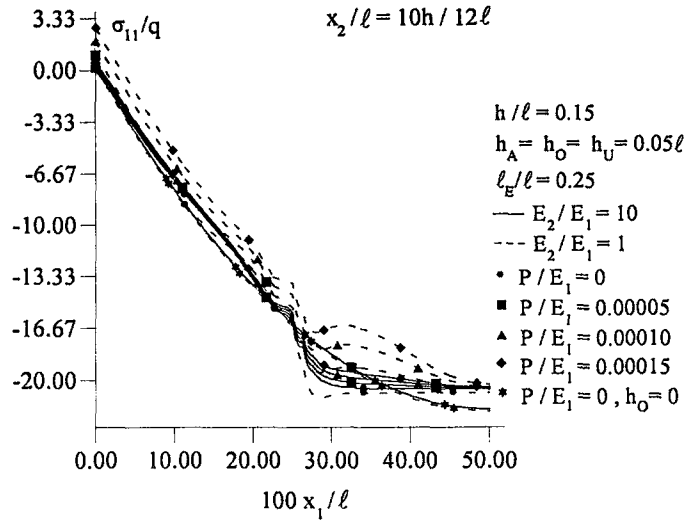
Bundan başka non-lineerite çarpanı olan P/E_1 in değişimi hem izotrop ($E_2/E_1 = 1$) hem de anizotrop ($E_2/E_1 = 10$) durumda gerilme dağılımlarını etkilemektedir ve P/E_1 değeri arttıkça her iki durumda da gerilmenin şiddeti mutlak değerce küçülmektedir. Belirtelim ki non-lineerite çarpanının etkisi izotrop durumda anizotrop duruma göre daha fazladır.



(c)



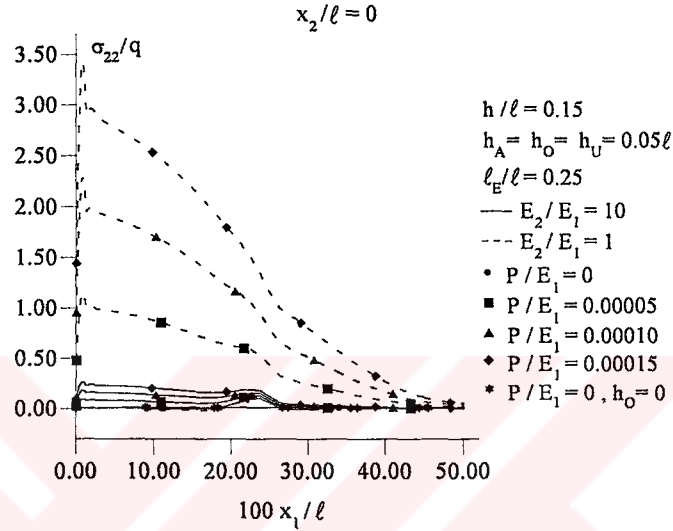
(d)



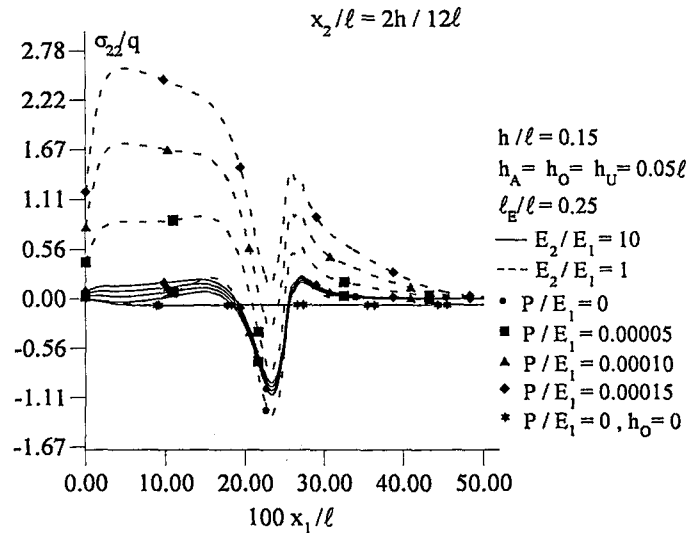
Şekil 3.1 σ_{11}/q gerilmesinin farklı P/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 0$, b) $x_2/\ell = 2h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, e) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, f) $x_2/\ell = 12h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ’den bağımlılığı.

Şekil 3.2 ‘de σ_{22}/q gerilmesinin, non-lineerite çarpımı P/E_1 ’in farklı değerlerinde izotrop ve anizotrop durumda altı ayrı kesitte x_1/ℓ ’den bağımlılığını gösteren grafikler verilmektedir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi yine dikdörtgen delik civarında gerilme dağılımları önemli ölçüde değişmektedir. Bu değişim dikdörtgen deliğin köşelerini içeren

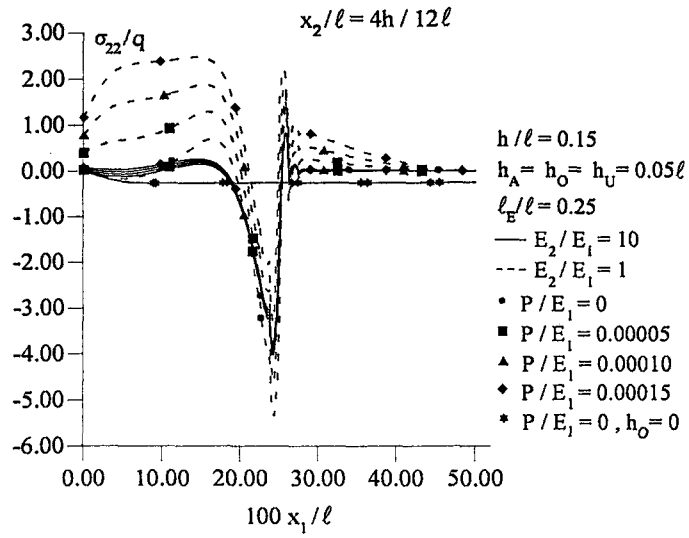
bölgeye yaklaştıkça daha da artmaktadır. Ayrıca yüklemeye yakın olan dikdörtgen deliğin köşesi civarında oluşan gerilme dağılımı diğer köşe civarında oluşan gerilme dağılımından daha büyüktür. P/E_1 'in yani non-lineerite çarpanının değişimi Şekil 3.1' de olduğu gibi Şekil 3.2' de de gerilme dağılımlarını etkilemektedir. Fakat bu etki bu değer arttıkça, dikdörtgen delik civarındaki gerilme değerlerini mutlak değerce düşürürken, diğer kısımlarda artışa neden olmaktadır.



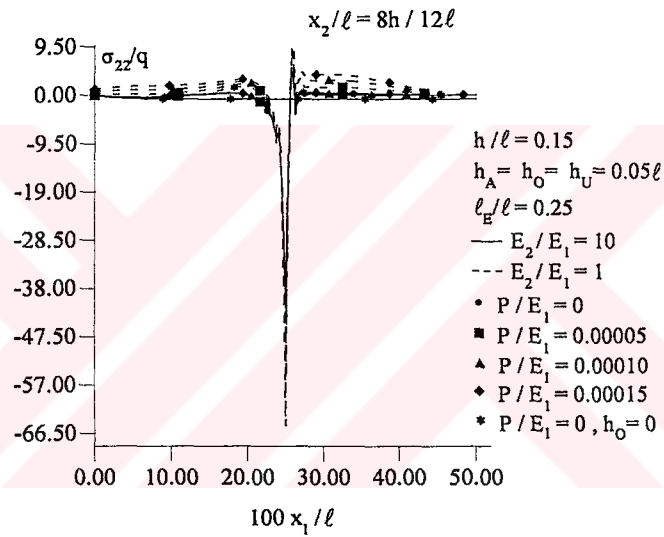
(a)



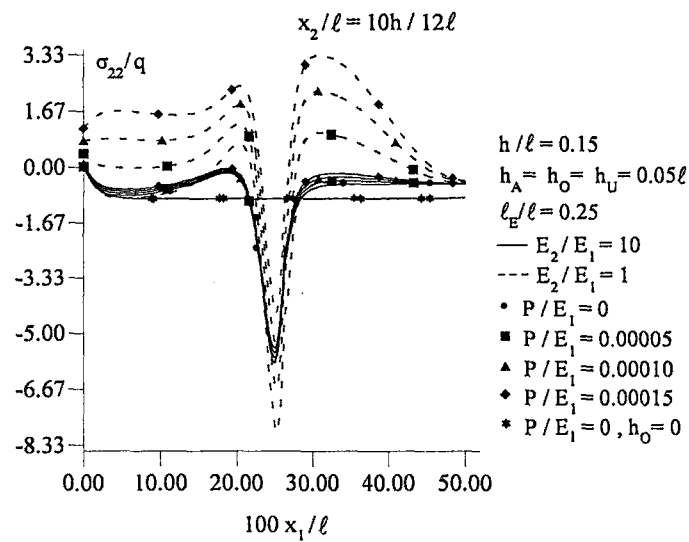
(b)



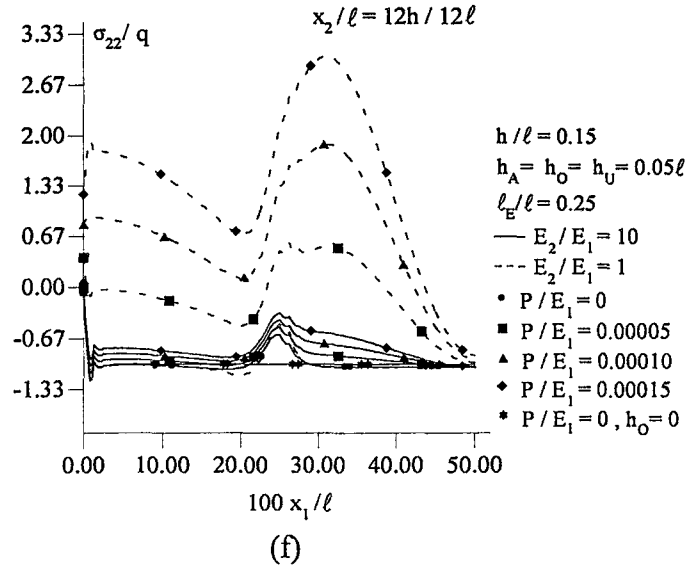
(c)



(d)

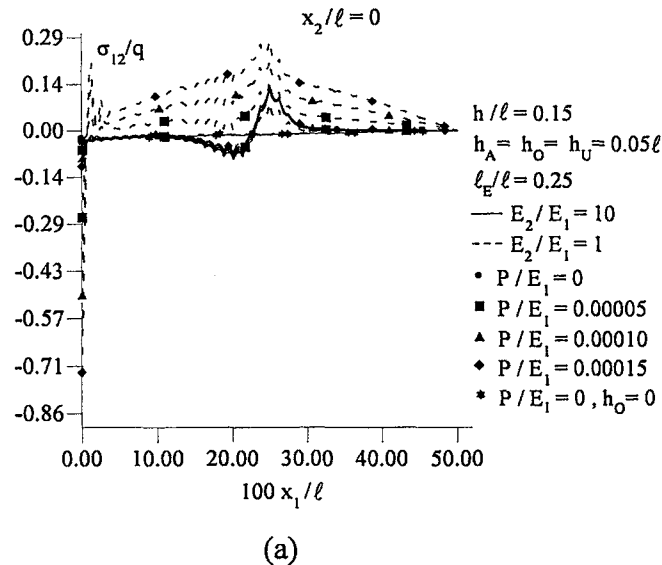


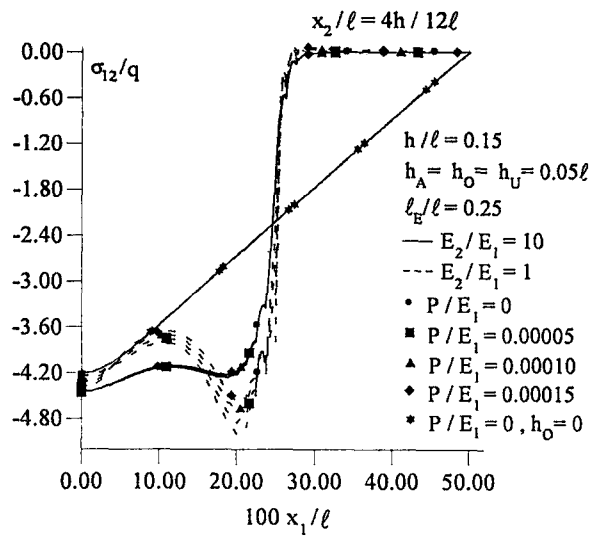
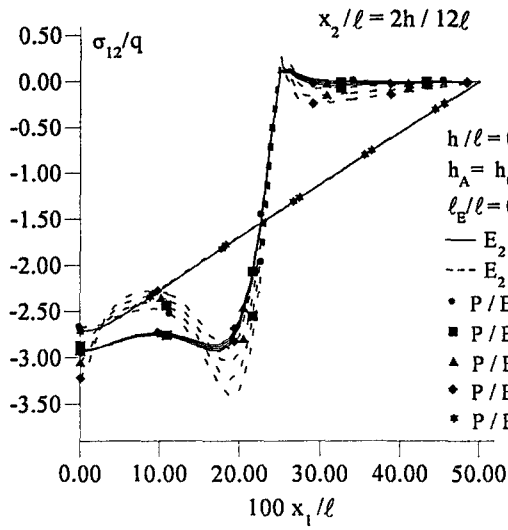
(e)



Şekil 3.2 σ_{22}/q gerilmesinin farklı P/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 0$, b) $x_2/\ell = 2h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, e) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, f) $x_2/\ell = 12h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.

