

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

139863

BURT TABLOLARININ KARŞILAŞTIRMA ANALİZİ ile
İNCELƏNMESİ ve BİR UYGULAMA

-139863-

Matematikçi Reşit ŞENER

F.B.E Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İbrahim EMİROĞLU

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yrd. Doç. Dr. Senet ES

İSTANBUL, 2003

TE. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
REKORDANTASYON MERKEZİ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ.....	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ.....	11
2. KARŞILAŞTIRMA ANALİZİ YÖNTEMİ.....	12
2.1 Tanım ve Temel Kavramlar	12
2.2 Frekans Tablosu	13
2.3 Nokta Kümeleri	14
2.4 Uzaklık	14
2.5 Faktör Analizi Yöntemi.....	15
2.6 Faktörel Eksenler.....	16
2.7 Triviyal Özvektörler	20
2.8 $N(I)$ Nokta Kümesinin Faktörel Eksenleri	22
2.9 $N(J)$ Nokta Kümesinin İncelenmesi	24
2.10 Faktörler ve Özellikleri	26
2.11 Verilerin Yeniden Kuruluş Formülü	28
2.12 Faktörlerin Sayısı	28
2.13 Geçiş Formülü	28
2.14 Özdeğerlerin Özellikleri	29
2.15 Atalet Kavramı	30
2.16 Katılma Payı	31
2.17 α Faktörünün i 'ye Olan Katılma Payı	33
2.18 Grafikle Gösterim.....	34
2.19 Grafik Gösteriminin Yorumu	35
3. ÇOKLU KARŞILAŞTIRMA ANALİZİ.....	37
3.1 Çoklu Karşılaştırma Analizine Giriş	37
3.2 Tanım ve Notasyonlar	37
3.3 Notasyonlar	38
3.3 Z_q Alt Tablosu.....	39
3.4 Z 'ye İlişkin BURT Tablosu	40
3.6 İki Soru Hali (İkili Karşılaştırma)	40

4.	KARŞILAŞTIRMA ANALİZİ UYGULANABİLEN TABLOLAR.....	43
4.1	Bağlanma (Frekans) Tabloları.....	43
4.2	Lojik Tablolar.....	44
4.3	BURT Tabloları.....	45
4.4	Çoklu Karşılaştırma Analizi.....	47
5.	BİR TABLONUN ANALİZ VE YORUMLARI.....	48
6.	SONUÇLAR	49
6.1	Öneriler.....	49
	KAYNAKLAR.....	50
	EKLER.....	51
	ÖZGEÇMİŞ	52



SİMGE LİSTESİ

A	Eksenler kümesi
B	Z yanıtlar tablosuna ilişkin BURT frekanslar tablosu
D^2	Maksimum yapılmak istenen ifade
$d^2(i, i')$	i ve i' arasındaki euclid uzaklığı
f_i	Yanal frekans (sütun toplamı), f_j^i nin ağırlığı
f_{ij}	(i, j) çiftine ilişkin frekans
f_j	Yanal frekans (satır toplamı), f_j^j nin ağırlığı
f_j	Başlangıç noktası (ağırlık merkezi)
f_j^i	i bilindiğine göre j nin frekansı $\left(f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_i} \right)$
$F_\alpha(i)$	$N(I)$ kümesine ait faktörler
g_j	Ağırlık merkezi ($f_j = g_j$)
H	J_q ların çarpım kümesi
I	Bireyler kümesi
J_q	q sorusuna karşılık gelebilecek yanıtlar (seçenekler)
J	Değişkenler kümesi
K	Karşılaştırma tablosu
n	Bireyler kümesinin eleman sayısı
$N(I)$	Bireyler kümesinin ağırlıkları ile birlikte R^p de oluşturulan küme
$N(J)$	Değişkenler kümesinin ağırlıkları ile birlikte R^n de oluşturulan küme
p	değişkenler kümesinin eleman sayısı
q	Soru
Q	Soru kümesi
r_{iq}	i ninci satır q nuncu soru kategorisi
R	Z tablosunun n satır q sütundan oluşturulan tablo
u_j	Δ ana eksenindeki brim vektör
u_α	u_j^α brim vektörlerine ait sütun matrisi
$u_{\alpha j}$	V matrisinin özvektörleri
V	x_{ij} ($j \in J$) lerin varyans-kovaryans matrisi
$V_{jj'}$	V varyans-kovaryans matrisinin elemanları
v_j	İkinci brim vektör
Y	Elemanları koşullu olasılıklar olan f_j^i f_α^j matrislerinin çarpımı
z	V varyans-kovaryans matrisinde sıfır, V' varyans-kovaryans matrisinde 1 özdeğerine karşılık gelen trivial vektör
λ_α	V varyans-kovaryans matrisinin özdeğerleri
ϕ_α	Varyansı 1 olan standart faktör
ϕ_α^j	$U_{\alpha j}$ nin f_j ye göre ölçüm yoğunluğu
ϕ^j	J kümesi üzerinde tanımlı fonksiyon. ϕ^j , fonksiyonun j noktasında aldığı değer

$\varphi_{j_r j_s}$	(j_r, j_s) hücresinin frekansı
Δ	Ana eksen
δ	Kronecker sembolü
χ^2	Khi kare uzaklığı
x_{ij}	Koordinatları x_{ij} olan noktalar kümesi
μ_j	J kümesi üzerinde tanımlanmış ölçümler (kütleler)
τ_α	α nıncı atelet momentine karşılık gelen oranı (yüzdesi)



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Ana eksen üzerindeki izdüşümler. x_{iJ} ve $x_{i'J}$ noktalarının üzerinde $\bar{u}$ birim vektörü bulunan ve G ağırlık merkezinden geçen Δ doğrusu üzerindeki izdüşümleri y_{iJ} ve $y_{i'J}$ dir. $\ y_{iJ} - y_{i'J}\ _M$ uzaklığını mümkün mertebe $\ x_{iJ} - x_{i'J}\ _M$ uzaklığına yakın olmasını istiyoruz.	16
Şekil 2.2a Bireylerin katılım payları: Bir eksene göre bir i noktasının yeri, katılım payı hesapları ile ifade edilir.	31
Şekil 2.2b Değişkenlerin katılım payları: $i \in I$ için $j \in J$ için de yapılır.	32
Şekil 2.3 Uzaklıkların yanılgısı: Bir eksen üzerinde iki nokta arasındaki uzaklık bizi hataya götürebilir.	35

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1 Bağlanma (frekans) çizelgesi. i . Satır ve j . Sütunun kesiştiği yere (i,j) çiftinin meydana geldiği sayı olan $k(i,j)$ yazıyoruz	12
Çizelge 3.1 Z tablosu.....	39
Çizelge 3.2 R tablosu	40
Çizelge 4.1 Fiktif anket tablosu.....	43
Çizelge 4.2 Lojik tablo	44
Çizelge 4.3 Burt Tablosu.....	46



ÖNSÖZ

Bu tezin bütün safhalarında bana yardımcı olan ve tezimin danışmanlığını üzerine alan Yrd. Doç. Dr. İbrahim Emiroğlu 'na öncelikle teşekkür etmeyi borç bilirim.

Ana Bilimdalı Başkanım bu tezin oluşması için gösterdiği kolaylık nedeniyle bilimsel her türlü faaliyetimi teşvik eden Prof. Dr. Aziz Bener 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu arada yardımlarını gördüğüm Prof. Tahir Şişman, Prof.Dr. Mustafa Sivri. Yard. Dr. Servet Es, Yrd. Doç. Dr. Fatih Taşçı, Yrd. Doç. Dr. Halil Bayrakçı. Yrd. Dr. Reşat Köşker ve Araş. Gör . Ramazan Tekercioğlu 'na ayrıca teşekkür ederim.

Ayrıca beni manen destekleyen ve tezin yazılımında yardımcı olan eşim, Sosyolog Asiye Şener 'e özellikle teşekkür ederim.



ÖZET

Çok değişkenli veri analizinde, değişkenler arasındaki bağımlılığın incelenmesi Regresyon ve Korelasyon teknikleri yardımıyla yapılabilmektedir. Ancak, değişkenler arasındaki bağımlılığın söz konusu olmadığı, yahut değişkenler arası ilişkilerin yapısı hakkında önbilgilerin bulunmadığı hallerde başka tekniklere gereksinim vardır. Bu çalışmada, çok boyutlu veri analizinin önemli yöntemlerinden biri olan Karşılaştırma Analizi çerçevesinde, üç girişli veri tabloları incelenmiştir. Karşılaştırma Analizi yardımıyla üç girişli veri tablolarının incelenmesi oldukça yeni olup, uygulanmasında bazı güçlüklerle karşılaşmaktadır. Bu güçlüklerden en önemlisi, iki girişli veri tabloları için varolan ve ana bileşenleri verilere bağlayan yeniden kuruluş formülünün, üç girişli tablolara genelleştirilmesinde ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada bu tür tablolarda kullanılmak üzere, bir yeniden kuruluş formülü önerilmektedir. Hem Karşılaştırma Analizini uygulamak ve hem de formülün geçerliliğini sağlamak amacıyla, üç girişli tablolara model olarak bir ekonomi problemi seçilmiştir.

Giriş bölümünde çok boyutlu veri analizindeki istatistiksel yöntemlerden kısaca söz edilmiş ve Karşılaştırma Analizi yöntemiyle ilgili yapılmış araştırmalardan bazıları tanıtılmıştır. Ayrıca, iki ve üç girişli veri tablolarında göz önüne alınan yeniden kuruluş formülleriyle ilgili son yıllarakadar yapılan bazı çalışmalara değinilmiştir.

İkinci bölümde verilerin çok boyutlu uzayda oluşturduğu nokta bulutunun, mümkün olduğu kadar az bilgi kaybı ile, daha küçük boyutlu bir alt uzayda gösterilmesine çalışılmıştır. Veri tablosunun satırlarını oluşturan bireyler ile, kolonlarını oluşturan değişkenler yardımıyla, araştırılan alt uzaya ait ana eksenlerin bulunması problemi değişik yönleriyle ele alınarak incelenmiştir. Ayrıca bu yöntemde; problemin çözümünün özdeğer-özvektör araştırılması problemine dönüştürülebileceği gösterilmiş ve özvektörlerden anabileşenlere geçiş formülleri çıkarılarak, bileşenler yardımıyla asıl veri tablosunun yeniden kuruluşunu sağlayan formül elde edilmiştir. Üçüncü bölümde disjontive ve Burt Tablolarının tanıtımına ayrıldı. Bu bölümde Burt Tablolarının Karşılaştırma Analizi ile ilk (initial) elde edilen disjontive tablonun eşdeğer olduğu bir teoremle ispat edildi. Dördüncü bölümde Karşılaştırma Analizinin uygulanabildiği tablolar ele alındı. Beşinci bölümde veri tablosuna Karşılaştırma Analizi uygulanmış ve yorumları yapılmıştır. Son bölümde sonuçlar yer almaktadır.

Anahtar kelimeler: Çokdeğişkenli İstatistiksel Analiz, Data Analizi, Karşılaştırma Analizi, Çoklu Karşılaştırma Analizi, Burt tablosu

ABSTRACT

Regression and Correlation techniques can be used in the investigation of dependence in such situations where a variable of a multivariate system depends on other variables. However, if a differentiation between dependent and independent variables is not a matter of importance, in other words if all the variables carry equal importance from the point of view of the purposes of the investigation, then it is essential that other techniques will be used in the analysis of dependence. The techniques included in this category are useful especially when there is not sufficient information about the structure of the relationship between the variables. Starting with the Correspondance Analysis method and with the introduction of Burt tables maintaining the reestablishment of the starting data table, an analysis of an economical problem closely related to the recent export structure of Turkey was made to prove the conformity between the initial table and Burt table.

In the introduction chapter, the initiation of multidimensional data analysis methods and its development has been briefly given and the Correspondance Analysis method and its relation with the other multivariate methods has been explained.

In the second section, the Correspondance Analysis method and the basic hypothesis on which it depends has been introduced and also the analysis has been investigated from the geometrical point of view and the calculations are established more clearly. The aim of Correspondance Analysis method is to reduce the number of dimension of the problem by using variables related to the problem and by creating a few artificial variables. In the maintaining, some information in the data matrix is naturally lost, still the method depends on the principal of finding and optimum solution in such away to minimize the information loss. In the most general sense, the correspondances analysis method consists of looking for the linear combinations of the original variables by summarizing the starting data table and with the minimum information loss possible. After establishing the basis of the method, all the definitions and the calculation methods required for the analysis are given. at the end of the first section the geometrical study of the correspondances is made and the Correspondances analysis under the hypothesis normal distribution is investigated as well. In the third chapter the disjontive and the Burt tables are defined. In this chapter we have proved that the Correspondance Analysis of the Burt tables are equivalent to the disjontive tables obtained from initial table. In the forth chapter we investigate the different tables the Correspondance Analysis is most applicable. In the fifth chapter we have assigned the application the Correspondance Analysis method to a data table and we have given some interpretations. In the last chapter the some results have been given plus.

Keywords: Multivariate Statistical Analysis, Data Analysis. Correspondences Analysis, Multiply Correspondence Analysis, Burt tables

1. GİRİŞ

Günümüzde , Faktör Analizi, Karşılaştırma Analizi(Benzecri, 1976), Çok Boyutlu Ölçekleme, Kanonik Analiz (Kshirsagar, 1972) ve Ana Bileşenli Faktör Analizi (Anderson, 1958; Morrison vd., 1967; Kendall vd., 1975) gibi çok değişkenli istatistiksel yöntemler, özellikle uygulamalı bilim dallarında, yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Bu yöntemlerin dayandığı temel ilkeler çok eskilere dayanmakla birlikte, gelişmeleri oldukça yenidir.

Burt (1969) tarafından temelleri atılan ve geliştirilen bu yöntemler yardımıyla, verilerden elde edilen sonuçlardan başka, doğrudan doğruya gözlenemeyen veya gözlemlerin dışında kalan bir takım değişkenler de ortaya çıkarılmaktadır.

Hotelling (1933) Ana Bileşenli Faktör Analizi yöntemini ortaya koymuştur.

Faktör Analizi yöntemlerinden olan Karşılaştırma Analizi yöntemi de Benzecri (1976a) tarafından geliştirilmiştir.

İki girişli veri tablolarına uygulanan klasik Faktör Analizi yöntemleri, üç girişli tablolar için yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, daha değişik yöntemler kullanmak gerekir. Bu konuda geliştirilmiş ilk ve formel çalışma, üç girişli karşılaştırma tablolarının, Lojik tablolara dönüştürülmesi esasına dayanır

Bener (1982) tarafından ilk defa, üç girişli tablolar için yeniden kuruluş formülü, Karşılaştırma Analizi'nde uygulanarak, başlangıç veri tablosuna oldukça yakın sonuçlar ortaya çıkarılmıştır.

