

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

**GENEL DENG E KURAMI**

113733

113733

Matematik Mühendisi Kaan İrfan ÖĞÜT

**SBE İktisat Anabilim Dalı İktisat Programında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı**

**: Prof. Dr. Ercan EREN**

**T.C. YÜKSEK LİSANS  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**İSTANBUL, 2002**

## İÇİNDEKİLER

|                                                                             | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖNSÖZ                                                                       | i     |
| ÖZET                                                                        | iii   |
| ABSTRACT                                                                    | iv    |
| 1. GİRİŞ                                                                    | 1     |
| 2. GENEL DENGİ KURAMI                                                       | 3     |
| 2.1 Genel Denge Kuramının Tarihçesi                                         | 3     |
| 2.2 Rekabetçi Bir Ekonomide Genel Denge                                     | 16    |
| 2.2.1 Tüketici Kümesi ve Mübadele Ekonomisi                                 | 16    |
| 2.2.2. Üretim Kümesi                                                        | 28    |
| 2.2.3 Walras Kanunu ve Aşırı Talep Fonksiyonu                               | 32    |
| 2.2.4. Aşırı Talep Fonksiyonu ile Genel Denge                               | 35    |
| 2.2.5. Genel Denge Refah Ekonomisi ve Pareto Etkinliği                      | 42    |
| 2.3 Genel Dengenin Varlığı                                                  | 50    |
| 2.3.1. Topolojinin Genel Dengedeki Yeri: Dengenin Varlığı                   | 50    |
| 2.3.2. Sabit Nokta Teoremi ve Genel Denge                                   | 51    |
| 2.3.2.1. Sabit Nokta Teoremi İçin Matematiksel Altyapı                      | 51    |
| 2.3.2.2. Sabit Nokta Teoremleri                                             | 59    |
| 2.3.2.3 Oyun Teorisinde Sabit Nokta Teoremi ve Nash Dengesi                 | 63    |
| 2.4 Denge Analizi                                                           | 67    |
| 2.4.1 Genel Dengenin Tekliği                                                | 67    |
| 2.4.2 Genel Dengenin Kararlılığı                                            | 68    |
| 2.4.2.1 Durağan Kararlılık                                                  | 70    |
| 2.4.2.2 Dinamik Kararlılık                                                  | 74    |
| 2.4.2.2.1 Tümel (Global) Kararlılık                                         | 75    |
| 2.4.2.2.2 Yakınsal Kararlılık                                               | 80    |
| 2.5 Modelin Gelişmesi                                                       | 86    |
| 2.5.1 Paranın Modele Dahil Edilmesi                                         | 86    |
| 2.5.2 Artan Getiriler ve Monopolcü Rekabet                                  | 91    |
| 2.5.3 Kamu Malları ve Dışsallıkların Modele Dahil Edilmesi                  | 104   |
| 3. ZAMAN VE BELİRSİZLİK ALTINDA GENEL DENGİ                                 | 111   |
| 3.1 Belirsizlik Kavramının İktisadi ve Genel Denge Modeline Girişi          | 111   |
| 3.2 Dönemler Arası Denge                                                    | 120   |
| 3.2.1 Dönemler Arası Optimizasyon                                           | 122   |
| 3.2.2 Finans Ekonomilerinin Özellikleri                                     | 125   |
| 3.2.3. Arrow-Debreu Koşula Bağlı Piyasalarda Genel Denge                    | 127   |
| 3.2.4 Finansal Piyasalarda Denge                                            | 134   |
| 3.2.5 Arbitraj ve Denge                                                     | 138   |
| 3.2.6 Finansal Piyasalarda Diferensiyel Topoloji Tekniklerinin Kullanılması | 144   |
| 3.3 Ardışık Ekonomiler ve Aktif Piyasalarında Genel Denge                   | 149   |
| 3.3.1 Arrow Menkul Değer (Teminat) Piyasaları                               | 153   |

|           |                                                  |     |
|-----------|--------------------------------------------------|-----|
| 3.3.2     | Sermaye Varlıkları Fiyatlandırma Modeli ve Denge | 156 |
| 3.3.3     | Arbitraj Fiyatlandırma Teorisi ve Denge          | 160 |
| 3.4       | Eksik Piyasalarda Genel Denge                    | 164 |
| 3.5       | Belirsizliğin İçsel Olma Durumu                  | 176 |
| 4.        | SONUÇ                                            | 188 |
| KAYNAKLAR |                                                  | 190 |
| ÖZGEÇMİŞ  |                                                  | 198 |



## ÖNSÖZ

Genel Denge Kuramı üzerine bir yüksek lisans çalışması, disiplin dışından gelen bir matematik mühendisi olmam nedeniyle benim açımdan, pek çok yönden ilgi çekici oldu.

Öncelikle, modelin varsayımlara dayanan aksiyomatik yapısıyla ve kullandığı topolojik uzaylara dayanan matematiksel teknikleri ile matematiğe benzerliği yabancılık çekmememi sağladı. Öte yandan literatür üzerine yaptığım okumalar, Genel Denge Kuramı'nın bir anlamda günümüzün hakim iktisat okulu, neoklasik iktisadın temel dayanaklarından birini oluşturması nedeniyle, neoklasik iktisadı daha yakından tanımama da yardımcı oldu.

Matematik mühendisliği eğitimim sırasında matematiğin, akışlanlar dinamiğinden, kuantum fizikine genelde fizik biliminin kullandığı mükemmel bir alet kutusu olduğunu, iç tutarlılığı tam ve modellelemelere imkan veren aksiyomatik yapısıyla mükemmel bir problem çözücü olduğunu görmüş, ancak doğa bilimleri tarihi ve bilim felsefesine olan ilgim nedeniyle yaptığım okumalar sonucunda matematiğin bir bilim olmadığı sonucuna varmıştım. Neoklasik iktisadın, genel denge modelinin matematiğe benzeyen aksiyomatik yapısı üzerinden ulaştığı bilimsellik mertebesini bu yüzden eleştirel bir gözle değerlendiriyorum. Disiplin dışından yetişmiş olmanın bir avantajını da kullanarak genel denge modelinin sosyal disiplinlerdeki kimi ideolojik nitelikli yargıların bilimsel olarak sunulmasının bir örneği olarak değerlendiriyorum. Yine bu çalışmanın önemli bir bölümünü oluşturan zaman ve belirsizlik kavramlarının genel olarak iktisatta ve Genel Denge Kuramı'ndaki yerini incelerken de önce doğa bilimlerinde Newton fiziğinden, görelilik teorisi, kuantum fiziği ve kaos teorisine yaşanan gelişmeler, bunların bilim felsefecileri aracılığıyla pozitivizmden, eleştirel akılcılığa bilimsel yöntemle etkilerine ve buradan da iktisat özelinde sosyal disiplinleri nasıl etkildeğine kabaca değinmeye çalıştım.

Çalışmada yer yer istatistik ve ekonometri kavramlarına, dinamik optimizasyon tekniklerine, oyun teorisine değinmem gerektiğinde, iki disiplin arasındaki ilişki benim için ilgi çekici oldu.

Tez danışmanım Prof Dr. Ercan Eren'e çalışma boyunca verdiği akademik desteğin ve her adımda işimi kolaylaştırıcı yardımları yanında, yaptığımız konuşmalarla bir yanıyla iktisat disiplinini daha yakından tanımama yardım ettiği için ve belki de daha önemlisi bir akademisyenin dünyaya bakışının nasıl olması gerektiği ile ilgili ipuçları verdiği için çok

teşekkür ediyorum. Sayın Eren'in genç bir akademisyen adayı için ufuk açıcı yaklaşımı sayesinde bu çalışma benim için pek çok yönden öğretici bir süreç oldu.

Tez konumun seçiminde düşüncelerine başvurduğum ve gerek genel denge literatürü gerekse neoklasik iktisat üzerine derin bilgisi ve çalışmalarıyla ve bunun yanında kaynak desteğiyle bana yardımcı olan Prof Dr. Necip Çakır'a ve çalışma boyunca katkıda bulunan Dr. Murat Donduran'a teşekkür ediyorum.

Her zaman verdiği, manevi desteğin de ötesinde, bu çalışmanın pek çok aşamasında bana büyük yardımda bulunan eşim, Ayşegül Atacan Öğüt'e de teşekkür ediyorum.



## GENEL DENGİ KURAMI

Kaan İrfan ÖĞÜT  
İktisat, Yüksek Lisans Tezi

Walras tarafından ortaya atılan ve Arrow ve Debreu tarafından geliştirilerek bugünkü formuna kavuşturulan Genel Denge Kuramı, Pareto optimum kavramıyla birlikte 20. yüzyıl hakim iktisat görüşü olan neoklasik iktisadın temelini, bir anlamda sert çekirdeğini oluşturmaktadır. 20. yüzyıl iktisadının sosyal seçimden, makro ekonomiye her alanında, bir genel dengeye ulaşma düşüncesi hakim rol oynamış, geçerli paradigma olarak görülmüştür.

İktisat disiplininin, kökenleri Adam Smith'e kadar götürülebilecek olan matematik kullanarak fizik bilimine benzeme, bir anlamda bilimselleşme çabaları içinde, topolojik uzaylara dayanan matematik tekniklerini kullanarak, üst düzey bir soyutlamaya ulaşan genel denge teorisi önemli bir rol oynamaktadır. Genel Denge Kuramı, 20. yüzyıl matematiğinin önemli gelişmelerinden biri olan ve denge durumları üzerine yoğunlaşan oyun teorisi ile de yakından ilişkilidir.

Bir tam rekabet piyasasında dengenin varlığının ispatlanması ve bu dengenin Pareto optimum olduğunun matematiksel olarak gösterilmesi modelin en önemli boyutudur. Ulaşılan dengenin tekliği ve kararlı oluşu da üzerinde durulan noktalardandır.

Başlangıçta oldukça kısıtlayıcı varsayımlara dayanarak ve sadece bir tam rekabet piyasası için formalize edilen genel denge teorisi zamanla, Pareto optimuma engel olarak görülen eksik piyasalar, kamu malları ve dışsallıklar ile yine başlangıçta modele dahil olmayan para kavramının da dahil edilmesiyle gerçek dünyaya biraz daha yaklaşmaktadır.

İktisat dünyasının önemli tartışma konuları olan zaman ve belirsizlik kavramları, Debreu (1959) ile birlikte Genel Denge Kuramı'nda da yerlerini almışlardır. Ancak genel denge çerçevesinde belirsizlik kavramı, belirsizlik-risk farklılığı gözetilmeden gelecekteki olası durumların gerçekleşme beklentileri ile sınırlı kalmıştır. Diğer durumlarda olduğu gibi zaman ve belirsizliğin dahil olduğu genel denge analizlerinde de rasyonel beklentiler, arbitraj olmaması gibi varsayımlara dayanılarak genel dengenin varlığı ve etkinliği gösterilmeye çalışılmıştır. Zaman boyutu ile birlikte genel denge modeli finansal piyasaları da analiz alanına dahil etmiştir.

Genel denge kuramı aksiyomatik yapısı ile ve dayandığı varsayımların sınanabilirlik özelliğinin kısıtlı olması nedeniyle, daha çok, baştan kararlaştırılmış bir sonuca ulaşma yöntemi gibi görünmektedir. Teori bir tam rekabet piyasasında, eksik rekabet, kamu malları, zaman nedeniyle ortaya çıkan belirsizlikler var olsa bile genel bir dengeye ulaşılabilirliğini iddia etmekte bu dengenin varlığını ve hatta kararlılığını matematiksel olarak ispatlamakta ancak bu dengeye nasıl ulaşılacağı ile ilgili pek bir şey söylememektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Genel denge, sabit nokta, zaman ve belirsizlik, tam rekabet, finansal piyasalarda denge

## GENERAL EQUILIBRIUM THEORY

Kaan İrfan ÖĞÜT  
Economics, M.S. Thesis

The general equilibrium theory, which was originally instituted by Walras and developed to current valid form by Arrow and Debreu makes the hard core of the neo-classical economics with the Pareto optimum concept. The 20<sup>th</sup> century economics has a tendency for searching for equilibrium in all its fields including social choice and macroeconomics and this has been seen as the valid paradigm.

Starting from Adam Smith, economists have been trying transform the economics into a scientific form similar to physics by using mathematics. The general equilibrium theory which has reached to a superior abstraction level by using mathematical techniques depending on topological spaces, plays an important role in these works. The general equilibrium theory is closely related with the equilibrium situation focused game theory, which is one of the most important developments of the 20<sup>th</sup> century mathematics.

The most important dimension of this model is proving the existence of a Pareto optimum equilibrium in a full competitive market using mathematical methods. The uniqueness and stability of this equilibrium are some of the important points to be noted on this theory.

At the beginning, the equilibrium theory was formed for the perfect competitive market only, depending on quite limiting assumptions. But in time; the imperfect competition, public goods and externalities which were being seen a barrier for reaching the Pareto optimum, and money concept which was out of the model at the beginning were included making the theory closer to the real world.

The time and uncertainty concepts which have been the most seriously argued topics inside the economics society are included to the general equilibrium theory by Debreu (1959). However, the uncertainty concept within the general equilibrium has been limited with the expectation for the realization of possible future situations without considering the risk differentiation for uncertainty. At the time and uncertainty considered general equilibrium analyses, the existence and effectiveness of the general equilibrium is proved depending on the assumption of rational expectations and non-arbitrary conditions. With the time factor included, general equilibrium model has also added the financial markets to its area of analysis.

The general equilibrium theory can be seen much of a method of reaching a pre-determined conclusion because of its axiomatic structure and limited testability of initial assumptions. The theory claims that a general equilibrium can be reached in a full competitive market despite the existence of imperfect competition, public goods and uncertainties depending on time factor in this market and mathematically proves the existence and stability of this equilibrium but it says very little about how to reach this equilibrium.

**Keywords:** General equilibrium, fixed point, time and uncertainty, perfect competition, financial market equilibrium.

## 1. GİRİŞ

Genel Denge Kuramı, neoklasik iktisat okulunun, temel dayanaklarından birisi, kimi iktisatçılara göre sert çekirdeğidir. Walras'ın ortaya koyduğu ekonomide genel bir dengeye ulaşılabilceği düşüncesi Arrow ve Debreu tarafından, literatrürde yaygın olarak kabul gören şekliyle modellenip, böyle bir dengenin var olduğu matematiksel olarak ispat edilmiştir. Arrow ve Debreu ile başlayan ve günümüze kadar gelen sürede genel denge yaklaşımı iktisat literatrüründe önemli bir yer tutmuştur. Bir mikro analiz şeklinde başlayan Genel Denge Kuramı daha sonra, makro ekonomiden, sosyal seçime, kamu ekonomisine kadar pek çok alanda önemli bir yere sahip olmuştur. Neoklasik yaklaşıma sahip iktisatçılar, iktisadın her alanında denge kavramını ve genel denge analizini kullanma çabasında olmuşlardır. Bununla birlikte, Keynes ile başlayan dengesizlik analizleri, Avusturya ve Kamu Tercihi Okul'larının kurama karşı eleştirel yaklaşımları da söz konusudur.

Çalışmanın amacı genel denge literatrürünü matematiksel yapısı ile birlikte ele alarak özellikle de zaman ve belirsizlik kavramlarının analize dahil olması durumunda modeli incelemek ve ulaştığı sonuçları ortaya koymaktır. Bunun yanında genel denge modeli üzerine yapılacak metodolojik tartışmalar yoluyla 20. yüzyılın hakim okulu neoklasik iktisatla ilgili bir bakış açısı geliştirmek de amaçlanmaktadır.

İki ana bölümden oluşan çalışmanın birinci bölümünde, genel denge modelinin kısa bir tarihçesi ele alındıktan sonra Arrow-Debreu'nun yaklaşımı ile bir tam rekabet piyasasında genel dengenin varlığının, topolojik uzaylara dayanan matematiksel tekniklerle ispatı yapılmış ve bu dengenin Pareto optimum olduğu gösterilmiş, yine Pareto optimallik kavramından hareketle oylama mekanizmaları aracılığıyla toplumsal bir dengeye ulaşılıp ulaşılamayacağı sorusu ve Arrow'un olanaksızlık teoremi ele alınmıştır. Bir tam rekabet ekonomisinde dengenin varlığı gösterildikten sonra, bu ispatın yapılmasında kullanılan topolojik uzaylar ve sabit nokta teoremleri ile ilgili bilgi verilmiş. Topolojinin hangi özelliklerinden dolayı bu analizde hakim rol oynadığı üzerinde durulmuştur. 20. yüzyıl matematiği ve iktisadının önemli bir alanı olan ve yine denge noktaları ile ilgilenen oyun teorisinin de benzer matematiksel ispat metotları kullandığı belirtilmiştir. Dengenin varlığından sonra, tekliği ve kararlılığı ile ilgili yöntem ve metotlar ele alınmıştır. İkinci bölümün sonunda, Pareto anlamda etkinsizlik yaratacakları için model dışında bırakılan, eksik rekabet, kamu malları ve dışsallıkların, gerçek dünyaya daha yaklaşımaya çalışan modele nasıl dahil edildikleri ve bu dahil edilme işleminden sonra da rekabetçi bir ekonomide dengeye nasıl ulaşıldığı incelenmiştir. Yine aynı başlık altında modele sonradan katılan para kavramı da ele alınmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümü aslında yine modele bir anlamda sonradan dahil edilen zaman ve belirsizlik kavramları ile birlikte genel denge modelinin yeniden incelenmesine dayanmaktadır. Ancak gerek belirsizlik kavramının önce doğa bilimlerinde ve bilim felsefesi aracılığıyla sosyal disiplinlerdeki önemli bir tartışma konusu olması, gerekse zaman ve belirsizlik kavramları ile birlikte kullanılan yöntemlerdeki bazı farklılıklar ve bu yeni durumda, finansal piyasaların da analize dahil olmaları nedeniyle; koşullu mal piyasalarından, ardışık ekonomiler ve aktif piyasalarına, menkul değer piyasalarından, eksik piyasalara ve belirsizliğin içsel olma durumlarına kadar geniş bir alanı kapsadığı için ***“Zaman ve Belirsizlik Altında Genel Denge”*** kendi başına çalışmanın bir bölümü olarak ele alınmıştır. Bu farklı modeller ışığında önce zaman boyutlu bir denge analizi ardından da finansal piyasalarda denge ele alınmıştır.



## 2. GENEL DENGİ KURAMI:

Genel Denge Kuramı'nın gelişimi, bir anlamda neoklasik iktisadın gelişim sürecini de yansıtmaktadır. Bununla birlikte neoklasik iktisat okulu dışında, klasik iktisada dayanan, genel denge yaklaşımları da vardır. Çalışmada, neoklasik akım içinde yer alan *Arrow-Debreu* modeli temel alınacaktır. Kuramın tarihçesi ile, hem farklı akımların genel denge düşüncesine yaklaşımı, hem de neoklasik okul içinde kuramın gelişim süreci, kısaca ele alınacaktır.

### 2.1 Genel Denge Kuramının Tarihçesi

**A. Marshall'ın,** kısmi denge analizinde *ceteris paribus* varsayımı altında ekonominin diğer alanlarında ne olduğundan bağımsız olarak ekonominin belli bir kesiminde alınan kararlar ve belli bir piyasadaki denge koşulları incelenirken, piyasaların birbirlerine olan bağımlılığı örneğin bütün piyasalardaki malların ikame ve tamamlayıcı olarak birbirlerine bağlı olduğu ya da mal ve üretim faktörleri piyasaları arasındaki karşılıklı bağımlılık ilişkisi göz ardı edilmiştir.

**L. Walras** ile başlayan genel denge analizinde ise, ekonomideki bu karşılıklı bağımlılık ilişkileri içerisinde, iktisadi birimlerin bağımsız olarak gerçekleştirdikleri etkinliklerinin ekonomideki tüm piyasaların dengede oldukları bir durumun gerçekleşmesini sağlayıp sağlamayacağı sorusu ele alınmıştır. Bu modelde söz konusu olan ekonomideki tüm mal ve faktörleri için miktar ve fiyat değerlerinin eşzamanlı olarak belirlenmesidir. Burada neoklasik iktisadın rasyonel birey kavramı devreye girmektedir. Ekonomideki bireyler ya da ajanlar, faydalarını ya da karlarını maksimize etmeye çalıştıklarına göre, ulaşılacak denge noktasında fiyat vektörü öyle belirlenmelidir ki, tüketici bütçe kısıtı altında fayda maksimizasyonuna, üretici maliyet kısıtı altında maksimum kara ulaşsın ve ekonomideki tüm talepler yine o ekonomideki üretim ve başlangıç kaynakları ile karşılanabilsin.