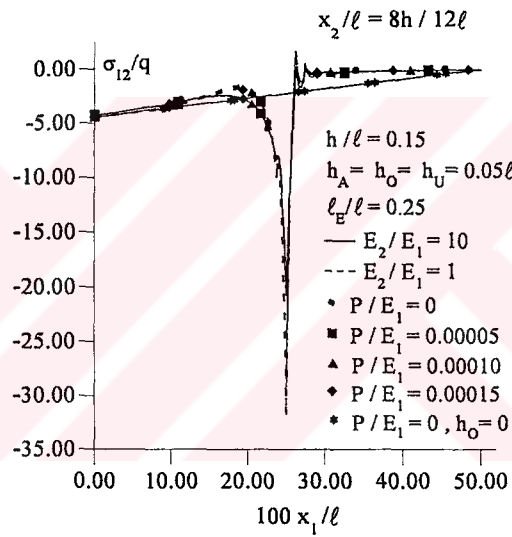
Benzer şekilde Şekil 3.3' de σ_{12}/q gerilmesinin, non-lineerite çarpımı P/E_1 'in farklı değerlerinde izotrop ve anizotrop durumda altı ayrı kesitte x_1/ℓ ' den bağımlılığını gösteren grafikler verilmektedir. Bundan önceki grafiklerde verildiği gibi yapı elemanında dikdörtgen deliğin varlığı σ_{12}/q gerilme dağılımını da önemli ölçüde etkilemektedir. Bu etki yine dikdörtgen deliğin köşeleri civarında özellikle yüklemeye yakın olan köşe civarında çok daha fazladır. Ayrıca non-lineerite çarpanının etkisi izotrop durumda anizotrop duruma göre daha fazla elde edilmektedir ve P/E_1 'in artması gerilme dağılımlarında daha fazla farklılaşmaya neden olmaktadır.



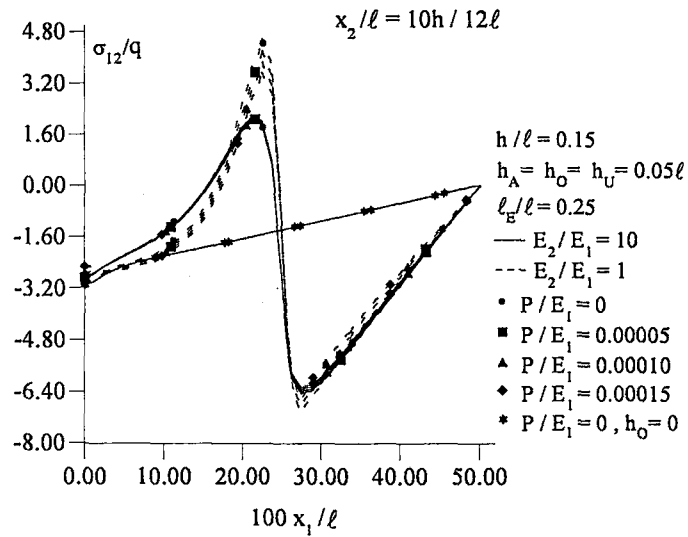


(b)

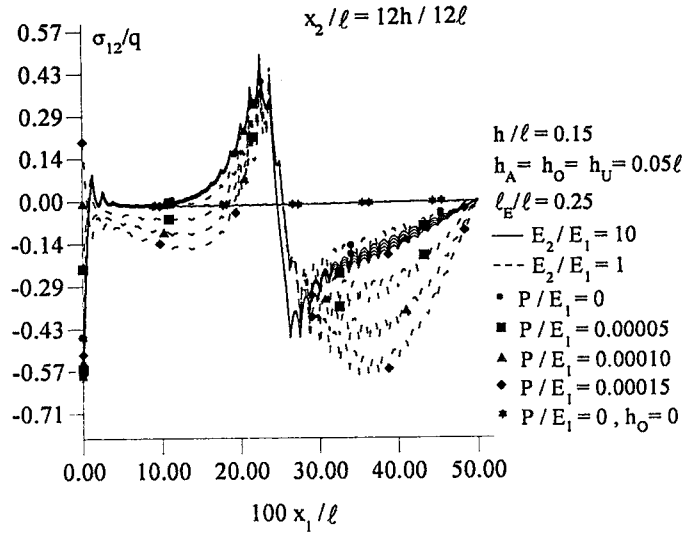
(c)



(d)



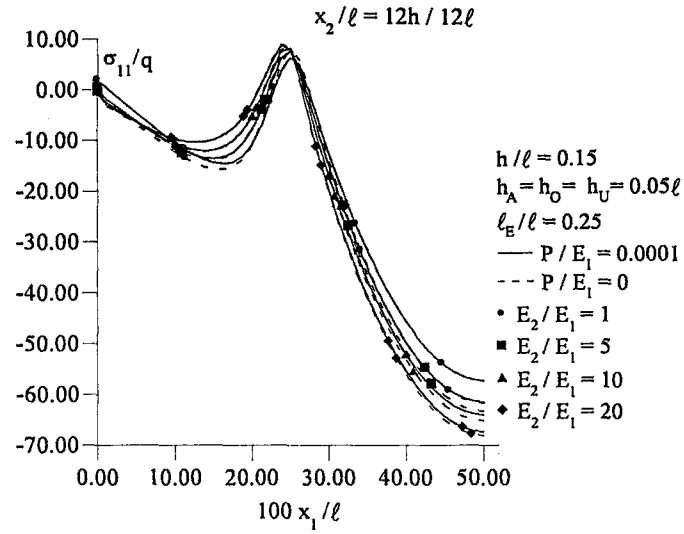
(e)



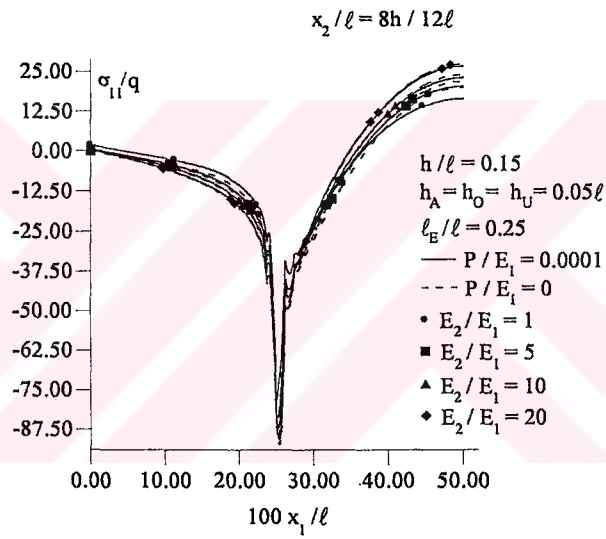
(f)

Şekil 3.3 σ_{12}/q gerilmesinin farklı P/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 0$, b) $x_2/\ell = 2h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, e) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, f) $x_2/\ell = 12h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.

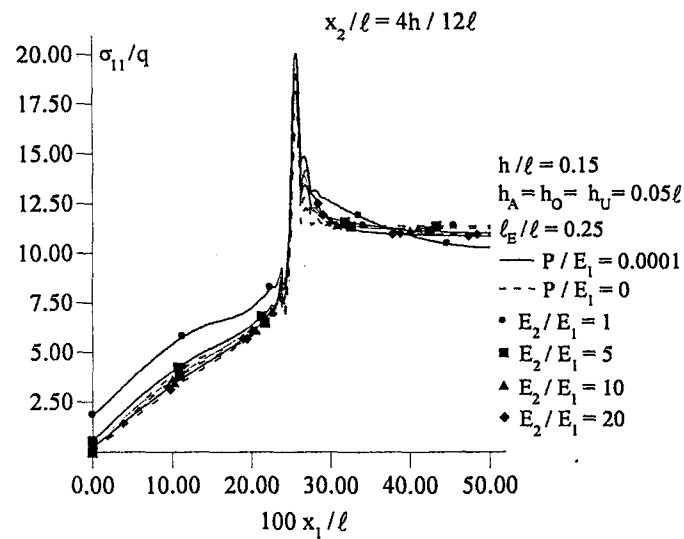
Şekil 3.4'de σ_{11}/q gerilmesinin E_2/E_1 'in farklı değerlerinde lineer ($P/E_1=0$) ve geometrik non-lineer ($P/E_1=0.0001$) durumda farklı dört ayrı kesitte x_1/ℓ ' den bağımlılığını gösteren grafikleri verilmektedir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi, E_2/E_1 'in değeri arttıkça, gerilme değerleri mutlak değerce artmakta ve geometrik non-lineer problemin değerleri, uygun lineer problemde elde edilen gerilme değerlerinden mutlak değerce düşük kalmaktadır. Yine dikdörtgen deliğin uç noktaları civarında elde edilen gerilme değerleri, özellikle yüklemeye yakın olan köşe civarındaki gerilme değerleri (Şekil 3.4b), yüklemeden uzak olan köşe civarındaki gerilme değerlerinden (Şekil 3.4c) mutlak değerce çok çok büyüktür. Ayrıca, bütün gerilme dağılımlarında (σ_{11}/q gerilmesinde olduğu gibi) delik olmadığı durumda elde edilen gerilme dağılımları ile delik olduğu durumda elde edilen gerilme dağılımları karşılaştırıldığında; deliğin köşe noktaları civarındaki gerilme birikimlerinden başka şerit-plağın $0 < x_2/\ell < h_A$ ve $h_A + h_O < x_2/\ell < h_A + h_O + h_U$ kısımlarında, özellikle $0 < x_2/\ell < h_A$ bölgesinde, gerilme dağılımının çok değiştiği görülmektedir.



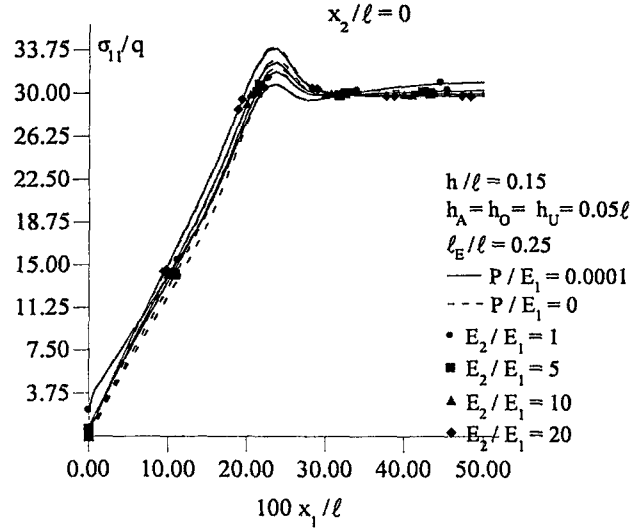
(a)



(b)



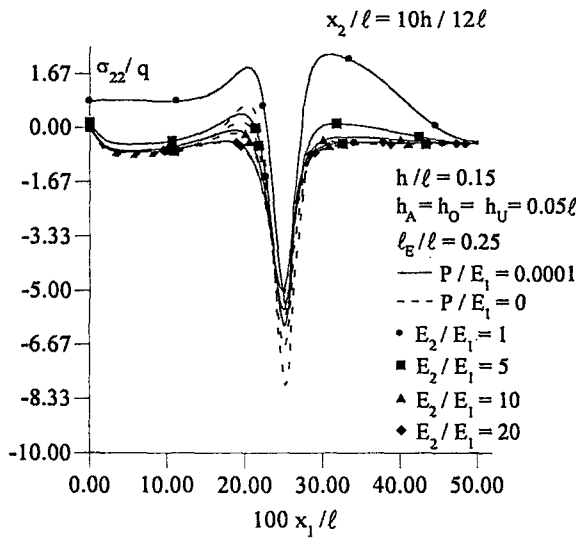
(c)



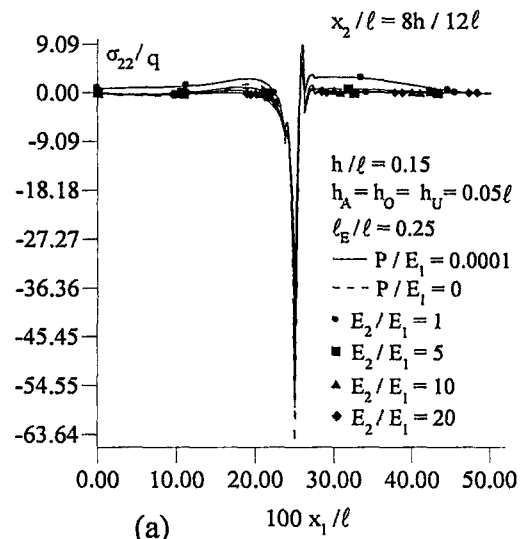
(d)

Şekil 3.4 σ_{11}/q gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ’den bağımlılığı.