Bu çalışma, varlığı ve tekliği teorik olarak kanıtlanan en genel anlamda yeniden kuruluş formülünün, Ana Bileşenli Faktör Analizinde de, gerekli düzeltmeler yapılmak süretiyle kullanılabilme olanakları araştırılmıştır.

2. KARŞILAŞTIRMA ANALİZİ YÖNTEMİ

2.1 Tanım ve Temel Kavramlar

Bir K karşılaştırma tablosu verilmiş olsun. Bu tablo $I \times J$ kümesinin N Doğal Sayılar kümesi içine olan bir fonksiyondur. Burada I bireyler kümesi J değişkenler kümesini gösterir. Buna göre $\forall (i, j)$ çifti için

$$I \times J \rightarrow N$$

$$(i, j) \rightarrow k(i, j)$$

Çizelge 2.1 Bağlanma (frekans) çizelgesi. i . Satır ve j . Sutunun kesiştiği yere (i, j) çiftinin meydana geldiği sayı olan $k(i, j)$ yazıyoruz

I \ J		J=Değişkenler Kümesi		
			j	
I=Bireyler Kümesi	i		$k(i, j)$	

I bireyler kümesinin eleman sayısı n , değişken sayısı p olsun. Bireyler kümesi R^p uzayında bir nokta bulutu oluşturur. i bireyinin R^p uzayındaki koordinatları i sabit, j değişmek üzere $k(i, j)$ olur. Tersine olarak değişkenler de R^n uzayında bir nokta kümesi oluşturur. Karşılaştırma Analizinin (Correspondence Analysis) birinci amacı, bir bireyle bir değişken arasındaki karşılaştırmada yakınlığın matematiksel ifadesini vermektir.

İkinci amacı da R^p (veya R^n) uzayında daha düşük boyutlu bir alt uzay bulmaktır. Öyle ki bireyler (veya değişkenler) kümesinin bu alt uzay üzerindeki izdüşümleri sonucunda nokta bulutu mümkün olabilen en az değişime uğramış olsun. Karşılaştırma Analizinde bir bireyin

(ya da değişkenin) profili yani koşullu frekansı gözönüne alınır. Diğer taraftan kullanılacak olan uzaklık ,euklid uzaklığı değil fakat ileride nedenini açıklayacağımız χ^2 uzaklığı olacaktır.

2.2 Frekans Tablosu

Tabloya ilişkin bazı tanımlamalar yapmamız gerekir. K tablosundaki tüm sayıların toplamı k ile gösterilir:

$$k = \sum \{k(i, j) \mid i \in I, j \in J\} \quad (2.1)$$

(i, j) çiftine ilişkin frekans f_{ij} ile gösterilir ve

$$f_{ij} = \frac{k(i, j)}{k} \quad (2.2)$$

dir. Burada

$$\sum \{f_{ij} \mid i \in I, j \in J\} = 1 \quad (2.3)$$

Yanal frekanslar

$$f_i = \sum \{f_{ij} \mid j \in J\} \quad (2.4)$$

$$f_j = \sum \{f_{ij} \mid i \in I\} \quad (2.5)$$

ayrıca

$$\sum \{f_i \mid i \in I\} = \sum \{f_j \mid j \in J\} = 1 \quad (2.6)$$

Bunlara dayanarak koşullu olasılıklar (daha doğrusu frekanslar) şöyle tanımlanır.

i bilindiğine göre j nin koşullu frekansı

$$f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_i} \quad (2.7)$$

Yine j bilindiğine göre i nin koşullu frekansı

$$f_i^j = \frac{f_{ij}}{f_j} \quad (2.8)$$

Bir J kümesi verildiğine göre

$$\varphi^j = \{\varphi^j \mid j \in J\} \quad (2.9)$$

reel sayılar kümesi J üzerinde bir fonksiyon olarak yorumlanabilir. Buna göre φ^j fonksiyonun, j noktasında aldığı değerdir. Diğer taraftan

$$\mu_j = \{\mu_j \mid j \in J\} \quad (2.10)$$

gerçek sayılar kümesi J üzerinde tanımlanmış kütleler olarak yorumlanır. Buna göre μ_j kütlesi, j noktasının kütlesi olur. Böylece J üzerindeki fonksiyonlar için $\varphi^j \in R^J$ ve J üzerindeki ölçümler (yani kütleler) sistemi için de $\mu_j \in R_J$ yazılır.

2.3 Nokta Kümeleri

$\{f_1' \dots f_j' \dots f_p'\}$ reel sayı sistemi f_j' ile gösterelim. Burada f_j' bir koordinat sistemi, yani R^p deki i ninci noktanın profilidir. Bu noktaya f_i ağırlığı karşılık gelir.

N nokta kümesi ağırlıkları ile birlikte R^p içinde bir $N(I)$ kümesi oluşturur. Benzer şekilde R^n içinde p noktadan oluşan $N(J)$ kümesi tanımlanır.

2.4 Uzaklık

Bizi ilgilendiren profillerdir. f_j^i ve $f_j^{i'}$ profilleri arasındaki **benzerlik** ne kadar çoksa i ve i' arasındaki yakınlık da o nisbette olacaktır.

Adi uzaklık (euclid) formülüne göre i ve i' arasındaki uzaklık şu formülle ifade edilir.

$$d^2(i, i') = \sum \{(f_j^i - f_j^{i'})^2 \mid j \in J\} \quad (2.11)$$

Burada t ninci bileşene verilen ağırlık varsayalım ki büyük olsun. O zaman $(f_t^i - f_t^{i'})^2$ terimi yukarıdaki toplamda çok büyük bir rol oynayacak ve dolayısıyla hesaplanan uzaklık yanlış çıkacaktır. Buradan bizi χ^2 uzaklığına götüren dengeli ağırlık kavramına ulaşmış oluruz. i ve i' bireyleri arasındaki χ^2 uzaklığı şöyle tanımlanır.

$$d^2(i, i') = \sum \left\{ \frac{1}{f_j} (f_j^i - f_j^{i'})^2 \mid j \in J \right\} \quad (2.12)$$

Bu formül sütunların (veya satırların) ağırlıklarını gözönüne alan satırlar (veya sütunlar) arasındaki uzaklığı ifade eder.

$i \in I$ ve $i' \in I$ olsun. $\forall j \in J$ için $f_j^i = f_j^{i'}$ ise i ve i' noktaları yerine koordinatları $f_j^{i_0} = f_j^i = f_j^{i'}$ ve kütlesi $f_{i_0} = f_i + f_{i'}$ olan bir i_0 noktası alındığında J 'nin elemanları arasındaki uzaklık değişmez. Sütünlara ilişkin bu düşüncemiz satırlar içinde geçerlidir. Bu özellik sonuçların değişmezliğini garanti eder. Dağılıma ilişkin eşdeğerlik ilkesi χ^2 uzaklığı ile de sağlanabilir.

2.5 Faktör Analizi Yöntemi

Şu soruya yanıt arıyoruz. 1, 2 yada üç boyutlu öyle bir uzay bulalım ki birey ya da değişken kümelerinin bu uzay üzerine izdüşümü sonucunda en az değişiklik meydana gelmiş olsun. Üzerinde χ^2 metriği tanımlanmış R_J uzayının f_j^i noktalarından oluşan $N(I)$ kümesini gözönüne alalım. Bu kümenin ağırlık merkezi f_j dir.

Bireyler arasındaki uzaklıklar

$$d^2(i, i') = \sum \left\{ \frac{1}{f_j} (f_j^i - f_j^{i'})^2 \mid j \in J \right\} \quad (2.13)$$

ya da

$$d^2(i, i') = \sum \left\{ \left(\frac{f_j^i}{\sqrt{f_j}} - \frac{f_j^{i'}}{\sqrt{f_j}} \right)^2 \mid j \in J \right\} \quad (2.14)$$

dir. Şimdi

$$\forall j \in J \text{ için } x_{ij} = \frac{f_j^i}{\sqrt{f_j}} \quad (2.15)$$

x_{ij} nin koordinatları x_{ij} ve ağırlığı f_i olmak üzere

$$d^2(x_{iJ}, x_{i'J}) = \sum \{ (x_{ij} - x_{i'j})^2 \mid j \in J \} = d^2(i, i') \quad (2.16)$$

alalım. Bu formül x_{iJ} ve $x_{i'J}$ arasındaki bilinen uzaklık formülüdür ve koordinat dönüşümü uygulanarak elde edilmiştir.

2.6 Faktörel Eksenler

Kütleleri f_i olan x_{iJ} noktalar kümesini gözönüne alalım. Ağırlık merkezinden geçen ve üzerine izdüşürüldüğünde noktaların en az değişikliğe uğradığı bir Δ doğrusu arıyoruz. Bu Δ doğrusuna **faktörel kesen** denir. i noktasının Δ eksenindeki izdüşümüne de **faktör** adı verilir.

Nokta kümesinin en az değişikliğe uğramasını istemekle şunu amaçlıyoruz. Kümenin noktaları arasındaki uzaklıklar iyi korunmalıdır. (Yani uzaklık değişimi en aza indirgenmelidir.)

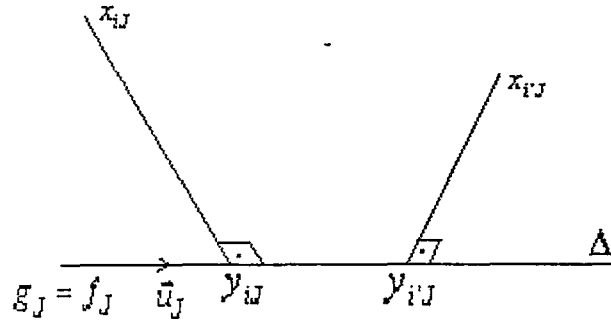
Şu halde kümenin i noktalarını ikişer ikişer birleştiren doğru parçalarının izdüşümleri toplamı maksimum olmalıdır.

Daha açık bir ifadeyle izdüşümlerinin karelerinin ağırlıklı toplamı olan D^2 yi maksimum yapmaya çalışırız. Oluşturmak istediğimiz D^2 toplamı

$$D^2 = \sum \{f_i (y_{iJ} - g_J)^2 \mid i \in I\} \quad (2.17)$$

$$D^2 = \sum \{f_i f_{i'} \|y_{iJ} - y_{i'J}\|_M^2 \mid i, i' \in I\} \quad (2.18)$$

olur. Burada y_{iJ} 'ler, x_{iJ} 'lerin Δ üzerindeki izdüşümleridir. Bu ise bir çift toplamdır. Çünkü toplamda i ve i' gibi ikişer ikişer noktalar arasındaki tüm uzaklıklar yer almaktadır.



Şekil 2.1 Ana eksen üzerindeki izdüşümler. x_{iJ} ve $x_{i'J}$ noktalarının Δ üzerinde $\vec{u}$ birim vektörü bulunan ve G ağırlık merkezinden geçen Δ doğrusu üzerindeki izdüşümleri y_{iJ} ve $y_{i'J}$ dir.

$\|y_{iJ} - y_{i'J}\|_M$ uzaklığını mümkün mertebe $\|x_{iJ} - x_{i'J}\|_M$ uzaklığına yakın olmasını istiyoruz.

g_J ağırlık merkezinden geçen Δ doğrusu üzerinde u_J birim vektörü ve x_{iJ} $x_{i'J}$ nin Δ üzerindeki izdüşümleri y_{iJ} ve $y_{i'J}$ yer almaktadır. Burada $\|y_{iJ} - y_{i'J}\|_M$ uzaklığının

$\|x_{ij} - x_{i'j}\|_M$ uzaklığına mümkün mertebe yakın olmasını istiyoruz. Δ doğrusu $j \in J$ olmak üzere koordinatları u_j olan u_j birim vektörü ile tanımlanmıştır.

$$2D^2 = \sum \{f_i f_{i'} (\langle u_j, x_{ij} - x_{i'j} \rangle)^2 \mid i, i' \in I\} \quad (2.19)$$

Buna göre

$$S_{ii'} = f_i f_{i'} (\langle u_j, x_{ij} - x_{i'j} \rangle)^2 \quad (2.20)$$

$$= f_i f_{i'} \left(\sum \{u_j (x_{ij} - x_{i'j}) \mid j \in J\} \right)^2 \quad (2.21)$$

$$= f_i f_{i'} \sum \{u_j u_{j'} (x_{ij} - x_{i'j}) (x_{ij'} - x_{i'j'}) \mid j, j' \in J\} \quad (2.22)$$

Böylece D^2 için

$$2D^2 = \sum \{S_{ii'} \mid i \in I, i' \in I\} \quad (2.23)$$

$$D^2 = \sum \{u_j u_{j'} V_{jj'} \mid j \in J, j' \in J\} \quad (2.24)$$

Burada ileride hesap kolaylığı sağlamak için bir katsayı gözönüne aldık.

$$2V_{jj'} = \sum \{f_i f_{i'} (x_{ij} - x_{i'j}) (x_{ij'} - x_{i'j'}) \mid i \in I, i' \in I\} \quad (2.25)$$

Ortalamayı $x_{.j}$ (aynı şekilde $x_{.j'}$) ile gösterelim ve

$$x_{.j} = \frac{\sum \{f_i x_{ij} \mid i \in I\}}{\sum \{f_i \mid i \in I\}} \quad (2.26)$$

$$x_{.j} = \sum \{f_i x_{ij} \mid i \in I\} \quad (2.27)$$

Çünkü f_i üzerinden toplam 1 'e eşittir. Buradan

$$V_{jj'} = \sum \{f_i x_{ij} x_{ij'} \mid i \in I\} - x_{.j} x_{.j'} \quad (2.28)$$

$$V_{jj'} = \text{cov}(x_{ij}, x_{ij'}) \quad (2.29)$$

$$D^2 = \sum \{u_j u_{j'} \text{cov}(x_{ij}, x_{ij'}) \mid j \in J, j' \in J\} \quad (2.30)$$

elde edilir. O halde $x_{ij} (j \in J)$ lerin varyans-kovaryanslar matrisini V ve u_j vektörüne ait

sütun matrisi de u ile gösterilecek olursa

$$D^2 = {}^t u V u \quad (2.31)$$

Buna göre problem ${}^t u u = 1$ kısıtlayıcı şart altında ${}^t u V u$ ifadesini maksimum yapmaktadır. Burada kısıtlayıcı koşul u_j vektörünün normunun 1 'e eşit olduğunu ifade edilebilir. Maksimum bulunması konusunda Lagrange Çarpanlar yöntemi kullanılır. Buna göre

$$Q = {}^t u V u; \quad N = {}^t u u \quad (2.32)$$

alır ve u_j vektörünün u_j bileşenlerine göre diferansiyel olacak olursa

$$dQ = 2 \sum \{u_j V_{jj'} du_{j'} \mid j \in J, j' \in J\} = 2 {}^t du V u \quad (2.33)$$

$$dN = 2 \sum \{u_j du_j \mid j \in J\} = 2 {}^t du u \quad (2.34)$$

elde edilir. Burada ${}^t du, \{du_1, \dots, du_j, \dots\}$ vektörünün traspozisini göstermektedir. dQ 'nun $dN = 0$ koşulu altında 0 (sıfır) olması istenmektedir. Buna göre du_j lerin lineer kombinasyonu olan dQ, dN ile orantılı olmaktadır.

$$2 {}^t du V u = \lambda 2 {}^t du u \quad (2.35)$$

$$V u = \lambda u \quad (2.36)$$

Şu halde u, V nin özvektörü olmalıdır. Bundan başka her iki taraf ${}^t u$ ile çarpılarak

$${}^t u V u = \lambda {}^t u u = \lambda \quad (2.37)$$

olmalıdır. Böylece ${}^t u V u$ nun maksimum olması için V nin en büyük özdeğeri olan λ alınmalıdır.