Aslında Walras bir anlamda Adam Smith'in görünmeyen elin fiyat olduğu, ya da dengeleyici etken olarak arz ve talep arasından bir denge kurduğu yolundaki görüşünü matematiksel bir yapıya dönüştürme yolunda kapsamlı bir girişimin öncülüğünü yapmış olmaktadır. (Casti, 2000, 56) Öte yandan Walras'ın genel denge kavramını Fizyokrasi okulunun kurucusu **F.Quesnay**'dan aldığı da düşünülebilir. Quesnay'ın ekonomiyi çembersel bir akım şeması olarak tasvir ederek, zenginliğin kaynağı oluşturan artık ürünün üç toplumsal sınıf arasında

dolaşımını incelediği eseri *Tableau Economique* genel denge modellerinin başlangıcı sayılabilmektedir. (Aydoğuş, 1999, 3)

Ancak **Walras**'ın açtığı yolun hemen hemen yarım yüzyıl boyunca kullanılmadığı, bu dönemde marjinalist ekolden gelen neoklasik iktisatçıların **Marshall**'ın bir malın belli bir piyasadaki talep fonksiyonuna dayanan kısmi denge yaklaşımını benimsedikleri söylenebilir. (Guerrien, 1999, 16)

İngilizce yazan iktisatçılar 1920'li yıllarda Walras'dan haberdar değillerdi. Genel Denge Kuramı'nın basit bir biçimini **G.Cassel**'in Sosyal Ekonomi Teori'sinden öğrendiler. Walrasgil Denge Teorisi ancak 1930'lu yıllardan itibaren **J. Hicks**, **T. Schultz**, **H. Hotelling** ve **O.Lange'nin** çalışmalarıyla soyut ama gerçek dünyayı tasvire yönelik, bazı ilavelerle uygulanabilir iktisatta bir analiz olarak ele alınırken **K.Arrow** ve **G. Debreu'nun** 1954'deki makaleleriyle iktisadın mihenk taşı olarak kabul edilmeye başlanmıştır. (Yay, 2001) Arrow-Debreu modeli bir anlamda bilimsellik iddiasında olan, bütün kuramsal neoklasik analizlerin hareket noktasını oluşturur bir konuma gelmiştir.(Guerrien, 1999, 52) Cassel'in bu çalışmasının Arrow-Debreu-McKenzie modeline öncülük ettiği de söylenebilmektedir. (Costa, 1998, 40)

Walras'dan Cassel'e uzanan bu süreçte bir matematikçi olan **A. Wald** 1936'da genel dengenin varlığını kanıtlamış ancak bunun iktisatçılar üzerinde bir etkisi olmamıştır. Wald'ın çalışmasında belirli bir fiyat vektörü mevcutken bireylerin optimizasyon amacıyla giriştikleri arz ve talep davranışları, fiyat vektörünün oluşmasına imkan vermektedir.

Genel denge ile ilgili bir diğer önemli çalışma 20. yüzyılın en büyük matematikçilerinden biri olarak kabul edilen **J. Von Neumann**'ın 1938'de yayınlanan ve aslında 1932 yılında Princeton'da verdiği bir konferansa dayanan "*Bir Ekonomik Denklemler Sistemi ve Brouwer Sabit Nokta Teoreminin bir Genellemesi*" başlıklı makalesidir. Von Neumann teorisi ile bütün mallar için en az masrafla üretim yapacak olan aynı zamanda, üretimin de olanaklı en büyük hızla büyüyebileceği tekniklerin var olduğunu ortaya koymuştur. Sabit nokta teoremini kullanarak Genel Denge Kuramı'nın statik niteliğini dinamik niteliğe dönüştürmüştür. Von Neumann'ın çalışması daha sonra gelen **Y. Balasko**, **S. Smale** ve başkalarının ekonomik süreçlerin dinamizmi, özellikle de ekonomin döngüsel ve kaotik davranışlara kayabileceği çeşitli yollar konusundaki çalışmalarının öncüsüdür. (Casti, 2000, 56)

Von Neumann'ın modeli ancak 1960'larda **P. Sraffa** ile birlikte yeniden değerlendirilmeye başlanmıştır. Sraffa ve Von Neumann modellerinin ortak noktaları malların mallarla

üretimi kavramına yer vermeleri ve talep, fayda eş marjinalite ilkesi gibi neoklasik teorisin bazı temel unsurlarına yer verilmemesidir.

Walras, Sraffa ve von Neumann modellerinin her üçü de genel denge modelidir. Sraffa belli bir üretim teknolojisine sahip bir ekonomide bölüşümden ve üretimin teknik koşullarından hareket ederek ücret veya kar oranını, fiyatları ve bunlara bağlı olan makro bütüncül değişkenleri, yani kesimlerdeki ve ekonominin bütünündeki üretim araçlarının ve çıktının değerlerini hesaplamakta ve bunların arasındaki ilişkileri klasik yöntemle incelemektedir. Von Neumann veri bir üretim teknolojisine sahip bir ekonominin uzun dönemde sürekli olarak dengede büyüüp büyüemeyeceğini ve bu denge durumunun özelliklerini incelemektedir.

Sraffa ve Walras modelleri durağan bir ekonominin genel denge modelleri olduğu halde VN modeli dinamik genel denge ile uğraşmaktadır. Von Neumann, modelini Sraffa'dan farklı bir şekilde sadece denge durumunun özelliklerinin incelenmesi ile sınırlamakta, bölüşümdeki değişmelerin fiyatlar, üretim araçlarının ve çıktının değeri üzerindeki etkileriyle teknik seçimi konusunda doğuracağı sonuçları ve dinamik bir modelde ortaya çıkan bölüşüm büyüme ilişkisini incelememektedir. Zaman unsuru modele tarihsel olarak değil mantıksal olarak girmekte değişme analizi ise modelde yer almamaktadır. (Akyüz, 1980, 347 )

Sraffa'nın çalışması bir anlamda marjinal değer ve bölüşüm kuramının eleştirisi için bir kapı açmaktadır. Sraffa "Malların Mallarla Üretimi" isimli kitabında "yazına yollamalar" başlığı altında çalışmasının eski klasik iktisatçıların kuramlarıyla olan bağlantılarına dikkat çekmekte Quesnay, D. Ricardo, A. Smith ve K. Marx gibi iktisatçılardan söz ederken Walras ve neoklasiklere hiç değinmemektedir. (Sraffa, 1981, 88-90) Bu çalışmanın kapsamı dışında kalmakla birlikte bir klasik genel denge analizinin de var olduğunu belirtilmelidir. D.Simpson, klasik genel denge analizini Smith, Ricardo ve Marx'tan, W. Leontief ve Von Neumann'a uzanan bir gelenek içinde ve W.S. Jevons, Walras, V. Pareto ve Marshall'ın içinde bulundukları neoklasik okuldan kesin olarak farklı olan özellikleri ile ayrıldığını belirtmektedir. (Simpson, 1975, 123) Bununla birlikte genel anlamda Genel Denge Kuramı'nın öncülüğünün Walras ve Pareto'ya ait olduğu, teorisin matematiksel yeniden doğuşunun Wald, ve Von Neumann ile 1920'lerde başlayan süreçte gerçekleştiği, 1930'larda Lange, Hicks, ve P.A. Samuelson'un yazdıklarıyla ortodoks ekonominin ana akımı haline geldiği ve sonunda Arrow, Debreu ve Hahn'ın çalışmalarıyla savaş sonrası formülasyonuna kavuştuğu söylenebilmektedir. (Blaug, 1997, 168)

Yukarıda söz edilen öncü çalışmalar 1954 yılında Arrow ve Debreu'nun birlikte yazdıkları, "Rekabetçi Bir Ekonomide Dengenin Varlığı" başlıklı makale ve Debreu'nun 1959 yılında

yazdığı "Değer Teorisi" isimli kitabıyla bugün geçerli olan Genel Denge Kuramı'na dönüştürülmüştür. Arrow ve Debreu, Wald'ın sistemini değiştirip sabit faktör bileşim oranları ve tercih yapıları yerine, daha esnek olanlarını ikame etmiş ve Nash dengesi olarak bilinen, denge kavramına uygun biçimde  $n$  bireyli bir toplumda ve herkesin diğer bireylerin tepkilerini dikkate aldığı bir oyunda dengenin nasıl sağlanacağını araştırmışlardır. E.R. Weintraub'a göre genel denge analizinin Arrow ve F. Hahn tarafından yeniden ele alınması bu konuya oyun teorisi açısından bakılmasını sağlamıştır. (Savaş, 1999, 863 ve 868) Genel dengenin varlığının ispatının ele alınacağı bölümde Genel Denge ile Nash Dengesi'nin her ikisinin de sabit nokta teoremine dayandığı gösterilecektir.

Bütün dikkatini rekabetçi endüstrilerin dengesine veren Marshall'ın fiyat teorisinin sadece tam rekabet ve monopol piyasalarının varlığını gözönüne alırken diğer piyasaları incelememesi ve artan getiri kavramı ile tam rekabet piyasalarını bağdaştırma çabası modelinin yetersizlikleri olarak algılanmış ve eleştirilmiştir. 1930'larda Sraffa, J. Robinson ve özellikle de E.H. Chamberlin'in çalışmaları ile monopolistik rekabet teorisi rekabetçi ve monopol piyasaları arasındaki çelişkiye müdahale eden en etkin çalışma olmuştur. 1940 yılında Monopolistik Rekabet ve Genel Denge Teorisi isimli kitabı yazan R. Triffin; monopolistik rekabet teorisinin Marshall'ın kısmi denge yaklaşımı ile Walras'ın genel denge yaklaşımlarını uyumlu hale getirecek bir köprü görevi görebileceğini öne sürmüştür. Nitekim Costa kitabında, kısmi denge yaklaşımından genel denge yaklaşımına başlıklı bölümünde Marshall'dan Chamberlin'e ve Chamberlin'den Walras'a bu süreci ele almaktadır. (Costa, 1998, 40-46)

Sraffa, Robinson ve Chamberlin'in çalışmaları tam rekabet kavramının kapitalist ekonomide gerçek piyasa şartlarını yansıtmadığını ortaya koymuş olsa da Walras ve Pareto'yu izleyen Hicks de sistemini tam rekabet varsayımı üzerine kurmuş bir anlamda genel dengenin dinamik analizini yapmıştır. (Kazgan, 1993, 132) Monopol teorisi ve monopson zaten A.Cournot tarafından ele alındığından, Walras'ın amacı; rekabetçi ticaret sürecini açıklamaktır. Walras kitabında monopol unsurlarını minimize etmiş, rekabetçi ticaretin analizi için sahasını sınırlandırmıştır. (Morishima, 1997, 27)

Bu çalışmada Arrow-Debreu tarafından temelleri atılan Genel Denge Kuramı kullanılmıştır. Ancak bununla birlikte Genel Denge Kuramı'nın çıkış noktası Walras olduğu için, Walras'ın modelinden de söz edilmiştir.

M. Blaug, Walras'ın talep ve arz fonksiyonlarını alt alta yazıp bu eşzamanlı denklemler kümesi için bir çözümün olduğunu değişken ve denklem sayılarının eşitliğine dayanarak

ispatladığını bunun çoklu piyasa dengelerinin belirlenmesinin statik bir resmi olduğunu söylemektedir. (Blaug, 1997, 188) Blaug denklem sayıları ve bilinmeyenler arasındaki

eşitliğin genel dengenin çözümü için yeterli olmadığını,  $x^2 + y^2 = 0$  iki bilinmeyenli iki  $x^2 - y^2 = 2$

denklem sisteminin ekonomik olarak anlamlı olan reel sayılar bölgesinde çözümü olmadığı örneği ile göstermektedir.<sup>1</sup> Blaug bu örneğin aynı zamanda tek bir genel denge çözümünün sıfır ve hatta negatif fiyatları da içerebileceğini, bunun ise serbest mal anlamına geleceğini belirtmektedir. (Blaug, 1996, 552-553)

Walras-Cassel genel denge modeli ve Wald'ın bu modelin çözümünün varlığı ve bu çözümün tekliği hakkındaki çalışmasıyla ilgili diğer bir önemli kaynak da Dorfman, Samuelson ve Solow tarafından yazılan Lineer Programlama ve Ekonomik Analizdir. Söz edilen kaynaktan Von Neumann'ın dengeli büyüme modeli de ele alınmıştır. (Dorfman, Samuelson, Solow, 1959, 346-389) Lancaster, rekabetçi ekonominin, orijinal Walrasçı lineer üretim modeline dayanan basitleştirilmiş bir modeli olarak tanımladığı Walras-Wald modelinin R.Dorfman, Samuelson ve R. Solow tarafından çalışılan modele özdeş olduğunu belirtmektedir. (Lancaster, 1968, 145)

Bir başka alanda Leontief, Walras'ın soyut genel denge modelini bir dizi varsayımla basitleştirip formel bir girdi çıktı modeline dönüştürerek, ekonomik yapıyı oluşturan üretim ve tüketim birimleri arasındaki karşılıklı bağımlılığı çok sektörlü ve sayısal bir yapıda ele almıştır. Leontief'in modeli de bir genel denge modeli örneği olarak düşünülebilmektedir. (Aydoğuş, 1999, 3)

Walras modelindeki önemli bir kavram *tatonnement* ya da müzayedeci olarak adlandırılabilir kavramdır. Walras sisteminde yanlış fiyatlarda değişim yapılmaz Dengeye yönelme süreci, talep ya da arz fazlasının fiilen ortaya çıkması, bir süre bu yanlış fiyat düzeyinde alışveriş yapıp fiyatın değişme eğilimine girmesi değildir. Dengesizlik yalnızca kavramsal düzeydedir. Dengeye yönelmeyi sağlayan mezat varsayımı ve varsayımsal bir tellalın varlığıdır. Yani modelde dengenin bozulması ve bir süreç içinde dengeye yeniden ulaşılması söz konusu değildir.

Walras *tatonnement* süreci içinde, dengesizlik fiyatlarında üretim faktörlerinin arz ve taleplerinin belirlenmesi konusunda yeni bir kurgusal bilet mekanizması getirmektedir.

<sup>1</sup> Blaug ve diğer bazı ekonomistler Walras'ın bilinmeyenlerle denklem sayılarının eşitliğine dayanan çözümün varlığı kanıtını eleştirirken, genelde birinci dereceden olmayan denklemleri örnek göstermektedirler. Oysa

Piyasada denge sağlanamadığı sürece üretim faktörleri alış satışı yapılmamakta, bunun yerine bir geçici alım ve satış sözleşmesi niteliğindeki biletler el değiştirmektedir. Ancak bu sözleşme dengesizlik fiyatında tarafları bir alış verişi yapmaya zorlamamaktadır. Faktör değişimi de mal değişimi gibi denge fiyatları belirlendikten sonra yapılmaktadır. Biletler üzerindeki fiyatlar denge fiyatlarına uyuyorsa biletler geçerlik kazanır ve değişim yapılır aksi takdirde biletlerin bağlayıcılığı yoktur.

Burada **F. Edgeworth'un** yeniden anlaşma mekanizmasına benzer bir durum vardır. Edgeworth'da bu mekanizma içinde bireyler birbirleri ile pazarlık etmekte ve fiyat yapıcı olarak ortaya çıkmaktadır. Walras'ın *tatonnement* sürecinde ise bireyler arasında bir pazarlık söz konusu değildir. Sistem bireyler arasındaki pazarlığa gerek kalmadan denge fiyatlarını belirlemekte bireyler fiyat alıcı durumunda olmaktadır. Denge fiyatları denge dışı fiyatlardan hiç bir alış verişi yapılmadan ortaya çıkmaktadır. Denge durumunun belirlenmesi piyasadaki alıcı ve satıcıların aktif bir değişim çabasına girmelerini gerektirmemektedir. Hem tüketim malları hem de üretim faktörleri, ancak genel denge fiyatları belirlendikten sonra alınıp satıldıkları ve faktör piyasasının tüketim malları piyasasından daha önce dengeye gelmesi söz konusu olmadığı için sistemin tutarlı bir şekilde işlemesi üretimin zaman almamasını gerektirmektedir. Denge durumuna ulaşıldıktan sonra üretim faktörleri anında tüketim mallarına dönüştürülebilmektedir. Bütün üretim ve tüketim kararları denge fiyatlarında alınmakta ve uygulanmakta olduğundan bu kararların dayandığı talep ve arz koşulları hakkındaki bilgi tam doğru ve kesindir. Piyasa sistemi görevini en iyi şekilde yapmakta fiyatlar bir yandan üretim ve tüketim kararlarının dayandığı doğru göstergeler olurken diğer yandan da veri kaynakların optimal dağılımını sağlamaktadır. Ancak bütün bunların sistemin işleme mekanizması konusunda yapılmış varsayımlara dayandığı da açıktır. (Akyüz, 1980, 134-135)

Ancak Walras'ın *tatonnement* süreci ile ilgili de farklı yorumlar vardır. **Walker'e** göre süreç, üretim ve değişim olmak üzere iki anlamda çalışır; birincisinde dengesizliği içeren üretim modeli, ikincisinde denge fiyatlar seti modeli vardır. Üretim modeli dinamik, reel piyasaları kapsar, ikincisi ise soyut bir akıl yürütmedir ve belki de Walras'ın amaçladığından farklı olarak, bu süreç değişim modeli üzerine soyut ve eşzamanlı (zamansız) olarak geliştirilmiştir. (Eren, 1989, 40-44)

İktisat dünyasında tatonnement sürecine getirilen önemli eleştiri aslında böyle bir sürecin planlama mekanizması için daha uygun olduğudur. Nitekim Lange'nin Piyasa Sosyalizmi modeli benzer bir analizi içermekte oluşu buna örnek olarak gösterilmektedir. Bu sakıncaları nedeniyle *tatonnement* sürecine yer vermeyen denge dışı değişime olanak veren (nontatonnement) modeller de geliştirilmiştir. Arrow, L. Hurwicz, L.W. McKenzie, M. Morishima, H. Nikaido ve H. Uzawa gibi iktisatçılar tarafından tatonnement sürecinin dengeye yönelmenin tek yolu olup olmadığı tartışılmıştır. *Tatonnement* süreci kabaca ikame edilebilirlik gibi bazı kısıtlamalar altında kararlı olabilmektedir. Genellikle kararlı ya da tatonnement sürecinden daha kararlı başka bir fiyat intibak sorusu çerçevesinde çeşitli nontatonnement ya da takas süreçlerinin kararlılığı Hahn, Negishi ve Uzawa tarafından incelenmiş ve genellikle non-tatonnement süreçlerin daha kararlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. (Parasız, 1999, 21-25)

Tatonnement varsayımının gevşetilmesi halinde bir anlamda denge dışında alış verişe izin verilmiş olur. Fiyatların bir süre için sabit olduğunu bir mal piyasasında arzın bu fiyatlarda talebi aştığını düşünülecek olursa, daha önce değinilmiş olan deneme yanılma modelinden farklı olarak karar birimleri yine de alışverişe devam etmek istiyorlarsa, bu alışverişler çok değişik şekiller alabilecektir. Örneğin pazar yetersizliği olarak başgösteren kıtlık üreticiler arasında, tayınlama şemaları ile paylaştırılabilmektedir. Walrascı denge dışında alışverişler söz konusu olunca bu şemalar kaçınılmaz olabilmektedir. **B. Guerrien'e** göre tayınlama şemaları bireylerin maksimizasyona yönelik rasyonel davranışlarından çıkarılamayacağı için neoklasik kuramcılar için sorun yaratan bir alandır. Güçlüklerin bir piyasadan diğerine aktarılması şeklinde etkilerin varlığından söz edilebilmektedir. Bu aktarma etkileri doğurabilecekleri kümülatif süreçler ve kısır döngüler nedeniyle önemlidir. Bu süreçlerin sabit birer noktaya, yeni dengelere sahip olup olmadıkları önemli bir sorudur. (Guerrien, 1999, 85-86)

Genel Denge Analizi, iktisatta matematik kullanımının ilk örneklerinden biri olarak **J.Kornai'nin** ifadesiyle entellektüel deneyin en güzel örneklerinden biri olarak somut dünyayı kucaklamaktan çok içsel tutarlılığa ağırlık veren bir analizdir. Ancak Eren (1989)'e göre bu durum belki de Walras'ın istediği bir gelişme değildir. Çünkü Walras'da pür iktisadın sosyal reformlar için bir araç olduğu ve önemli olanın sosyal reformlar olduğu görüşü vardır.

Matematiksel soyutlamaların ispat gücü, bir anlamda modeli gerçek hayattan uzaklaştırmıştır. Özel mülkiyete dayalı bir ekonomiyi açıklamaya çalışan bir modelin bu aşırı merkeziyetçi niteliği sorgulanmıştır. Üstelik modelin geçinmeye yetecek varlıklar üzerine yaptığı varsayım

bu merkezi niteliği daha da güçlendirmektedir. **T.C. Koopmans** bu modelin pek seyrek şekilde mübadelede bulunan, küçük çiftçilerden oluşan bir ekonomiyi tasvir ettiğini söylemektedir. (Guerrien, 1999, 53)

Genel dengenin varlığını garantileyen topolojik uzaylarda tanımlı sabit nokta teoremi Genel Denge Kuramı'nın, ispatında kullanıldığı gibi denge kavramının geçtiği başka alanlarda da kullanılmıştır. Etkisi 20. yüzyılın ilk yarısında da hissedilen marjinalist yaklaşım, iktisadı bir anlamda bir optimizasyon teorisine dönüştürmüş, rasyonel bireylerin tam rekabetçi bir ortamda, bütçe kısıtı altında faydalarını ya da maliyet kısıtı altında karlarını maksimize etmeleri ekonominin temel işleyişi haline gelmiştir.