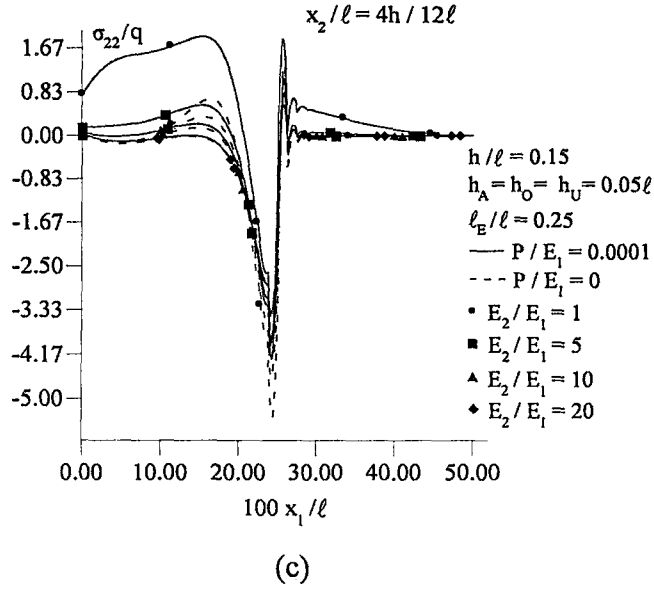
Şekil 3.5’de σ_{22}/q gerilmesinin E_2/E_1 ’in farklı değerlerinde lineer ($P/E_1 = 0$) ve geometrik non-lineer ($P/E_1 = 0.0001$) durumda farklı üç ayrı kesitte x_1/ℓ ’den bağımlılığını gösteren grafikleri verilmektedir. Bu grafiklerden, görüldüğü gibi E_2/E_1 değeri arttıkça gerilme değerleri mutlak değerce düşmekte ve geometrik non-lineer durumda elde edilen gerilme değerleri geometrik lineer durumda elde edilen, uygun gerilme değerlerinden düşük kalmaktadır.



(a)



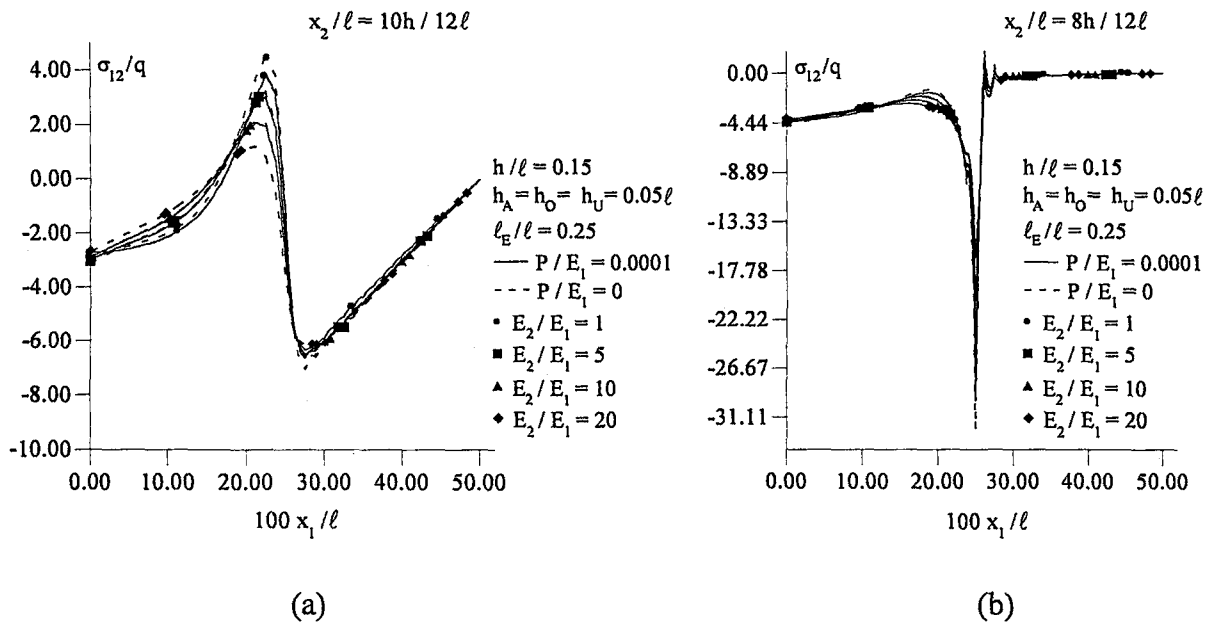
(b)

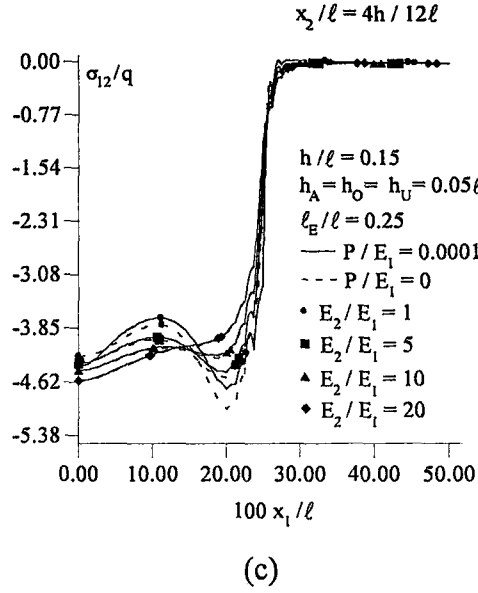


Şekil 3.5 σ_{22}/q gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$ b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığını gösteren grafikleridir.

Delğin köşe noktaları civarında E_2/E_1 'in değeri arttıkça, gerilmenin değeri, hem geometrik lineer, hem de geometrik non-lineer problem için, mutlak değerce düşmektedir.

Şekil 3.6'da σ_{12}/q gerilmesinin E_2/E_1 'in farklı değerlerinde lineer ($P/E_1=0$) ve geometrik non-lineer ($P/E_1=0.0001$) durumda farklı üç kesitte x_1/ℓ ' den bağımlılığını gösteren grafikleri verilmektedir.



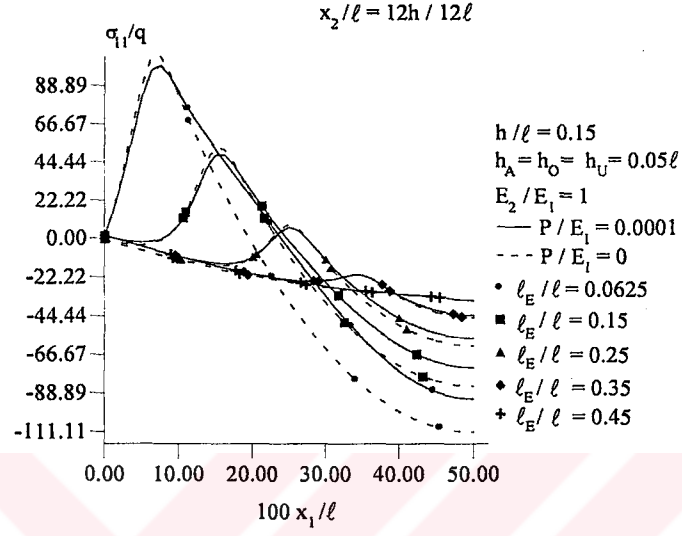


Şekil 3.6 σ_{12}/q gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerleri için a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$ b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ 'den bağımlılığı.

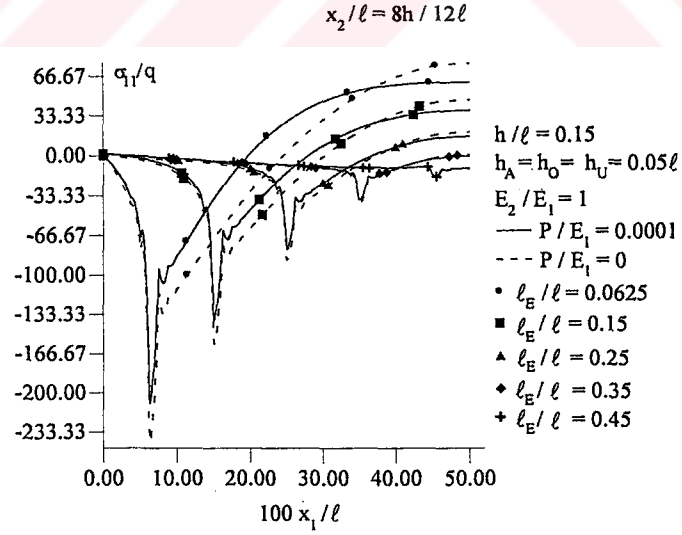
Bu grafikler için de şekil 3.5 için yapılan yorumlar aynen geçerlidir. Yani, E_2/E_1 değeri arttıkça gerilme değerleri mutlak değerce düşmekte ve geometrik non-lineer durumda elde edilen gerilme değerleri geometrik lineer durumda elde edilen uygun gerilme değerlerinden düşük kalmaktadır. Yine belirtelim ki, ele alınan yapı elemanının dikdörtgen delik içermesi, gerilme dağılımını önemli ölçüde etkilemekte ve deliğin köşe noktaları (özellikle yüklemeye yakın olan köşe noktası (Şekil 3.6b)) civarında elde edilen gerilme değerleri değerce çok büyüktür.

Şekil 3.7 ve Şekil 3.8' de sırasıyla $E_2/E_1 = 1$ ve $E_2/E_1 = 10$ için σ_{11}/q gerilmesinin, ℓ_E/ℓ (dikdörtgen deliğin mesnetten uzaklığı) parametresinin farklı değerlerinde dört ayrı kesitte x_1/ℓ 'den bağımlılığını gösteren grafikler verilmektedir. Her iki şekilden de görüldüğü gibi ℓ_E/ℓ parametresinin değeri arttıkça yani, dikdörtgen deliğin mesnetlerden uzaklığı arttıkça (diğer bir deyişle, dikdörtgen deliğin boyutu x_1 eksenini doğrultusunda düştükçe), dikdörtgen deliğin gerilme birikimlerine etkisi mutlak değerce düşmektedir. Şekil 3.8' de $E_2/E_1 = 10$ durumunda elde edilen gerilme değerleri Şekil 3.7' de $E_2/E_1 = 1$ durumunda elde edilen gerilme değerlerinden mutlak değerce büyüktür. Ayrıca bu iki şeklin kıyaslanması sonucunda geometrik non-lineerite parametresi P/E_1 'in etkisinin Şekil 3.7' de daha fazla olduğu ve her iki şekilde de geometrik non-lineer durumda elde edilen gerilme

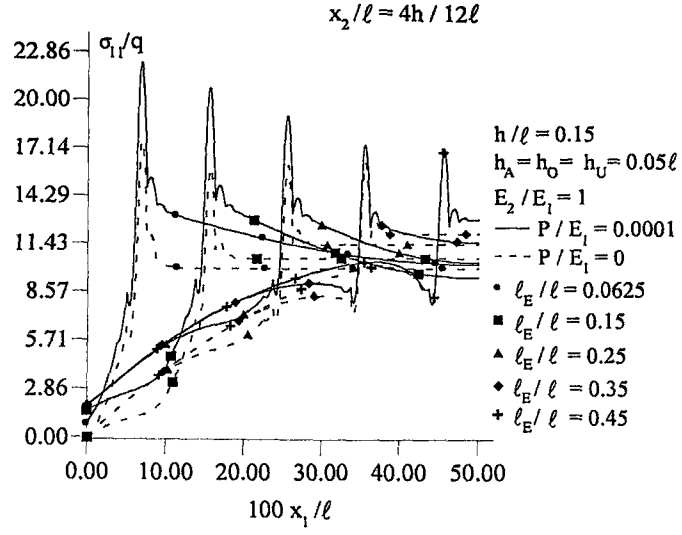
dağılımının geometrik lineer durumda elde edilen uygun gerilme dağılımından küçük kaldığı görülmektedir. Yine yüklemeye yakın olan dikdörtgen deliğin köşe noktası civarında elde edilen gerilme değerleri yüklemeye uzak olan köşe noktası civarında elde edilen gerilme değerlerinden mutlak değerce büyüktür.