Sonuç: ${}^t u V u$ yu maksimum yapan özdeğer, V nin özdeğerleri içinde en büyük λ değerine eşittir. Buna karşılık gelen vektör de $V u_j = \lambda u_j$ koşulunu sağlayan u_j özvektördür. Diğer özvektörler de gözönüne alınır. Çünkü bunlar azalan değerlere göre diğer eksenleri bulunmasına yardımcı olur. Şu halde arayacağımız ikinci v_j birim vektörü, u_j birinci eksenel vektöre dik olan ve bu koşul altında ${}^t v V v$ yi maksimum yapan özvektör olacaktır. Şimdi

$$Q = {}^t v V v; \quad M = {}^t v v; \quad S = {}^t v u \quad (2.38)$$

alalım. $dM = 0$ ve $dS = 0$ koşulları altında dQ 'nın 0 (sıfır) olmasını istiyoruz. Halbuki

$$dQ = 2 {}^t dv V v; \quad dM = 2 {}^t dv v; \quad dS = {}^t dv u \quad (2.39)$$

daha önce ${}^t du$ için söylendiği gibi ${}^t dv$, $\{dv_1, \dots, dv_j, \dots\}$ 'nin transpozesidir. dM ve dS in lineer kombinezonu olmalıdır. Yani

$${}^t dv V v = \lambda' {}^t dv + \mu' {}^t dv u \quad (2.40)$$

$$V v = \lambda' v + \mu' u \quad (2.41)$$

${}^t u V v$ yi şu iki şekilde hesaplarken μ' nün sıfır olduğunu görürüz:

$${}^t u (V v) = {}^t v (V v) = {}^t v (\lambda u) = \lambda {}^t v u = 0 \quad (2.42)$$

$${}^t u V v = {}^t u (\lambda' v + \mu' u) = \lambda' {}^t u v + \mu' {}^t u u = \mu' \quad (2.43)$$

Sonuç olarak şunu elde edebiliriz.

$$V v = \lambda' v; \quad {}^t v V v = \lambda' {}^t v v = \lambda' \quad (2.45)$$

Şu halde v , V 'nin λ' özdeğerine karşılık gelen ikinci özvektördür. Bu düşüncemizi ikinci boyuttan sonrakiler içinde kolayca genelleştirebiliriz. Özvektörlerle elde edilen ve nokta kümesinin ağırlık merkezinden geçen doğrular **faktörel eksenleri** oluşturur ve bu eksenler üzerindeki koordinatlar da **faktör** olarak adlandırılır.

Koordinatları

$$x_{ij} = \frac{f_j^i}{\sqrt{f_j}} \quad (2.46)$$

olan x_{ij} noktalarından oluşan kümenin faktörel eksenleri V matrisinin özvektörleri olduğu gördük. Burada V matrisinin elemanları şöyle tanımlanmıştır.

$$V_{j'j} = \text{cov}(x_{ij}, x_{ij'}) \quad (2.47)$$

$$\text{Burada } x_{ij} = \{x_{ij} \mid i \in I\} = \left\{ \frac{f_{ij}}{f_i \sqrt{f_i}} \mid i \in I \right\} \quad (2.48)$$

Dolayısıyla

$$V_{j'} = \sum \{f_i(x_{ij} - x_j)(x_{ij'} - x_{j'}) \mid i \in I\} \quad (2.49)$$

Burada da

$$x_j = \sum \{f_i x_{ij} \mid i \in I\} = \sqrt{f_j} \quad (2.50)$$

Sonuç olarak $V_{j'}$ 'leri sadece f_{ij} ve $f_i f_j$ 'ler cinsinden ifade edecek olursak

$$V_{j'} = \sum \left\{ f_i \left(\frac{f_{ij}}{f_i \sqrt{f_j}} - \sqrt{f_j} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_i \sqrt{f_{j'}}} - \sqrt{f_{j'}} \right) \mid i \in I \right\} \quad (2.51)$$

$$V_{j'} = \sum \left\{ \frac{f_{ij} f_{ij'}}{f_i \sqrt{f_j} \sqrt{f_{j'}}} - f_{ij} \frac{\sqrt{f_{j'}}}{\sqrt{f_j}} - f_{ij'} \frac{\sqrt{f_j}}{\sqrt{f_{j'}}} + f_i \sqrt{f_j} \sqrt{f_{j'}} \mid i \in I \right\} \quad (2.52)$$

$$V_{j'} = \sum \left\{ \frac{f_{ij} f_{ij'}}{f_i \sqrt{f_j} \sqrt{f_{j'}}} \mid i \in I \right\} - \sqrt{f_j} \sqrt{f_{j'}} \quad (2.53)$$

yazılır.

2.7 Trivial Özvektörler

Özvektörler $V u = \lambda u$ yani

$$\forall j \in J : \quad \sum \{V_{j'j} u_{j'} \mid j' \in J\} = \lambda u \quad (2.54)$$

koşulunu sağlayan vektörler olarak tanımlanmıştır. Bu özvektörler arasında bir tanesi vardır ki matrisin köşegenleştirilmesinde fazla güçlük çıkarmadan hesaplanabilmektedir. Bu da 0 (sıfır) özdeğerine karşılık gelen ve z ile göstereceğimiz özvektördür. Az ilerde göreceğimiz gibi V 'den daha basit ve aynı özvektörler olan bir V' matrisi için z **trivial vektörü** 1 özdeğerine karşılık gelir.

z trivial özvektörü birim vektör, yani $z z = 1$ olup bileşenleri $z_j = \sqrt{f_j}$ dir.

Gerçekten $\lambda = 0$ 'a karşılık gelen bir özvektörün mevcut olduğunu sağlamaya çalışalım.

$$V_{j'z_j} = \sum \left\{ \frac{f_{ij}f_{ij'}}{f_i\sqrt{f_j}} \mid i \in I \right\} - \sqrt{f_j}f_{j'} \quad (2.55)$$

$$= \sum \{V_{j'z_j} \mid j' \in J\} = \sum \left\{ \frac{f_{ij}f_{ij'}}{f_i\sqrt{f_j}} \mid i \in I, j' \in J \right\} - \sqrt{f_j} \quad (2.56)$$

$$= \sum \left\{ \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_j}} \mid i \in I \right\} - \sqrt{f_j} = 0 \quad (2.57)$$

Burada $\sum \{f_{ij'} \mid j' \in J\} = f_i$; $\sum \{f_{j'} \mid j' \in J\} = 1$ olduğunu hatırlayalım. Bu özvektörler daha başka teorik düşüncelerle elde edilebilir.

Önce

$$V'_{j'} = \sum \left\{ \frac{f_{ij}f_{ij'}}{f_i\sqrt{f_jf_{j'}}} \mid i \in I \right\} = V_{j'j} + z_jz_{j'} \quad (2.58)$$

alalım. V' matrisi $V + z'z$ matrisinden başkası değildir. Buna göre $V = V' - z'z$ 'nin V' matrisinin 1 özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür.

$$V'z = Vz + z'z = Vz + z = z \quad (2.59)$$

$$\text{Çünkü } z'z = 1, \text{ yani } \sum (z_j)^2 = \sum f_j = 1 \quad (2.60)$$

V matrisinin $\lambda \neq 0$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü u olsun. Bu özvektör z 'ye ortogondur. Çünkü farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler birbirine dik olur. Bu nedenle

$$z'u = 0; \quad V'u = Vu + z'zu = Vu = \lambda u \quad (2.61)$$

Şu halde u hem V' 'nün hem de V 'nin aynı bir λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olduğu anlaşılmış olur.

Sonuç : Böylece koordinatları $x_{ij} = \frac{f_j^i}{\sqrt{f_j}}$ olan $x_{i\alpha}$ noktalarına ilişkin faktörel eksenleri

tanımlamış olduk. Bunlar yani bu eksenler simetrik V' matrisinin u_{α} özvektörlerinden başkası değildir. Burada $\alpha \in A$ dır. A eksenler kümesini göstermektedir. V' matrisinin

elemanları ise

$$V'_{ij'} = \sum \left\{ \frac{f_{ij'} f_{ij'}}{f_i \sqrt{f_j f_{j'}}} \mid i \in I \right\} \quad (2.62)$$

Burada 1 özdeğerine karşılık gelen ve koordinatları $z_j = \sqrt{f_j}$ olan z trival özvektörünü dışlamak gerekir.

2.8 $N(I)$ Nokta Kümesinin Faktörel Eksenleri

$N(I)$ kümesinin i ninci noktasının f_j başlangıç noktasından geçen faktörel eksen üzerindeki koordinatı i ninci bireye ilişkin **faktörün** $F_\alpha(i)$ değeridir:

$$F_\alpha(i) = \sum \{x_{ij} u_{\alpha j} \mid j \in J\} = \sum \left\{ \frac{f_j^i}{\sqrt{f_j}} u_{\alpha j} \mid j \in J \right\} \quad (2.63)$$

$U_{\alpha j} = \sqrt{f_j} u_{\alpha j}$ alalım. Bu taktirde $F_\alpha(i)$ ifadesi

$$F_\alpha(i) = \left\{ \frac{1}{f_j} f_j^i U_{\alpha j} \mid j \in J \right\} \quad (2.64)$$

olur. Formül f_j merkezli χ^2 anlamıda bir skaler çarpım içeriyor. Buna göre

$$F_\alpha(i) = \langle f_j^i - f_j, U_{\alpha j} \rangle \quad (2.65)$$

$F_\alpha(i)$ fonksiyonun ortalamasının 0 (sıfır) olduğu açıkça görülüyor. Çünkü noktanın ağırlık merkezi $G = f_j$ den geçen bir Δ eksenini üzerindeki izdüşümü alınmıştır (Şekil 2.1). Ayrıca $F_\alpha(i)$ 'nin varyansı λ_α 'dır. Çünkü Δ eksenini bu varyansı maksimum olacak şekilde seçilmiştir.

$$\sum \{f_i F_\alpha(i) \mid i \in I\} = 0; \quad \sum \{f_i (F_\alpha(i))^2 \mid i \in I\} = \lambda_\alpha \quad (2.66)$$

$U_{\alpha j}$ 'nin f_j 'ye göre ölçümün yoğunluğunu φ_α^j ile gösterelim:

$$\varphi_\alpha^j = \{ \varphi_\alpha^j \mid j \in J \}; \quad \varphi_\alpha^j = \frac{U_{\alpha j}}{f_j} = \frac{u_{\alpha j}}{\sqrt{f_j}} \quad (2.67)$$

Buna göre

$$F_{\alpha}(i) = \sum \{f_j^i \varphi_{\alpha}^j \mid j \in J\} \quad (2.68)$$

Şimdi de φ_{α}^j 'yi özvektörler cinsinden ifade eden denkemi bulmaya çalışalım. Bunun için φ_{α}^j 'yi $u_{\alpha j}$ cinsinden veren ifade de $u_{\alpha j}$ 'ler yerine $\varphi_{\alpha}^j \sqrt{f_j}$ 'leri almak yeterli olacaktır.

$$\sum \{V'_{jj'} \varphi_{\alpha}^{j'} \sqrt{f_{j'}} \mid j' \in J\} = \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}^j \sqrt{f_j} \quad (2.69)$$

$$\sum \left\{ V'_{jj'} \frac{\sqrt{f_{j'}}}{\sqrt{f_j}} \varphi_{\alpha}^{j'} \mid j' \in J \right\} = \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}^j \quad (2.70)$$

$$\sum \{\varphi_{\alpha}^{j'} Y'_{j'} \mid j' \in J\} = \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}^j \quad (2.71)$$

Burada

$$Y'_{j'} = V'_{jj'} \frac{\sqrt{f_{j'}}}{\sqrt{f_j}} \quad (2.72)$$

$$= \sum \left\{ f_{ij} \frac{f_{j'}}{f_i f_j} \mid i \in I \right\} \quad (2.73)$$

$$= \sum \{f'_{j'} f'_i \mid i \in I\} \quad (2.75)$$

Şu halde φ_{α}^j , Y matrisinin λ_{α} özdeğerine karşılık gelen özvektörüdür. Y ise elemanları koşullu olasılıklar olan f_j^i ve f_{α}^j matrislerinin çarpımlarından elde edilmiştir. Ayrıca φ_{α}^j normlanmıştır. Yani tüm φ_{α}^j 'lerin ortalamaları 0(sıfır) 'dır ve f_j kütleler sistemi için varyansı 1 'e eşittir.

$$\sum \{f_j (\varphi_{\alpha}^j)^2 \mid j \in J\} = \sum \{u_{\alpha j}^2 \mid j \in J\} = 1 \quad (2.76)$$

Yalnız trivial faktör için bu sonuç geçerli değildir. Çünkü φ_{α}^j sabit ve 1 'e eşittir.

Sonuç:

- 1) f_j^i lerden oluşan $N(I)$ noktalar kümesine ilişkin faktörel eksenler χ^2 metriği anlamında $U_{\alpha j}$ birim vektörleridir:

$$U_{\alpha j} = \sqrt{f_j} u_{\alpha j} = \varphi_{\alpha}^j f_j \quad (2.77)$$

2) i noktasının α eksenindeki koordinatı yani i noktasının faktörü

$$F_{\alpha}(i) = \sum \{\varphi_{\alpha}^j f_j' \mid j \in J\} \quad (2.78)$$

ile verilmiştir.