Ancak özellikle de eksik rekabet piyasalarında, bu tür maksimizasyon işlemleri anlamını yitirmektedir. Bunun başlıca nedeni, bu piyasalardaki maksimizasyon arayışlarında ajanların diğer ajanların kararlarını da dikkate almak zorunda kalmalarıdır. Yani çok üreticinin bulunduğu ve bunların aldıkları kararların birbirlerini etkilemediği bir tam rekabetçi piyasa çoğu zaman gerçekleşmemektedir. Bu nedenle iktisatta en iyi çözüm yerine denge kavramı ağırlık kazanmaya başlarken, klasik optimizasyon tekniklerinin yerini de oyun teorisi almaya başlamıştır. Oyun teorisi öncelikle ekonomide karşılıklı olarak bütün tarafların başka bir stratejiyi oynamak istemeyecekleri bir denge noktasının bulunup bulunmaması ile ilgilenmektedir.

Oyuncuların diğer oyuncuların strateji seçiminden etkilenmeden her koşulda seçecekleri bir hakim stratejileri varsa oyunun sonucu bu hakim stratejilerin kesişimi olacaktır. Oyuncuların potansiyel stratejileri arasında hakim (dominant) bir strateji yoksa karma stratejiler söz konusudur. Karma stratejilerin söz konusu olması durumunda dengenin varlığı, **J. Nash** tarafından 1950'de ispatlanmıştır. Nash teoremini şu şekilde ifade edilebilir;  $n$  oyunculu ve normal formdaki  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  bir oyunda  $n$  ve  $S_i$  sonlu olmak üzere, her  $i$  için karma stratejilerin de dahil olabileceği en az bir Nash dengesi vardır. Nash dengesinin varlığının kanıtı da aynen genel dengenin varlığının kanıtı gibi sabit nokta teoremini içermektedir. (Gibbons, 1992, 45) Nash, oyuncuların tercihlerinin sürekli benzer içbükey fayda fonksiyonları ile gösterilebildiği ve strateji kümelerinin simpleks olduğu oyunlar için dengenin varlığını ispatlamıştır. (Border, 1999, 89) Bu iki kavramın, benzer içbükey fayda fonksiyonlarının ve simpleks kümelerin önemi çalışmanın ilerleyen bölümlerinde gösterilmiştir. Genel olarak Nash teoremi işbirliği içermeyen oyunlar içindir. İşbirliğinin söz konusu olabildiği oyunların üzerinde uzlaşmış kesin çözüm yöntemleri olmamakla birlikte oyunun çekirdeği, Shapley değeri gibi yöntemler geliştirilmiştir. (Casti, 2000, 56)

Ancak oyun teorisinin, genel denge ile başlayan iktisadın formalleşme sürecinin günümüzde ulaştığı son aşama olduğu ve neredeyse iktisadın en popüler tekniği durumuna geldiği yolunda yorumlar da vardır. İktisatçılar 1930'lu yıllarda ortaya çıkan eksik rekabet devrimi sorunsalının (tam rekabet ve tekel piyasaları arasında kalan rekabetçi piyasaların analizi) tam rekabet şartlarını varsayan Genel Denge Kuramı içinde ele alınamaması engelini, maksimizasyon peşinde koşan rasyonel oyuncuların davranışlarının sağlam matematiksel kurallarını bulmayı amaçlayan oyun teorisi ile aşabilmişlerdir. 1970'li yıllarda rekabetçi dengenin stratejik temellerini (tek seferlik) işbirlikçi oyunlar çerçevesinde ele alan oyun teorisi, 1980'li yıllarda, asimetrik bilgi, dinamik stratejik etkileşim ve bilgi iktisadını içeren işbirlikçi olmayan, yinelenen oyunlar geliştirebilmiştir. (Yay, 2001)

Genel denge ile oyun teorisi arasında kurulabilecek bir ilişki, 1948 yılında RAND tarafından Arrow'a verilmiş bir projedir. Arrow'dan bireyler bazında formüle edilen oyun kuramının, birçok bireyin toplamından oluşan milletlere uygulanabileceğinin göstermesi istenmiştir. Arrow her denemede başarısızlığa uğraması üzerine imkansızlık teoremini ortaya atmıştır. Arrow diktatörlük hariç her türlü yapıda bireylerin seçimlerinin toplamından tek bir sosyal seçime ulaşılamayacağını göstermiştir. S. Nasar'a (2002) göre Arrow rekabet dengesinin varlığını ispatladığı kuramını biraz da Nash'e borçludur. M. Shubik (1991) ise ekonomi analizinde oyun teorisinin önemli bir uygulama alanını genel denge modeli olduğunu ve oyun teorisi çözümlerinin ekonomi problemlerine uygulanmasının öncelikle çekirdek çözümü ikinci olarak da diğer işbirlikçi çözümler üzerinde yapıldığını söylemektedir. T. Negishi, Walras-Marshall modelini işbirliği olmayan piyasalar için bir oyun olarak tanımlarken, Jevons-Edgeworth modelini işbirliğinin mümkün olduğu piyasalar için bir oyun olarak tanımlamaktadır. Sonsuz sayıda karar alıcıların olduğu, büyük ekonomilerde bu iki model aynı sonuçları vermektedir. (Negishi, 1994-b, 203)

20. yüzyıl makroiktisadını etkileyen önemli bir düşünce de Genel Denge Kuramı'nın varsayımlarına dayalı bir makroiktisat teorisi geliştirmek olmuştur. Neoklasik Sentez ve Makroiktisatın Mikro Temelleri tartışmaları bu projeyi gerçekleştirmeye dönük iki denemedir. Bu çalışmaların öncülüğünü Hicks'in yaptığı söylenebilir. Hicks bir anlamda bireysel optimizasyon modellerini makroekonomik modelle bütünleştirmiştir. Uzun dönem dengesi üzerine odaklanmış neoklasik sentez 1970'lerdeki stagflasyon krizine çözüm üretemediği için hakim niteliğini kaybetmiştir. Konjonktürel dalgalanma söz konusu olduğunda fiyatların arz ve talebi dengeye getirememesinin bir açıklaması olmalıdır. (Yay, 2001) Neoklasik sentez olarak adlandırılan akımı Weintraub, modern para teorisi ile Walrasçı genel denge ya da değer

teorisinin evliliği olarak nitelendirmektedir. (Weintraub, 1974, 52) Para kavramına Walrasçı genel denge modelleri çerçevesinde yaklaşılması **D. Patinkin** ile başlamış ve bu gelenek makro teorinin mikro temelleri olarak da isimlendirilmiştir.(Akat, 1980, 300) **Hicks, Samuelson** ve **E. Klein**'in çalışmaları ile kurulan Neoklasik Sentez, Keynes'in makro teorilerinin neoklasik mikro analiz ile uyumlaştırılmasıyla ortaya çıkmıştır.(Alada, 2000, 121) Hansen, genel dengenin neoklasik sisteminden bir makro ekonomik sistem türetilmesi çabasına girmiştir. Mallar, işgücü ve para için talep ve arz fonksiyonları oluşturarak bunların ayrı ayrı birbirlerine eşitliğinden denge durumunu tanımlamıştır. İşgücü ve para piyasalarında arz talep eşitliği değişmezken toplam mal için talep tüketim ve yatırım için taleplerin bir kombinasyonu olarak tanımlanmıştır. (Simpson,1975, 74-75)

**G. Mankiw**'in, makroiktisattaki son gelişmeleri ele aldığı makalesinde Walrasçı denge kavramının makroiktisadı oldukça etkilemiş olduğu açıkça görülmektedir. Standart makroiktisatta beklentilerin değerlendiriliş biçiminin yetersizliği yolundaki eleştiriler üzerine özel iktisadi karar birimlerinin öngörülerinin modele dahil edilmesi gerekliliği üzerinde durulmuştur. Mankiw, yeni klasik devrimin amacının "*bireyler daima optimize ederler*" ve "*piyasalar daima dengeye gelirler*" şeklindeki klasik aksiyomları koruyarak makroiktisadı yeniden inşa etmek olduğunu, bu şekilde birçok makroiktisatçı iktisadi dalgalanmaları Walrasgil paradigma içinde açıklamaya çalışırken diğer bazılarının ise Keynesyen iktisadın Walrasgil olmayan varsayımlarını doğrulamaya çalıştıklarını söylemektedir. (Mankiw, 2000)

Walrasgil genel denge çerçevesinde mikro-makro tutarsızlığını, ya da gönülsüz işsizlik olgusunun sürekliliğinin açıklanamayışını yani bir anlamda tatonnement sürecini sorgulayanlar **R. Clower** ve **A. Leijonhufvud** olmuştur. Clower'a göre emek piyasasındaki arz fazlası ve bu arz fazlasının başka piyasaya arz fazlası olarak yansıtacak bir mekanizmanın olmaması Walras kanunu ile çelişmektedir. (Yay, 2001) Clower ve Leijonhufvud'un Keynes'i, Walrasçı genel denge içinde incelemeleriyle dengesizlik analize dahil edilmiş olmuştur. Bu çabalar genel olarak "*Walrasçı genel dengesizlik analizi*" olarak adlandırılmaktadır. Walrasçı genel dengesizlik analizinde haber alma ve eşgüdüm sorunu önemli bir yer işgal etmektedir. Bunun anlamı Walras modelindeki müzayedecinin analizde yer almamasıdır. Müzayedecinin bulunmamasıyla birlikte eşgüdümün gerçekleştirilmesi açısından haber almanın önemi ortaya çıkmaktadır. Ancak haber alma süreci eksik ve maliyetlidir ve haber alma farklılıkları

Leijonhufvud; Walras'ın dünyasından Keynes'in dünyasına geçebilmek için deneme yanılma mekanizmasından (tatonnement) vazgeçmenin yeterli olduğunu söylemiştir. Müzayedecinin kaldırılması karar vermenin merkezi olmadığı bir sistemde ekonomik faaliyetleri kontrol edebilmek için toplanması gereken bilginin zaman alacağı ve iktisadi maliyetler içereceği anlamına gelmektedir. Bu nedenle başka hiçbir klasik varsayımdan vazgeçilmesine gerek yoktur. Müzayedecinin yokluğu dışında sistem önceki gibi mevcuttur. (Leijonhufvud, 2000) Clower ve Leijonhufvud, geleceğe ilişkin temel belirsizliği vurgulamışlardır. Gelecek kavramı, para tutmak ile mal almak arasındaki tercihleri modele sokarak Keynesci türde işsizlik durumunda denge durumunu gündeme getirmişlerdir. Kesin ve eksiksiz bilgi varsayımına dayanan ve bu nedenle fiyat değişikliklerinin piyasa birimlerine her zaman doğru sinyaller verdiğini savunan neoklasik modelde böyle bir denge mümkün değildir. Fiyat değişikliklerinin belirleyici olduğu bu süreç sayesinde, kaynaklar optimal biçimde dağılır ve tam istihdam ortaya çıkarmıştır. (Koutsoyiannis, 1997, 571) Leijonhufvud, önemli kitabı "*On Keynesian Economics and the Economics of Keynes*" ile Keynes'in "*General Theory*" kitabının ana mesajının miktar ayarlamasının, fiyat ayarlamasından çok daha keskin bir şekilde yerini aldığını ve piyasanın dengesizlik durumunda bulunmasının ekonominin normal hali olduğunu vurgulamıştır. (Cuddington vd, 1984, 2)

1950'lerde sübjektif yargıların analiz dışı tutulmasıyla birlikte refah iktisadında Pareto optimumu kavramı ön plana çıkmış ve refah iktisadının temel teoremlerinin genel denge modeline eklenmesiyle formalleşme süreci devam etmiştir. Genel Denge Kuramı ve Yeni Refah İktisadı, tam rekabet şartları üzerine oturur. Neoklasik iktisat bu üç analiz bütünü, Adam Smith'in görünmez elinin bir yeniden sergilenmesi olduğunu ifade eder. Oysa T. Yay'a göre bu teze iki boyutta şu eleştirileri getirmek mümkündür. Birincisi bu tez yanlıştır; çünkü genel dengedeki rekabet kavramı, Smith'in rekabet kavramından tamamen farklıdır. Genel denge modelinin tam rekabet şartları altında ne rekabete yer vardır ne de girişimci ve örneğin kalite, servis rekabeti gibi fiyat dışı kavramlara yer vardır. Oysa Smith'in kafasındaki rekabet süreç anlamında bir rekabettir ve malların homojen olduğu, işlem maliyetlerinin olmadığı, tam bilgiye sahip üretici ve tüketicilerin dünyasında değil, malların farklı, işlem maliyetlerinin kaçınılmaz, üretici ve tüketicilerin eksik bilgiye sahip olduğu bir dünyaya karşılık gelmektedir. İkincisi; bu tez neoklasik iktisadın formelleştirilmesinin bir diğer örneğidir, üreticileri fiyat-alıcı olarak tanımlayan tam rekabet kavramı, gerçek yaşamda olmayan ve hiçbir zaman olmayacak bir durumu ifade eder ve dahası iktisat öğrencilerini iktisada yabancılaştırma, somut yaşamla bağlantı kuramama işlevi görür. (Yay, 2001)

Neoklasik ekonomi 1870'lerdeki marjinal devrimden beri fiziğe gıpta etmektedir. Bu yüzden 19. yüzyılın enerji kavramı üzerinde yükselen fiziğine benzemeye çalışmaktadır Pareto gibi bazı ikinci nesil marjinalistler yazılarında bu fiziğe referans vermelerine rağmen Walras'ın kahramanları, Joule ve Helmholtz yerine Newton ve Laplace'dır Modern zamanlara gelindiğinde Genel Denge Kuramı'nın asıl amacı bilimleşmek değil tam bir matematiksel tutarlılığı yakalamak olmuştur. Bu dönemde Genel denge kuramcıları fizik yerine matematiğe gıpta etmeye başlamışlardır. Fizik, asla dengenin varlığı, tekliği ve kararlılığı ile ilgili pür matematiksel bir ispatı sağlayamayacaktır. (Blaug, 1997, 168-169)

Teorinin göze çarpıcı özelliklerinden biri de yüksek kısıtlayıcı özelliğe sahip varsayımlara dayanıyor oluşudur. Çalışma boyunca görüleceği gibi başlangıçta tam rekabetçi, benzer başlangıç donanımlarının sahip karar alıcıların bulunduğu, tüketim tercihlerinin ve üretim olanakları kümelerinin dışbükeylik gibi kimi özelliklere sahip bulunması üzerine kurulmuş model zamanla bu kısıtlayıcı varsayımların bazılarından kurtularak örneğin eksik piyasalarda dengeyi de incelemiştir. Bununla birlikte modelde baştan kabul edilen varsayımların önemli bir rolü olmuştur. İktisatta ve genelde sosyal bilimlerde teoriler kurulurken varsayımlar matematikte olduğu gibi önemli bir yer tutmaktadır. Genelde bir varsayımın, içsel olarak tutarlı olduğu ve verilerle çürütülemediği sürece ampirik açıdan doğru olup olmaması fazla bir önem taşımamaktadır. İktisat yöntem bilimcileri arasında metodolojik görüşlerin inandırıcılığını değerlendirmek için **Popperci** yanlışlamacılığı kullanan **T.W. Hutchison, J.Klant, Blaug** gibi iktisatçılar **L.V. Mises**'in sınanamamakla beraber önsel biçimde doğru olarak kabul edilen iktisadın aksiyomları ile ilgili yanılmazcı iddiasına eleştirel gözle bakmaktadır. Hatta her üç yazar da çalışmalarında Misesci sistemenin bir bilim olarak nitelendirilemeyeceğini belirtir. Bu bakış açısıyla mükemmel öngörü varsayımının deneysel içeriklerini boşalttığı **denge teorileri** de eksik görülmektedir. Öte yandan Popperci yanlışlama kriterinin iktisat alanında kullanılabilirliği tartışmalıdır. Blaug I. Lakatos'un yaklaşımının T.Kuhn ve Pooper'inkilerden daha üstün olduğunu savunur. (Caldwell, 1996, 197) Lakatos'un yaklaşımının iktisatta kabul görmesiyle genel denge modelinin metodolojik olarak da kabul edilebilirliği artmıştır.

Weintraub, Genel Denge Kuramı'ndaki deneysel boşluklara karşı uygun bir savunmayı teorinin Lakatosçu anlamda neoklasik iktisadın sert çekirdeği olduğunu iddia ederek sağlamıştır. Tanıma göre sert çekirdek deneysel değildir. Weintraub Lakatos'un modelinin bu özelliğini kullanmıştır. Bir diğer deyişle Genel Denge Kuramı'nın deneysel anlamı koruyucu kuşak içinde değerlendirilmiştir.(Blaug, 1997, 169) Araştırma metotlarını pozitif ve negatif

olarak ikiye ayıran Lakatos negatif problem çözme tekniği olarak tanımladığı modelinde bütün araştırma programlarının sert çekirdekleri ile tanımlanabileceğini, programın negatif problem çözme tekniğinin bizim bu katı çekirdeğe çürütme yöntemiyle (moddus tollens) yaklaşmamızı engellediğini, bunun yerine ilgili çekirdeğin etrafındaki bir koruyucu kuşağa (protective belt) şeklini veren yardımcı hipotezleri dile getirmek ve yaratıcılığımızı kullanarak bunları çürütme yöntemiyle yeniden ele almamız gerektiğini söylemektedir. Lakatos'a göre, testlerin yükünü taşımak zorunda olan, düzenlenen ve hatta tamamıyla değiştirilen ve böylece takviye edilen çekirdeği savunmakla yükümlü bulunan şey bu koruyucu yardımcı hipotezler kuşağıdır. Bir anlamda koruyucu kuşaktaki çürütmelerin yanlışlığı sert çekirdeğe iletmesine izin verilmemektedir. Ancak Lakatos özellikle programın yeni olguların sezilmesini durdurması durumunda sert çekirdeğin terk edilmesi gerektiğini de belirtir ki bu da onu doğrulamacı konvansiyonalizmden ayırır. (Lakatos, 1992, 162-165) Bu anlamda Lakatos bilimsel araştırma programının bir parçası olarak tanımladığı sert çekirdeğin içine, pozitivistin tamamen dışladığı metafizik teste açık olmayan değer yargılarını katmaktadır (Yay, 2000, 17)

Genel Denge Kuramı'nın özellikle de iktisattaki matematiksel formelleştirmenin bir anlamda kaynağı olarak mikro ekonomiden makro ekonomiye, 20. yüzyıl iktisadını hemen her alanda hem yaklaşım hem kullanılan yöntemler açısından çok ciddi anlamda etkilediği görülmektedir.

## 2.2 Rekabetçi Bir Ekonomide Genel Denge

Arrow ve Debreu'nun amaçları Walras'tan önemli bir farklılık göstermektedir. Walras'ın amacı, piyasaların fiyat ayarlamaları ile otomatik olarak talep fazlalıklarını nasıl temizleyeceğini, kısaca dengeye nasıl varılacağını göstermek olmasına karşın *Arrow-Debreu* modelinde amaçlanan tüm piyasaları eşanlı olarak temizleyebilen fiyat ve miktar kümesinin varlığının matematiksel olarak kanıtlanmasıdır. (Yay, 2001)

Walras kaynaklı genel denge modeli üzerinde Arrow ve Debreu'nun çalışmalarına dayanan bu bölümde, tam rekabetçi bir ekonomide dengeyi sağlayan ve tüketicilerin faydası ile üreticilerin karını maksimize eden bir fiyat vektörünün varlığı ele alınmıştır.