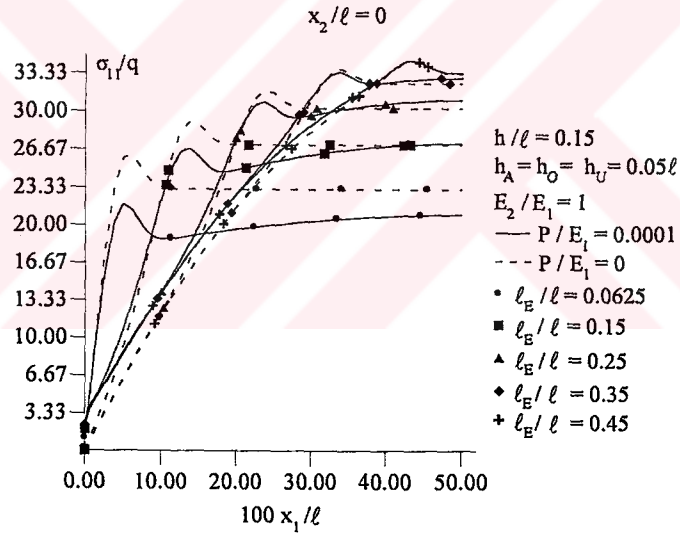
(a)



(b)

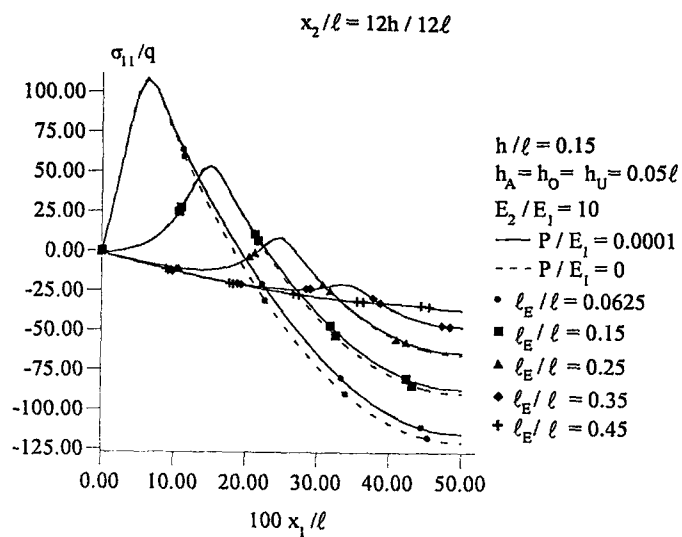


(c)

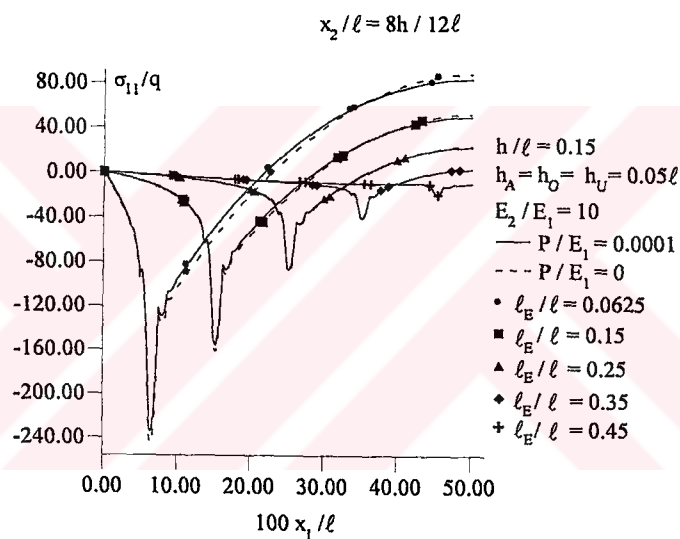


(d)

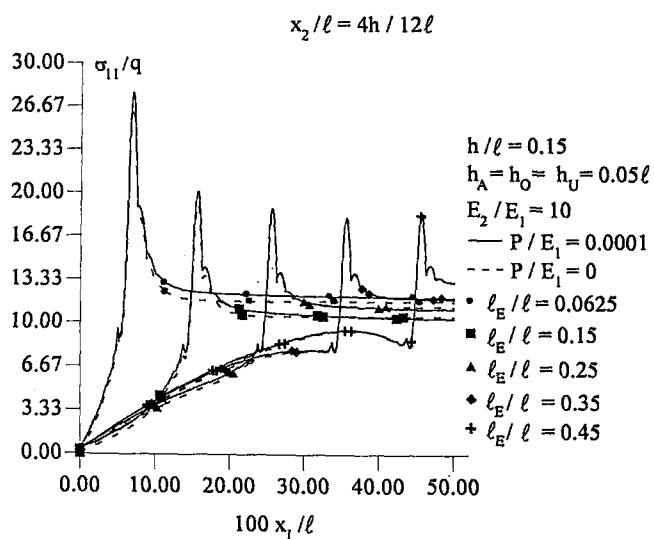
Şekil 3.7 σ_{11}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 1$ için a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ 'den bağımlılığı.



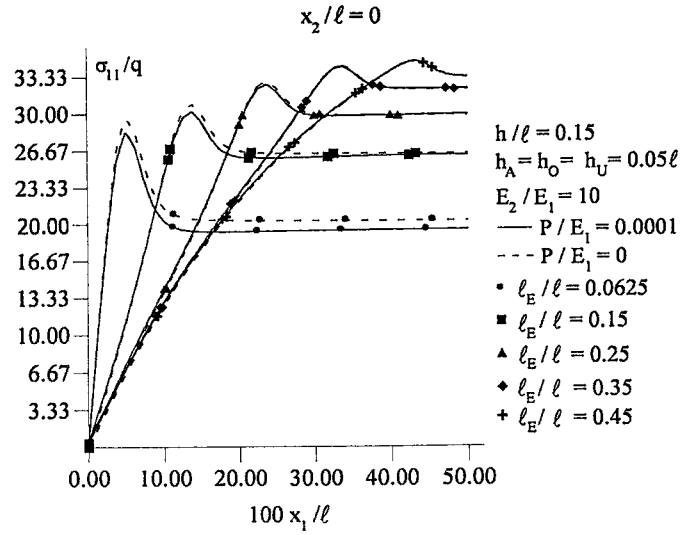
(a)



(b)



(c)



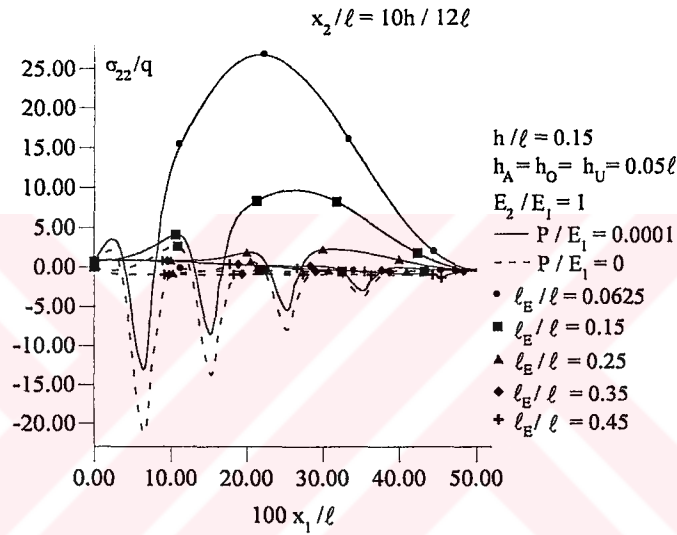
(d)

Şekil 3.8 σ_{11}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 10$ için, a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ 'den bağımlılığı.

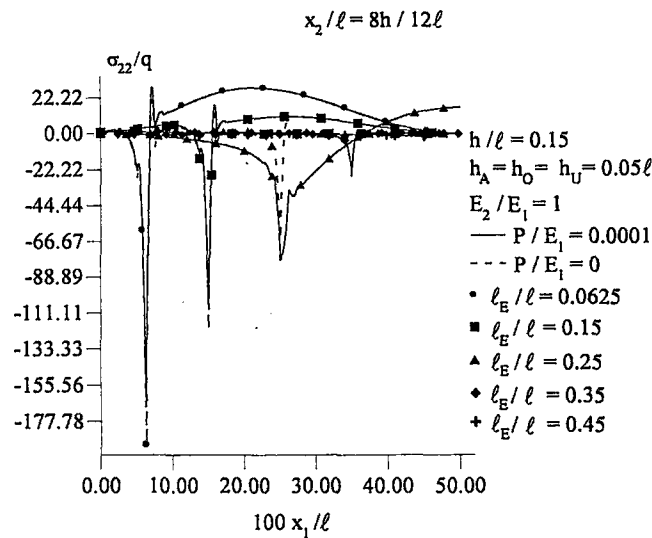
Şekil 3.9 ve Şekil 3.10' da sırasıyla $E_2/E_1 = 1$ ve $E_2/E_1 = 10$ için σ_{22}/q gerilmesinin, ℓ_E/ℓ (dikdörtgen deliğin mesnetten uzaklığı) parametresinin farklı değerlerinde üç ayrı kesitte x_1/ℓ 'den bağımlılığını gösteren grafikler verilmektedir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi Şekil 3.10' da elde edilen gerilme değerleri Şekil 3.9' da elde edilen gerilme değerlerinden mutlak değerce küçüktür. Her iki şekilde de ℓ_E/ℓ parametresinin değeri arttıkça yani, dikdörtgen deliğin mesnetlerden uzaklığı arttıkça (diğ er bir deyiş le, dikdörtgen deliğin boyutu x_1 eksen i doğ rultusunda dü ştü kçe), dikdörtgen deliğin gerilme birikimlerine etkisi mutlak değ erce dü şmektedir. Non-lineerite parametresi P/E_1 'in etkisi, malzeme izotrop olduğ unda (Şekil 3.9), malzemenin anizotrop olmasına (Şekil 3.10) göre daha fazladır ve her iki malzeme özelliğ i için geometrik non-lineer durumda elde edilen σ_{22}/q gerilme değ erleri, geometrik lineer durumda elde edilen uygun gerilme değ erlerinden daha kü çü k kalmaktadır.

Şekil 3.11 ve Şekil 3.12' de sırasıyla $E_2/E_1 = 1$ ve $E_2/E_1 = 10$ için σ_{12}/q gerilmesinin, ℓ_E/ℓ (dikdörtgen deliğin mesnetten uzaklığı) parametresinin farklı değ erlerinde üç ayrı kesitte x_1/ℓ 'den bağımlılığını gösteren grafikler verilmektedir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi Şekil 3.12' de elde edilen gerilme değ erleri Şekil 3.11' de elde edilen gerilme

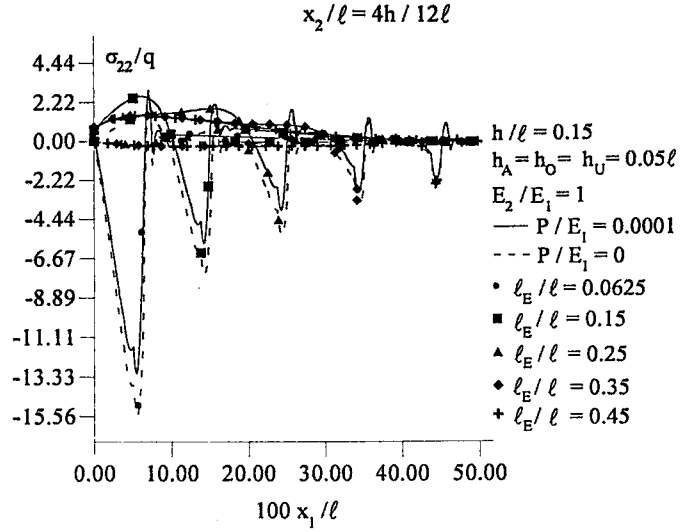
değerlerinden mutlak değerce küçüktür. Her iki şekilde de ℓ_E/ℓ parametresinin değeri arttıkça yani, dikdörtgen deliğin mesnetlerden uzaklığı arttıkça, dikdörtgen deliğin gerilme birikimlerine etkisi mutlak değerce düşmektedir. Non-lineeritenin derecesini temsil eden parametre P/E_1 'in gerilme dağılımları üzerine etkisi, malzeme izotrop olduğunda (Şekil 3.11), malzemenin anizotrop olması (Şekil 3.12)' na göre daha fazladır ve her iki malzeme özelliği için de geometrik non-lineer durumda elde edilen σ_{12}/q gerilme değerleri, geometrik lineer durumda elde edilen uygun gerilme değerlerinden daha küçük kalmaktadır.