3) φ_{α}^j yoğunluk fonksiyonunun ortalaması sıfır varyansı 1'e eşittir. Trivial faktör için bu fonksiyon sabit ve 1'e eşittir. Ayrıca bu yoğunluk fonksiyonu özvektörler cinsinden ifade edilen aşağıdaki denklemi sağlamaktadır.

$$\sum \{\varphi_{\alpha}^{j'} Y_{j'}^j \mid j' \in J\} = \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}^j \quad (2.79)$$

Burada $Y_{j'}^j$ matrisinin elemanları, koşullu olasılıkların çarpımı ile hesaplanmaktadır:

$$Y_{j'}^j = \sum \{f_{j'}^i f_i^j \mid i \in I\} \quad (2.80)$$

2.9 $N(J)$ Nokta Kümesinin İncelenmesi

Problemin $N(J)$ kümesine ilişkin çözümü, şimdiye kadar I kümesinin oynadığı rolü J kümesi ve J kümesinin oynadığı rolü I kümesi oynayacaktır. Ancak bir sürprizle karşılaştıruz. Çünkü problemi $N(I)$ kümesi için çözerken $N(J)$ kümesi için çözmüş olduk. Dolayısıyla hesaplamalar daha önce yapılmıştır.

Gerçekten tıpkı yukarıda $Y_{j'}^j$ matrisinde olduğu gibi $X_{i'}^i$ matrisinin φ_{α}^i özvektörlerini bulmamız gerekecektir. O halde

$$X_{i'}^i = \sum \{f_{i'}^{j'} f_{j'}^i \mid j' \in J\} \quad (2.81)$$

φ_{α}^i özvektör cinsinden ifade edilmiş bulunan şu denklemi sağlamaktadır.

$$\sum \{\varphi_{\alpha}^{i'} X_{i'}^i \mid i' \in I\} = \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}^i \quad (2.82)$$

Şimdi bunun için

$$\varphi_{\alpha}^i = \frac{F_{\alpha}(i)}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} \quad (2.83)$$

alalım. $F_\alpha(i)$ 'ler $N(I)$ kümesi için bulunan α faktörünün değerleridir. $\sqrt{\lambda_\alpha}$ ile bölmemizin nedeni φ_α^i 'lerin varyansı 1 yapmak içindir.

F_α nin $\sqrt{\lambda_\alpha}$ ile bölünmesiyle elde edilen $\{F_\alpha(i) | i \in I\}$ ve dolayısıyla φ_α^i nin X matrisinin özvektörleri olduğunu göstermek için φ_α^j 'nin özvektör olduğunu ifade eden denklemi gözönüne almak yeterlidir.

$$\sum \{F_\alpha(i')X_{i'}^i | i' \in I\} \quad ((2.78) \text{ deki } F_\alpha(i) \text{ ifadesini alalım}) \quad (2.84)$$

$$= \sum \left\{ \sum \{\varphi_\alpha^j f_j^{i'} | j \in J\} X_{i'}^i | i' \in I \right\} \quad (2.85)$$

$$= \sum \{\varphi_\alpha^j f_j^{i'} f_{i'}^{j'} f_{j'}^i | j \in J, j' \in J, i' \in I\} \quad (2.86)$$

$$= \sum \left\{ \sum \{\varphi_\alpha^j f_j^{i'} f_{i'}^{j'} | j \in J, i' \in I\} f_{j'}^i | j' \in J \right\} \quad (2.81) \text{ den } X_{i'}^i \text{ yerine ifadesini alalım.} \quad (2.87)$$

$$= \sum \{\lambda_\alpha \varphi_\alpha^j f_{j'}^i | j' \in J\} \quad (2.88)$$

$$= \lambda_\alpha F_\alpha(i) \quad (2.89)$$

α faktörlerinin J kümesi üzerindeki değerleri olan $G_\alpha(j)$ koordinatlarına gelince elimizde mevcut. Çünkü $N(I)$ kümesi için yaptığımız gibi

$$G_\alpha(j) = \sum \{\varphi_\alpha^i f_i^j | i \in I\} \quad (2.90)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum \{F_\alpha(i) f_i^j | i \in I\} \quad ((2.83) \text{ deki } \varphi_\alpha^i = \frac{F_\alpha(i)}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \text{ yerine koyalım}) \quad (2.91)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum \{\varphi_\alpha^{j'} f_{j'}^i f_i^j | j' \in J, i \in I\} \quad ((2.78) \text{ deki gözönüne alınarak}) \quad (2.92)$$

$$= \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \varphi_\alpha^j = \sqrt{\lambda_\alpha} \varphi_\alpha^j \quad (2.93)$$

Bunlar $N(I)$ kümesinin faktörel deklemleridir.

Özet:

- 1) Faktörel eksenlerle $N(I)$ ve $N(J)$ kümelerinin faktörleri arasında bir simetri mevcuttur.

f_i^j lerin $N(J)$ kümesine ilişkin faktörel eksenleri χ^2 uzaklığı anlamında birim vektörlerdir.

$$U_{ai} = \{U_{ai}\}; \quad U_{ai} = \varphi_{\alpha}^i f_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} F_{\alpha}(i) f_i \quad (2.94)$$

2) j noktasının α eksenindeki koordinatı yani faktörü

$$G_{\alpha}(j) = \sum \{\varphi_{\alpha}^i f_i^j \mid i \in I\} = \sqrt{\lambda_{\alpha}} \varphi_{\alpha}^j \quad (2.95)$$

Burada X matrisinin elemanları şu koşullu olasılıklar yardımı ile hesaplanır.

$$X_{ij} = \sum \{f_i^j f_j^i \mid j \in J\} \quad (2.96)$$

2.10 Faktörler ve Özellikleri

1) φ_{α}^j (ya da φ_{α}^i) fonksiyonlarının özellikleri

a) Ortalaması sıfırdır.

$$\sum \{\sqrt{f_j} u_{aj} \mid j \in J\} = 0 \quad (2.97)$$

Çünkü V' 'nün özvektörleri ve özellikle 1 özdeğerine karşılık gelen özvektör aralarında ortogonaldir. Buradan

$$\sum \{f_j \varphi_{\alpha}^j \mid j \in J\} = 0 \quad (2.98)$$

Aynı şekilde

$$\sum \{f_i \varphi_{\alpha}^i \mid i \in I\} = 0 \quad (2.99)$$

b) Varyansı 1 'e eşittir.

$$\sum \{u_{aj}^2 \mid j \in J\} = 1 \quad (2.100)$$

buradan

$$\sum \{f_j (\varphi_{\alpha}^j)^2 \mid j \in J\} = 1 \quad (2.101)$$

aynı şekilde

$$\sum \{f_i (\varphi_\alpha^i)^2 \mid i \in I\} = 1 \quad (2.102)$$

c) φ_α^j (aynı şekilde φ_α^i) fonksiyonları ikişer ikişer aralarında ilişkisizdir. Yani korelasyonları sıfırdır. δ kronecker sembolünü gösterebilirsin. Yani

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.103)$$

buna göre

$$\sum \{u_{\alpha j} u_{\beta j} \mid j \in J\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.104)$$

dır. Buradan

$$\sum \{f_j \varphi_\alpha^j \varphi_\beta^j \mid j \in J\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.105)$$

aynı şekilde

$$\sum \{f_i \varphi_\alpha^i \varphi_\beta^i \mid i \in I\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.106)$$

yazılabilir.

Bu fonksiyonlara sağladıkları özelliklerden dolayı **standart faktör** adı verilir.

2) F_α, G_α Faktörlerinin Özellikleri

$$F_\alpha(i) = \sqrt{\lambda_\alpha} \varphi_\alpha^i \quad (2.107)$$

$$G_\alpha(j) = \sqrt{\lambda_\alpha} \varphi_\alpha^j \quad (\text{geçiş formülü}) \quad (2.108)$$

Buradan F, G, φ faktörlerinin ortalama ve varyansları arasında bir bağıntı elde edilebilir.

Gerçekten $\varphi_\alpha^i, \varphi_\alpha^j, F_\alpha$ ve G_α 'ların ortalaması sıfır varyansları λ_α olduğundan

$$\sum \{f_i F_\alpha(i) \mid i \in I\} = 0 \quad (2.109)$$

$$\sum \{f_j G_\alpha(j) \mid j \in J\} = 0 \quad (2.110)$$

$$\sum \{f_i (F_\alpha(i))^2 \mid i \in I\} = \lambda_\alpha \quad (2.111)$$

$$\sum \{f_j (G_\alpha(j))^2 \mid j \in J\} = \lambda_\alpha \quad (2.112)$$

Varyansları λ_α olan F_α , G_α fonksiyonlarına sadece faktör adı verilir. Halbuki varyansı 1 'e eşit olan φ_α 'lara ise **standart faktörler** adı verilir. F_α ve G_α 'lar $N(I)$ ve $N(J)$ nokta kümelerinin koordinatlarıdır.

2.11 Verilerin Yeniden Kuruluş Formülü

Bu formül aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$f_{.j}' = f_{.j} + \sum \{F_\alpha(i)U_{.j} | \alpha \in A\} \quad (2.113)$$

veya

$$f_{ij} = f_i f_j \left(1 + \sum \{F_\alpha(i)\varphi_\alpha' | \alpha \in A\} \right) \quad (2.114)$$

$\forall(i, j)$ çifti için geçerli olan bu formül yukarıdaki formüller gözönüne alınarak

$$f_{ij} = f_i f_j \left(1 + \sum \{ \sqrt{\lambda_\alpha} \varphi_\alpha' \varphi_\alpha' | \alpha \in A \} \right) \quad ((2.107) \text{ 'ten dolayı}) \quad (2.115)$$

$$= f_i f_j \left(1 + \sum \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} F_\alpha(i) G_\alpha(j) | \alpha \in A \right\} \right) \quad (2.116)$$

Bu formülde ilk faktörler gözönüne alınarak tablonun f_{ij} elemanları faktörel cinsinden yaklaşık olarak hesaplanabilir.

2.12 Faktörlerin Sayısı

φ_α' (veya φ_α') ler R' (veya R') uzayında ikişer ikişer korelasyonsuz 0 (sıfır) ortalamalı bir fonksiyonlar sistemi oluşturur. Şu halde $\alpha \in A$ olsun.

$$|A| \leq |I| - 1; \quad |A| \leq |J| - 1 \quad (2.117)$$

Dolayısıyla

$$|A| \leq \min(|I|, |J|) - 1 \quad (2.118)$$

2.13 Geçiş Formülü

2.9 ve 2.10 'da verilen formülleri yeniden gözönüne alalım.

$$F_{\alpha}(i) = \sum \{\varphi_{\alpha}^j f_j^i \mid j \in J\} \quad (2.119)$$

$$G_{\alpha}(j) = \sum \{\varphi_{\alpha}^i f_i^j \mid i \in I\} \quad (2.120)$$

φ_{α} 'ları F_{α} ve G_{α} 'ların cinsinden ifade ederek bu formülleri

$$F_{\alpha}(i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} \sum \{f_j^i G_{\alpha}(j) \mid j \in J\} \quad (2.121)$$

$$G_{\alpha}(j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} \sum \{f_i^j F_{\alpha}(i) \mid i \in I\} \quad (2.122)$$

şeklinde yazılabilir.

Koşullu olasılıklar yardımıyla bir kümenin faktörlerinden diğer kümenin faktörlerine geçişi sağlayan bu formüle geçiş formülü ya da merkezci formül adı verilir.

Nedenini şöyle açıklayabiliriz. $F_{\alpha}(i)$ faktörü j üzerinde seçilen f_j^i kütle sistemine göre G_{α} fonksiyonunun ortalamasıdır $1/\sqrt{\lambda_{\alpha}}$ eşit olan katsayısı farkı ile ortalamasıdır.

Sonuç olarak faktöriyel bir eksen üzerindeki i noktası kütleleri f_{ij} 'ler olan j noktalarının $1/\sqrt{\lambda_{\alpha}}$ oranında ağırlık merkezine göre homotetigidir.

2.14 Özdeğerlerin Özellikleri

Üzerine f_{IJ} olasılık yasası tanımlanmış olan $I \times J$ kümesi gözönüne alalım. Yine bundan başka $I \times J$ kümesi üzerindeki aşağıdaki tarzda φ_{α}^I ve φ_{α}^J kümelerini gözönüne alalım:

$$I \times J \rightarrow R; \quad (i, j) \rightarrow \varphi_{\alpha}^I(i, j) = \varphi_{\alpha}^i$$

$$I \times J \rightarrow R; \quad (i, j) \rightarrow \varphi_{\alpha}^J(i, j) = \varphi_{\alpha}^j$$

$r = \text{corr}(\varphi_{\alpha}^I, \varphi_{\alpha}^J)$ korelasyon katsayısını hesaplayalım.

$$r = \frac{\text{cov}(\varphi_{\alpha}^I, \varphi_{\alpha}^J)}{\sqrt{\text{var}(\varphi_{\alpha}^I) \text{var}(\varphi_{\alpha}^J)}} \quad (2.123)$$

$$= \text{cov}(\varphi_{\alpha}^I, \varphi_{\alpha}^J) \quad (2.124)$$

Çünkü φ'_α ve φ''_α fonksiyonlarının varyansı 1 'dir. Ayrıca

$$\text{cov}(\varphi'_\alpha, \varphi''_\alpha) = \sum \{f_{ij}(\varphi'_\alpha - E(\varphi'_\alpha))(\varphi''_\alpha - E(\varphi''_\alpha)) \mid i \in I, j \in J\} \quad (2.125)$$

Halbuki φ'_α ve φ''_α fonsiyonlarının ortalaması 0 (sıfır) 'dır. Buradan

$$\text{cov}(\varphi'_\alpha, \varphi''_\alpha) = \sum \{f_{ij} \varphi'_\alpha \varphi''_\alpha \mid i \in I, j \in J\} \quad (2.126)$$

$$= \sum \{\varphi''_\alpha f_j \sum \{f'_i \varphi'_\alpha \mid i \in I\} j \in J\} \quad (2.127)$$

geçiş formülü uygulayarak

$$\text{cov}(\varphi'_\alpha, \varphi''_\alpha) = \sqrt{\lambda_\alpha} \sum \{f_j (\varphi''_\alpha)^2 \mid j \in J\} \quad (2.128)$$

$$\text{corr}(\varphi'_\alpha, \varphi''_\alpha) = \sqrt{\lambda_\alpha} \quad (2.129)$$

Bu da gösteriyor ki özdeğerler 0 ve 1 arasında değişen değerler alır. Karşılaştırma Analizinde λ_α nın maksimum yapılması istendiğinde fonksiyon $I \times J$ üzerinde f_{ij} olasılıkları tanımlanmış bulunan korelasyonları en yüksek $(\varphi'_\alpha, \varphi''_\alpha)$ fonksiyon çiftinin aranmasına getirilmiş olur.