### 2.2.1 Tüketici Kümesi ve Mübadele Ekonomisi

Ele alınan ekonominin  $n$  tane üretim biriminden,  $m$  tane tüketim biriminden ve servis hizmetleri ve emeği de içermek üzere  $k$  tane farklı maldan oluştuğu düşünölsün Bunların indisleri de sırasıyla  $j, i, h$  olsun. Ekonomideki sonlu sayıda mal kümesi (ya da tek boyutlu bir vektör olarak gösterilebileceğinden), mal vektörü  $h = [h_1, h_2, \dots, h_k]$  şeklinde de gösterilebilmektedir. Bu durumda bu ekonomideki etkinlikleri kapsayan  $k$  boyutlu mal uzayı da  $R^k$  ile gösterilmektedir. Mal uzayının her noktası bir mal sepetine (commodity bundle) denk gelmektedir. (Klein, 1973, 153)

$i$  inci tüketici için girdiler pozitif sayılarla ve ürettiği çıktılar negatif sayılarla gösterilmektedir. Bu tüketicinin tüketim planı da  $x_i \in R^k$  ile belirlenmektedir. Yine aynı tüketicinin bütün olanaklı tüketim planlarını kapsayan tüketim kümesi de  $X_i$  ile gösterilmektedir. Buna bağılı olarak her tüketicinin tüketimleri toplamını  $x = \sum_{i=1}^m x_i$  toplam

tüketim ya da toplam talep olarak ve yine tüm ekonomi için olanaklı olan toplam tüketim

kümesi  $X = \sum_{i=1}^m X_i$  olarak tanımlanmaktadır. (Debreu, 1959, 51-52) Fiyat sistemi ise negatif

olmayan bir nokta olarak  $p = (p_1, \dots, p_k) \in R^k$  tanımlanmaktadır. Ancak mutlak fiyatlar yerine bağılı fiyatlar kullanılabileceğinden normalleştirilmiş bir fiyat sistemi kullanılmaktadır. Bu

durum  $\sum_{n=1}^k p_n = 1$  ile tanımlanmaktadır. (Klein, 1973, 154)

Kullanılacak notasyonun özetlenmesinden sonra tüketim kümesinin özellikleri ele alınabilir.

- Tüketim kümesi kapalıdır. Bu ifadenin en basit tanımı tüketim kümesinin kendi sınır noktalarını da içereceğidir. Ancak topolojik anlamda kapalı bir küme, bütünleyeni yani  $X^c$ 'nin açık bir küme olmasıyla (Lipschutz, 1965, 48) ya da kendisine ait bütün limit (yığılma) noktalarını içermesiyle (Kolmogorov-Fomin, 1970, 49) tanımlanmaktadır. Bu özelliğin ekonomik anlamda yorumu  $x$  gibi olanaklı bir tüketime yönelen tüm tüketim noktalarının da uygun ve olanaklı olmasıdır. (Çakır, 1993, 15). Debreu bu varsayımı  $X_i$  için,  $i$ 'inci tüketici için olanaklı olmak üzere  $x_i^q$  tüketimlerin sonlu bir dizisi ise bu dizinin limit noktası olan  $x_i^0$  noktası da  $(x_i^q \rightarrow x_i^0)$   $i$ 'inci tüketici için olanaklıdır şeklinde yazmıştır. (Debreu, 1959, 52) Topolojide sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi de kapalı küme olduğundan (Klein, 1973, 56) bu varsayım  $X_i$  'den  $X$  kümesine genişletilebilir.
- Tüketim kümesi alttan sınırlıdır. Bu varsayım tüketicini hem girdi olarak kullanacağı mal ve hizmetlere yapacağı harcamalar, hem de çıktı olarak üreteceği mallar için bir alt sınırın varlığını ifade etmektedir. (Bulutay, 1979, 15) Debreu bir önceki varsayımda olduğu gibi bu özelliği önce  $X_i$  'de tanımlamış sonra  $X$  kümesine genişletmiştir.
- $X_i$  bağlıdır (connected). Debreu bu varsayımın sezgisel olarak  $X_i$  'nin tek parça olduğu şeklinde açıklanabileceğini ifade etmektedir. (Debreu, 1959, 51-52) Bir küme, ayrık, boş olmayan iki açık altkümenin birleşimi ya da kesişmeyen ve boş olmayan iki kapalı altkümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa bağlıdır. (connected set). Ayrıca bağlı kümelerin birleşimi de bağlıdır. (Nikaido, 1968, 14,15)
- $X_i$  dışbükeydir. Tüketim kümesinin dışbükey olmasının en önemli sonucu tüketime konu olan malların bölünebilir olmalarıdır. Bu iddia dışbükeyliğin tanımından elde edilebilir.  $x, y \in X$  ve  $0 \leq \lambda \leq 1$  olmak üzere,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$  ise  $X$  kümesi dışbükeydir.  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  ifadesinin  $x$  ve  $y$  noktaları arasındaki doğru parçasını tanımlamasından hareketle, dışbükeylik özelliği bir kümeye ait olan iki noktayı birleştiren doğru parçasının da tümüyle o kümeye ait olması şeklinde özetlenebilmektedir. (Chiang, 1994, 348-350). Bu noktada bir önceki varsayımla bağlantı kurarak dışbükey kümelerin bağlı oldukları da belirtilebilmektedir. Herhangi iki noktası bir eğri ile birleştirilebilen kümelerin bağlı küme olma özelliğinin özel bir durumu olarak dışbükey kümelerin bağlı oldukları söylenebilmektedir. Nikaido'nun tanımlamasıyla dışbükeylik, bağlı olmaya göre çok daha spesifik bir yapısal özelliktir. (Nikaido, 1968, 20) Debreu da dışbükeyliğin, bağlı küme

olma özelliğini işaret ettiğini belirterek ve her  $X_i$  dışbükey ise  $X$  de dışbükeydir yorumunu yapmaktadır. (Debreu, 1959, 53) Dışbükey kümelerin birleşimlerinin dışbükey olma özelliği bulunmamakla birlikte iki dışbükey kümenin toplamını da dışbükeydir.<sup>1</sup>

(Ersel, 1980, 178)  $X = \sum_{i=1}^m X_i$  olarak tanımlandığına göre  $X$  dışbükeydir.

- Her tüketicinin, tüketim kümesi, kapalı, dışbükey ve alttan sınırlıdır. Bunun yanında  $x_i^1, x_i^2 \in X_i$  iki tüketim sepeti iken birinin diğerine tercih edildiğini gösteren  $x_i^1 \succ x_i^2$  ifadesinin anlamı,  $tx_i^1 + (1-t)x_i^2 \succ x_i^2$  olmasıdır. (Varian, 1992, 344)

Tüketim kümesi ile ilgili bu dört varsayımdan sonra, tüketici tercihlerinin özelliklerini ele almak gerekecektir. Tüketicinin zevkleri, tercih ilişkileriyle ifade edilir. Debreu  $i$ 'inci tüketiciye ait tüketim planında verilen iki tüketimin (mal sepeti)  $x_i^1, x_i^2 \in X_i$  ancak ve ancak aşağıdaki üç alternatiften birini sağlayacağını söylemektedir.

- Tüketici,  $x_i^1$ 'i  $x_i^2$ 'ye tercih eder ( $x_i^1 \succ x_i^2$ )
- Tüketici  $x_i^1$  ile  $x_i^2$  arasında kayıtsızdır. ( $x_i^1 \sim x_i^2$ )
- Tüketici,  $x_i^2$ 'yi  $x_i^1$ 'ye tercih eder ( $x_i^2 \succ x_i^1$ )

Bu ikili ilişkiler, tamlık, yansıma ve geçişlilik özelliklerine sahiptir. Tamlık özelliği yukarıda ifade edildiği gibi herhangi iki mal sepetinin kıyaslanabileceğini ifade etmektedir. Yansıma özelliği bir mal sepetinin en az kendisi kadar iyi olduğu anlamına gelirken, geçişlilik özelliği bir anlamda tüketici davranışlarını belirlemektedir. Bunun anlamı, tüketici  $x_i^1$ 'nin en az  $x_i^2$  kadar iyi olduğunu ve  $x_i^2$ 'nin de en az  $x_i^3$  kadar iyi olduğunu düşünüyorsa,  $x_i^1$ 'in en az  $x_i^3$  kadar iyi olduğunu düşünmektedir. (Varian, 1993, 34-35) Tercih ilişkilerinin geçişli olması tüketicinin rasyonel olduğuna işaret etmektedir.

Bu tercih ilişkisine matematiksel olarak bakıldığında bir tercih önsıralamasının varlığından söz edilebilir. Böylece soyut matematikteki sıralama bağıntısının özelliklerinin biraz farkla da olsa tercih ilişkisine taşındığı görülmektedir. Bir bağıntının yansıma, ters simetri, ve geçişme özellikleri olan bağıntı, sıralama bağıntısıdır. Bir sıralama bağıntısında her iki elemanı karşılaştırmak olanaklı olduğunda tam sıralama söz konusudur. (Çallıalp, 1995, 30-31)

<sup>1</sup> İki dışbükey kümenin toplamlarının da dışbükey olduğunun ispatı tanımdan hareketle kolayca elde edilebilir.

$(x_i^1 \succ x_i^2)$  ve  $(x_i^2 \succ x_i^1)$  kümeleri kapalı ise tercih ilişkisi süreklidir. Bu küme dışbükey ise bu küme üzerinde tanımlanan tercih önsıralaması güçlü dışbükeydir ve azalan marjinal ikame haddini ifade etmektedir. Bu varsayım köşe çözümlerini dışlayarak, çeşitli mal gruplarının karışımından oluşan sepetlerin tek tip mal çeşidine tercih edilmesini sağlamaktadır. (Çakır, 1993,17) Tercihlerin dışbükeyliği  $x_i^1, x_i^2, x_i^3 \in X_i$  olmak üzere,  $x_i^1 \succ x_i^3$  ve  $x_i^2 \succ x_i^3$  ise  $0 \leq \lambda \leq 1$  olmak üzere,  $\lambda x_i^1 + (1 - \lambda)x_i^2 \succ x_i^3$  şeklinde gösterilebilmektedir. (Varian, 1992, 96)

Simpson tarafından yapılan sınıflandırmayı dikkate alarak tercihlerle ilgili varsayımları aşağıdaki şekilde maddelenebilir;

- **Tamlık:** iki malın herhangi iki bileşimi alındığında tüketici ya birini diğerine tercih eder ya da ikisi arasında kayıtsız kalır.
- **Doyumsuzluk:** Herhangi bir mal bileşimi alınrsa ona tercih edilen başka bir mal bileşimi vardır.
- **İkame:**  $x_i^1$  ve  $x_i^2$  gibi iki mal bileşiminde bir  $\alpha$  malı miktarı aynı iken  $\beta$  malından  $x_i^2$ 'de,  $x_i^1$ 'den daha fazla varsa ve tüketici  $x_i^2$ 'yi  $x_i^1$ 'e tercih ediyorsa,  $\alpha$  malından  $x_i^1$ 'e ilave ederek  $x_i^1$  ile  $x_i^2$  arasında kayıtsız kalması sağlanabilir.
- **Dışbükeylik:** Bir maldan tüketilen miktar arttıkça, fayda düzeyi sabit iken, diğer mallarla ikame haddi düşer. (Simpson, 1975, 1-2)

Bir  $X_i$  kümesi üzerinde tanımlı tercih tam önsıralamasında  $x \sim y$  ve  $x \neq y$  olması durumunda  $\lambda x + (1 - \lambda)y \succ y$  sağlanıyorsa buna kesinlikle dışbükey denir. Bunun anlamı, tüketicinin farksız olduğu  $x$  ve  $y$  gibi iki noktayı birleştiren bir doğru üzerindeki (bu iki nokta hariç) her noktada tüketici  $x$  ve  $y$  noktalarına göre daha üst düzeyde bir tercih durumuna sahiptir. Dikkat edilirse bu özelliğe sahip farksızlık eğrileri ençok rastlanılan şekle sahip olurlar.  $x \succ y$  olması  $\lambda x + (1 - \lambda)y \succ y$  sonucunu yaratıyorsa bu durumda tercih önsıralaması dışbükeydir denir. Diğerinden farklı olarak, bu durumda farksızlık eğrileri doğru parçalarından oluşmuş olabilmektedir.  $x \sim y$  olması  $\lambda x + (1 - \lambda)y \sim y$  sonucunu yaratıyorsa sıralamanın zayıf dışbükey olduğu yorumu yapılabilir. (Bulutay, 1979, 40-41)

Yukarıda ifade edilen doyumsuzluk varsayımı bir anlamda çoğun her zaman az tercih edildiğini göstermektedir. İki mal sepetinden biri bileşimini oluşturan malların miktarların aynı iken en az bir maldan daha fazla içeriyorsa bu mal sepeti diğerine tercih edilmektedir.

Debreu bu durumu  $i$ 'inci tüketicinin için doyum sağlayacak bir tüketim bulunmaması şeklinde ifade etmektedir. (Debreu, 1959, 55)

Çoğun aza tercih edilmesi aynı zamanda tercih ilişkisinin monotonluğunu da göstermektedir.  $x \geq y$  ise  $x \succ y$  dir. (Varian, 1992, 96)

Tüketicinin **fayda fonksiyonu** ile tercih önsıralaması arasındaki ilişki şöyle kurulabilir:  $x_i^1 \succ x_i^2$  olması ancak  $u_i(x_i^1) > u_i(x_i^2)$  olması durumunda mümkündür. Fayda fonksiyonu monoton artan bir fonksiyondur. Yani  $x_i^1 > x_i^2$  ise  $u_i(x_i^1) > u_i(x_i^2)$  dir ve bu da yukarda ifade edildiği gibi  $x_i^1 \succ x_i^2$  olmasını sağlamaktadır.

Fayda fonksiyonu ile ilgili olarak belirtilmesi gereken bir başka özellik kesinlikle benzer içbükey olmasıdır. Bu noktada üç boyutlu bir uzay düşünelim; fayda fonksiyonu iki farklı mal miktarına bağlı olarak  $u_i(x^1, x^2)$  olarak dışbükey bir küme üzerinde tanımlanmış olsun. Herhangi bir  $a$  reel sayısına bağlı olarak tanımlanan  $P_a = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) \geq a\}$  bu dışbükey kümenin bir altkümesi olsun ve fayda fonksiyonu için üst düzey kümesi olarak isimlendirilsin (upper level set).

Bir  $S \subset R^n$  dışbükey kümesi üzerinde tanımlı  $u_i(x^1, x^2)$  fonksiyonu, eğer üst düzey kümesi  $P_a = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) \geq a\}$  her  $a$  sayısı için dışbükey ise, benzer içbükeydir. (Sydsaeter, Hammond, 1995, 642-644)

Tüketicinin yapacağı harcamaların, servetini aşmaması gerekliliği  $px_i \leq w_i$  olarak gösterilebilmektedir. Tüketicinin servetinin iki bileşeni vardır. Bunlar başlangıç donanımlarının  $r^i$  satışından elde edilebilecek gelir ve tüketicilerin aynı zamanda üretici kesimi de oluşturmasından hareketle firmalarda sahip oldukları kar paylarıdır.  $\alpha^j$   $i$ 'inci hane halkının (veya tüketicinin)  $j$ 'inci firmadan elde ettiği kar payını ifade etmek ve  $\alpha^j > 0$  olmak üzere  $\sum_{j \in F} \alpha^j = 1$  yazılabilmektedir. Bunun anlamı her firma için kar paylarının tümünün tüketicilere ait olması olarak yorumlanabilmektedir.

Burada servet kavramını ya da servet yerine gelir kavramını kullanarak,  $i$ 'inci hane halkının geliri,

$$w_i = M^i(p) = p.r^i + \sum_{j \in F} \alpha^j \pi^j(p) \text{ dir.}$$

Fiyata göre birinci dereceden homojen olan bu fonksiyon, hane halkının gelirinin başlangıç donanımlarının satışı ve üreticilerin karlarından sağladığı kar payları olmak üzere iki kaynaktan geldiğini ifade etmektedir.  $M^i(p)$  fonksiyonu,  $n$  boyutlu reel uzayda sıfırdan farklı her fiyat vektörü için sürekli, reel değerli, negatif olmayan ve iyi tanımlıdır. (Starr, 1997, 96-97)

Servet ya da gelir ile belirlediğimiz kısıtı bütçeye aktarmak için Debreu'nun fiyat-servet ikilisi kavramını kullanılarak, Debreu fiyat-servet ikilileri kümesini

$$(p, w) = \{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\} \text{ şeklinde tanımlamıştır.}$$

Yine Debreu  $p \neq 0$  olmak üzere bir servet çoklu düzlemini  $\{a \in R^I \mid p \cdot a = w_i\}$  şeklinde tanımlamaktadır. (Debreu, 1959, 62)

Çoklu düzlem (hyperplane) matematiksel olarak  $p, x \in R^n$  ve  $\alpha \in R$  olmak üzere

$$D(p, x) = \{x \in R^n \mid p'x = \alpha, p \neq 0_n\} \text{ ile gösterilmektedir.}$$

Buna,  $R^n$  içinde tanımlanmış bir çoklu düzlem denir. Burada  $D(p, x)$  bir dışbükey küme ve  $p$  vektörü çoklu düzlemin normalidir. (Ersel, 1980, 179)  $D(p, x)$  hem bir dışbükey küme hem de çoklu düzlem üzerindeki her nokta bir sınırlama noktası olduğundan ve  $D(p, x)$  kümesi sınırlama noktalarının tümünü birden içerdiğinden kapalı bir dışbükey kümedir. (Chiang, 1984, 666-667)

Bu çoklu düzlem tanımlamasında  $R^n = R^2$  alınırsa, çoklu düzlem,

$$D(p, x) = \{(x_1, x_2) \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 = \alpha\} \text{ olur.}$$

Bu da iki boyutlu bir düzlemde bir doğru belirtir ve  $p$  vektörü de bu doğruya diktir. (normal olma şartı) İki farklı mal olduğunda bütçe doğrusunun bu şekilde tanımlandığını zaten bilinmektedir. Fiyatların negatif değerler almayacaklarını gözönünde bulundurulursa bu doğrunun olması gerektiği gibi negatif eğimli olduğu görülmektedir.  $R^2$ 'deki bu durumun  $R^n$ 'e genişletilmesiyle  $n$  farklı malın bulunduğu bir ekonomi için bütçe denklemi elde edilmiş olur.  $i$ 'inci tüketicinin bütçe çoklu düzlemi:

$$B_i(p, x_i) = \{x \in R_+^n \mid p'x_i = w_i, p \in R_+^n\} \text{ dir.}$$

Bütçe çoklu düzlemi mal uzayını üç ayrı bölgeye ayırmaktadır.

Bütçe kısıtı gelirle harcamaların eşit olduğu noktalardan oluşmaktadır. Bir çoklu düzlem olan bütçe kısıtı mal uzayını, bu çoklu düzlem ile ifade edilen doğrunun altında ve üzerinde kalan alanlarla, iki kapalı yarı uzaya böler kayıtsızlık eğrilerinin ifade ettiği mal sepetlerinin oluşturduğu küme tüketici dengesi çerçevesinde tümüyle bütçe kısıtının üzerinde yer alır ve bu kümenin bir uç noktasında, ki bu denge noktasıdır. Çoklu düzlem bu kümeye destek vermektedir. (Çakır, 1993, )

Ayrılcı çoklu düzlem teoremi olarak bilinen teoreme göre;  $K$  ve  $C$   $R^n$ 'de ayrık, boş olmayan, dışbükey kümeler olsun ve  $C$  kapalı,  $K$  ise kompakt olsun. Bu durumda  $K$  ve  $C$ , bir çokyüzlü düzlem tarafından kesin olarak ayrılırlar. (Border, 1999, 11) Bu tanıımı şu şekilde de yapmak mümkün olabilmektedir.  $S$  bir  $D(p, x)$  çoklu düzlemi tarafından belirlenen iki açık yarı uzaydan birisinin alt kümesi ise  $D(p, x)$ ,  $S$ 'nin ayrılcı çoklu düzlemidir. (Ersel, 1980, 181)

Çoklu düzlemlerin üzerinde bu kadar durulmasının nedeni, çoklu düzlemlerden hareketle simplekslere oradan da ekstremum noktalarının bulunmasına gidileceği içindir. Genel denge, tanımı gereği aynı zamanda fayda ve kar alanlarında en iyiye ulaşmayı içerdiğine göre bu sürecin ele alınması gerekmektedir.

Bu noktada lineer programlama ve oyun teorsinde önemli bir rol oynayan **Minkowski** teoremi (bir dizi tanımlamalar ve teoremlerle birlikte) ele alınacaktır.  $S$ ,  $R^n$ 'de bir alt küme iken, çoklu düzlemin belirlediği kapalı yarı uzaylardan birinin tamamen içinde yer alıyorsa, bu çoklu düzleme sınırlandırıcı (bounding) çoklu düzlem denir. Bu alt küme ile çoklu düzlemin ortak noktaları varsa, bunlar ancak kümenin sınırları üzerinde olabilirler.

Yukarıda tanımlandığı gibi  $S$ ,  $R^n$ 'de, kapalı ve dışbükey bir alt küme olmak üzere, çoklu düzlemin, belirlediği açık yarı uzayın tamamen içinde kalıyorsa bu çoklu düzleme,  $S$  için ayrılcı (separating) çokludüzlem denir.  $S$  en az bir noktası çoklu düzlemin üzerinde olmak üzere tamamıyla, çoklu düzlemin belirlediği kapalı yarı uzayın içinde kalıyorsa bu çoklu düzleme destekleyici (supporting) çoklu düzlem denir. Ayrılcı ve destekleyici çoklu düzlemleri sınırlandırıcı çoklu düzlemin iki çeşididir.