(a)

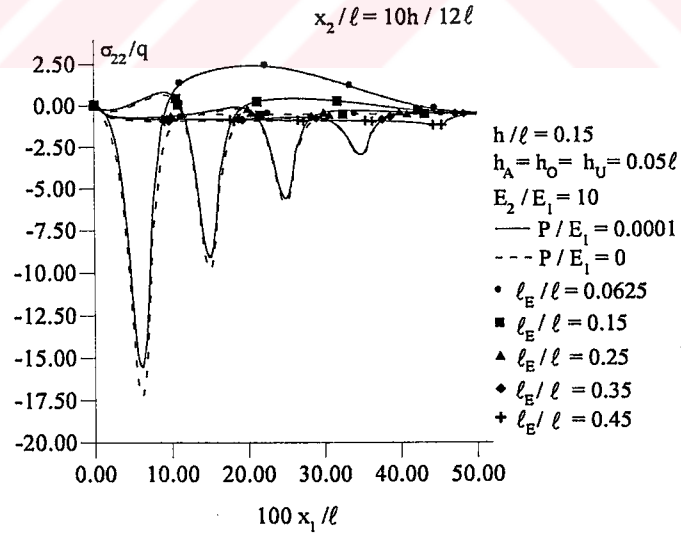


(b)

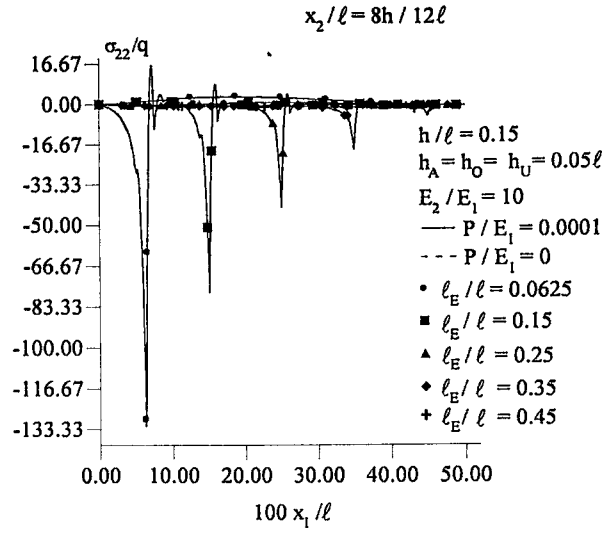


(c)

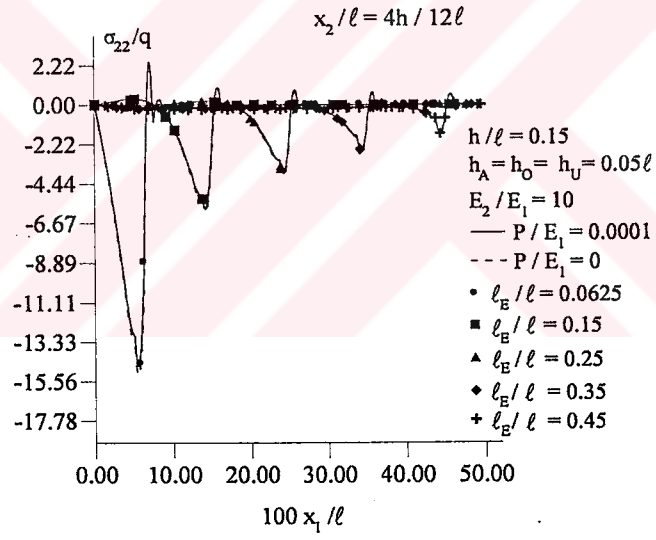
Şekil 3.9 σ_{22}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 1$ için,
 a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.



(a)

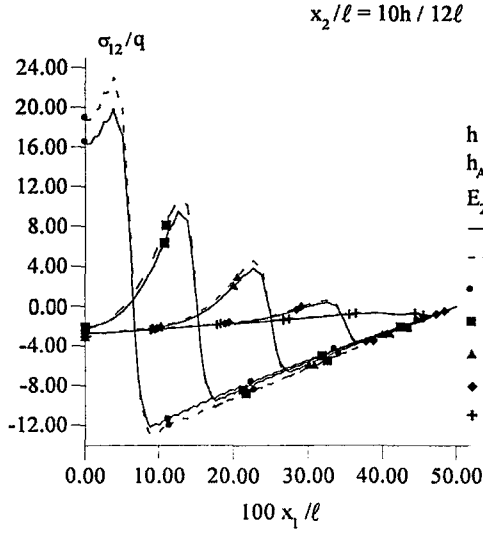


(b)

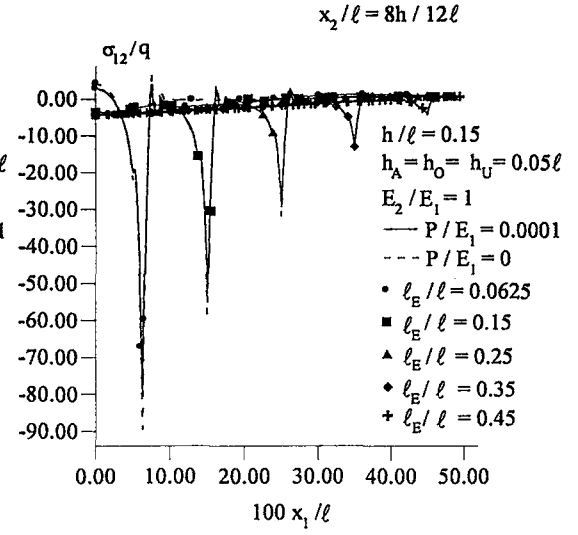


(c)

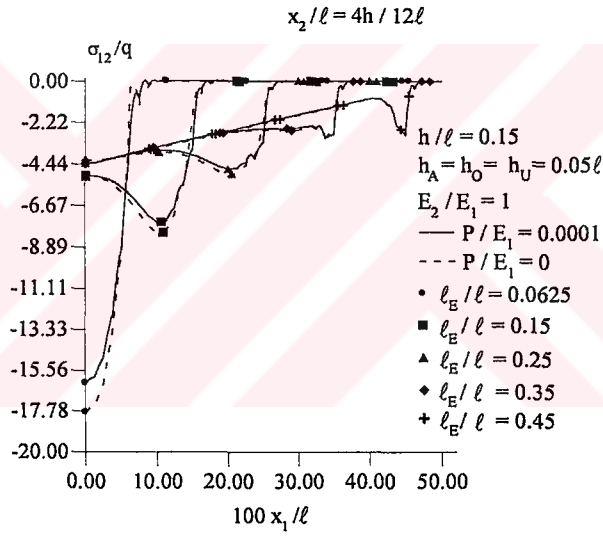
Şekil 3.10 σ_{22}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 10$ için,
 a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den
 bağımlılığı.



(a)

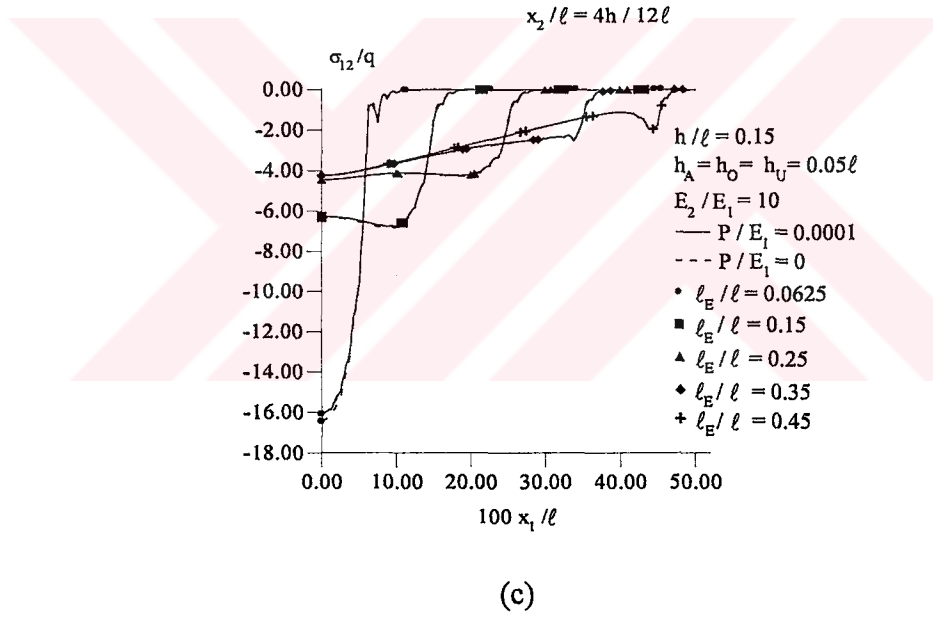
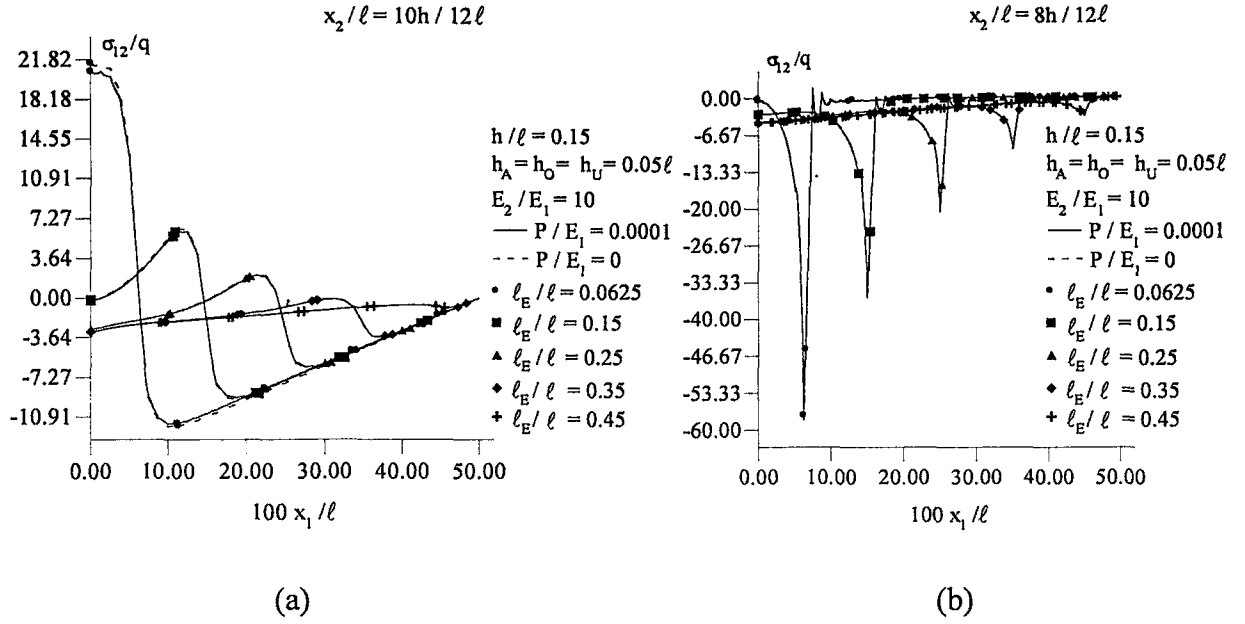


(b)



(c)

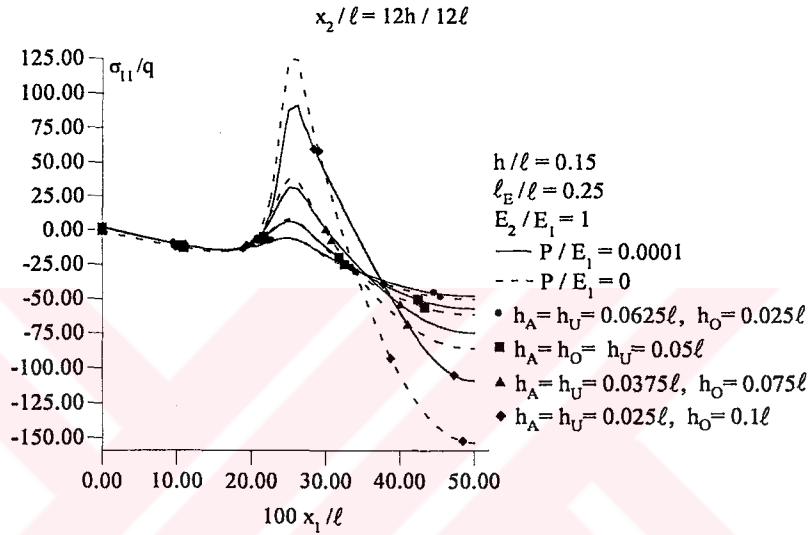
Şekil 3.11 σ_{12}/q gerilmesinin farklı ℓ_E/ℓ değerleri ve $E_2/E_1 = 1$ için,
a) $x_2/\ell = 10h/12\ell$, b) $x_2/\ell = 8h/12\ell$, c) $x_2/\ell = 4h/12\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den
bağımlılığı.