2.15 Atalet Kavramı

Şimdiye kadar yaptığımız hesaplamalarda ağırlıklar verdiğimiz nokta kavramına yani istatistiksel yorumunu gözönüne aldık. Örneğin ağırlıkları f_i olan $f'_i (i \in I)$ noktalarının oluşturduğu $N(I)$ kümesi ya da ağırlıkları f_j olan $f'_j (j \in J)$ noktalarının oluşturduğu $N(J)$ kümesi. Gerçekten V matrisi $N(I)$ kümesinin eksenlere göre alınan ataletlerin oluşturduğu matristir. Daha önce tanıdığımız Δ doğrusu gösterilebilir ki kümenin ataletini minimum yapan doğrudur. V 'nin ilk q özdeğeri ile oluşturulan altuzay kümesinin ataletini minimum yapan q boyutlu altuzaydır.

Bundan önce gördük ki

$$\lambda_\alpha = \sum \{f_i F_\alpha(i)^2 \mid i \in I\} \quad (2.130)$$

Bu ifade için varyans tanımında yaptığımız yoruma ilaveten yeni bir yorum verebiliriz.

Bu $u_{\alpha J}$ eksenini doğrultusundaki $N(I)$ kümesinin atalet momentidir.

Aynı şeyi $N(J)$ kümesi için de yazabiliriz.

Şu halde nokta kümelerinin toplam ataleti

$$\sum \{\lambda_{\alpha} \mid \alpha \in A\} \quad (2.131)$$

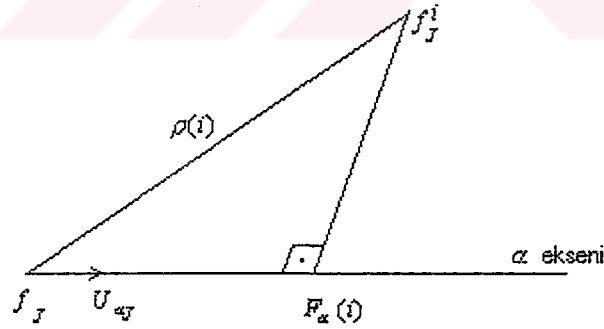
Bu sonuç $N(I)$ ve $N(J)$ nokta kümeleri için aynıdır. Çünkü bu iki nokta kümesi için aynı özdeğerler elde edilir. α nıncı atalet momentine karşılık gelen atalet oranı (yüzdesi)

$$\tau_{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha}}{\sum \{\lambda_{\alpha} \mid \alpha \in A\}} \quad (2.132)$$

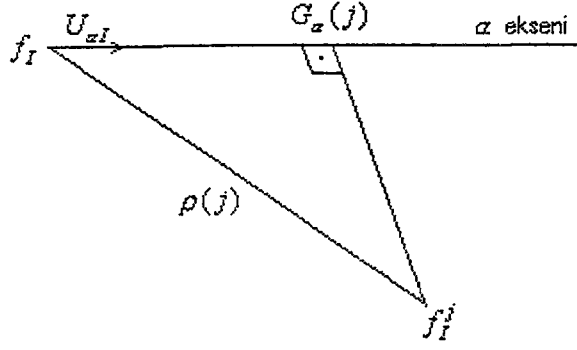
Bu sonucu şöyle yorumlayabiliriz. (F_{α}, G_{α}) çifti toplam ataletten yani atalet matrisinin izinden τ_{α} 'ya eşit bir pay almaktadır.

2.16 Katılma Payı

Katılma payını aşağıdaki vereceğimiz formüllerle tanımlayacağız. Önce şu iki şekli gözönüne alalım. Katılma paylarının hesabı iz ya da toplam ataletin bileşenlerine bağlı olarak bulunur.



Şekil 2.2a Bireylerin katılım payları: Bir eksene göre bir i noktasının yeri, katılım payı hesapları ile ifade edilir.



Şekil 2.2b Değişkenlerin katılım payları: $i \in I$ için $j \in J$ için de yapılır.

O halde

$$iz = \sum \{\lambda_\alpha \alpha \in A\} \quad (2.133)$$

$$= \sum \{f_i \rho(i)^2 \mid i \in I\} = \sum \{f_i F_\alpha(i)^2 \mid i \in I, \alpha \in A\} \quad (2.134)$$

$$= \sum \{f_j \rho(j)^2 \mid j \in J\} = \sum \{f_j G_\alpha(j)^2 \mid j \in J, \alpha \in A\} \quad (2.135)$$

Buradan

$$\rho(i)^2 = \sum \{F_\alpha(i)^2 \mid i \in I\} \quad (2.136)$$

$$\rho(j)^2 = \sum \{G_\alpha(j)^2 \mid j \in J\} \quad (2.137)$$

Böylece $F_\alpha(i)^2 = \alpha$ nıncı faktörün i nin elemana katılma payı olarak tanımlanır. (Yani $\rho(i)^2$ veya f_i^i nin f_i den farkına eşit alınır.)

$\frac{F_\alpha(i)^2}{\rho(j)^2} = \alpha$ faktörünün i ye katılma payı olur. Benzer şekilde J kümesi içinde benzer tanımlamalar yapılabilir.

$G_\alpha(j)^2 = \alpha$ faktörünün j 'ye olan mutlak katılma payı burada α faktörünün katılma payı yerine α ekseninin katılma payı da denebilir.

Bundan başka

$f_i F_\alpha(i)^2 = i$ 'nin α faktörüne olan mutlak katılma payı (yani λ_α da $f_i F_\alpha(i)^2$ özdeğerine olan katılma payı burada λ_α toplamına eşittir).

$\frac{f_i F_\alpha(i)^2}{\lambda_\alpha}$, i bireyinin α faktörüne göre (α eksenine göre) görelî katılma payıdır.

2.17 α Faktörünün i 'ye Olan Katılma Payı

Görelî katılma payı $\cos^2$ ile ifade edilebilir. Çünkü

$$\cos(U_{\alpha i}, f_i' - f_j) = \frac{F_\alpha(i)}{\rho(i)} \quad (2.138)$$

Görelî katılma sayısında korelasyon katsayısından başka bir şey değildir.

$$\begin{aligned} \text{corr}(G_\alpha, f_i') &= \frac{\text{cov}(G_\alpha, f_i')}{\sqrt{\text{var } G_\alpha, \text{var } f_i'}} \\ \text{cov}(G_\alpha, f_i') &= \sum \left\{ f_j \left(G_\alpha(j) - \underbrace{E(G_\alpha)}_0 \right) (f_i' - E(f_i')) \mid j \in J \right\} \end{aligned} \quad (2.138)$$

$$= \sum \{ f_j G_\alpha(j) f_i' \mid j \in J \} - \underbrace{E\{ f_i' \sum \{ f_j G_\alpha(j) \mid j \in J \} \}}_0 \quad (2.139)$$

Halbuki

$$f_i' = \frac{f_{ij}}{f_j}; \quad G_\alpha(j) = \sqrt{\lambda_\alpha} \varphi_\alpha^j \quad (2.140)$$

Buradan

$$\text{cov}(G_\alpha, f_i') = f_i \sqrt{\lambda_\alpha} \sum \{ f_j' \varphi_\alpha^j \mid j \in J \} \quad (2.141)$$

$$= f_i \sqrt{\lambda_\alpha} F_\alpha(i) \quad (2.142)$$

$$\text{var}(G_\alpha) = \sum \left\{ f_j \left(G_\alpha(j) - \underbrace{E(G_\alpha)}_0 \right)^2 \mid j \in J \right\} \quad (2.143)$$

$$= \sum \{ f_j G_\alpha(j)^2 \mid j \in J \} \quad (2.144)$$

$$= \lambda_{\alpha} \quad (2.144)$$

$$\text{var } f_i^J = \sum \left\{ f_j (f_i^J - E(f_i^J))^2 \mid j \in J \right\} \quad (2.145)$$

Halbuki

$$E(f_i^J) = \sum \left\{ f_j f_i^J \mid j \in J \right\} = f_i \quad (2.146)$$

$$\text{var } f_i^J = \sum \left\{ f_j (f_i^J - f_i)^2 \mid j \in J \right\} \quad (2.147)$$

$$= f_i^2 \sum \left\{ f_j \left(\frac{f_i^J}{f_i} - 1 \right)^2 \mid j \in J \right\} \quad (2.148)$$

$$= f_i^2 \sum \left\{ \frac{1}{f_j} (f_i^J - f_j)^2 \mid j \in J \right\} \quad (2.149)$$

$$= f_i^2 \rho(i)^2 \quad (2.150)$$

Buradan sonuç olarak

$$\text{corr}^2(G_{\alpha}, F_i^J) = \frac{f_i^2 \lambda_{\alpha} F_{\alpha}(i)^2}{f_i^2 \lambda_{\alpha} \rho(i)^2} = \frac{F_{\alpha}(i)^2}{\rho(i)^2} \quad (2.151)$$

elde edilir.

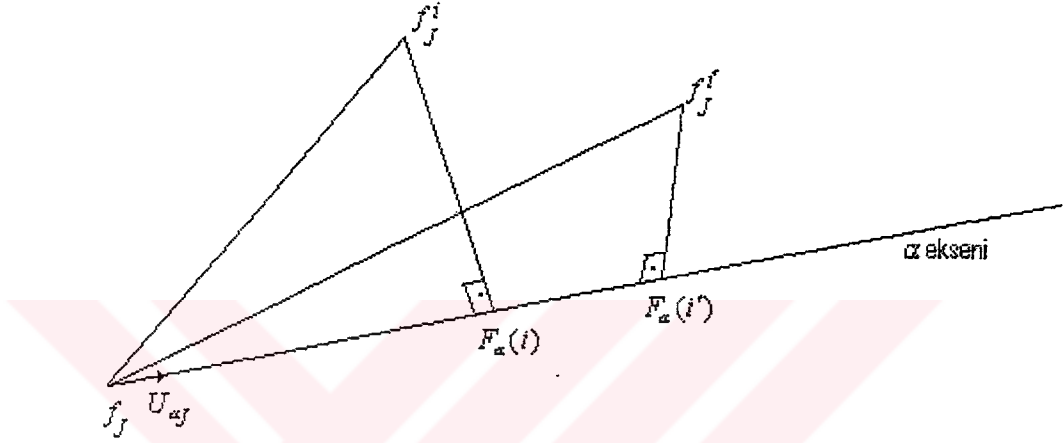
2.18 Grafikte Gösterim

Daha öncede söylediğimiz gibi $[\min(|I|, |J|) - 1]$ sayıda faktör çıkarılabilir. α nıncı faktörün çıkardığı atalet $(\alpha - 1)$ incinin faktörünkünden daha az ama $(\alpha + 1)$ inciden daha çoktur. Her iki kümenin elemanlarını herhangi iki faktöriyel eksenlerin oluşturduğu düzlem üzerine izdüştürebiliriz. Örneğin 1-2, 1-3, 2-3 düzlemleri gibi seçeceğimiz düzlem içerdiği atalet payına bağlı olarak seçilecektir. 1-2 düzleminin verdiği atalet oranı $(\tau_{1,2} = \tau_1 + \tau_2)$ dir. Bazen ilk 3 eksenin verdiği birikimli oran toplam ataletin yüzde %75 ini geçer. İki kümenin elemanlarını bu eksenlerin oluşturduğu düzlem üzerine izdüşerek gerçeğe daha yaklaşmış oluruz. Birey sayısı eleman sayısı büyük olduğu hallerde ilk faktörün tanımladığı ve ilk 3 faktör toplam ataletin %20 sinden düşük olabilir. Ancak diğer faktörler toplam ataletin %20 sinden az olursa %20 lik atalet geri kalan %80 lik atalet yanında daha anlamlı olur. İzdüşüm

işleminde sonra her iki kümenin elemanlarının yer aldığı bir grafik elde ederiz. Geriye bu grafiği yorumlamak kalıyor.

2.19 Grafik Gösteriminin Yorumu

Daha önce gördük ki görelî katılma payı bir korelasyon katsayısının karesi yani $\cos^2$ 'ye eşittir. Bu katsayı noktaların eksen üzerinde uygun olup olmadığının bir göstergesidir. Aşağıdaki şekli gözönüne alalım.



Şekil 2.3 Uzaklıkların yanılgısı: Bir eksen üzerinde iki nokta arasındaki uzaklık bizi hataya götürebilir.

Açıkça görülüyor ki f_J^i ile $f_J^{i'}$ noktaları arasında α eksenî üzerindeki izdüşümleri birbirine çok yakındır. Ancak bu yakınlık gerçeği yansıtmamaktadır. α ekseninin f_J^i ve $f_J^{i'}$ noktalarına olan görelî katılma payları sırasıyla $\cos^2(U_{\alpha}, f_J, f_J^i)$ ve $\cos^2(U_{\alpha}, f_J, f_J^{i'})$ 'dir. Açıktır ki birincisi daha zayıf ikincisi ise açı küçük olduğu için 1 'e yakındır. Şu halde faktörlerin noktalara olan görelî katılma payları bu noktaların izdüşümelerini gerçeğe uygun olup olmadığı hususunda bir fikir verir. Noktaların bir eksene olan mutlak katılma payları da hangi noktaların eksenî oluşturduğunun bir göstergesi olur. Çoğu zaman tüm bu faktörler eksenlere bir anlam vermemize yardımcı olurlar. Gerçekten örneğin 'ucuz' ve 'pahalı' noktaları bir eksenin iki uç bölgesinde yer almışsa bu eksen hiç şüphesiz fiyat eksenî olur. Diğer taraftan noktalar arasındaki uzaklıkları da yorumlayabiliriz (bu noktalar uygun yerlerde görülüyorsa başka bir deyişle görelî katılma payları doğru ise o zaman daha gerçekçi bir yorum yapılabilir). Bu yorumlar iki grupta toplanabilir (iki halde verilebilirler).

- 1) I kümesinin ya da J kümesinin herhangi iki noktası arasındaki uzaklık bu demektir ki J

kümesinin elemanlarına göre profilleri birbirine yakındır.

- 2) I kümesinin noktaları ile J kümesinin noktaları arasındaki (uzaklıklar karşılık gelmeyi) karşılıklı olmayı yani bağlanmayı ifade eder.