**Teorem 2.1:**  $S$ ,  $R^n$ 'nin kapalı ve dışbükey bir alt kümesi ve  $z$ ,  $R^n$ 'de bir nokta olsun. Bu durumda ya  $z \in S$ 'dir ya da öyle bir çoklu düzlem vardır ki  $z \in D(p, x)$ 'dir ve  $S$  çoklu düzlemin belirlediği açık yarı uzaylardan birinin içindedir.

**Teorem 2.2:**  $z$ , kapalı, dışbükey  $S \subset R^n$ , kümesinin bir sınır noktası olsun,  $S$ 'nin  $z$  noktasından geçen bir destekleyici çoklu düzlemi vardır.

**Teorem 2.3: (Minkowski Teoremi)**  $S \subset R^n$ , kapalı, dışbükey bir küme ve  $z \in R^n$  olsun.  $z$  ya  $S$  alt kümesinin bir iç noktasıdır, ya da  $S$  için  $z$  noktasından geçen destekleyici bir çoklu düzlem vardır. (Klein, 1973, 324-327)

Rekabetçi bir ekonomide denge noktasının aynı zamanda Pareto optimallik koşulunu sağlaması gereği bu denge noktasının aynı zamanda bir en iyi çözüm olmasını gerektirmektedir. Bu noktadan hareket edilirse, uç noktaların araştırılması gerekmektedir.

Doğrusal programlama ve dışbükey kümeler özelinde düşünülecek olursa, amaç fonksiyonu ki doğrusal bir fonksiyondur ve değişken sayısına göre, bir doğru, bir düzlem ya da bir çoklu düzlemdir. Bunların her biri dışbükey kümelerdir. Bunların kesişiminden oluşacak olabilir (feasible) bölge kümesi  $F$  de dışbükey bir kümedir.

Optimum duruma ulaşıldığı zaman optimum çoklu düzlem  $F$  kümesinin hiçbir içsel noktasını içeremez, çünkü içerirse, daha iyi bir duruma erişmek için çoklu düzlemi normal doğrultusunda hareket ettirmek mümkün olabilir. Dolayısıyla  $H \cap F$  kümesinde  $F$  kümesinin yalnızca sınır noktaları görülebilmektedir.  $F$  kümesi destekleyici çoklu düzlemin ancak bir tarafında yer alabileceği için yalnızca sınır noktaları bu çoklu düzlemlerin üzerinde kalabilir. Her bir destekleyici düzlem  $F$  kümesinin en az bir uç noktasını içermektedir. Yine çoklu düzlemlerle ilgili bilgilere göre  $F$  kümesinin bir sınır noktasında en az bir tane çoklu düzlem vardır. Doğrusal programlamanın üzerine kurulduğu teoremin ifadesi şudur; Aşağıdan sınırlanmış bir kapalı dışbükey küme için, her destekleyici çoklu düzleminde en az bir tane uç nokta vardır. Ya da benzer bir tanımlamayla kapalı dışbükey küme yukarıdan veya aşağıdan, ya da hem yukarıdan hem aşağıdan sınırlanmış ise bu kümenin her bir destekleyici çoklu düzlemi bir uç nokta içerecektir. (Lancaster, 1968, 267)

Doğrusal programlama da bir optimum çözüme ulaşıldığında zaman amaç çoklu düzlemi ki bu eş kar ya da eş maliyeti temsil eder, bir destekleyici çoklu düzlemi ifade eder. Yukarıdaki ifadelerden olabilir bölgenin her sınır noktasının optimum çözüm için olası bir aday olduğu söylenebilmektedir. Çoklu düzlemin üzerinde uç noktası olmayan sınır noktaları yer alsa bile bunlar uç noktadan daha iyi değillerdir ve yok sayılabilirler. Buradan hareketle Dantzig,  $n$  değişkenli bir doğrusal programlama sorusunu çözmek için simpleks yöntemini geliştirmiştir. Bu yöntem olabilir bölgenin bir uç noktasından, optimum çözüme ulaşmaya kadar, bir başkasına ilerlenebilen sistemli bir süreç sağlar. Seçim alanını yalnızca uç noktaların üzerinde

yoğunlaştırabiliyor olmak doğrusal programlamanın klasik optimizasyondan önemli bir farkıdır. (Chiang, 1994, 668-670)

Uç nokta tanımını farklı bir yoldan da yapılabilir.

**Tanım 2.1:** Hiçbir  $y, z \in S$  için  $\lambda \in ]0,1[$  olmak üzere  $x$  noktası  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$  şeklinde yazılamıyorsa, dışbükey  $S$  kümesinin bir uç noktasıdır. Dışbükey bir küme sonlu ya da sonsuz sayıda uç noktaya sahip olabilir. (Klein, 329 ve Nikaido, 39) Bu şu şekilde de yorumlanabilir. Bir kümenin uç noktası söz konusu kümeye ait herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerinde yer almayan nokta olarak tanımlanmaktadır.

**Teorem 2.4:**  $S \subset R^n$  kümesi, kapalı, dışbükey ve alttan sınırlı olsun, destekleyici bir çoklu düzlem  $x^0$  noktasında teğet ise, bir uç noktayı içermektedir.

Bu teorem denge noktasının en iyileme özelliği söz konusu olduğunda kullanılacaktır.

Çoklu düzlemlerle yani ekonomideki anlamıyla bütçe kısıtı ile ilgili açıklamalardan yararlanarak, elde edilebilir bir tüketim kümesi tanımlamak mümkün olabilir. (Çakır, 1993, 19)

$$T(p, w_i) = \{x \mid p \cdot x_i \leq w_i, x_i \geq 0\} \text{ ya da}$$

$$T_i(p, w) = \{x_i \mid x_i \in X_i, p \cdot x_i \leq w_i\} \text{ dir.}$$

Bulutay elde edilebilir tüketimler kümesini, bütçe kümesi olarak tanımlayarak tüketicinin gelirinin yetersiz ve fiyatların yüksek olması durumunda bu kümenin boş olabileceğini belirtmektedir. (Bulutay, 1979, 32)

Debreu'nun tanımladığı fiyat-servet çiftine yeniden dönülürse,  $(p, w) \in R^{k+m}$  olmak üzere

$$(p, w) = \{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\} \text{ dir.}$$

Bu ikililerinin oluşturdukları kümeyi  $K_i$  sembolü ile gösterilsin.

$$K_i = \{(p, w_i) \in R^{k+1} \mid T_i(p_i, w_i) \neq \emptyset\} \text{ ya da}$$

$$K_i = \{(p, w) \mid x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq w_i\} \text{ dir.}$$

Bu durumda her  $i$  için noktadan kümeye  $T_i : K_i \rightarrow X_i$  bir eşleme yapılabilmektedir. Bunun anlamı  $T_i$  elde edilebilir tüketim kümesinin (bütçe kümesinin),  $K_i$  fiyat-servet ikilileri

kümesinden  $X_i$  tüketim kümesine bir karşılama olduğudur. Dikkat edilirse  $T_i$  bütün fiyat servet ikililerinin  $X_i$  olanaklı tüketimler kümesinin birer alt kümesi olduklarını göstermektedir. (Klein, 1973, 157)

Bütçe kümesinin sürekliliği de dengenin varlığını ispat etme yolunda önemli bir adımdır. Bütçe kümesi, fiyat servet çiftlerinin oluşturdukları kümeden, olanaklı tüketimler kümesine bir karşılama olarak tanımlandığına göre bu karşılamanın sürekliliği incelenmelidir. Süreklilik kavramının iktisadi anlamda yorumu, fiyat-servet çiftlerindeki küçük oynamalar karşısında tüketicinin ani ve sert, eski davranışlarından kopuk tepki göstermemesi anlamına gelmektedir. (Bulutay, 1979, 32)

Bütçe kümesi ile ilgili olarak daha önce yapılan tanımlamalar hatırlanırsa fiyat vektörünün bütçe düzlemine (ya da ele aldığımız iki boyutlu uzaydaki bütçe doğrusuna) normallik koşulu gereği dik olduğu gösterilmişti. Bunun bir anlamı da fiyat vektörünün eğiminin artması durumunda bütçe doğrusunun altında kalan alanın küçülmesidir. Fiyat vektörü yatay eksene tam dik konuma gelecek olursa, bütçe kümesinin alanından söz edilemeyecektir. Bunu bir süreksizlik durumu olarak tanımlamak mümkündür. Fiyat vektörünün eksenlere dikliği mallardan birinin fiyatının sıfır olması anlamına gelir ki bu da iktisatta serbest mal olarak tanımlanmaktadır. Başlangıç koşullarında sadece bu mala sahip olan kişi (ya da aile) diğer mal ya da mallardan satın alabilme olanağını yitirmektedir. Aynı şekilde fiyatı 0 olan maldan elde etmenin bir maliyeti olmadığından bir anlamda yatay eksenden çok uzaklara sıçrayacak bu da süreksizlik anlamına gelecektir.

Bu durumu göz ardı etmenin yolu yeni bir varsayımda bulunmaktır.  $(p^0, w^0) \in K_i$  sürekliliği ispat etmenin en kolay yolu  $w_i^0 \neq \min p \cdot X_i$  olduğu varsayımını yapmaktır. (Klein, 1973, 157) Süreksizliğin nedeni  $i$  tüketicisinin servetinin kendi tüketim kümesinin minimum değerine eşit olması olarak belirlendiğinden bu varsayım ile süreklilik bir anlamda garantilenmiş olmaktadır.

Daha önce analiz edilmiş olan destekleyici çoklu düzlem yani iktisadi anlamda bütçe kısıtı mal uzayını iki kapalı yarı uzaya böldüğüne göre, kayıtsızlık eğrilerinin ifade ettiği mal sepetlerinin oluşturduğu küme tüketici dengesi çerçevesinde ele alındığında bu kümenin

kapalı yarı uzayları  $A$  ve  $B$  olarak düşünülürse  $A \cap B = \{x^*\}$  olur. Fayda maksimizasyonu bu tek nokta üzerinde gerçekleşir. Çünkü bu nokta veri fiyat-servet ikilisi ile tercih önsıralamsıyla tüketicinin seçebileceği en büyük küme elemanına karşılık gelir. (Çakır, 1993, 20)

Bu noktada, önce dolaylı fayda fonksiyonunu sonra da istem karşılama tanımlanmalıdır. Tüketicinin veri olan bir fiyat-servet ikilisinde, tercih önsıralamasına göre bütçe kümesi içindeki en iyi seçimi yapmaya çalıştığından hareketle bir fayda fonksiyonu tanımlanabilir.

$v_i : K_i \rightarrow R$  olmak üzere  $v_i(p, w) = \max u_i(x_i) = \max u_i(T_i(p, w))$  dir. (Klein, 1973, 158)

Dolaylı fayda yaklaşımında fayda mal miktarları yerine fiyat-servet ikilileri cinsinden tanımlanmaktadır. Bunun nedeni talep karşılamlarının bu ikililer cinsinden en yüksek doyumu vermesi ve bunun da fayda ile fiyat-servet ikilileri arasında dolaylı bir ilişki olduğu anlamına gelmesidir. Bütçe kümesinin en büyük elemanı bulunduğu anda talep karşılama faydayı maksimize etmektedir. (Çakır, 1993, 21)

$i$  'inci tüketici için talep karşılama, yine noktadan kümeye bir eşleme olarak (point to set mapping)  $D_i : K_i \rightarrow X_i$  olmak üzere, iki farklı şekilde ifade edilebilmektedir

$$D_i(p, w) = \{x_i | x_i \in T_i(p, w), x_i = \max, \preceq_i\} \text{ veya}$$

$$D_i(p, w) = \{x_i | x_i \in T_i(p, w), \max u_i(x_i)\} \text{ dir.} \quad (\text{Klein, 1973, 158})$$

Talep karşılama seçilecek nokta bütçe kümesinin bir anlamda en büyük elemanı olmaktadır. İlk ifade de tercih önsıralamasına uygun olarak bütçe kümesinin ki bunun aynı zamanda olanaklı tüketimler kümesi anlamına geldiği belirtilmişti, en büyük noktası seçilmeye çalışılırken, ikinci ifade de fayda maksimize edilmektedir.

Bir en büyük noktanın varlığını *Weierstrass Teoremi* garanti etmektedir. Weierstrass teoremine göre; eğer olanaklar kümesi  $X$  kompakt ise (ki bunu  $n$  boyutlu bir öklit uzayının kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olarak düşünülebilir) ve boş değilse ve amaç fonksiyonu  $F(x)$  bu  $X$  kümesi üzerinde sürekli ise  $F(x)$  fonksiyonunun  $X$  kümesinin sınırında ya da bir iç noktasında maksimumu vardır. Reel sayıların her kompakt kümesi en küçük bir üst sınırına sahiptir. Bu yüzden eğer  $F^*$ ,  $F(x)$  in en küçük üst sınırı ise öyle bir  $x^*$  vardır ki  $x^* \in X$  olmak üzere,  $F(x^*) = F^*$  koşulunu sağlamaktadır.  $F(x) \leq F(x^*)$  oldukça her  $x^* \in X$  ler için  $x^*$  global bir maksimumdur. (Intriligator, 1971, 13)

Burada vurgulanması gereken bir nokta fonksiyon terimi yerine karşılama ifadesinin kullanılmasıdır. Bunun nedeni tercih fonksiyonlarının dışbükeyliği ifadesinden gelmektedir. Eğer bu dışbükeylik ilişkisinin güçlü olduğu gösterilebilirse talep karşılması yerine talep fonksiyonu ifadesi kullanılabilir ancak zayıf dışbükeylik ilişkisinin gerçekleşme olasılığı karşılama (correspondence) kavramının kullanılmasını gerektirmektedir. (Bulutay, 1979, 32)

Bireysel tüketici için burada söz konusu olan talep karşılması fonksiyonu fiyatlara göre sıfıncı dereceden homojen bir fonksiyondur.

$\lambda > 0$  olmak üzere,  $D_i(\lambda.p) = D_i(p)$  dir.

Buna dayanarak toplam ya da derneşik talep karşılmalarının da aynı şekilde sıfıncı dereceden homojendir. (Quirk ve Saposnik, 1968, 81-82)

Talep karşılmaları ya da fonksiyonlarının sıfıncı dereceden homojen olması fiyat vektörünün negatif olmayan skaler bir sayı ile çarpılması durumunda, yani tüm malların fiyatlarının aynı oranda artması durumunda tüketicilerin talep ettikleri mal miktarlarının değişmediğini göstermektedir. A.S. Akat bu noktadan hareketle, modelde fiyatlar genel seviyesinin değil, sadece nisbi fiyatların söz konusu olduğunu, ailelerin para aldanmacasına yakalanmadıklarını, yani hem nakdi gelirlerinin hem de mal fiyatlarının aynı oranda arttığı bir durumda kendilerini daha zengin ya da daha fakir hissetmedikleri anlamına geldiğini ifade etmektedir. (Akat, 1980, 115)

Sıfıncı dereceden homojenlik kavramı mutlak fiyatların normalleştirilmesine de izin verir.

$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}$  olarak alındığında homojenlik koşulu gereği  $D_i(\lambda.p) = D_i(p)$  geçerli olacaktır.

(Quirk ve Saposnik, 1968, 83)

Burada her ne kadar talep karşılmalarının homojenlik durumunu sadece fiyatlar üzerinden incelendiyse de Debreu'ya dönüldüğünde aynı ilişkinin fiyat-servet ikilileri için de geçerli olduğu görülmektedir. Debreu, bütçe kümesi (elde edilebilir tüketimler), talep karşılması ve dolaylı fayda fonksiyonlarının her üçünün de fiyat-servet ikilisi için sıfıncı dereceden homojen olduklarını gösterir. (Debreu, 1959, 66-67) Debreu'nun notasyonu kullanarak bu ilişkiler ifade edilebilir.

$$D_i(p, w) = \xi_i(tp, tw) = \xi(p, w)$$

$$v_i(tp, tw) = v(p, w) \text{ dir}$$

Bu durumun iktisadi hayata ait varsayımlarla tutarlılığı rasyonel ve tam bilgiye sahip bireyler için açıktır.

Dolaylı talep fonksiyonunun da talep karşılaması gibi sıfırıncı dereceden homojen olması dolaylı fayda fonksiyonunun faydayı maksimize edeceğini göstermektedir. Weiestrass teoremi uyarınca fayda fonksiyonu belirli ve boş olmayan  $T(p, w_i)$  kümesi üzerinde sürekli bir maksimumu ve bir minimumu var olmaktadır.

Talep karşılaması daha önce tanımlanan  $i$  'inci tüketicinin gelirine bağlı olarak da yazılabilir.

$$D_i(p, w) = D_i(p, (p.r^i + \sum_{j \in F} \alpha^j \pi^j(p))) \quad (\text{Klein, 1973, 159})$$

Akat; üretimin yapılamayacağı kadar kısa ve ancak mübadelenin söz konusu olduğu Walras'ın mübadele modelinde, mal stoklarının dışarıdan verildiğini ailelerin bu stokların satışından elde ettikleri gelir ile fayda fonksiyonlarına göre tüketmek üzere mal satın aldıklarını, fayda fonksiyonlarının tamlik, doyumsuzluk, ikame, geçişlilik gibi nitelikleri dikkate alınarak, kısıt altında maksimizasyon yöntemi ile tüketici dengesine ulaşılacağını belirtmektedir. (Akat, 1980, 124)

### 2.2.2 Üretim Kümesi

Her üreticinin bir girdi, çıktı kombinasyonuna bağlı olarak belirlenmiş üretim planlarına sahip oldukları kabul edilmektedir. Ekonomideki tüm mallar bu üretim planlarının girdisi olabilirler.

Tüm üreticilerin üretim olanaklarının toplamı  $Y = \sum_{j=1}^n Y_j$  dir.

Bir anlamda üretim kümesinin sınırlarını teknolojik bilgi düzeyi belirlemektedir.

Rekabetçi genel denge analizinde üretim kümelerinin birbirlerinden bağımsız oldukları yani dışsal ekonomilerin olmadığı kabul edilmektedir.

Üretim kümesinin varsayımları aşağıda maddelenmektedir. (Tüketici kümesi varsayımları ele alınırken yapılan bazı ortak kavramların burada detayına girilmemiştir.)

- $j$  'inci üreticinin üretim kümesi  $Y_j$  kapalıdır.

- $0 \in Y_j$  . Bu varsayım üretim yapmamanın mümkün olduğunu ifade eder. Orjin üretim kümesine dahildir. Debreu bir üretici için mümkün olan bu üretmeme durumunun genişleterek tüm üretim kümesine de uygulanabileceğini belirtmektedir. (Debreu, 1959, 40)
- $Y_j \cap \Omega = \{ \}$  Bu varsayım girdisiz üretim yapılamayacağını ifade eder.
- $Y_j \supset -\Omega$ . Serbestçe yok edebime olarak adlandırılan bu varsayım, hiçbir çıktının olmadığı yalnızca girdilerin söz konusu olduğu bir üretimin mümkün olduğunu yani yalnızca girdilerden oluşan negatif kadranın üretim kümesinin içinde olduğunu ya da benzer bir anlatımla, bir üretim olanaklı olduğunda bu üretimden daha fazla çıktı yaratamayan ve daha az girdi kullanamayan bir üretim de olanaklıdır. (Bulutay, 1979, 56) Bütün bir kadranı içermesi tüm malları girdiler olarak kullanabilen bir üretim planının mümkün olduğunu ifade eden bu varsayım serbestçe yok edebilmenin olabilirliğini göstermektedir. Başlangıçta yapılan tanımlamalar gereği eksi kadran yalnızca girdilerden oluşur. Bu varsayımın önemi, eksi fiyat olasılığını ortadan kaldırmasındadır. (Çakır, 1993, 23)
- $Y_j \cap (-Y_j) = \{0\}$ . Bu varsayım her ekonomik üretim sürecinin tersine çevrilemez karakterini ifade etmektedir. (Klein, 1973, 154). Bu ifadenin ekonomik anlamı üretimin zaman alması ya da bazı üretim faktörlerinin (işgücü) gibi yeniden üretilmezlik nitelik taşımalarına bağlanabilir. Ancak genel dengenin zaten zamansız bir analiz olduğu unutulmamalıdır. (Bulutay, 1979, 56)
- $y_j^1$  ve  $y_j^2$  üretimleri  $j$ 'inci üretici için olanaklı üretimler ise bunların toplamı da olanaklıdır.  $y_j^1 + y_j^2 \in Y_j$ . Bu toplanabilirlik özelliği olarak tanımlanabilir.  $k$  herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere  $ky_j$  de üretim kümesine de dahildir. Buradan üretim kümesinin ölçeğe göre azalmama durumu anlaşılmaktadır. (Debreu, 1959, 41)
- Üretim kümesi dışbükey olması yine önemli bir varsayımdır.  $y_j^1$  ve  $y_j^2$   $j$ 'inci üretici için olanaklı üretimler ise  $0 \leq t \leq 1$  olmak üzere bunların ağırlıklı ortalaması olan  $ty_j^1 + (1-t)y_j^2$  olanaklı bir üretimdir. Dışbükeylik varsayımı ile  $0 \in Y_j$  varsayımı birleştirilerek,  $y_j$  olanaklı bir üretimken,  $ty_j$  de olanaklı bir üretimdir sonucuna ulaşılır. Debreu'ya göre bunun bir diğer anlamı da ölçeğe göre artmayan getirilerin varlığı

durumunun hakim olmasıdır. (Debreu, 1959, 41) Dikkat edilirse bu varsayım üretimin bölünebileceği, ölçeğin küçültülebileceği anlamına gelmektedir.