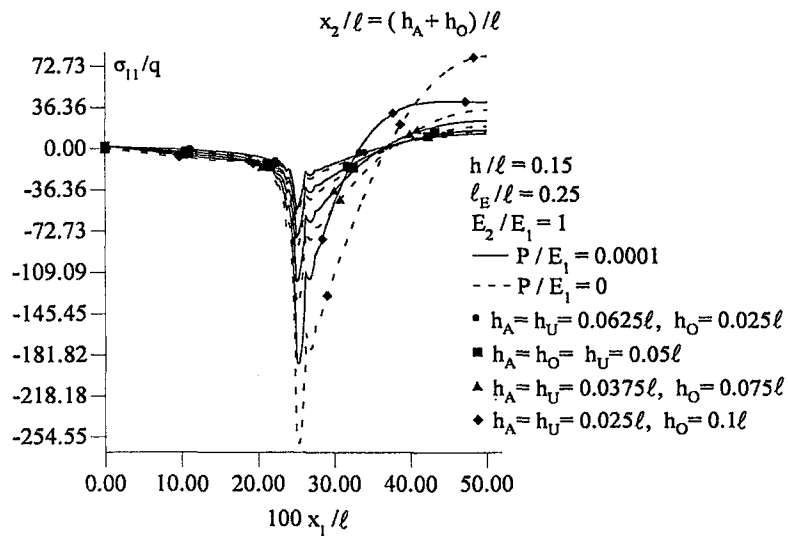
Şekil 3.12 σ_{12}/q gerilmesinin farklı l_E/l değerleri ve $E_2/E_1 = 10$ için,
a) $x_2/l = 10h/12l$, b) $x_2/l = 8h/12l$, c) $x_2/l = 4h/12l$ kesitlerinde x_1/l ' den
bağımlılığı.

Şekil 3.13 ve Şekil 3.14' de sabit kalınlıklı yapı elemanının içerdiği dikdörtgen deliğin x_2 eksenine doğrultusundaki boyutu (h_O) arttıkça, ele alınan dış yükleme etkisinde delik civarında oluşan σ_{11}/q gerilmesinin izotrop (Şekil 3.13) ve anizotrop (Şekil 3.14) durumda x_1/l ' ye göre grafikleri farklı dört ayrı kesitte verilmektedir. Her iki şekilden de görüldüğü gibi dikdörtgen deliğin x_2 eksenine doğrultusundaki boyutunun artması gerilme değerlerinin de

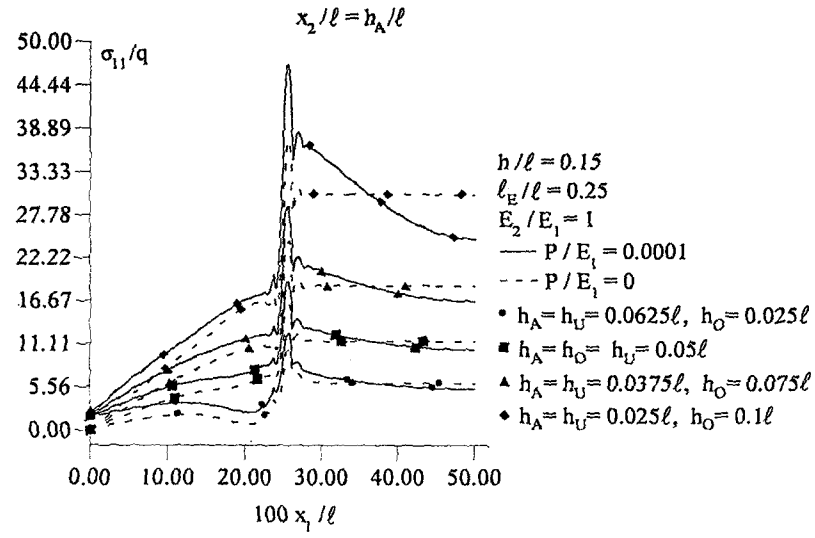
artmasına neden olmaktadır. Bu gerilme değerleri dikdörtgen deliğin köşe noktaları civarında, özellikle yüklemeye yakın köşe noktası civarında, çok daha fazladır. Ele alınan delik boyutu için anizotrop durumda elde edilen gerilme dağılımı izotrop durumdaki uygun gerilme dağılımından düşüktür. Aynı zamanda geomerik non-lineer probleme ait gerilme değerleri, uygun lineer probleme ait gerilme değerlerinden düşüktür. Bu iki problemten elde edilen gerilme değerleri arasındaki fark izotrop durumda (Şekil 3.13), anizotrop duruma (Şekil 3.14) göre daha fazladır.



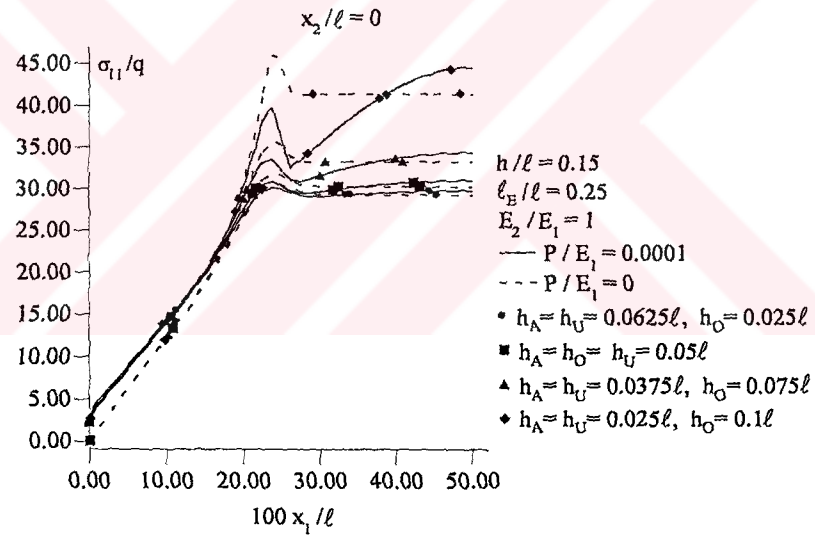
(a)



(b)

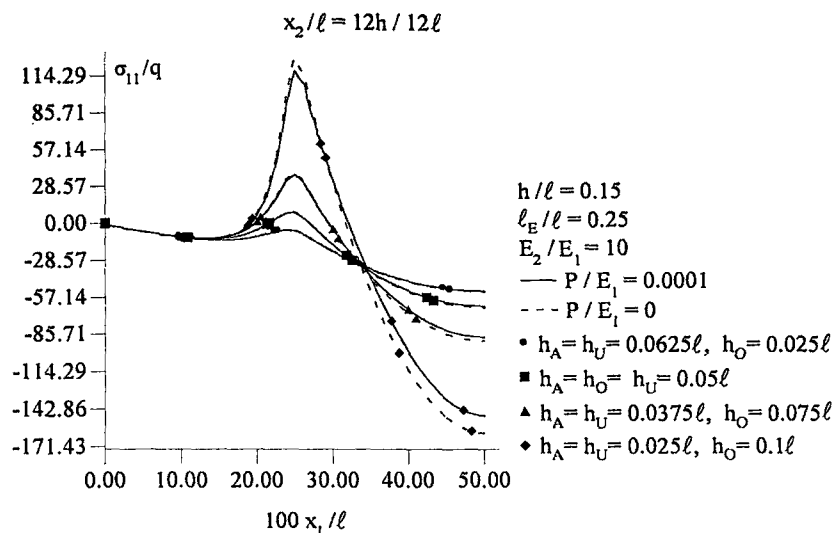


(c)

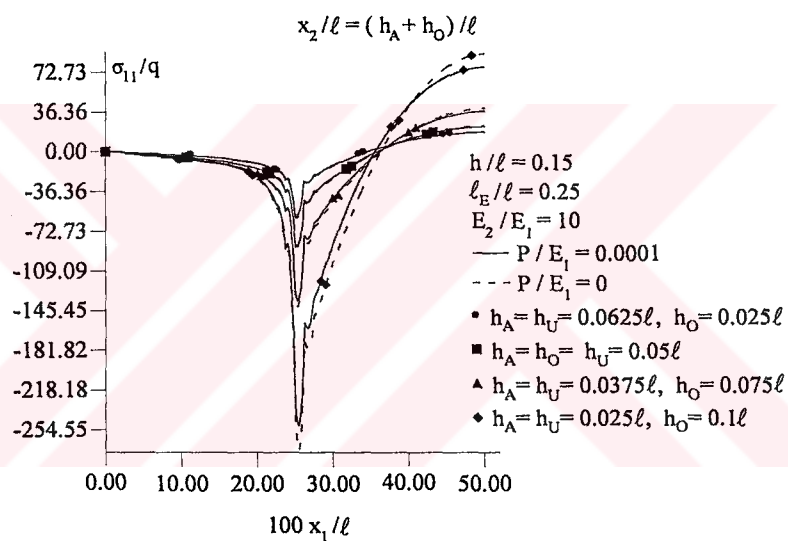


(d)

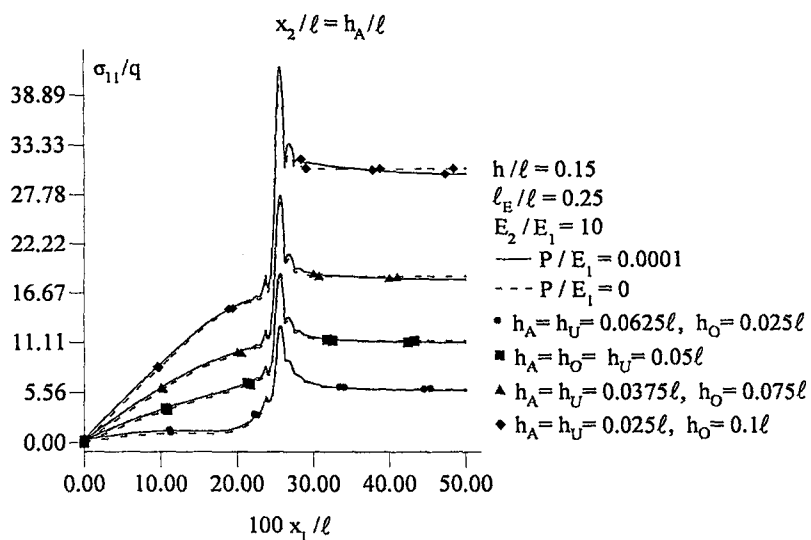
Şekil 3.13 σ_{11}/q gerilmesinin farklı h_0/ℓ değerleri için izotrop durumda a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.