3. ÇOKLU KARŞILAŞTIRMA ANALİZİ

3.1 Çoklu Karşılaştırma Analizine Giriş

Karşılaştırma analizi genelde iki küme arasında tanımlanır. Ancak bu karşılaştırma 2 den daha çok sayıdaki kümeler arasında da tanımlanabilir. Bu halde Çoklu Karşılaştırma Analizi söz konusu olur. Bu yöntemle ilgili çalışmalar ilk defa Burt (1949) tarafından gerçekleştirilmiştir. Buna ilişkin değişik türden çalışmalar Benzecri (1976b) , özellikle Carroll ve Chang (1970) tarafından yapılmıştır.

3.2 Tanım ve Notasyonlar

Anket araştırmalarında genellikle sorulara verilen yanıtlar disjonktif biçimindeki yanıtlardır. Yani yanıtlar bir takım kategorilerden oluşur ve bu kategoriler'den sadece biri seçilir.

Aynı bir soruya verilen yanıt k kategoriden oluşur.

Örneğin “yaşınız ?” sorusuna verilecek yanıt için şu 8 kategori önerilebilir. Yanıtlayacak bireyin yaşı bu kategorilerden sadece birine uyacaktır:

- a) ≤ 25 , b) $[25 - 29]$, c) $[30 - 34]$, d) $[35 - 39]$, e) $[40 - 44]$, f) $[45 - 49]$, g) ≥ 50
h) yanıtızsız ya da kimse yok.

Yine “ sigara içiyor musunuz?” yanıtı için ise iki kategori düşünülür.

- a) evet , b) hayır

Disjonktif biçimdeki sorulan sorulardan elde edilen veriler ankete tabi tutulan bireyleri iki gruba ayırır. Bu iki gruba çaprazlayarak elde edilen karşılaştırma tablosunun analizi Q gruba genelleştirilebilir. ($Q > 2$)

Burada söz konusu olan kukla (dummy) değişkenlerdir. Bunlar 0 ve 1 ile kodlanmış iki değerli değişkenlerdir. En basit örnek cinsiyet (Erkek, Kadın) gibi dikotomi değişkendir. Politomi (Polytomy) değişkenler 3 ya da daha fazla kategorisi olan değişkenlerdir. Örneğin meslek gruplarını gözönüne alalım. Bunu 5 kategoriye ayıralım:

	Kukla değişken			
Kategori	1	2	3	4
Mühendis	1	0	0	0
Doktor	0	1	0	0
Öğretmen	0	0	1	0
Serbest	0	0	0	1
Diğerleri	0	0	0	0

Bir kişi mühendis isel nolu kukla değişkeni 1 olarak, 2, 3 ve 4 nolular hep 0 ile kodlanmıştır.

Genelde k -kategorili polytomy bir değişken $k-1$ kukla değişkeni ile temsil edilebilir. Son kategori $k-1$ kukla değişken üzerinde aldığı değerler hep 0 (sıfır) olarak alınmıştır.

3.3 Notasyonlar

Soru kümesini $\mathcal{Q}$ ile göstereceğiz. q sorusuna J_q kategoriye karşılık gelen yanıtlar kümesi karışıklık çıkmazsa bir küme ile bu kümedeki eleman sayısını aynı bir harf ile göstereceğiz.

Böylece $\mathcal{Q}$ soru kümesinin kategorilerine verdiği yanıtlar kümesinin sayısı J olacaktır :

$$J = \cup \{J_q \mid q \in \mathcal{Q}\} \text{ ve } J = \sum \{J_q \mid q \in \mathcal{Q}\} \quad (3.1)$$

$\mathcal{Q}$ anket sorularına yanıt veren bireyler kümesi I ile gösterilir. Bu kümenin eleman sayısı ise n 'dir.

J_q lerin çarpım kümesi

$$H = \pi \{J_q \mid q \in \mathcal{Q}\} \quad (3.2)$$

ile gösterilir. Bu kümenin elemanları q kategori dizisinde oluşur. Bu kategoriler farklı bir sorunun kategorileri olarak alınır. Şu halde H 'nin elemanları ankete sokulan bireylerin yanıtlarını ifade eder.

H 'nin her elemanı $\mathcal{Q}$ sorularını çaprazlayarak elde edilen frekans (bağlanma) hiper

tablosundaki bir hücreye karşılık gelir. Bu hiper tablo genellikle boş kalacaktır. Örneğin $n = 1000$ kişiye her biri 10 kategorili olan 12 soru sorulmuş olarak H 'deki eleman sayısı 10^{12} olur. Böylece milyarda bir her hücre boş olmayacaktır.

n satır, J sütundan oluşan tabloyu Z ile gösterelim. Bu tablo ikili bir kodlama ile n bireyin yanıtlarından oluşur.

Z tablosu Q sayıdaki alt tabloların bitleştirilmesiyle oluşur:

$$Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_q, \dots, Z_Q] \quad (3.3)$$

3.4 Z_q Alt Tablosu

n satır, J_q sütundan oluşan Z_q alt tablosunun i ninci satırı $J_q - 1$ defa 0 (sıfır) değerini ve bir defa 1 değerini içerir. Öyleki bu 1 değeri içeren sütun i ninci bireyin seçtiği q sorusunun kategorisine karşılık gelir. Başka bir deyişle Z_q tablosu q sorusuna yanıt veren n bireyin bir parçalanışını ifade eder.

Bundan başka n satır ve q sütundan oluşan bir R tablosu gözönüne alırsak. Bu tablo Z 'nin yoğunlaştırılmış kodlu tablosudur. (i, q) hücresi i ninci bireyin seçtiği q sorusunu kategorisi r_{iq} (rank =sıra) numarasını içerir. Açıkça $r_{iq} \leq J_q$ dir.

Çizelge 3.1 Z tablosu

$$J_1 = 4$$

$$J_2 = 3$$

$$J_3 = 5$$

$$Z =$$

	Z_1	Z_2	Z_3
i			
	0 1 0 0	1 0 0	0 0 0 0 1
n			

Çizelge 3.2 R tablosu

$R =$	2	1
i		5

3.5 Z 'ye İlişkin BURT Tablosu

$[Z_1, Z_2, \dots, Z_q]$ tablosunu gözönüne alalım.

$$B = Z'Z$$

kare matrisine Z yanıtlar tablosuna ilişkin BURT frekanslar tablosu adı verilir.

B tablosu Q^2 blok'tan meydana gelir. q nüncü kare blok olan $Z'_q Z_q$, (J_q, J_q) basamaktan bir köşegen matrisdir. Gerçekten aynı bir sorunun iki kategorisi aynı anda seçilemez.

(q, q') indislerine karşılık gelen $(J_q, J_{q'})$ basamaktaki blok, q ve q' sorularına verilen yanıtların çaprazlanmasıyla elde edilmiştir.

B nin köşegen elemanları ile aynı olan (J, J) basamaktan köşegen matrisi D 'de göstereceğiz. Bu köşegen elemanlar kategorilerden her birine karşılık gelen sayılardır.

D ye Q^2 blok'tan oluşmuş bir matris olarak da bakabiliriz. Sadece köşegen üzerindeki Q blok boş matrisler değildir; q nüncü köşegen blok olan $D_q = Z'_q Z_q$ köşegen matrisinin köşegen terimleri q sorusunun değişik kategorilerindeki eleman sayılarıdır.

3.6 İki Soru Hali (İkili Karşılaştırma)

Z yanıtlar kümesi $Z = [Z_1 | Z_2]$ şeklinde yazılır.

Teorem 3.1 (n, J) basamaktan Z tablosunun karşılaştırma analizi (J, J) basamaktan B tablosunun karşılaştırma analizine denktir. (kategoriler arasındaki bağlantıların gösterilimi açısından)

İspat. Z ve B 'nin normu 1 olan faktörlerinin, aynı olduğunu gösterelim.

Z den elde edilen α nıncı faktör Φ_α şu denklemi sağlar:

$$\frac{1}{Q} D^{-1} Z' Z \Phi_\alpha = \lambda_\alpha \Phi_\alpha \quad (3.4)$$

Gerçekten bu bağıntının (denklemin) sol tarafında yer alan matris

$$D_p^{-1} F' D_n^{-1} F \quad (3.5)$$

yazılabilir. Burada

$$F = \frac{1}{nQ} Z \quad (3.6)$$

$$D_p = \frac{1}{nQ} D \quad (3.7)$$

$$D_n = \frac{1}{n} I_n \quad (I_n, (n \times n) \text{ basamaklı birim matrisi}) \quad (3.8)$$

(3.4) bağıntısını şu formülden çıkarırız.

$$D_p^{-1} F' D_n^{-1} F \Phi_\alpha = \lambda_\alpha \Phi_\alpha \quad (3.9)$$

simetrik olan $B = Z'Z$ matrisini gözönüne alalım. Yanal elemanları, gerek satır gerek sütun olsun, QD matrisinin köşegen elemanlarıdır

B nin analizi için

$$F = \frac{1}{nQ^2} B \quad (3.10)$$

$$D_p = D_n = \frac{1}{nQ} D \quad (3.11)$$

yazabiliriz. Şu halde köşegenleştirilecek matris

$$\frac{1}{Q^2} D^{-1} B' D^{-1} B \quad (3.12)$$

yazılabilir. (3.4) 'ün her iki tarafı $\frac{1}{Q} D^{-1} B$ ile çarpılacak olursa

$$\frac{1}{Q^2} D^{-1} B D^{-1} B \Phi_{\alpha} = \lambda_{\alpha}^2 \Phi_{\alpha} \quad (3.13)$$

elde edilir. O halde her iki analizden elde edilen faktörler aynıdır.

$$\Phi_{\alpha} = \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha} \\ \psi_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$



4. KARŞILAŞTIRMA ANALİZİ UYGULANABİLEN TABLOLAR

4.1 Bağlanma (Frekans) Tabloları

Bu tablolar istatistikte çok önemli olan tablolardır. Bu tablolar iki nitel değişkenin çaprazlanması ile elde edilirler.

Örneğin 1998 yılında “ İstanbul ‘ un ‘bölgelele ” ile bu bölgelerdeki “ yaş grupları ” ndan oluşturulan tablo gibi.

Çizelge 4.1 Fiktif anket tablosu

	0-4		5-9		10-14		15-19		20-24		...
	E	K	E	K	E	K	E	K	E	K	...
Kadıköy	303	290	340	340	325	355	348	396	...	...	...
Sarıyer	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Cinsiyete göre toplam	17772	2136	2104	2147	2147	935	1935	1481	...	...	...
Tüm toplam	1699		2025		2070		1851		...		...

Bu bağlanma tablosunun en önemli özelliği; satır ya da sütunların toplamının bir anlamı vardır. Örneğin bir bölgedeki toplam insan sayısı , bir yaş grubuna giren insan sayısı vs...

Bağlanma tabloları özellikle Karşılaştırma Analizin de çok sık uygulandığı tablolardır.

Bir toplulukta çok değişik tabiatla olan değişkenler üzerinde yapılan ölçümler bağlanma tabloları değildir. Örneğin bölgeler üzerinde gözlemlenen insan sayısı , bölgelerin alanı, toplam geliri, cep telefonu sayısı gibi ölçümler bir bağlanma tablosu oluşturmaz. Çünkü aynı bir bölge üzerindeki ölçümler toplamı anlamını yitirir.

Böyle bir tabloya, ilk adımda ana bileşenli faktör analizi uygulanması daha doğru olur. Ancak böyle bir tabloyu lojik tabloya dönüştürmek suretiyle çoklu karşılaştırma analizi uygulamak

mümkün olur.

Bunlardan başka işaret tabloları, lojik tabloları , uzaklık tabloları ve ilişki katsayılarından oluşturulan tabloları da vardır.

4.2 Lojik Tablolar

i ile indislediğimiz n bireyden oluşan bir topluluk gözönüne alalım. Her birey nitel m sayıda J_k karakterine göre sınıflandırılmış olsun. Yine J_k karakterinin S_k seçeneği olsun ve her birey her bir karakterin bir ve yalnız bir seçeneğine cevap vermiş olsun. Bu sınıflandırmanın sonuçları 0 ve 1 'lerden oluşan $n \times K$ lojik tablosu belirler. ($K = \sum S_k$)

Örneğin:

Çizelge 4.2 Lojik tablo

Karakterler	J_1	J_2	J_3	J_4
Seçenekler	1 2 3	1 2 3 4	1 2 3	1 2
1	0 1 0	1 0 0 0	1 0 0	0 1
2	1 0 0	0 0 1 0	0 1 0	1 0
3	0 0 1	0 1 0 0	1 0 0	1 0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1 0 0	0 0 0 1	0 0 1	0 1
	$S_1 = 3$	$S_2 = 4$	$S_3 = 3$	$S_4 = 2$

$$K=12 \quad m=4$$

Bu lojik tabloyu frekanslar tablosuna şu şekilde dönüştürmek mümkündür.

$$f_{ij} = \frac{k_{ij}}{m \times n} \quad (k_{ij} = 0 \text{ veya } 1; j = 1, \dots, K) \quad (4.1)$$

$$f_i = \frac{1}{n} \quad (4.2)$$

$$f_j = \frac{k_{ij}}{m \times n} \quad (4.3)$$

Böyle bir tabloya karşılaştırma analizi uygulamak büyük bir cesaret ister. Çünkü lojik bir tablo ile bir bağlanma tablosunu ele alış tarzımız Lojik tablonun satır ve sütun toplamaları bir anlam taşısalar bile çok farklıdır.

Önceleri sırf empirik nedenlerle lojik tablolara karşılaştırma analizi uygulanmış ve çok ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçların lojik nedenleri araştırılmak istendi, bunların çoklu karşılaştırma analizi yönteminin temelini oluşturduğu anlaşıldı. Bu yöntem daha sonra veri analizinin en verimli araştırmalarına olanak verdi.

Disjontive bir tablonun oluşumunu elde etmek için Ek 1 'de gösterilen bir veri tablosu kullandık. Bu tablo Birleşmiş Milletler 'de 49 ülkenin önerilen 3 yasa hakkındaki

fikirleri oylanmıştır. Herbir yasa için 4 seçenek önerilmiştir.

Kabul, red, çekimser, fikir yok. Böyle bir tablonun oluşturulmasında bir program kodladık ve ilk veriye ilişkin Ek 1 'de ikinci veri tablosu elde ettik. Dikkat edilirse bu tabloda her yasa için ve her ülke için sadece bir tane 1, geri kalan 0 (sıfır) rakamları yer almaktadır.