Toplanabilirlik ve bölünebilirlik bir arada ise üretim kümesi ölçeğe göre sabit getiri özelliğine sahip dışbükey bir koni olur. Bu özelliklere sahip bir dışbükey koni de 0 tepelidir. (verteksli)

$Y_j$  üretim kümesinin sınırları uç noktalardan oluşur. Bu varsayımı kapalılık varsayımı ile birlikte ele alınırsa, denge noktalarının dışbükey kümenin dışbükey birleşimleri şeklidenci uç noktaların da elde edilmesini sağlar. Diğer varsayımlardan da hareketle  $Y_j$  üretim kümesinin dışbükey ve kompakt olduğu ifade edilebilir.

Üretim kümesinin ya da farklı bir tanımlama ile üretim teknolojisinin dışbükey oluşu, artan marjinal maliyetlere ve azalan marjinal üretime tekabül eder. (Starr, 1997, 74) Daha sonraki bölümlerde dışbükeylik koşulunun sağlanmaması durumunda artan getirilerin söz konusu olabileceği görülecektir.

Üreticinin kar fonksiyonu noktadan noktaya  $\pi_j : R^k \rightarrow R$  eşlemesi ile ifade edilir.

Üretim kümesinde girdiler negatif sayılarla ifade edildiklerinden dolayı  $y_j$  üretimleri net üretimleri ifade ederler. Dolayısıyla  $j$ 'inci üreticinin maksimize etmek istediği karı

$\pi_j = \max p y_j$  ile gösterilir. (Klein, 1973, 156)

Kar fonksiyonunu  $\pi_j = \{p, y_j = \pi_j\}$  şeklinde ifade edilmektedir.

Bir önceki bölümden hatırlanacağı gibi bu bir çoklu düzlem ifadesine karşılık gelir. Bu durumda kar maksimizasyonu koşulları, eşkar düzlemini üretim kümesinin bir destekleyici çoklu düzlemi yapan girdi çıktı birleşiminin belirlenmesi haline gelmektedir. (Çakır, 1993, 25)

Bu çerçevede dengenin elde edilebilmesi faktör fiyatları veri iken karı maksimize eden  $j$ 'inci üreticinin eşkar eğrilerinin, üreticinin üretim kümesinin uç noktalarından oluşan sınırına teğet olmasına bağlıdır. Yani üretim kümesinin uç noktalarından oluşan sınırı, üretim işlevini oluşturur. Bu da  $j$ 'inci üretici için üretim kümesinin **üstten sınırlı** olduğu anlamına gelmektedir. Kar maksimizasyonu üretim kümesinin sınır noktalarında sağlanır. Eşkar düzleminin üretim sınırı ile kesişimi olan nokta Edgeworth analizlerinden bildiğimiz mallar arasındaki marjinal dönüşüm oranının malların fiyatlarının oranına eşit olduğu noktadır.

Ölçeğe göre azalan getiri durumunda, üretim kümesinin kesin dışbükey olduğundan hareketle, eş kar çoklu düzleminin üretim kümesine tek bir nokta da teğet olabileceği söylenebilir. Karı maksimize eden tek bir girdi çıktı birleşimi vardır. İki boylu düzlem üzerinde kolayca gösterilebileceği üzere sabit getiri durumu yani üretim kümesinin zayıf dışbükeyliği söz konusu ise eşkar çoklu düzleminin üretim kümesi ile çakışması olasılığı doğar ki bu durumda karı maksimize eden sonsuz sayıda girdi çıktı birleşimi söz konusu olabilir. Bu durumda arz bir karşılama olarak noktadan kümeye ifade edilmelidir. (Çakır, 1993, 26)

$\pi_j = \max p y_j$  şeklinde tanımlanan eşitliği sağlayan denge noktasından arz karşılmasına geçilebilir ve yine noktadan kümeye bir eşleme olmak üzere arz karşılmasını tanımlanmaktadır. Aslında üretim kümesinin ölçeğe göre azalan getirili olması halinde yani kesin dışbükeylik durumunda arz bir fonksiyon olarak da tanımlanabilir.

$$S_j : R^k \rightarrow Y_j$$

$$S_j(p) = \{y_j \mid y_j \in Y_j, p \cdot y_j = \max p \cdot Y_j\} \text{ dir.}$$

Arz karşılamasında, teknik olarak olanaklı üretimler içinde maksimum karı sağlayan üretim özelliği göz önüne alınır. Ekonomideki toplam kar ve toplam arz karşılamarı;

$$\pi(p) = \sum_{j=1}^n \pi_j(p)$$

$$S(p) = \sum_{j=1}^n S_j(p) \text{ dir}$$

Arz karşılması ile ilgili olarak yapılan varsayımlar ise;

- Her  $j$  için;  $S_j$  arz karşılması üst yarı sürekli ve kar fonksiyonu  $\pi_j$  süreklidir
- $S$  arz karşılması üst yarı sürekli ve kar fonksiyonu  $\pi$  süreklidir
- Hem bireysel hem toplam arz karşılamarı dışbükeydir olarak sıralanabilirler. (Klein, 1973, 156)

Noktadan kümeye yapılan karşılamlarla ilgili olan üst yarı süreklilik kavramının önemini anlamak için önceki bölümde ele alınan Weierstrass teoremi uyarınca;

$f : X \rightarrow \bar{R}$  şeklinde sürekli ve gerçel değerli bir fonksiyon olduğunda ve  $X$  belirli ve boş olmayan bir küme olduğunda  $f(X)$  in bir maksimum ve minimumu vardır.  $X$  belirli olduğunda  $f(X)$  de belirli olduğuna göre;  $f(X) = \bar{R}$  sınırlanmış ve kapalı olacaktır. Sınırlanmış ve kapalı bir gerçel sayılar kümesi maksimum ve minimum içereceği için istenilen sonuç elde edilmiş olur. Weierstrass teoreminin koşulları yeter şart olmakla birlikte zorunlu değildir. Bunun nedeni belirli olmayan fakat alttan sınırlanmış olan bir küme üzerindeki fonksiyon minimuma, üstten sınırlanmış bir küme üzerindeki fonksiyon da maksimuma sahip olabilmesidir.

Üst yarı süreklilik kavramını şu şekilde açıklayabiliriz.  $F : X \rightarrow Y$  bir karşılama ya da çok değerli bir fonksiyon,  $X$  ve  $Y$  sırasıyla  $R^m$  ve  $R^n$  uzaylarının alt kümeleri olsunlar. Bir  $x^0 \in X$  olmak üzere

$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0, y^k \in F(x^k), \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = y^0$  koşulları sağlanıyorsa bunun anlamı  $F$  karşılamaasının  $x^0$  noktasında üst yarı sürekli olduğudur. (Klein, 1973,109)

Arz karşılması, talep karşılmasına benzer bir şekilde sıfırıncı dereceden homojen olmakla birlikte kar fonksiyonu birinci dereceden homojendir. Bunun anlamı fiyat vektörü pozitif bir sabit sayı ile çarpıldığında talep karşılmasında olduğu gibi üreticiler üretim planlarını değıştirmezler, bunun yanında fiyatlardaki bu şekildeki bir değışiklik tüketicilerin karına da aynı oranda yansır.

Debreu önce  $j$  'inci üretici için gösterdiği homojenlik özelliklerini genişletip sırasıyla toplam arz ve kar fonksiyonları için şöyle tanımlamıştır.

$$S(p) = \eta(tp) = \eta(p)$$

$$\pi(tp) = t.\pi(p) \quad (\text{Debreu, 1959, 44})$$

### 2.2.3 Walras Kanunu ve Aşırı Talep Fonksiyonu

$P$  ile gösterilebilecek fiyat uzayını,  $n$  boyutlu bir reel uzayda birim simpleks ile sınırlandırılabilir. Bu durumda;  $P = \left\{ p \mid p \in R^N, p_k \geq 0, k = 1, \dots, N, \sum_{k=1}^N p_k = 1 \right\}$  dir.

Bu durum basitçe fiyatların negatif olamayacağını ve hepsinin birden sıfır olamayacağını göstermektedir. Fiyat vektörünü tüm koordinatlarının toplamı 1'e eşitlenerek normalleştirilebilir. (Arrow-Debreu, 1954)

Fiyatların tanımlanan  $P$  kümesinin elemanı olması durumunda, aşırı talep fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir.<sup>2</sup> (Arrow-Debreu 1954)

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(p) &= \tilde{D}(p) - \tilde{S}(p) - r = \sum_{i \in H} \tilde{D}^i(p) - \sum_{j \in F} \tilde{S}^j(p) - \sum_{i \in H} r^i \\ p \cdot \tilde{Z}(p) &= p \cdot \left[ \sum_{i \in H} \tilde{D}^i(p) - \sum_{j \in F} \tilde{S}^j - \sum_{i \in H} r^i \right] \\ p \cdot \tilde{Z}(p) &= p \cdot \sum_{i \in H} \tilde{D}^i(p) - p \cdot \sum_{j \in F} \tilde{S}^j - p \cdot \sum_{i \in H} r^i \\ p \cdot \tilde{Z}(p) &= \sum_{i \in H} p \cdot \tilde{D}^i(p) - \sum_{j \in F} p \cdot \tilde{S}^j - \sum_{i \in H} p \cdot r^i \\ p \cdot \tilde{Z}(p) &= \sum_{i \in H} p \cdot \tilde{D}^i(p) - \sum_{j \in F} \tilde{\pi}^j(p) - \sum_{i \in H} p \cdot r^i \\ p \cdot \tilde{Z}(p) &= \sum_{i \in H} p \cdot \tilde{D}^i(p) - \sum_{j \in F} \left[ \sum_{i \in H} \alpha^{ij} \tilde{\pi}^j(p) \right] - \sum_{i \in H} p \cdot r^i \\ p \cdot \tilde{Z}(p) &= \sum_{i \in H} p \cdot \tilde{D}^i(p) - \sum_{i \in H} \left[ \sum_{j \in F} \alpha^{ij} \tilde{\pi}^j(p) \right] - \sum_{i \in H} p \cdot r^i \\ p \cdot \tilde{Z}(p) &= \sum_{i \in H} p \cdot \tilde{D}^i(p) - \sum_{j \in F} \tilde{M}^j(p) - \sum_{i \in H} p \cdot r^i \leq 0\end{aligned}$$

Bu son eşitsizlik bütçe kısıtına dayanılarak yazılmaktadır.  $p \cdot \tilde{D}^i(p) \leq \tilde{M}^i(p)$ , bu sonuç tüm hane halkları için geçerlidir. (Starr, 1997, 97)

Fiyat vektörünü bir simpleks olarak tanımlayabilmenin avantajı sonraki bölümde gene dengenin varlığının ispatı olarak sunulacak sabit nokta teoreminin kullanılmasına olanak sağlamaktadır. Bu normalleştirilmiş fiyat kümesi kapalı, sınırlı ve dışbükeydir. Sadece aşırı arz nedeniyle ortaya çıkan serbest mallar dışında denge durumu tüm mallar için piyasa temizleyici bir işlev görecektir.

Bu noktada aşırı talep fonksiyonunun varlığı ile ilgili olarak da şu analiz yapılabilir.

<sup>2</sup> Arrow – Debreu (1954) aşırı talep fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlamaktadırlar.

$$z = x - y - \zeta$$

$$x = \sum_i x_i, y = \sum_j y_j, \zeta = \sum_i \zeta_i$$

Aşırı taleplerin sıfıra eşitlenmesinden elde edilen  $m$  tane denklemin oluşturduğu sistemin çözülmesi yoluyla  $m$  tane mutlak fiyatın değeri bulunmayabilir. Bütünsel bütçe kısıtının daima sağlanmasından dolayı aşırı talepler arasında bir fonksiyonel bağımlılık ilişkisi söz konusudur. Bu durumda sistem için hesaplanan jacobianının değeri sıfır olur. Oysa  $n$  değişkenli  $n$  tane türevi alınabilir denklemden oluşan bir sistemin yerel bir tek çözüme sahip olması için jacobianı küçük bir komşuluk içinde sıfırdan farklı olmalıdır.

Tüketicinin bütçe kısıtı aşırı talepler cinsinden ifade edilebilir. Bu aşırı taleplerin net değeri sıfıra eşit olmak zorundadır.  $\sum_{j=1}^m p_j (q_{ij} - q_{ij}^0) = \sum_{j=1}^m p_j Z_{ij} = 0$  Tüketicinin bütçe kısıtı bu şekliyle tüketicinin satın aldığı malların değerinin sattığı malların değerine eşit olması gerektiğini içerir. Tüketilen mal miktarının bir fonksiyonu olarak ifade edilen tüketici fayda indeksi aşırı talep ve başlangıç miktarları cinsinden ifade edilebilir.  $i$ . tüketicinin  $j$ . mala olan fazla talebi  $Z_{ij}$  tüketicinin  $j$  maldan tükettiği miktar  $q_{ij}$  ile başlangıçta sahip olduğu miktar  $q_{ij}^0$  arasındaki fark olarak tanımlanabileceğine göre,  $Z_{ij} = q_{ij} - q_{ij}^0$  tüketici fayda indeksi  $q_{ij} = Z_{ij} + q_{ij}^0$  aşırı talep ve başlangıç miktarları cinsinden ifade edilebilir.

$U_i = U_i(q_{i1}, \dots, q_{im}) = U_i(Z_{i1} + q_{i1}^0, \dots, Z_{im} + q_{im}^0)$  Tüketicinin amacı fayda indeksinin değerini bütçe kısıtı altında maksimize etmektir.

$$L_i = U_i(Z_{i1} + q_{i1}^0, \dots, Z_{im} + q_{im}^0) - \lambda \left( \sum_{j=1}^m p_j Z_{ij} \right)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial Z_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial Z_{ij}} - \lambda p_j = 0$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \lambda} = - \sum_{j=1}^m p_j Z_{ij} = 0$$

$\frac{dZ_{ij}}{dq_{ij}} = 1$  olduğuna göre, yukarıdaki denklem şu şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{\partial U_i}{\partial Z_{ij}} \frac{dZ_{ij}}{dq_{ij}} - \lambda p_i = \frac{\partial U_i}{\partial q_{ij}} - \lambda p_i = 0$$
 Bireysel bir tüketici için elde edilen bu birinci mertebe

koşullara göre, tüketicinin alış verişi işlemini, her mal çifti için ikame oranı yani marjinal faydalarının oranı fiyatların birbirine oranına eşit olana kadar devam ettirecektir. İkinci mertebe koşullar ise fayda fonksiyonunun kesin içbükeyimsiliği varsayımı altında sağlanmaktadır.

Tümel teklik teoremine göre sisteminin jacobianının ana minörleri işaret değiştirerek gidiyorsa,

$$= \begin{vmatrix} U_{11} & \dots & U_{1m} & -p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{m1} & \dots & U_{mm} & -p_m \\ -p_1 & \dots & -p_m & 0 \end{vmatrix}$$

i. tüketicinin tek değerli aşırı talep fonksiyonları vardır. Düzgün kesin içbükeyimsilik varsayımı ana minörlerin istenilen işaretlere sahip olmalarını güvence altına alır. Pozitif marjinal faydalar, birinci mertebe koşulların tüm fiyatlar pozitif olduğunda tüm miktarların da pozitif olduğu bir noktada sağlanmasını garantiler. Bu durumda sürekli ve fiyatlara göre birinci dereceden homojen aşırı talep fonksiyonları vardır. Normalleştirilmiş fiyat kümesi ele alındığında aşırı talep fonksiyonları fiyatlara göre sıfırıncı dereceden homojendir. (Henderson ve Quant, 1998, 238-239 )

Üretime ilişkin varsayımlar uyarınca negatif kar olasılığı dışlandığından, pozitif marjinal faydalar ve içsellik varsayımları birinci mertebe koşulların tüm fiyatlar pozitif olduğunda tüm miktarların da pozitif olduğu bir noktada sağlanmasını güvence altına alırlar. Dolayısıyla i. tüketici için,  $Z_{ij} = Z_{ij}(p_1, \dots, p_m)$  şeklinde tek değerli fiyatlara bağlı aşırı talep fonksiyonları var olur. Bu fonksiyonlar sürekli ve fiyatlara göre birinci dereceden homojendirler.

#### 2.2.4 Aşırı Talep Fonksiyonu ile Genel Denge

Daha önceki bölümlere dayanarak, ekonomide bir denge durumunun varlığının, bir denge fiyat vektörünün varlığı anlamına geldiği söylenebilir. Bu durumda açıklamaları daha sonraki bölümlere bırakmak üzere, gerekli varsayımlar sağlandığında böyle bir nokta ya da vektörün varlığını garantileyen **sabit nokta teoremlerinin** tanımı verilmiştir.

Genel dengenin varlığının ispatında çok temel bir rol oynayan **Brouwer Sabit Nokta Teoremi'nin** farklı kitaplarda birbirine yakın farklı tanımları vardır. Brouwer sabit nokta teoremi noktadan noktaya tanımlı bir fonksiyon üzerinde tanımlıdır. Noktadan kümeye tanımlama yapılması gerektiğinde **Kakutani Sabit Nokta Teoremini** kullanılacaktır.

Brouwer Teoreminin birinci yorumunda sürekli bir  $f(x)$  fonksiyonun kapalı bir simpleksin kendi üzerindeki noktadan noktaya eşlemesinden söz edilirken, (Klein, 1973, 136) diğer bir

yorumunda bu küme *boş olmayan*<sup>3</sup>, kompakt ve dışbükey olarak tanımlanmaktadır. (Nikaido, 1968, 63 - Casti, 2000, 63 - Border, 1999, 29). Bunların yanında Mas-Colell Poincare-Hopf teoremini kullanarak  $n$  boyutlu kompakt manifoldlara dayanan bir ispatı da ele almıştır. (Mas-Colell, 1989, 47-49)

Sabit nokta teoremlerinin ispatları "Genel Denge'nin Varlığı" başlıklı bölüme bırakılarak burada en genel ve anlaşılır tanımları verilmiştir.

### ***Sabit Nokta Teoremleri:***

**Teorem 2.5: (Brouwer Sabit Nokta Teoremi)**  $X$  kümesi kapalı bir simpleks ya da hem kompakt hem de dışbükey bir topolojik uzay,  $f$  ise  $X$  uzayını kendisine dönüştüren, (kendi üzerinde eşlemeler yapan) sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  fonksiyonunun  $X$  uzayında  $f(x^*) = x^*$  eşitliğini sağlayan bir  $x^*$  noktası vardır.

**Teorem 2.6: Kakutani Sabit Nokta Teoremi:**  $X$ ,  $R^n$  uzayının boş olmayan, kompakt dışbükey altkümesi ya da  $n$  boyutlu bir simpleks olduğunda,  $f(x)$  kümesi de boş olmayan dışbükey bir küme olmak şartıyla,  $f : X \rightarrow X$  fonksiyonu  $X$  kümesi üzerinde noktadan kümeye üst yarı sürekli bir karşılama ise  $x^* \in F(x^*)$  şeklinde ifade edilebilecek bir sabit noktası vardır.

Brouwer sabit nokta teoreminin uygulanması için gerekli olan  $X$  kümesinin belirli ve dışbükey olma koşulu, bir anlamda aşırı talep fonksiyonunun sıfırıncı dereceden homojen olması varsayımı sağlandığı düşünülebilir. Bu varsayıma dayanılarak görelî fiyatlar üzerinde durulabilmekte, fiyatlar toplamı bire eşit olacak şekilde alınarak, normalleştirme yapılabilmektedir. Normalleştirilmiş fiyatlar kümesi tanımı gereği dışbükey ve belirli bir küme olma koşullarını sağlamaktadır. Arrow (1968) bu kümeyi bir simpleks yani genelleştirilmiş üçgen olarak tanımlamıştır. Bu normalleştirilmiş fiyatlar kümesi için aşırı talepler hesaplandığında ve yeni bir fiyat vektörü oluşturulmaktadır bu vektörün elemanlarının toplamının da yine bire eşit olması gerekmektedir. (Bulutay, 1979, 73)

Fiyat kümesi normalleştirme vasıtası ile bir simpleks olarak tanımlanabilir. İzlenecek ilk adım bir birim simpleks oluşturmaktır. Bunun için önce aşırı talep fonksiyonu aşırı arzı ve dolayısıyla eksi fiyatları dışlayacak şekilde değiştirilir ve değiştirilmiş bir aşırı talep fonksiyonu elde edilir.