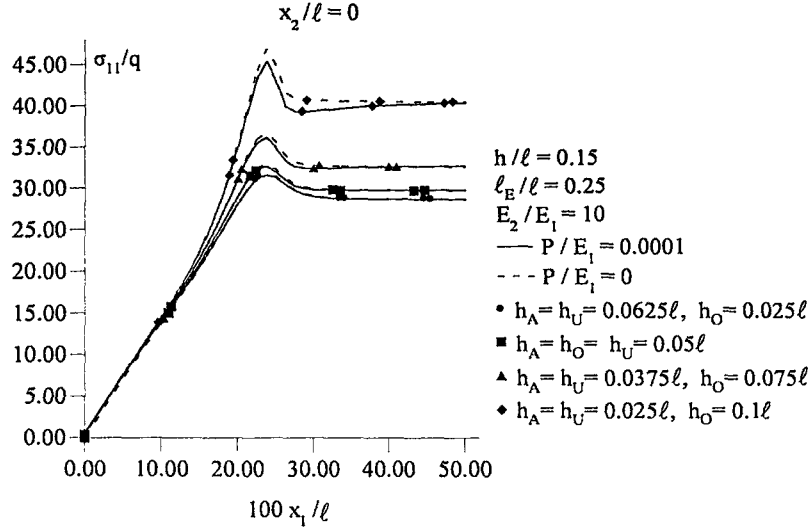
(a)



(b)



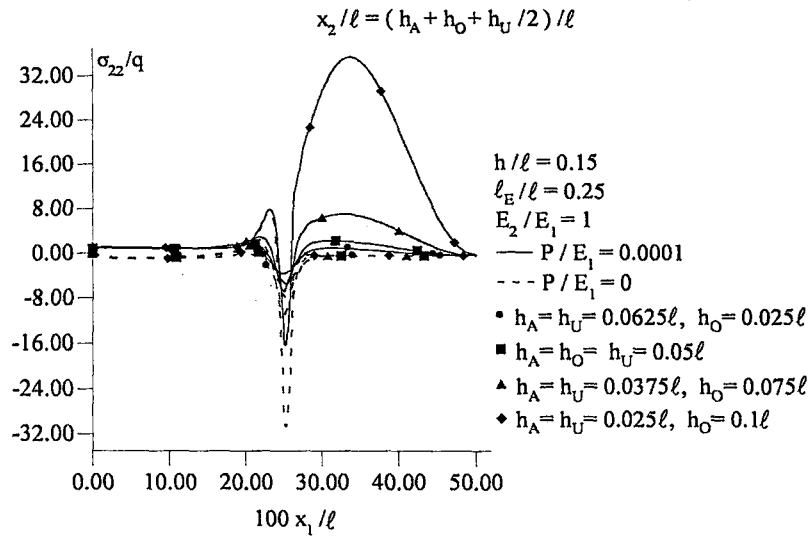
(c)



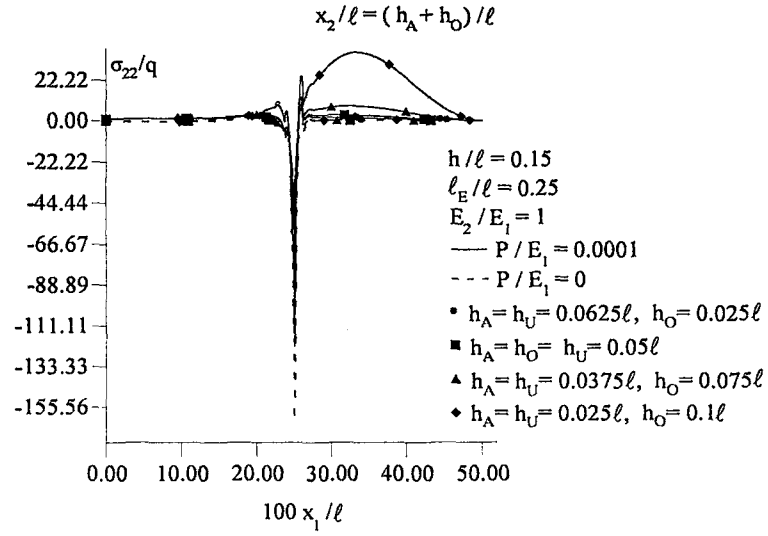
(d)

Şekil 3.14 σ_{11}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için anizotrop durumda a) $x_2/\ell = 12h/12\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ’ den bağımlılığı.

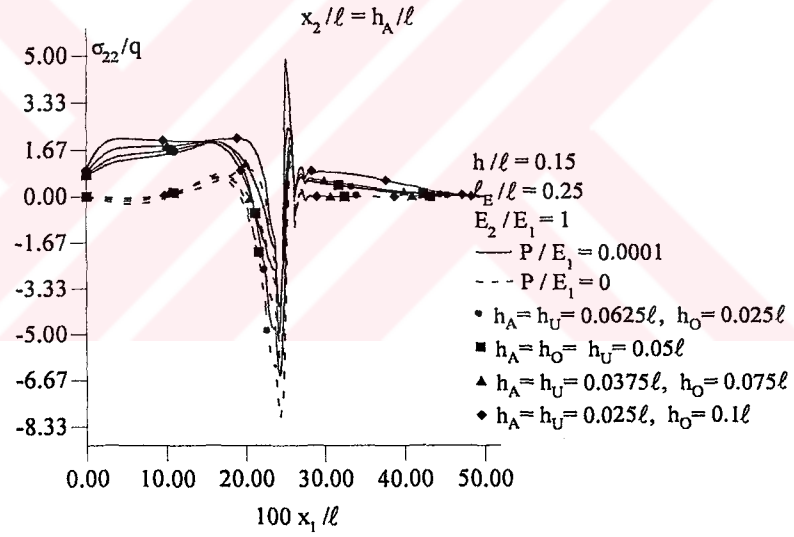
Şekil 3.15 ve Şekil 3.16’ da yapı elemanının içerdiği dikdörtgen deliğin x_2 eksenine doğrultusundaki boyutu (h_O) arttıkça, ele alınan dış yükleme etkisinde delik civarında oluşan σ_{22}/q gerilmesinin izotrop (Şekil 3.15) ve anizotrop (Şekil 3.16) durumda x_1/ℓ ’ ye göre grafikleri farklı üç ayrı kesitte verilmektedir. Yukarıda Şekil 3.13 ve Şekil 3.14 için yapılan h_O/ℓ parametre değişiminin σ_{11}/q gerilmesinin dağılımına etkisine ait yorumlar aynı parametrenin σ_{22}/q gerilmesinin yayılımına etkisi açısından aynen geçerlidir.



(a)

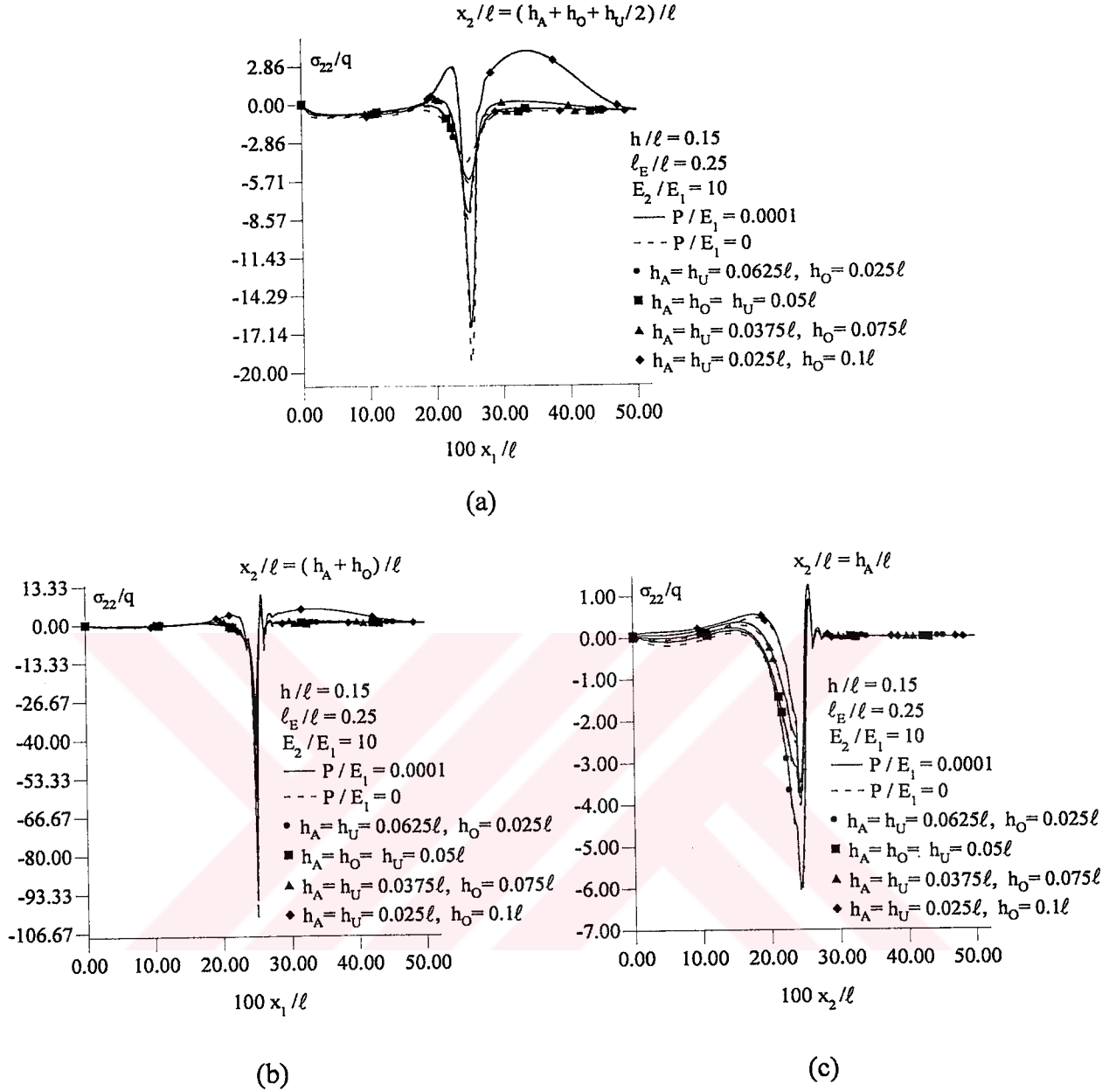


(b)



(c)

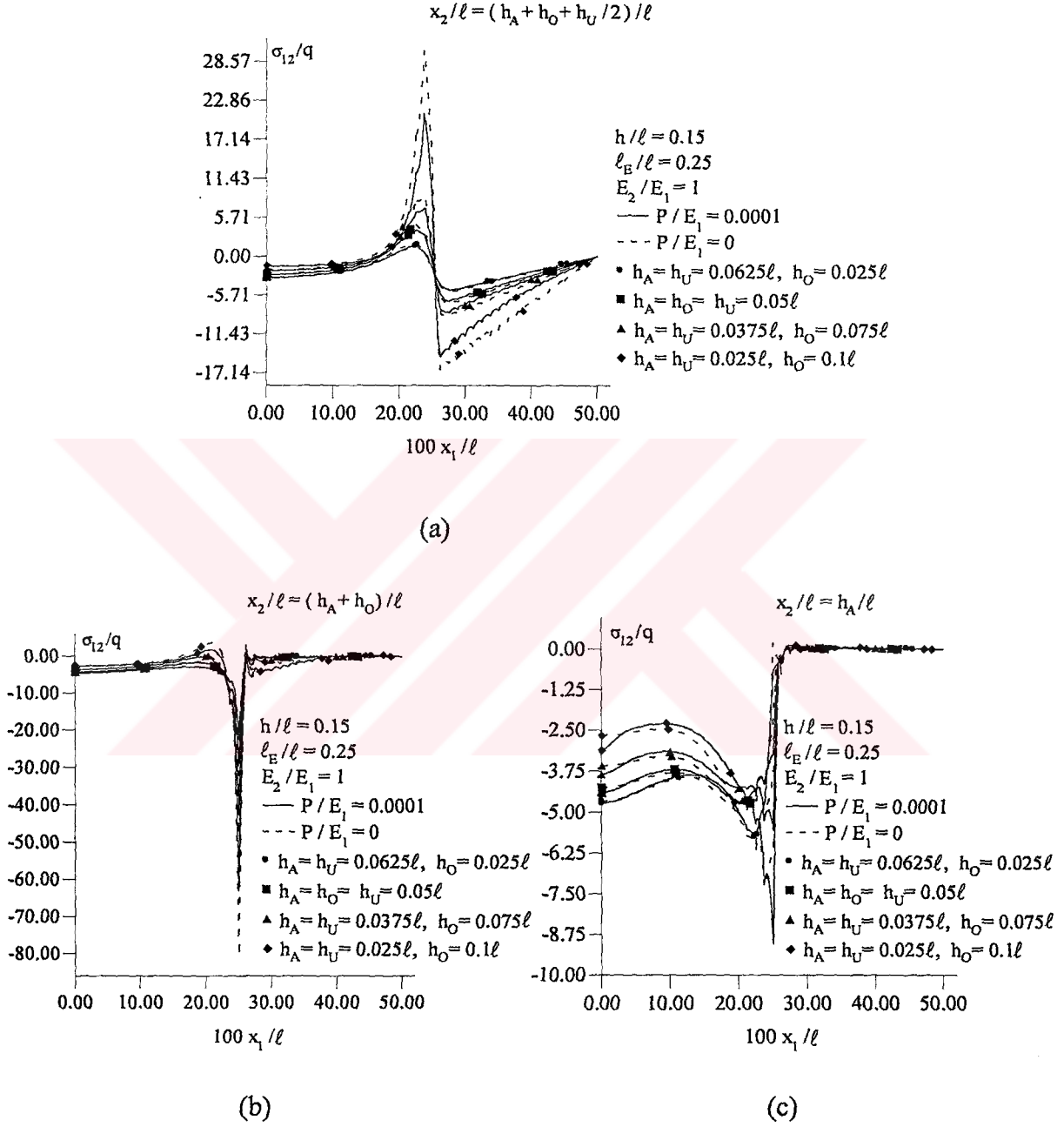
Şekil 3.15 σ_{22}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için izotrop durumda a) $x_2/\ell = (h_A + h_O + h_U/2)/\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.