Böylece çok geniş bir tablo elde edilmiş ediliyor.

4.3 BURT Tabloları

Bu tip tablolar çok sayıdaki bağlantı tablolarının yan yana getirilmesi ile oluşturulan büyük boyuttaki tablolardır.

n kişiye uygulanan bir anket gözönüne alalım $J_1, J_2, \dots, J_m$ gibi m karakter içine de her bir bireye o kişiye uygun olan seçenek seçilmiş olsun her bir bireye her karakterin bir ve yalnız bir seçeneğini seçer.

Bu tip anketlere sık rastlanır. Buradan her (J_r, J_s) karakter çiftine göre oluşturulan $\frac{m(m-1)}{2}$ sayıdaki frekans tabloları elde edilir. Doğal olarak tüm (J_r, J_s) çiftlerinin çaprazlanması ile elde edilen tablolar içinde en çok bilgi taşıyan (J_r, J_s) çiftleri gözönüne alınır. Bunları belirlemek için tek bir tablo oluşturulur. Simetrik ve kare olan bu tablo her bir karakterin tüm seçenekleri ile çaprazlanarak elde edilen bu tablo (J, J) 'de gösterelim.

(J_r, J_r) tipindeki tablolar köşegen tablolarıdır. Çünkü her birey J_r karakterinin bir ve yalnız bir seçeneğini seçebilir.

(J_r, J_s) ile (J_s, J_r) tabloları simetrik tablolar olup aynıdır.

J_r nin j_r seçeneği ile J_s nin j_s seçeneğini oluşturduğu hücredeki birey sayısını $k_{j_r j_s}$ ile gösterelim. Bu hücrenin frekansı :

$$f_{j_r j_s} = \frac{k_{j_r j_s}}{n} \quad (4.4)$$

dir.

Büyük tablo içinde (j_r, j_s) hücrenin frekansı da

$$\phi_{j_r j_s} = \frac{k_{j_r j_s}}{m^2 n} = \frac{1}{m^2} f_{j_r j_s} \quad (4.5)$$

Örnek olarak J_1, J_2 ve J_3 gibi üç karakter gözönüne alalım. Her birisinin seçenek sayı q_{k_1}, q_{k_2} ve q_{k_3} olsun. Buradan oluşturulan Burt tablosu şöyledir:

Çizelge 4.3 Burt Tablosu

	J_1	J_2	J_3
J_1	0	(J_1, J_2)	(J_1, J_3)
J_2	(J_2, J_1)	0	(J_2, J_3)
J_3	(J_3, J_1)	(J_3, J_2)	0

Köşegen üzerinde her bir J_r karakterinin kendisi ile çaprazlanmasıyla elde edilen tablolar bulunur. Köşegen üzerindeki terimler J_r in j_r seçeneğini seçen birey sayısı, yani k_{j_r} (J_r, J_s) ile (J_s, J_r) çapraz tabloları simetrik ve eşittir. Bu tabloların genel terimi $k_{j_r j_s}$

olup J_r 'nin j_r seçeneği ile, J_s 'nin j_s seçeneğini aynı anda seçen birey sayısıdır.

Yukarıda elde edilen disjonktif tablolardan Burt tablosu oluşturmak için yine başka bir program kodlamamız gerekti.

Ek 2 'de ilk tablo Burt tablosu olarak oluştu. İkinci tablo ise buna dayanarak elde edilen disjontive tablodur.

4.4 Çoklu Karşılaştırma Analizi

Çoklu karşılaştırma analizi, temelde karşılaştırma analizinin lojik tablolara uygulanmasıdır. Çoklu karşılaştırma denmesinin nedeni şudur: normal karşılaştırma analizi verilen bir toplulukta gözlenen I ve J gibi iki karakter arasındaki ilişkiyi incelerken, çoklu karşılaştırma analizi herhangi sayıdaki $J_1, J_2, \dots, J_m$ karakterleri arasındaki ilişkiyi inceler. $m = 2$ halinde çoklu karşılaştırma analizinin ,normal karşılaştırma analizi ile aynı olduğu gösterilebilir. Yine gösterilebilir ki herhangi bir m değeri için çoklu karşılaştırma analizi $J_1, J_2, \dots, J_m$ lerin çaprazlanması ile elde edilen BURT tablosu uygulanan normal karşılaştırma analizi aynıdır.

5. BİR TABLONUN ANALİZ VE YORUMLARI

Analizi uygulayacağımız tablo 1983-1998 yılları arasında Türkiye'nin ihraç ettiği malların oluşturduğu dörtgen tabloya karşılaştırma analizi uyguladık.

Sonuçları Ek 3 'te verilmiştir. İlk satırda çalışmanın başlığı yer alıyor. İkinci satırda ise programdaki bazı parametre değerleri verilmektedir. Üçüncü ve daha sonraki satırlarda ise ihraç mallarının ingilizce adları yani değişkenler yer almaktadır. Daha sonra okunacak verilerin formatı geliyor. Ve bunun akabinde veri tablosu yer almaktadır.

Ek 3 'ün ikinci sayfasında özdeğerlerin histogramı gösterilmiştir. İlk özdeğerin % 45,8 olması birinci (ilk) eksenin bilginin % 45,8 'ini tek başına taşıdığını gösterir. İkinci ekseninde bilginin % 23,7 'sini verebildiği anlaşılmaktadır. Dolayısıyla iki eksenin birlikte oluşturduğu düzlem verilerin sakladığı bilginin % 69,5 gibi çok büyük bir kısmını ifade ettiği anlaşılmaktadır.

O halde birey ve değişkenlerin sadece ilk iki düzlemde gösterilmesi veri tablosunun yapısı hakkında bilgi edinmek için yeterli olacaktır. Ek 3 'ün üçüncü sayfasında ise bireylerin kalitesi yani ağırlıkları ve ataletleri verilmektedir.

Bundan başka her bireyin eksenler üzerindeki koordinatları eksenler ile olan korelasyonları ve katılım payları ifade edilmiştir.

Bunu takip eden tabloda ise aynı bilgiler, değişkenler için de yer almaktadır.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmadan çıkan sonuçları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- 1) Karşılaştırma Analizi yöntemi değişik bir matematiksel yorum ile ifade edilmiştir.
- 2) Karşılaştırma Analizinin uygulanabildiği tablolar tanıtılmış ve bu tabloların oluşturulmasına ilişkin program kodu düzenlenmiştir.
- 3) Burt tablosu ile ilk veri tablosunun eşdeğerliği bir teorem ile ifade edilmiş ve ispat edilmiştir (Teorem 3.1).
- 4) İlk bölümde matematiksel ifadesi verilen karşılaştırma analizi, bir veri tablosuna uygulanmış ve elde edilen sonuçlar Beşinci Bölümde yorumlanmıştır.

6.1 Öneriler

Bu çalışmanın devamında disjonktif tabloların da, Burt ve ilk veri tablosu ile karşılaştırma analizi sonuçları bakımından eşdeğerliği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Anderson, T. W., (1958), An Introduction To Multivariate Statistical Analysis , New York: Wiley.
- Bener, A., (1981), "Edute par l' analyse dek correspondances des interactions dan un tableau ternaire. Aplication a des Données Linguistiques", Thése, Université Pierre et Marie Curie 1.
- Bener, A., (1982) Les Cahiers de l'Analyse des Données Vol VII-1982-n 1-p. 25-32.
- Benzecri, J. P., (1976a) , Analyse Des Données Correspondances , Dunod, 2.
- Benzecri, J. P., (1976b), "Sur l' Analyse des tableaux binaires associés à une Correspondance Multiple", Université Pierre et Marie Curie, Chaier de l'Analyse de Données, , II, 1.
- Burt, C., (1949), "Alternative Methods of Factor Analysis and Their Relations to Pearson's Methods of Principal Axes", Br. J. Psychol.Statist. 2, 98-121.
- Burt, C.,(1969) , "The Factorial Analysis of Qualitative Data ",British Journal of Statistical Psychology", 3, 3,166-185.
- Caroll, J. D. ve Chang, J. J., (1970), "Analyse of Individual Differences in Multidimensional Scaling via in N-Way Generalisation of Eckart-Young Decomposion", Psychometrika, 35, 3.
- D. İ. E., (2001), Tarımsal Göstergeler (1923-1983) , D. İ. E., Ankara, Ocak.
- Hotelling, H., (1933), "Analysis of a Complex of Statistical Variables in to Principal Components", J. Educ. Psychol., 24, 417-441, 498-520.
- Kendall, M.G., (1975), A Course in Multivariate Analysis , Griffin, London.
- Kshirsagar, A. M., (1972), Multivariate Analysis , Marcel Dekker, Inc. , New York.
- Morrison, D. F., (1967), Multivariate Statistical Methds , McGraw-Hill Book Co. , New York.

EKLER

- Ek 1 Disjontive Tablo Programı
Ek 2 Burt Programı
Ek 3 1983-98 Yılları Arasında Türkiye İhracatının Ekonomik Analizleri



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 11.11.1972

Doğum yeri Antakya

Lise 1987-1991 İskenderun Lisesi

Lisans 1992-1998 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2000-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Müh. Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

2000-Devam ediyor YTÜ Fen-Edebiyat Fak. İstatistik Bölümü
Araştırma Görevlisi



VERİ TABLOSU

USA	3	3	1
CANA	3	2	1
CUBA	1	4	3
HAIT	4	1	1
DOMI	1	1	1
JAMA	3	1	1
TRIN	3	1	1
BARB	4	1	2
MEXI	3	1	1
GUAT	3	1	1
HOND	3	2	1
ELSA	3	2	1
NICA	3	2	1
COST	3	1	1
PANA	3	1	1
COLU	4	2	1
VE NE	3	1	1
PERU	3	1	1
BRAZ	3	2	1
BOLI	4	1	1
PARA	3	2	1
CHIL	3	1	1
ARGE	3	1	1
URUG	3	1	1
U.K.	3	3	1
NETH	3	3	1
BELG	3	3	1
LUXE	3	3	1
FRAN	3	2	3
SPAI	3	2	1
PORT	4	3	2
POLA	1	1	3
AUST	3	2	2
HUNG	1	1	3
CZEC	1	1	3
ITAL	3	2	1
ALBA	1	4	3
YUGO	1	1	3
GREE	3	1	1
BULG	1	1	3
ROMA	1	1	3
RUSI	1	1	3
UKRA	1	1	3
FINL	2	2	3
SWED	3	2	3
NORW	3	2	3
DENM	3	2	3

DISJONCTIVE VERİ TABLOSU

	KAB1	RED1	CEK1	YOK1	KAB2	RED2	CEK2	YOK2	KAB3	RED3	CEK3	YOK3
USA	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
CANA	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
CUBA	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
HAIT	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
DOMI	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
JAMA	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
TRIN	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
BARB	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
MEXI	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0

GUAT	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
HOND	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
ELSA	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
NICA	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
COST	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
PANA	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
COLU	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
VENE	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
PERU	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
BRAZ	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
BOLI	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
PARA	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
CHIL	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
ARGE	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
URUG	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
U.K.	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
NETH	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
BELG	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
LUXE	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
FRAN	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
SPAI	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
PORT	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
POLA	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
AUST	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
HUNG	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
CZEC	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
ITAL	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
ALBA	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
YUGO	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
GREE	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
BULG	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
ROMA	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
RUST	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
UKRA	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
FINL	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
SWED	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
NORW	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
DENM	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0

BURT TABLOSUNUN OLUSTURULMASI

PARAMETRELER : NI NJ IDATA IBURT IDISK IPIJ IPJJ
 47 12 5 1 1 1 1

VERI FORMATI : (A4,1X,12I1)

DEGISKENLER : KAB1 RED1 CEK1 YOK1 KAB2 RED2 CEK2 YOK2 KAB3 RED3 CEK3 YOK3

BURT TABLOSU

	KAB1	RED1	CEK1	YOK1	KAB2	RED2	CEK2	YOK2	KAB3	RED3	CEK3	YOK3
KAB1	11	0	0	0	9	0	0	2	1	0	10	0
RED1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
CEK1	0	0	30	0	12	13	5	0	25	1	4	0
YOK1	0	0	0	5	3	1	1	0	3	2	0	0
KAB2	9	0	12	3	24	0	0	0	15	1	9	0
RED2	0	1	13	1	0	15	0	0	9	1	5	0
CEK2	0	0	5	1	0	0	6	0	5	1	0	0
YOK2	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0
KAB3	1	0	25	3	15	9	5	0	29	0	0	0
RED3	0	0	1	2	1	1	1	0	0	3	0	0
CEK3	10	1	4	0	9	5	0	2	0	0	15	0
YOK3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

VERI TABLOSU

	KAB1	RED1	CEK1	YOK1	KAB2	RED2	CEK2	YOK2	KAB3	RED3	CEK3	YOK3
USA	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
CANA	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
CUBA	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
HAIT	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
DOMI	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
JAMA	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
TRIN	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
BARB	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
MEXI	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
GUAT	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
HOND	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
ELSA	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
NICA	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
COST	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
PANA	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
COLU	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
VENE	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
PERU	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
BRAZ	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
BOLI	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
PARA	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
CHIL	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
ARGE	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
URUG	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
U.K.	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
NETH	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
BELG	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
LUXE	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
FRAN	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
SPAI	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
PORT	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

POLA	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AUST	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
HUNG	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
CZEC	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
ITAL	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
ALBA	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
YUGO	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
GREE	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
BULG	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
ROMA	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
RUSI	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
UKRA	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
FINL	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
SWED	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
NORW	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
DENM	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0



1983-98 YILLARI ARASINDA TURKIYE IHRACATININ EKONOMIK ANALIZI

NI NJ NI2 NJ2 NF IDF IFF IPR IEV IFA JFA IGR
16 34 0 0 3 1 2 2 1 1 1 1

WHEA(1) BARL(2) ONIO(3) GARL(4) CHIC(5) BEAN(6) LENT(7) POTA(8)
MAIZ(9) PADD(10) COTT(11) SESA(12) SEED(13) SUNF(14) GRAU(15) TEA (16)
MAND(17) LEMO(18) GRAP(19) ORAN(20) GRAP(21) FIGS(22) ALMO(23) CNUT(24)
HNUT(25) WNUT(26) PIST(27) PINE(28) APPL(29) PEAR(30) QUIN(31) PEAC(32)
APRI(33) PFRU(34)

(A4,1X,15F5.0/(16F5.0))

ADJ !	WHEA	BARL	ONIO	GARL	CHIC	BEAN	LENT	POTA
PJ(J) !	114986.	70230.	19070.	596.	36437.	3167.	38771.	22186. 429178.
1983 !	6099.	5962.	1339.	92.	163.	425.	3710.	367. 25067.
1984 !	2920.	3161.	1095.	92.	1592.	234.	2920.	3160. 21802.
1985 !	2689.	943.	1313.	83.	1891.	248.	1257.	112. 14507.
1986 !	1621.	10.	1645.	31.	2484.	226.	2518.	84. 15103.
1987 !	2966.	172.	1327.	22.	3694.	251.	3528.	445. 25315.
1988 !	1993.	3895.	1640.	89.	5274.	261.	6065.	481. 26880.
1989 !	5395.	1028.	1481.	50.	1793.	385.	1945.	398. 19633.
1990 !	249.	162.	853.	8.	2770.	315.	2419.	224. 15379.
1991 !	23072.	7807.	2018.	28.	3670.	244.	1431.	2196. 47692.
1992 !	38045.	8272.	2051.	56.	2678.	198.	1266.	3740. 62314.
1993 !	6487.	2559.	1128.	27.	2020.	119.	2137.	2441. 24855.
1994 !	9800.	7930.	617.	6.	1025.	80.	2915.	2291. 32564.
1995 !	2328.	6743.	1099.	6.	1238.	65.	1387.	1035. 21610.
1996 !	75.	1423.	17.	4.	1927.	58.	2462.	2407. 15303.
1997 !	154.	5083.	2.	1.	2632.	45.	1271.	2223. 17204.
1998 !	11093.	15080.	1445.	1.	1586.	13.	1540.	582. 43950.