<sup>3</sup> Boş olmayan ifadesi sadece Nikaido'da geçiyor.

$$Z_i(p) = \max[0, z_i(p)] \text{ dir.}$$

Dikkat edilirse bu şekilde bir düzenlemenin aşırı talebin negatif değer almasına yani bir anlamda fiyatların negatif olmasına izin vermediği görülmektedir.

Bu fonksiyona dayanılarak oluşturulacak bir fiyat ayarlama fonksiyonu (price adjustment function) ile genel dengenin varlığını gösterme yoluna gidilecektir.

**Teorem 2.7:** Üretici ve tüketicilere ait olarak daha önceki bölümlerde tanımlanan aksiyomların sağlandığı varsayılırsa,  $p^* \in P$  olmak üzere  $p^*$  denge fiyat vektörünün varlığı iddia edilebilir.

**Kanıt:** Bu teoremin ispatı için fiyat kümesinde kendi üzerine bir fiyat ayarlama fonksiyonu tanımlansın.  $T(p) : P \rightarrow P$  olmak üzere.

$$T_k(p) \equiv \frac{p_k + \max[0, \tilde{Z}_k(p)]}{1 + \sum_{n=1}^N \max[0, \tilde{Z}_n(p)]} = \frac{p_k + \max[0, \tilde{Z}_k(p)]}{\sum_{n=1}^N \{p_n + \max[0, \tilde{Z}_n(p)]\}} \text{ dir.} \quad (\text{Starr, R., 1997, 101, Varian, H., 1992, 321})^4$$

Fiyat ayarlama fonksiyonu; fiyat simpleksi üzerinde kalmak şartıyla, aşırı talep olması durumunda fiyatların yükseleceği, fazla arz olması durumunda fiyatların azalacağı bir şekilde tanımlanmıştır. Brouwer Sabit Nokta Teoremi'ne göre  $T(p^*) = p^*$  koşulunu sağlayacak bir  $p^* \in P$  vardır.

$$p_k^* = \frac{p_k^* + \max[0, \tilde{Z}_k(p^*)]}{1 + \sum_{n=1}^N \max[0, \tilde{Z}_n(p^*)]} \text{ dir.} \quad \text{Bu durumda } p_k^* \text{ ya sıfıra eşittir ya da pozitif bir değere}$$

sahiptir.

- Durum:  $p_k^* = 0$  olması durumunda  $\max[0, \tilde{Z}_k(p^*)] = 0$  olur. Bundan dolayı  $\tilde{Z}_k(p) \leq 0$  olur.
- II. Durum:  $p_k^* = \frac{p_k^* + \max[0, \tilde{Z}_k(p^*)]}{1 + \sum_{n=1}^N \max[0, \tilde{Z}_n(p^*)]} \geq 0$  olması durumudur.

<sup>4</sup> Biz burada Starr'ın kullandığı formülasyonu kullanıyoruz.

İşlemleri kısaltmak için bir değişken tanımlayalım.  $0 < \alpha = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N \max[0, \tilde{Z}_n(p^*)]} \leq 1$

İkinci durum böylece iki alt durumda çözülebilir;

- II. a)  $\alpha = 1$ : Bu durum her  $k$  için  $\tilde{Z}_k(p^*) \leq 0$  olması sonucunu doğurur.
- II. b)  $\alpha < 1$ : Bu durumda elimizdeki denklem şu şekilde ifade edilebilir.

$$p_k^* = \alpha \cdot p_k^* + \alpha \cdot \max[0, Z_k(p^*)]$$

$$(1 - \alpha) \cdot p_k^* = \alpha \max[0, Z_k(p^*)]$$

Eşitliğin her iki tarafı  $\tilde{Z}_k(p^*)$  ile çarpılırsa

$$(1 - \alpha) p_k^* Z_k(p^*) = \alpha (\max[0, Z_k(p^*)]) Z_k(p^*),$$

bu noktada Walras Kanunu yeniden tanımlanabilir.

$$0 \geq p^* Z(p^*) = \sum_{k \in \text{durum I}} p_k^* Z_k(p^*) + \sum_{k \in \text{durum II}} p_k^* Z_k(p^*)$$

$$= 0 + \sum_{k \in \text{durum II}} p_k^* Z_k(p^*)$$

Bu ifade basitleştirilerek aşağıdaki şekle getirilebilir.

$$0 \geq (1 - \alpha) \sum_{k \in \text{durum II}} p_k^* Z_k(p^*) = \alpha \sum_{k \in \text{durum II}} (\max[0, Z_k(p^*)]) Z_k p^*$$

Ancak bu ifadenin anlamı ikinci durumdaki bütün  $k$  lar için  $Z_k(p^*) \leq 0$  olduğudur. Ne durum I ne de durum II de herhangi bir  $k$  için  $Z_k(p^*) > 0$  olmamasına rağmen Walras kanununundan  $p^* Z(p^*) = 0$  olmalıdır.  $k$  için  $Z_k(p^*) < 0$  olduğu için  $p_k^* = 0$  dır. (Starr, 1997, 101-103)

Bu koşullar altında genel dengenin temel teoremi bir özel sahiplik ekonomisinin (private-ownership economy) tanımlanmasından hareketle ifade edilebilir.

$$\left\{ \left\{ X_i, \preceq_i \right\}, \left\{ Y_j \right\}, r, \left\{ \alpha_{ij} \right\} \right\}$$

Şeklinde tanımlanan bu sistem aşağıdaki iki koşulu sağlaması durumunda bir özel ekonomi olarak adlandırılabilir

- Her  $i$  için,  $\sum_{i=1}^m r_i = r$  koşulunu sağlayan bir  $r_i \in R^k$  vardır.
- Her  $(i, j)$  ikilisi için  $\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = 1$  olmak üzere  $\alpha_{ij} \geq 0$  vardır.

Rekabetçi ekonomide, ekonomik birimler, fiyatlara etki edemeyen birer miktar ayarlayıcısı olarak tanımlanırlar. (Klein, 1973, 162) Genel dengenin varlığı bu şekilde tanımlanmış bir özel sahiplik ekonomisinde gösterilecektir.

Bir özel sahiplik ekonomisi aşağıdaki varsayımların sağlanması durumunda bir dengeye sahiptir.

- Her tüketicinin, tüketim kümesi kapalı, dışbükey ve alttan sınırlıdır. Hiçbir tüketici için doyum sağlayacak, bir tüketim sepeti yoktur.
- Her tüketici için tercih sıralamaları kümeleri kapalıdır.
- Her tüketici kendi tüketim kümesinin bir iç noktası olan başlangıç donanımları vektörüne sahiptir.
- Her tüketicinin tercih ön sıralaması güçlü dışbükeydir.
- Her firma için orjin üretim kümesinin bir elemanıdır.  $0 \in Y_j$
- Her  $j$  firması üretim kümesi  $Y_j$  kapalı ve dışbükey olmasından hareketle toplam tüketim kümesi  $Y = \sum_{j=1}^m Y_j$  de kapalı ve dışbükeydir.

- $Y \cap (-Y) \{0\}$
- $Y \supset (-R_+)$  (Varian, 1992, 344)

Debreu'nun E ile tanımladığı özel sahiplik ekonomisinin denge durumunda  $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$  noktası var olacaktır. Öyle ki

- $x_i^*$  noktası,  $\left\{ x_i \in X_i \mid p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot w_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot p^* \cdot y_j^* \right\}$  kümesinin, her tüketicinin tercih önsıralaması koşulları altında en büyük elemanıdır.

- $y_j^*$  her üreticinin için  $p^*$  fiyatına göre  $Y_j$  üzerinde karını maksimize eder.
- $x^* - y^* = w$  dir. (Debreru, 1959, 78-81)

Denge fiyatları kümesinin aranması sürecine *Walrasçı deneme yanılma* adı verilmektedir. Burada sorulması gereken soru bu sürecin denge fiyatlarına doğru işleyip işlemediğidir. Arrow ve Hahn bu deneme yanılma sürecinin istikrarlı olduğunu aşırı talep fonksiyonlarını kullanarak göstermeye çalışmışlardır. Ancak burada önemli olan soru modelin temel varsayımlarına göre deneme yanılma sürecinin dengeye gelecek şekilde ve sistemin istikrarını sağlamaya yetip yetmeyeceğidir. Arrow-Debreu modelindeki varsayımların, sabit nokta teoreminin uygulanabileceği, sürekli ve tanımlı arz ve talep fonksiyonları elde etmektir ancak deneme yanılma sürecinin istikrarlı olabilmesi için , aşırı talep fonksiyonlarının sürekliliğinin tanımlı olması yeterli değildir. Önemli olan bu fonksiyonların biçimleridir. Bir malın fiyatı denge fiyatının üzerindeyken talep fazlası pozitif buna karşılık denge fiyatının altındayken negatif ise deneme yanılma süreci istikrarsızlığa doğru gidecektir. Aşırı talep fonksiyonunun sürekli olması işareti ile ilgili herhangi bir koşul içermez, ancak istikrarın sağlanması ile ilgili olarak işaret belirleyicidir. Fiyat genel denge fiyatının üzerindeyken aşırı talebin pozitif olması beklenen bir sonuç değildir, ancak bununla birlikte genel denge modelinin bireyler arasındaki bütün etkileşimlere hesaba katması gerektiğini düşünülürse, bu kural dışı durumun önemi ortaya çıkmaktadır.

Modelde mallar arasında bir **ikame** ilişkisi söz konusu olduğu da göz önüne alındığında bir malın fiyatı arttığında fazla talebinin azalması ve diğer malların fiyatlarının artması durumunda talep fazlasının artması gerektiği düşünülebilir. Bu dengenin istikrarlı olmasını sağlamaktadır. Dolayısıyla mallar arasındaki bu ikame varsayımı makul görülmektedir. Ancak buna rağmen Arrow – Debreu talep fazlası fonksiyonlarının bu ikame ilişkisini doğrulaması için herhangi bir neden olmadığı gibi, bu fonksiyonlar sürekli olmakla birlikte herhangi bir biçime sahip olabilirler. *Sonnenschein - Mantel - Debreu Teoremi* olarak adlandırılan bu sonuç, talep fazlası fonksiyonlarının biçimi hakkında bir şey söylemek mümkün olmadığı için, bir malın fiyatı arttığı zaman fazla talebin de artmasının olası bir durum olduğunu doğrulamaya imkan verir. Sezgisellikte uzak bu durum ancak denge durumunda bireylerin davranışlarının birbirleri üzerindeki karşılıklı etkilerin karmaşıklığıdır. Bu sonuç modelin başlangıçtaki kaynaklar, tercih ilişkileri ve üretim fonksiyonları konusundaki tercihlerde büyük bir serbestlik derecesi tanımlamasından kaynaklanıyor olabilir. Üstelik bütün hane halklarının aşağı yukarı aynı tercih ilişkisine sahip oldukları ve başlangıç donanımlarının birbirlerine benzediği varsayımlar bu serbestlik dereceleri sınırlandırılabilir, bu sonuç

geçerli olmaya devam eder. Neoklasik kuramcılarının amacı bireysel davranışlardan hareketle birtakım yasalara ulaşmaktır. Ancak Arrow-Debreu'nun aşırı talep fonksiyonları herhangi bir şekilde sahip olabiliyorlarsa, bu yasaların var olmadığı; ayrıca yeterince genel ve tam rekabete dayalı bir yaklaşım benimsenince bütün olasılıkların imkan dahilinde olduğu sonucu ortaya çıkar. Bu noktada ekonomiyi etkileyen bir şokun denge üzerindeki etkileri ile ilgili olarak doğrulamalara gitmek mümkün değildir. Bu sorun ile ilgili olarak Guerrien'in son yorumu; Tam rekabet şartlarında dengenin varlığının neoklasik teoremin en büyük katkılarından biri sayılabileceğini, ancak deneme yanılma sürecinin bu dengelerden birinin gerçekleşmesini sağlayamamasının katkının önemini büyük ölçüde azalttığıdır. (Guerrien, 1999, 54-61)

Debreu 1974'de yazdığı Aşırı talep Fonksiyonları başlıklı makalesi ile Guerrien'in *Sonnenschein - Mantel - Debreu Teoremi* olarak adlandırdığı aşırı talep fonksiyonlarının karakterleri ile ilgili konuları ele almıştır. Debreu'nun bu makalesinin kaynakçasında Mantel'in bir, Sonnenschein'in üç makalesi yer almaktadır. Debreu'ya göre bir mübadele ekonomisinin aşırı talep fonksiyonunu  $S = \{p \in R^l \mid p \geq 0, \|p\| = 1\}$  şeklinde bir pozitif fiyat vektörlerinin bir kümesidir.  $f : S \rightarrow R^l$  tüketicinin bireysel aşırı talep fonksiyonu sürekli ve  $S$  kümesi içindeki her  $p$  için  $p \cdot f(p) = 0$  dır. (Debreu, 1983, 203-209)

Aşırı talep fonksiyonlarının sahip olmaları gereken özellikler genel denge literatüründe önemli bir tartışma alanıdır. Sonnenschein'e göre, Mantel'in her tüketici dolaylı fayda fonksiyonlarını kullanarak ispatladığı teoreme göre  $F, S$  üzerinde tanımlı bir  $C^1$  özelliğine sahip aşırı talep fonksiyonu olduğunda, her  $\varepsilon > 0$  için  $F$  sınırlıdır ve ikinci derece kısmi türevlere sahiptir ve homotetik, dışbükey ve monoton tercihler için  $\ell$  tüketicili bir  $\mathfrak{S} = (\succeq_i, w^i)$  mübadele ekonomisi vardır. (Sonnenschein ve Shafer 1991, 680-682)

Scarf ise aşırı talep fonksiyonlarının orjin dışında bütün pozitif kadranda tanımlı ve sürekli olması gerektiğini sıfırcı dereceden homojen olması gerektiğini ve Walras Kanunu'na uyması gerektiğini ifade etmektedir. Scarf aşırı talep fonksiyonunu birim kürenin pozitif kadranda bulunan kısmının üzerinde sürekli bir vektör alanı<sup>5</sup> olarak tanımlar.  $p^*$  denge fiyat vektörünün bütün koordinatlarının pozitif olması durumunda vektör alanı olarak tanımlanan aşırı talep fonksiyonunun bir sıfırdır. (Scarf, 1991, 1010-1011)

<sup>5</sup> Vektör alanı kavramı 3.2.6 bölümünde ele alınmaktadır.

### 2.2.5 Genel Denge Refah Ekonomisi ve Pareto Etkinliği

Neoklasik kuramcılarının tam rekabet modelini esas almalarının bir nedeni de modelin normatif niteliğidir. Bu niteliği gereği modeldeki dengeler optimal yani etkindir. Bu bir anlamda alternatif çözümler arasında en iyi olmayı ifade eder.(Guerrien, 1999, 63) Pareto optimalite kavramı refah iktisadının temelini oluşturan kaynak tahsisinin etkinliğinin tanımlanmasını mümkün kılar. Üretim ve dağıtımın bir başkasının faydasını azaltmaksızın bir en az bir kişinin faydasını artıracak şekilde yeniden örgütlenemediği bir kaynak tahsisi Pareto optimal (Pareto etken) olarak tanımlanır. (Henderson ve Quant, 1998, 264)

Denge - optimum ilişkisi genel denge modelinin önemli vurgularından biridir. Debreu denge ile optimum arasındaki ilişkiyi iki yönlü olarak ortaya koymuştur. Debreu fiyat sistemi aracılığıyla bir dengenin, optimum ve bir optimumun da bir denge olduğunu göstermiştir.

Debreu öncelikle dengenin (rekabetçi dengenin) optimal olduğunu göstermektedir.

Her  $i$  için  $E$  aşağıdaki koşulları sağlayan bir denge olsun.

- $X_i$  konvektir.
- Eğer  $x_i^1$  ve  $x_i^2$ ,  $X_i$  'nin iki noktası ve  $t, ]0,1[$  içinde reel bir sayı ise  $x_i^2 \succ x_i^1$  göstermektedir ki  $tx_i^2 + (1-t)x_i^1 \succ x_i^1$  dir.

$x_i^*$  doyuma ulaşmış bir tüketimi ifade etmemek üzere  $((x_i^*), (y_j^*))$  dengesi optimumdur. (Debreu, 1959, 94)

Bu teoremin kanıtlanmasına  $[(x_i^*), (y_j^*)]$  çiftine yeğlenen diğer bir erişilebilir durumun  $[(x_i), (y_j)]$  varlığı halinde, optimum yukarıda verdiğimiz tanımı gereği,  $[(x_i^*), (y_j^*)]$  şeklindeki denge durumunun Pareto optimumu olamayacağını belirtilerek başlanılabilir. O halde, teoremin kanıtlanabilmesi için, söz konusu nitelikte  $[(x_i), (y_j)]$  noktasının varlığına olanak bulunmadığı gösterilmelidir. Buradaki kanıtlamada ulaşması amaçlanan sonuç budur.

Bu sonuca varmak için, tersten başlayarak, bütün  $i$  ler için  $x_i > x_i^*$  niteliğinde bir erişilebilir durumun  $[(x_i), (y_j)]$  var olduğunu kabul edilecektir. Fakat sonuçta  $x_i$  nin  $x_i^*$  ye yeğlenemeyeceği  $x_i$  ile  $x_i^*$  nin tüketiciler açısından farksız durumlar olduğu gösterilecektir. Böylece de rekabetçi dengenin, yukarıdaki varsayımların gerçekteşmesi halinde, Pareto optimumunu vereceği gösterilmiş olacaktır.

$G = \sum_i X_i(x_i^*) - \sum_j Y_j$  ve  $a$  tüketicisinin kendi tüketim kümesi olan  $X_a$ 'da,  $x_a^*$ 'ya yeğlediği

tüketimlerden oluşan kümeyi gösteren  $\bar{X}_a(x_a^*) = \{x_a | x_a \in X_a, x_a \succ x_a^*\}$  kümesi olsun. Bu durumda bir  $\bar{G} = \bar{X}_a(x_a^*) + \sum_{i \neq a} X_i(x_i^*) - \sum_j Y_j$  ifadesi tanımlanabilir.

$r = x^* - y^*$  nin, tüketim harcamasını en az kıldığı gösterilmeye çalışılacaktır. Bunun için de önce,  $x_i^*$  nin  $X_i(x_i^*)$  kümesi üzerinde tüketim harcamasını en az kıldığı ortaya koyulur.  $x_i$  ile  $x_i^*$  noktaları arasındaki ilişki konusunda iki durumun varolabilir. Bunlar  $x_i > x_i^*$  ve  $x_i \sim x_i^*$  dir.

$x_i > x_i^*$  durumu rekabetçi denge tanımında  $x_i^*$  nin  $px_i^*$  değerine eşit ya da daha küçük harcamalar için en büyük öge niteliği taşır. Bu nitelik ve en büyük öge tanımı  $x_i$  nin  $x_i^*$  ye yeğlenebilmesi için  $x_i$  deki tüketim harcamasının  $x_i^*$  dekinden büyük olması gerektiği sonucuna varılır. Dolayısıyla da  $x_i > x_i^*$  olması durumunda  $x_i^*$  nin  $X_i(x_i^*)$  kümesi üzerinde tüketim harcamasını en az kıldığı gösterilmiş olur.

$x_i \sim x_i^*$  durumunda  $px_i$  nin  $px_i^*$  den küçük olamayacağını gösterebilmek amacıyla,  $px_i < px_i^*$  olduğu varsayılırsa,  $x_i^*$  doyma noktası olmadığı için, ona ve  $x_i$  ye yeğlenen bir nokta, örneğin  $x_i'$  var olacaktır.  $tx_i' + (1-t)x_i = x_i'' > x_i$  ya da  $x_i''$

yazılabilecektir. Şimdi  $t$  sıfıra yaklaştırılarak  $x_i''$ ,  $x_i$  ye,  $px_i''$   $px_i$  ye yaklaştırılabilir.  $px_i'' < px_i^*$  olur.

Yani  $px_i < px_i^*$  olması durumunda  $x_i^*$  ye yeğlenen ve fakat  $x_i^*$  durumundan daha az harcama yaratan nokta ( $x_i''$ ) söz konusu olmaktadır. Buna ise, rekabetçi dengenin tanımı gereği olanaksızdır. Dolayısıyla da  $px_i < px_i^*$  durumu olanaksızdır.

Böylece de  $x_i^*$  nin  $X_i(x_i^*)$  kümesi üzerinde tüketim harcamasını en az kıldığı ortaya konmuş olmaktadır.