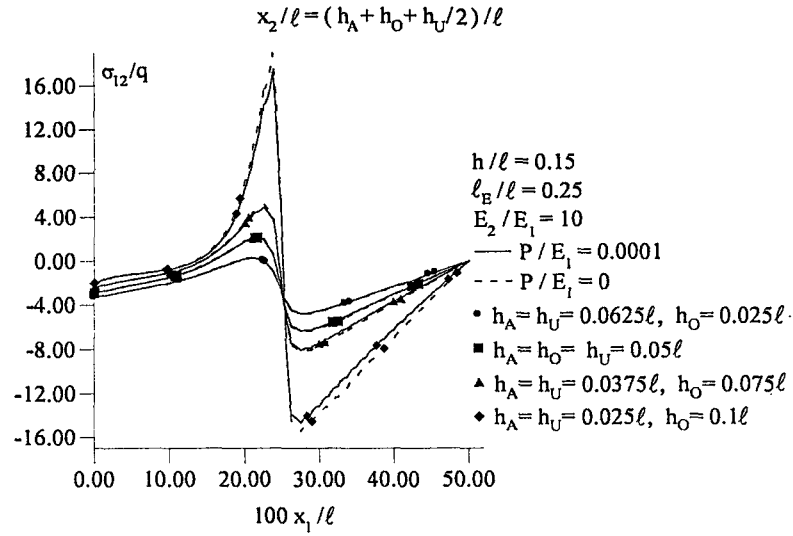
Şekil 3.16 σ_{22}/q gerilmesinin farklı h_O/l değerleri için anizotrop durumda a) $x_2/l = (h_A + h_O + h_U/2)/l$, b) $x_2/l = (h_A + h_O)/l$, c) $x_2/l = h_A/l$, d) $x_2/l = 0$ kesitlerinde x_1/l ’ den bağımlılığı.

Şekil 3.17 ve Şekil 3.18’ de yapı elemanının içerdiği dikdörtgen deliğin x_2 eksenine doğrultusundaki boyutu arttıkça, ele alınan dış yükleme etkisinde delik civarında oluşan σ_{12}/q gerilmesinin izotrop (Şekil 3.17) ve anizotrop (Şekil 3.18) durumda x_1/l ’ ye göre grafikleri farklı üç ayrı kesitte verilmektedir. Bu şekillerde verilen grafiklerden görüldüğü gibi dikdörtgen deliğin boyutunun büyümesi gerilme değerlerini de arttırmaktadır. Anizotrop

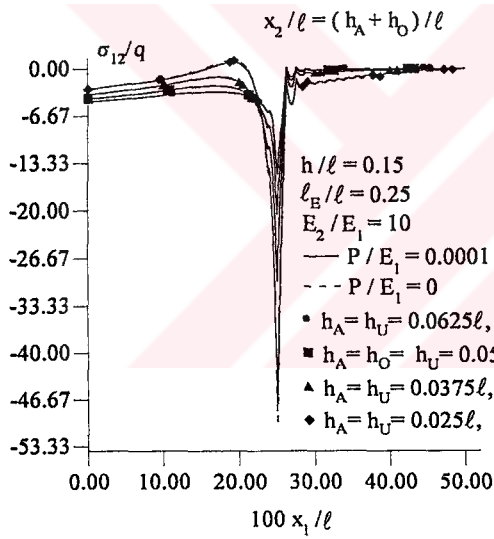
durumda elde edilen gerilme değerleri uygun izotrop durumdaki gerilme değerlerinden kúçúktúr ve her iki durumda da geometrik non-lineer probleminden elde edilen gerilme değerleri uygun lineer durumda elde edilen gerilme değerlerinden kúçúk kalmaktadır.



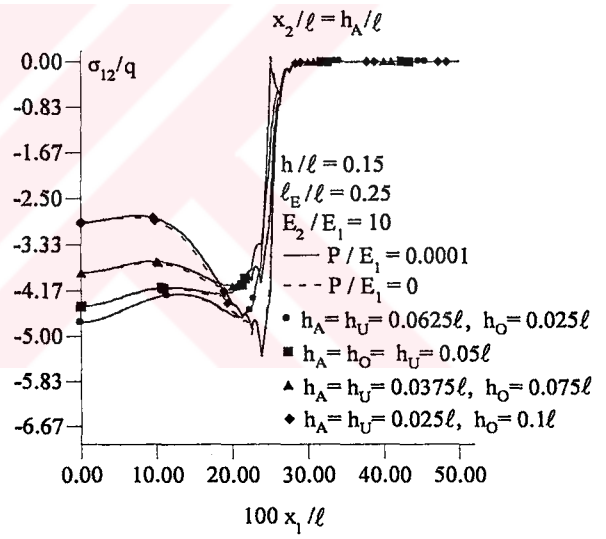
Şekil 3.17 σ_{12}/q gerilmesinin farklı h_O/l değerleri için izotrop durumda a) $x_2/l = (h_A + h_O + h_U)/2$, b) $x_2/l = (h_A + h_O)/l$, c) $x_2/l = h_A/l$, d) $x_2/l = 0$ kesitlerinde x_1/l ’den bağımlılığı.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.18 σ_{12}/q gerilmesinin farklı h_O/ℓ değerleri için anizotrop durumda a) $x_2/\ell = (h_A + h_O + h_U/2)/\ell$, b) $x_2/\ell = (h_A + h_O)/\ell$, c) $x_2/\ell = h_A/\ell$, d) $x_2/\ell = 0$ kesitlerinde x_1/ℓ ' den bağımlılığı.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tez kapsamında yapılan araştırmalarda elde edilen sayısal sonuçlar ve değerlendirme hakkında aşağıdakiler söylenebilir.

1. Tez çerçevesinde, yapısında geometrik süreksizlik (dikdörtgen delik) bulunan ve karşılıklı iki kenarından basit mesnetle tutturulmuş anizotrop şerit-levhanın, üst yüzeyine etkiyen düzgün yayılı basınç yükü etkisinde içerdiği delik civarında oluşan gerilme yığılması ele alınmıştır,
2. Problemin matematiksel formülasyonu düzlem şekil değiştirme durumunda ve yapı elemanındaki şekil değiştirmenin büyük olduğu kabulü altında, yani geometrik non-lineer durumda Elastisite Teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde yapılmıştır,
3. Ele alınan probleme karşı gelen kısmi türevli non-lineer denklemler takımının, göz önüne alınan sınır ve yükleme koşulları çerçevesinde çözülmesi problemi ancak sayısal çözüm yöntemleri yardımıyla mümkün olduğundan, çözüm için Sonlu Elemanlar Yöntemi ve non-lineer denklemler takımının lineerleştirilmesinde Newton-Raphson Yönteminden yararlanılmıştır,
4. Yapılan algoritma ve programlardan elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile test edilerek, Tez çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlara güven sağlamıştır,
5. Ele alınan problem yani, şerit-levhaya ait çeşitli malzeme ve geometrik parametrelerin, yükleme etkisiyle delik civarında oluşan gerilme birikimlerine etkisinin geometrik non-lineer durumda belirlenmesi başarıyla sonuçlandırılmıştır,
6. Tez kapsamında elde edilen sonuçlar ele alınan problem misalinde, yapısında dikdörtgen delik içeren yapı elemanlarında, dış yükleme nedeniyle yapıdaki delik civarında oluşan gerilme yığılmasının incelenmesi açısından, Yücel (2002) doktora tezinde Lineer Elastisite Teorisi çerçevesinde elde edilen sonuçların geliştirilmesidir.

Tez çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçların incelenmesi sonucunda;

1. Ele alınan her bir problem için, geometrik non-lineer durumda elde edilen sayısal sonuçlar, geometrik lineer durumda elde edilen uygun sonuçlardan farklıdır,
2. Her bir problem parametresi için geometrik non-lineer durumda elde edilen sayısal sonuçlar, geometrik lineer durumda elde edilen uygun sayısal sonuçlardan, bu sayısal sonuçların negatif olduğu bölgelerde mutlak değerce düşük, pozitif olduğu bölgelerde büyüktür,
3. Geometrik non-lineerite derecesini belirten parametre değerinin artması her bir gerilme yayılımındaki etkinin (artış yada düşüşün) artmasına neden olmakta ve özellikle, belirtilen etki şerit-levhanın malzemesi izotrop olarak alındığında, anizotrop olarak alınmasına göre çok daha fazladır,
4. Şerit-levhanın içerdiği deliğin Ox_1 veya Ox_2 eksenine doğrultusunda geometrik boyutunun düşmesi, non-lineeritenin derecesini gösteren parametrenin etkisinin düşmesine, artması bu etkinin artmasına neden olmaktadır

tespitleri yapılmıştır.

KAYNAKLAR

- Akbarov, S.D. and Guz, A.N., (2000), "Mechanics of Curved Composites", Kluwer Academic Publishers.
- Cristensen, R.M., (1979), "Mechanics of Composite Materials", John Wiley & Sons, Inc.
- Ersoy, Y. H., (2001), "Kompozit Malzeme", Literatür Yayıncılık, Dağıtım, Pazarlama, San. Ve Tic. Ltd. Şti. Beyoğlu, İstanbul, Türkiye.
- Jong, T. De., (1981), "Stress Around Rectangular Holes in Orthotropic Plates", J. Composite Materials, 15:311-328.
- Lei, G. H., Charles, W.W. Ng ve Rigby, D. B., (2001), "Stress and Displacement Around an Elastic Artificial Rectangular Holes", Journal of Engineering Mechanics, September, 880-890.
- Savin, G.N., (1961), "Stress Concentration Around Holes", E. Gros Translator, Pergomon, Oxford.
- Selim, S., (1999), "Bazı non-lineer sınır Değer problemlerinin Fem ile incelenmesi", Doktora Tezi, YTÜ.
- Timoshenko S. P. Ve Goodier J. N., (1970), "Theory of Elasticity", Third Edition, McGraw-Hill International Editions, London.
- Yahnioglu, N., (1996), "Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemeden Hazırlanmış Yapı Elemanlarının Statiğine Uygun Sınırdeğer Problemlerinin FEM ile incelenmesi", Doktora Tezi, YTÜ.
- Yahnioglu, N. ve Selim, S., (1997), "Homojen olmayan anizotrop malzemeden yapılmış şerit için bir geometrik non-lineer problemin incelenmesi", X. Ulusal Mekanik Kongresi, 443-452, 15-19 Eylül 1997, İstanbul, 1997 (Basımda). (10 sayfa).
- Yahnioglu, N. and Selim, S., (1998a), "Geometrical non-linear bending problems of the strip fabricated from the multilayered composite material with periodically curved structures". 2nd Pacific-Asia Conference On Mechanical Engineering, September 9-11, 1998 Manila Philippines, 1998. (to be published).
- Yahnioglu, N. and Selim, S., (1998b), "The stability loss of the strip fabricated from the composite material with periodically curved structure"., Continuum Models and Discrete System 9 (CMDS 9) 29 June-3 July 1998, İstanbul-Turkey.
- Yahnioglu, N. and Selim, S., (2000), "Bending of the strip fabricated from the composite material with curved structure in the geometrical non-linear statement". Mechanics of Composite Materials, No. 4-5, 2000.
- Yahnioglu, N. ve Mermer, A., (2001), "Kara delik içeren çok katlı kompozit malzemeden oluşan şerit-plaktaki gerilme dağılımı", XII. Ulusal Mekanik Kongresi 10-14 Eylül 2001 Selçuk Üni.-Konya.
- Yahnioglu, N. ve Yücel, M.A.,(2002), "Dikdörtgen delik formunda dolgu malzemesi içeren şerit-levhada gerilme birikimi", YTÜ DERGİSİ, vol.4, pp. 47-55, 2002.

Yahnioğlu, N. ve Yücel, M.A., (2003), “Dikdörtgen dolgu malzemesi içeren öngerilmeli şeritte ilave yükten dolayı oluşan gerilme yığılmasına öngerilmenin etkisi”. 13. Ulusal Mekanik Konferansı 8-12 Eylül Gaziantep Üniversitesi-Gaziantep, 2003. (Basımda).

Yücel, A.M., (2002), “Dikdörtgen Delik içeren Kompozit Kiriş Levhaların Eğilmesindeki Gerilme Dağılımı Problemleri”, Doktora Tezi, YTÜ.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., (1989), “Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity”, The Finite Element Method 4th Ed. Vol 2, McGraw-Hill Book Company.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	13.01.1979	
Doğum yeri	Lefkoşa, KKTC, Kıbrıs	
Lise	1993-1996	Lefkoşa Türk Maarif Koleji
Lisans	1996-2000	Doğu Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Uygulamalı Matematik ve Bilgisayar Bölümü
Yüksek Lisans	2001-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği Programı