ADJ !	MAIZ	PADD	COTT	SESA	SEED	SUNF	GRAU	TEA
PJ(J) !	2426.	24.	27135.	486.	991.	175.	129.	1519. 429178.
1983 !	6099.	5962.	1339.	92.	163.	425.	3710.	367. 25067.
1984 !	2920.	3161.	1095.	92.	1592.	234.	2920.	3160. 21802.
1985 !	2689.	943.	1313.	83.	1891.	248.	1257.	112. 14507.
1986 !	1621.	10.	1645.	31.	2484.	226.	2518.	84. 15103.
1987 !	2966.	172.	1327.	22.	3694.	251.	3528.	445. 25315.
1988 !	1993.	3895.	1640.	89.	5274.	261.	6065.	481. 26880.
1989 !	5395.	1028.	1481.	50.	1793.	385.	1945.	398. 19633.
1990 !	249.	162.	853.	8.	2770.	315.	2419.	224. 15379.
1991 !	23072.	7807.	2018.	28.	3670.	244.	1431.	2196. 47692.
1992 !	38045.	8272.	2051.	56.	2678.	198.	1266.	3740. 62314.
1993 !	6487.	2559.	1128.	27.	2020.	119.	2137.	2441. 24855.
1994 !	9800.	7930.	617.	6.	1025.	80.	2915.	2291. 32564.
1995 !	2328.	6743.	1099.	6.	1238.	65.	1387.	1035. 21610.
1996 !	75.	1423.	17.	4.	1927.	58.	2462.	2407. 15303.
1997 !	154.	5083.	2.	1.	2632.	45.	1271.	2223. 17204.
1998 !	11093.	15080.	1445.	1.	1586.	13.	1540.	582. 43950.

ADJ !	MAND	LEMO	GRAP	ORAN	GRAP	FIGS	ALMO	CNUT
PJ(J) !	13584.	18189.	4657.	16650.	3432.	578.	85.	896. 429178.
1983 !	6099.	5962.	1339.	92.	163.	425.	3710.	367. 25067.
1984 !	2920.	3161.	1095.	92.	1592.	234.	2920.	3160. 21802.
1985 !	2689.	943.	1313.	83.	1891.	248.	1257.	112. 14507.
1986 !	1621.	10.	1645.	31.	2484.	226.	2518.	84. 15103.
1987 !	2966.	172.	1327.	22.	3694.	251.	3528.	445. 25315.
1988 !	1993.	3895.	1640.	89.	5274.	261.	6065.	481. 26880.

1989 !	5395.	1028.	1481.	50.	1793.	385.	1945.	398.	19633.
1990 !	249.	162.	853.	8.	2770.	315.	2419.	224.	15379.
1991 !	23072.	7807.	2018.	28.	3670.	244.	1431.	2196.	47692.
1992 !	38045.	8272.	2051.	56.	2678.	198.	1266.	3740.	62314.
1993 !	6487.	2559.	1128.	27.	2020.	119.	2137.	2441.	24855.
1994 !	9800.	7930.	617.	6.	1025.	80.	2915.	2291.	32564.
1995 !	2328.	6743.	1099.	6.	1238.	65.	1387.	1035.	21610.
1996 !	75.	1423.	17.	4.	1927.	58.	2462.	2407.	15303.
1997 !	154.	5083.	2.	1.	2632.	45.	1271.	2223.	17204.
1998 !	11093.	15080.	1445.	1.	1586.	13.	1540.	582.	43950.

ADJ !	HNUT	WNUT	PIST	PINE	APPL	PEAR	QUIN	PEAC
PJ(J) !	19771.	141.	169.	76.	9458.	570.	429.	938. 429178.
1983 !	6099.	5962.	1339.	92.	163.	425.	3710.	367. 25067.
1984 !	2920.	3161.	1095.	92.	1592.	234.	2920.	3160. 21902.
1985 !	2689.	943.	1313.	83.	1891.	248.	1257.	112. 14507.
1986 !	1621.	10.	1645.	31.	2484.	226.	2518.	84. 15103.
1987 !	2966.	172.	1327.	22.	3694.	251.	3528.	445. 25315.
1988 !	1993.	3895.	1640.	99.	5274.	261.	6065.	481. 26880.
1989 !	5395.	1028.	1481.	50.	1793.	385.	1945.	398. 19633.
1990 !	249.	162.	853.	8.	2770.	315.	2419.	224. 15379.
1991 !	23072.	7807.	2018.	28.	3670.	244.	1431.	2196. 47692.
1992 !	38045.	8272.	2051.	56.	2678.	198.	1266.	3740. 62314.
1993 !	6487.	2559.	1128.	27.	2020.	119.	2137.	2441. 24855.
1994 !	9800.	7930.	617.	6.	1025.	80.	2915.	2291. 32564.
1995 !	2328.	6743.	1099.	6.	1238.	65.	1387.	1035. 21610.
1996 !	75.	1423.	17.	4.	1927.	58.	2462.	2407. 15303.
1997 !	154.	5083.	2.	1.	2632.	45.	1271.	2223. 17204.
1998 !	11093.	15080.	1445.	1.	1586.	13.	1540.	582. 43950.

ADJ !	APRI	PFRU
PJ(J) !	254.	973. 429178.
1983 !	6099.	5962. 25067.
1984 !	2920.	3161. 21902.
1985 !	2689.	943. 14507.
1986 !	1621.	10. 15103.
1987 !	2966.	172. 25315.
1988 !	1993.	3895. 26880.
1989 !	5395.	1028. 19633.
1990 !	249.	162. 15379.
1991 !	23072.	7807. 47692.
1992 !	38045.	8272. 62314.
1993 !	6487.	2559. 24855.
1994 !	9800.	7930. 32564.
1995 !	2328.	6743. 21610.
1996 !	75.	1423. 15303.
1997 !	154.	5083. 17204.
1998 !	11093.	15080. 43950.

1 OZDEGERLER OZD(1)=0.99999970

!NUM	!ADIM	! OZDEGERLER	! YUZDE	!BIRIKIMLI!*!OZDEGERLER HISTOGRAMI
! 1 !	0 !	0.24188556 !	45.812 !	45.812 !*!*****!*****!*****
! 2 !	1 !	0.12507899 !	23.689 !	69.501 !*!*****!***
! 3 !	1 !	0.05815960 !	11.015 !	80.516 !*!*****
! 4 !	1 !	0.02943055 !	5.574 !	86.090 !*!***
! 5 !	2 !	0.02292090 !	4.341 !	90.432 !*!***
! 6 !	1 !	0.01580689 !	2.994 !	93.425 !*!*
! 7 !	2 !	0.01257986 !	2.383 !	95.808 !*!*
! 8 !	2 !	0.00931550 !	1.764 !	97.572 !*!*
! 9 !	1 !	0.00508393 !	0.963 !	98.535 !*!

! 10 !	2 !	0.00414565 !	0.785 !	99.320 !*
! 11 !	1 !	0.00163769 !	0.310 !	99.630 !*
! 12 !	2 !	0.00108734 !	0.206 !	99.836 !*
! 13 !	1 !	0.00041201 !	0.078 !	99.914 !*
! 14 !	3 !	0.00023361 !	0.044 !	99.959 !*
! 15 !	2 !	0.00021880 !	0.041 !	100.000 !*
! 16 !	0 !	0.00000002 !	0.000 !	100.000 !*
! 17 !	1 !	0.00000001 !	0.000 !	100.000 !*
! 18 !	0 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 19 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 20 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 21 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 22 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 23 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 24 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 25 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 26 !	4 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 27 !	3 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 28 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 29 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 30 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 31 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 32 !	2 !	0.00000000 !	0.000 !	100.000 !*
! 33 !	1 !	-0.00000001 !	0.000 !	100.000 !*

! I1 !	KALI	AGIR	ATL!	1#F	KOR	KAT!	2#F	KOR	KAT!	3#F	KOR	KAT!
1!1983!	104	58	26!	-15	1	0!	-36	6	0!	-152	97	11!
2!1984!	519	51	30!	-253	204	3!	-95	29	2!	300	286	37!
3!1985!	773	34	23!	-418	477	6!	268	196	10!	-191	100	13!
4!1986!	881	35	47!	-707	711	18!	323	149	15!	-120	21	4!
5!1987!	848	59	155!	-839	508	41!	601	260	28!	-333	80	52!
6!1988!	546	63	64!	-539	539	18!	-59	6	1!	-18	1	0!
7!1989!	441	46	17!	-178	164	1!	219	247	9!	-76	30	2!
8!1990!	732	36	62!	-815	727	24!	0	0	0!	65	5	1!
9!1991!	943	111	60!	465	753	24!	232	187	25!	29	3	1!
10!1992!	991	145	181!	718	782	75!	358	194	77!	101	15	12!
11!1993!	411	58	18!	-60	23	0!	68	29	1!	241	359	27!
12!1994!	523	76	30!	249	296	5!	-191	174	11!	105	53	7!
13!1995!	678	50	35!	-55	8	0!	-497	670	51!	12	0	0!
14!1996!	833	36	57!	-557	368	11!	-369	161	20!	507	304	73!
15!1997!	811	40	56!	-268	97	3!	-613	506	62!	393	208	49!
16!1998!	958	102	137!	346	169	12!	-583	480	144!	-468	309	179!
!	!	429178.	1000!			242!			517!		465!	

! J1 !	KALI	AGIR	ATL!	1#F	KOR	KAT!	2#F	KOR	KAT!	3#F	KOR	KAT!
1!WHEA!	996	268	260!	635	785	108!	329	211	120!	-6	0	0!
2!BARL!	901	164	123!	296	222	14!	-504	641	172!	-123	38	20!
3!ONIO!	516	44	22!	-218	178	2!	226	192	9!	-197	146	14!
4!GARL!	194	1	3!	-384	124	0!	288	70	0!	-18	0	0!
5!CHIC!	653	85	67!	-503	609	21!	104	26	4!	87	18	5!
6!BEAN!	516	7	10!	-501	363	2!	315	144	3!	-79	9	0!
7!LENT!	725	90	76!	-563	718	29!	2	0	0!	56	7	2!
8!POTA!	777	52	68!	49	4	0!	-186	50	7!	708	723	207!
9!MAIZ!	78	6	18!	-24	0	0!	-218	28	1!	292	50	4!
10!PADD!	354	0	0!	-248	102	0!	-209	73	0!	328	179	0!
11!COTT!	858	63	157!	-823	516	43!	579	256	88!	-336	86	57!
12!SESA!	463	1	4!	-791	308	1!	430	91	1!	-360	64	1!
13!SEED!	598	2	4!	-223	58	0!	-610	433	4!	302	107	2!
14!SUNE!	583	0	1!	31	1	0!	-644	412	1!	414	170	1!
15!GRAU!	213	0	1!	-635	213	0!	-26	0	0!	21	0	0!
16!TEA !	130	4	15!	-356	56	0!	-266	31	1!	312	43	3!
17!MAND!	615	32	18!	-293	292	3!	-250	212	8!	181	111	8!

18!LEMO!	674	42	12!	-282	540	3!	-71	34	1!	122	100	5!
19!GRAP!	762	11	8!	-313	237	1!	-371	333	6!	282	192	7!
20!ORAN!	799	39	79!	3	0	0!	-697	451	78!	-612	348	116!
21!GRAP!	716	8	5!	-258	201	1!	-411	508	6!	48	7	0!
22!FIGS!	817	1	1!	-260	219	0!	-311	314	1!	296	284	1!
23!ALMO!	376	0	0!	-551	295	0!	-38	1	0!	287	80	0!
24!CNUT!	822	2	1!	-400	512	0!	-233	173	0!	207	137	1!
25!HNUT!	737	46	20!	-352	555	6!	-153	105	4!	131	77	6!
26!WNUT!	492	0	1!	-622	342	0!	383	130	0!	-152	20	0!
27!PIST!	625	0	1!	-895	444	0!	430	103	0!	-375	78	0!
28!PINE!	358	0	0!	-349	312	0!	-134	46	0!	-12	0	0!
29!APPL!	603	22	18!	-495	567	5!	87	18	1!	87	18	1!
30!PEAR!	170	1	1!	-272	158	0!	-21	1	0!	71	11	0!
31!QUIN!	567	1	1!	-261	153	0!	-364	296	1!	229	118	0!
32!PEAC!	548	2	3!	-520	412	1!	-112	19	0!	277	117	1!
33!APRI!	669	1	1!	-601	488	0!	137	25	0!	-340	156	1!
34!PFER!	585	2	1!	-394	474	0!	191	111	0!	-9	0	0!
-----*												
!	!	429178.	1000!		242!		517!			465!		
-----*												

PROGRAM : J-P.BENZECRI, A.TABET, A.BENER

1983-98 YILLARI ARASINDA TURKIYE IHRACATININ EKONOMIK ANALIZI

YATAY (1)-- DIKEY (2)

GENISLIK = 1.61317 YUKSEKLIK = 1.29760 -NOKTA SAYISI = 50

ST

-19901986

GRAU

1988

1996CHIC1985TEA 1984

19971989

19931983

SUNF

ORAN

19941998

1991

WHEA1992

1 0