Rekabetçi denge tanımında  $y_j^*$  lerin  $py_j$  yi  $Y_j$  kümesi üzerinde en çok kıldığı kabul edilmektedir. Böyle olduğuna göre  $-y_j^*$  ler  $py_j$  yi  $-Y_j$  üzerinde minimum kılacaklardır. Bu sonuç,  $x_i^*$  nin  $X_i(x_i^*)$  kümesi üzerinde tüketim harcamasını (değer fonksiyonunu) enaz

kılması nedeniyle,  $\sum_i x_i^* - \sum_j y_j^*$  ye eşit olan  $r$  nin, değer fonksiyonu  $G$  kümesi üzerinde minimum yapacağı sonucuna varılabilecektir. (Bulutay, 1979, 116-119)

Debreu ikinci olarak da bir optimumun aynı zamanda denge olduğunu göstermektedir.

$E$  her  $i$  için aşağıdaki koşulları sağlayan bir bir ekonomidir.

- $X_i$  konvektir.
- $X_i$  içindeki her  $x_i'$  için, kümeler  $\{x_i \in X_i \mid x_i \succ_i x_i'\}$ ,  $\{x_i \in X_i \mid x_i \prec_i x_i'\}$  kümeleri  $X_i$  içinde kapalıdır.
- Eğer  $x_i^1$  ve  $x_i^2$ ,  $X_i$  nin iki noktası ve  $t$ ,  $]0,1[$  içinde reel bir sayı ise  $x_i^2 \succ_i x_i^1$  göstermektedir ki  $tx_i^2 + (1-t)x_i^1 \succ_i x_i^1$  dir.
- $Y$  konvektir.
- $x_i^*$  doyuma ulaşmış bir tüketim olmamak üzere,  $((x_i), (y_i))$  optimumu verildiğinde, sıfırdan farklı bir  $p$  fiyat sistemi mevcuttur ve aşağıdaki koşulları sağlar .
- $x_i^*$ ,  $p.x_i$  'yi her  $i$  için  $\{x_i \in X_i \mid x_i \succ_i x_i^*\}$  üzerinde minimize eder.

$y_j^*$ ,  $p.y_j$  'yi her  $j$  için  $Y_j$  üzerinde maximize eder. (Debreru, 1959, 95)

$[(x_i^*), (y_j^*)]$  Pareto optimumu olduğuna, ve Pareto optimumu erişilebilir bir durum niteliği taşıdığına göre  $\sum_i x_i^* - \sum_j y_j^* = r$   $r, \bar{G}$  ye ait olmayacaktır. Çünkü  $r, \bar{G}$  ye ait olsa idi,  $\bar{G}$  erişilebilir durum niteliği taşırdı ve kendi  $(\bar{G})$  tanımı gereği  $[(x_i^*), (y_j^*)]$  durumuna yeğlendiği için,  $[(x_i^*), (y_j^*)]$  Pareto optimumu olmazdı.

$\bar{G}$  kümesi dışbükey olduğunda burada Minkowski teoreminin uygulanması olanaklıdır. Yani,  $r$  noktasından geçen ve  $\bar{G}$  kümesi için sınırlandırıcı olan bir çokludüzlem vardır. başka bir deyişle,  $\bar{G}$  deki bütün  $a$  lar için  $pa \geq pr$  eşitsizliği yazılabilir.  $\bar{G}$  kümesinin dışbükeyliği ise teoremin yukarıda belirtilen dört varsayımı ile sağlanmaktadır.

Yukarıda tanımı verilen  $G$ ,

$X_a(x_a^*) = \{x_a \mid x_a \in X_a, x_a \gg x_a^*\}$  olarak ifade edilirse,

$G = X_a(x_a^*) + \sum_{i \neq a} X_i(x_i^*) - \sum_j Y_j$  şeklinde gösterilebilir. Böyle olduğuna göre  $G$  ile  $\bar{G}$

arasındaki tek fark,  $a$  tüketicisi için,  $G$  de  $x_i \gg x_a^*$  durumunun,  $\bar{G}$  de  $x_a \gg x_a^*$  durumunun söz konusu olmasıdır.

Bu nitelikteki  $G$  kümesinin  $\bar{G}$  nin bitişmesinde yer aldığı, dolayısıyla  $r$  den geçen  $H$  çokludüzleminin yarattığı kapalı yarı-uzayın üzerinde kaldığı gösterilebilir. Böyle olduğuna göre,  $G$  de yeralan ve  $H$  üzerinde bulunan  $r$  nin  $G$  kümesi üzerinde değer fonksiyonunu minimum kılacağı söylenebilir. Diğer taraftan,  $r = \sum_i x_i^* - \sum_j y_j^*$  olduğu ve bir önceki bahiste verilen ikinci yardımcı teorem gözönüne alınınca da,  $x_i^*$  nin, bütün  $i$  ler için  $p x_i$  yi,

$$X_i(x_i^*) = \{x_i \mid x_i \in X_i, x_i \gg x_i^*\}$$

kümesi üzerinde minimum,  $y_j^*$  nin, bütün  $j$  ler için  $p y_j$  yi  $Y_j$  de maksimum kılacağı sonucuna varılmış, teorem kanıtlanmış olur. (Bulutay, 1979, 116-119)

Bu iki sonu refah ekonomisi teoremlerini gündeme getirmektedir. Refah ekonomisinin birinci teoremine göre eğer  $(x, p)$  Walrascı anlamda bir denge ise  $x$  tahsisi Pareto etkindir. Refah ekonomisinin ikinci teoremi ise  $x^*$  bütün ajanlar için Pareto etkin bir tahsis ise tercihlerin dışbükey sürekli ve monotonik olduğu varsayımı altında,  $w_i = x_i^*$  başlangıç donanımları için  $x^*$  Walrascı bir dengedir. (Varian, 1992, 326) Guerrien, rekabetçi sistemin optimalliğini gösteren birinci teoremin neoklasik iktisatçıların daha liberal kesimleri tarafından savunulurken ikinci teoremi savunanların birtakım sosyal adalet ölçülerine uyan bir Pareto optimumun seçilmesi gerektiğini ve ona tekabül eden denge fiyatlarının belirlenmesi işinin piyasaya bırakılmasının savunduklarını belirtmektedir. (Guerrien, 1999, 71-72) Bu yoruma karşın Starr ise refah ekonomisinin ikinci teoreminin piyasa ekonomisinin kaynak tahsisi mekanizmasının anlamlı bir savunusunu temsil ettiğini söylemektedir. (Starr, 1997, 151)

İktisatta denge konusunun gündeme geldiği diğer bir alan toplumsal bir dengeye ulaşılıp ulaşılamayacağı sorusudur. Kamusal tercihler alanında, medyan seçmen, oyçokluğu dengesinin etkinsizliği, oylama paradoksu, tek zirveli tercihler durumunda çoğunluk oylamasının varlığı gibi kavramlar üzerinde durulur. Bu kavramların da gösterdiği gibi iktisatçıların üzerinde durdukları konu, oylama mekanizmaları aracılığıyla toplumsal bir

dengeye ulaşıp ulaşılamayacağı sorusudur. **J. Stiglitz**, çoğunluk oylamasına dayalı bir siyasal süreçte dengenin olmayabileceğini vurgulamıştır. (Stiglitz, 1994, 199)

Bir toplumda alınan ortak kararların, bireylerin aldığı kararların bir toplamı olarak nasıl rasyonel bir şekilde belirlenebileceği sorunu **sosyal tercih** kavramı olarak ele alınmaktadır. Sosyal tercihler teorisinin öncülüğünü oylama ve oyçokluğu kavramları üzerinde yaptığı çalışmalarla **Marki De Condorcet** ve **C. Borda** yapmıştır. Ancak teorisinin asıl kurucusu Arrow olarak kabul edilmektedir. Teori üzerine çalışan diğer bilim adamları arasında **D. Black** ve **A. Sen** sayılabilir.

Sosyal Seçimin yani kamu sektöründe karar almanın nasıl ve kimin tarafından gerçekleştirildiğini açıklamaya çalışan analizler üçe ayrılabilir. Oylama modeline göre sosyal seçim, seçim sandığı aracılığıyla gerçekleştirilmektedir. Bürokrasi modeline göre sosyal seçim bürokratlar tarafından belirlenmektedir. Seçmenlerin ancak sınırlı bir denetimi söz konusudur. Çıkar grupları modellerine göre ise baskı grupları veya sınıflar pazarlık ya da sınıf mücadelesi içinde sosyal tercihleri tayin ederler. (Akalin, 1981, 77) Arrow'un öncülüğünü yaptığı sosyal seçim teorisini bir anlamda **neoklasik paradigma** ile **kamu tercihi** paradigması arasında değerlendirmek olasıdır.<sup>6</sup>

Arrow, çözümlenmesini, teorik refah iktisadından çıkan sosyal refah fonksiyonu tartışması çerçevesinde ele almış ve bireysel tercih dizisini, tutarlı bir sosyal ya da kollektif tercih dizisine birleştirecek bir kollektif karar ilkesinin olmadığını göstermiştir.

Arrow Toplumsal Seçim ve Kişisel Değerler başlıklı eserinde, Neoklasik teorisinin dayandığı iki temel varsayımın tutarsızlığını ortaya koymuştur. Bu varsayımlardan biri tüketici egemenliği diğeri kişiler arasında fayda karşılaştırması yapılamayacağı için gelir bölüşümünün veri kabul edilmesidir. Arrow bu iki varsayım altında demokratik oy verme yöntemlerinden hiçbirinin hükümete uygulayacağı politikada rehberlik edebilecek tutarlı almasıkları vermeyeceğini göstermiştir. Öyleyse liberal öğretinin bu iki varsayımı geçerliyse hükümete yol gösterecek tutarlı bir program ancak tepeden dikte edilmiş olabilir. Buna göre tüketici egemenliği ile birlikte toplumdaki refah dağılımının biçimine kayıtsızlık, özgürlük ilkesine dayanan politik demokrasinin yaşayabilirliğini ortadan kaldırmaktadır. Arrow oy verme ile piyasa mekanizması arasında temelde fark olmadığını göstermiştir. Pareto

<sup>6</sup> **Chichilnisky**, şimdiye kadar birbirlerinden ayrı olarak ele alınan rekabetçi dengenin varlığı ile sosyal seçim fonksiyonunun varlığının eşdeğerliğini bu problemlerin topolojik formülasyon kullanılarak tanımlanmalarıyla ve ekonomi ile ilişkilendirilebilecek koni ailelerinin özellikleri yardımıyla gösterilebileceğini savunmaktadır (Chichilnisky, 1993)

optimumu ideolojisine hem piyasada dengeye açıkça politik etkeni içererek hem gelir bölüşümünü ihmal etmenin sonuçlarını göstererek darbe vurmuştur.(Kazgan, 1993, 136)

Sosyal tercihler teorisi çeşitli farklı sorulara yanıt arayan geniş bir disiplin olarak değerlendirilebilir. Bu sorulardan bazıları

- Kamusal karar almada ne zaman çoğunluk ilkesi tutarlı ve anlamlı sonuçlara ulaştırır?
- Üyelerinin birbirinden farklı ilgi ve öncelikleri göz önünde bulundurulursa, bir topluluğun bütün halinde ne kadar iyi durumda olduğuna nasıl karar verilebilir?
- Her bireyin farklı sorunlarının ve çok çeşitli dertlerin bulunduğu toplumda toplam yoksulluğu nasıl ölçülebilir?
- Bireylerin hak ve özgürlüklerini, bireysel tercihlere gereken önemi vererek nasıl uzlaştırılabilir?
- Doğal çevre ve salgınlara karşı güvenlik organizasyonu gibi kamu mallarının sosyal değerlerini nasıl belirlenebilir.?

şeklinde sıralanabilir. (Sen, 1999)

Sosyal tercihler teorisi sistematik bir disiplin olarak ilk defa Fransız Devrimi sonrasında Fransız matematikçiler Borda ve Condorcet tarafından gündeme getirilmiştir. Borda ve Condorcet konuyu matematiksel terimler etrafında incelemişler ve oylama yöntemleri üzerinde durmuşlardır. Bu ilk dönem teorisyenleri, genel olarak vatandaşların tercihleri doğrultusunda hareket eden bir demokratik karar alma mekanizması oluşturmaya çalışmış, ancak umut kırıcı sonuçlara ulaşmışlardır. Çünkü oy çokluğu ilkesi hem teorik hem pratik anlamda tutarsız sonuçlar vermektedir.

Sosyal tercihler konusunu yirminci yüzyılda ele alan Arrow da toplumsal kararların belirlenmesindeki zorluklar ve ortaya çıkan tutarsızlıklarla ilgilemiştir. Arrow sosyal tercihler disiplinini planlanmış ve aksiyomlardan oluşan bir çerçeveye oturtmuştur. Bu nedenle Arrow modern sosyal tercihler teorisinin kurucusu olarak kabul edilmektedir.

Arrow'un ortaya koyduğu teoremi Genel Olanaklar Teorisi olarak adlandırılmıştır. Ancak olumsuz sonuca ulaşan bu teorem daha sonra Arrow'un Olanaksızlık teoremi olarak adlandırılmaya başlanmıştır.

Arrow Olanaksızlık teoreminde, alternatifler arasında seçim yapılırken belirlenmesi gereken toplumsal tercihin bireysel tercihlerden nasıl elde edileceğini belirleyen anayasal kuralların özelliklerini ele almıştır. Arrow'a göre bu anayasal kuralların sağlaması gereken koşullar şunlar olmalıdır:

- a) Kolektif rasyonalite : Bir toplumsal tercihten kaynaklanan tercih sıralaması toplumdaki herhangi bir rasyonel bireyin tercih sıralamasını yansıtmalıdır. Bu nedenle söz edilen tercih sıralaması tutarlı ve geçişli olmalıdır.
- b) Pareto ilkesi: Eğer bir topluluğun tüm üyeleri A'yı B'ye tercih ediyorsa bu durumda toplumsal tercih de aynı şekilde belirlenmelidir.
- c) İlgisiz alternatiflerin bağımsızlığı: Seçim yapılacak alternatiflerden bazıları ilgisiz hale geldiği için devre dışı bırakılırsa geri kalan alternatiflerin tercih sıralaması bundan etkilenmemelidir.
- d) Diktatörlükten uzak olma: Hiçbir bireyin tercihleri toplumsal tercihler üzerinde otomatik olarak belirleyici olmamalıdır.
- e) Sınırsız alan: Hiçbir birey tercihleri nedeniyle toplumsal tercihlerin belirlenmesi sürecinin dışında bırakılmamalıdır. (Kwang, 1990)

Arrow'a göre bu koşulların hepsini aynı anda sağlayan bir anayasa oluşturmak mümkün değildir. Arrow paradoksu olarak adlandırılan bu sonuç rasyonel birey davranışlarının toplamının nasıl irrasyonel müşterek kararlara dönüşebildiğini gösteren en basit örneklerden birisidir. Paradoks ilk olarak 1785'te Condorcet tarafından ortaya konmakla birlikte kesin sonuçları 1950'li yıllarda Kenneth Arrow ve Duncan Black'in çalışmalarıyla belirlenmiştir. Seçmenler rasyonel davranmasına rağmen ulaşılan sosyal tercihlerin tutarsız olması şaşırtıcı bir sonuçtur. Tutarsız bir sosyal tercih elde edebilmek için seçmenlerde bireysel bazda birtakım irrasyonellikler bulunması gerekli değildir<sup>7</sup>.(Johnson, 1998, 3)

Arrow Paradoksu, çoğunluk kuralı uygulaması halinde bireysel tercih sıralamasından toplumsal tercihlere ulaşılamayacağını ifade etmektedir. Arrow'a göre ise dönemsel çoğunluktan (oylama paradoksundan) çıkmanın tek yolu, bireylerin tek zirveli (single peaked) tercihlere sahip olmalarıdır. (Aktan ve Dileyici, 2001 )

<sup>7</sup> Chichilnisky, pareto şartıyla, süreklilik kuralları için bir diktatörlüğün varlığının topolojik olarak eşdeğer olduğunu göstermiştir. (Chichilnisky, 1982)

**J. Buchanan** Arrow'un imkansızlık teoremine tepki göstermiş ve toplumsal tercihin siyasal bir süreç içinde belirlendiğini, bu siyasal sürece de çok sayıda kişinin katıldığını bu nedenle tutarlı bir tercih fonksiyonu oluşturmayı ümit etmenin anlamsız olacağını belirtmiştir. Buchanan'a göre eğer bireysel tercihler bir dalgalanma ya da tutarsızlık nedeni ise böyle bir tutarsızlığın tutarlılığa tercihi gerekir. Çünkü tutarlılık gruptaki bazı üyelerin isteğinin diğer üyelere zorla kabul ettirilmesi olacaktır. Buchanan bu konuda şunları söylemektedir. *“Arrow, bir topluma faydası olan planlama emrine rehber bazı ekonomistlerin sosyal refah fonksiyonu olarak isimlendirdiği dizayn edilmiş olanı yapmaya çalışmıştır. Arrow bireysel üyelerin müstakil tercihleri hakkında bilgi yolu ile bazı şeyler yapmayı araştırıyor ve alışılmış piyasa tercihlerini yapmak için bireylerin standart mülkiyetleri ihtiyacı olduğu önceliklerini ortaya koymaya istekli görünüyordu. Arrow’u şaşırtan ise hiçbir sosyal refah fonksiyonunun inşa edilemeyeceğini bulması oldu. Oylama paradoksu ise, daha genel ve daha ciddi sosyal veya toplumsal tercih paradoksu haline gelir.”*(Buchanan, <sup>8</sup>)

Genel denge yaklaşımının ve Pareto optimum kavramının 20. Yüzyıl iktisadının **T. Kuhn**’un belirttiği anlamda hakim paradigmasını oluşturduğu rahatlıkla söylenebilmektedir. Daha sonraki bölümlerde de görüleceği gibi kamu ekonomisinden, sosyal tercihlere, hemen her alanda bu yaklaşımlar etkili olmuştur. Keynesyen Teori, Kamu Tercihi Teorisi, Anayasal İktisat Okulu gibi kimi akımlar bu hakim paradigmayı çeşitli yönlerden sorgulasalar da onun karşısına alternatif bir paradigma koyabilmekten de uzaktırlar.

<sup>8</sup> Buchanan, J. M., Özel Tercihlerden Kamu Felsefesine Kamu Tercihi’nin Gelişimi, Çeviren: Timur Turgay  
[http://www.canaktan.org/ekonomi/anayasal\\_iktisat/turkce-kaynaklar/kamu-tercihi.htm](http://www.canaktan.org/ekonomi/anayasal_iktisat/turkce-kaynaklar/kamu-tercihi.htm)

## 2.3 Genel Dengenin Varlığı

### 2.3.1 Topolojinin Genel Dengedeki Yeri: Dengenin Varlığı

Genel dengenin varlığının ispatında neden topolojik uzayların kullanıldığını anlamak için topolojinin tanımına kısaca değinmek gerekmektedir. Topoloji Yunanca'dan türetilmiş olup konum bilim anlamına gelir. Bazı tür dönüşümlerde değişmeden kalan invaryant özellikleri araştırır. (Şuhubi, 2001,197) Topoloji, başlangıçta ilk ortaya atıldığında bir konum çözümlemesi olarak görülürken Riemann'a kadar gelindiğinde sürekli, karşılıklı birebir dönüşümlerin etkisinde değişmez özellikleri inceleyen bilim dalı olarak görülmeye başlanacaktır. (Aksoy, 2001, 267-275)

Topoloji geometrik cisimlerin yırtılmadan, kesilmeden ve kırılmadan, sürekli olarak şekil değiştirme ve çarpıtılma sonucuna değişmeden kalan özelliklerini inceler. Böyle bir topolojik çarpıtma için en iyi örnek bir kahve fincanını sürekli değiştirerek, fincanın üst çevresini ve tabanını birbirine iterek kahveyi içeren bölümü yok ederek bir simit şekline dönüştürülmesidir. Bir yüzeyin sürekli deforme edilerek bir başka yüzeye dönüştürülebilmesi bu iki yüzeyin topolojik bakımdan denk olduklarını gösterir. Düzgün küresel yüzeyler için hesaplar yapmak garip yumurta biçimli bir yüzey için hesap yapmaktan daha kolaydır. Top ve yumurta uzaylarının topolojik bakımdan denk olmaları durumunda bu yapılabilir. Bir uzayın belirli sınıf dönüşümler altında bir **sabit noktasının** var olması matematiksel bakımdan ilginçtir. Problemlerin çoğunun olanaklı çözüm kümesi, soyut bir matematiksel uzayın noktaları olarak yorumlanabilir. Ancak, bu noktaların herhangi birinin problemi gerçekten çözüp çözmediği, hemen her zaman uzaya belirli bir türden bir dönüşüm uygulandığında uzayın yerinde kalan bir noktasının olup olmadığı sorusuna dönüştürülebilir. Bir uzayın sürekli dönüşümü çok genel türden bir dönüşümdür; esasında uzayı yırtarak parçalara ayırmayan her türlü deformasyona izin veren bir dönüşümdür. Bu genellik, biyoloji, ekonomi, fizik ve mühendislik dallarında ortaya çıkan denklemlerin çözümlerinin olup olmadığı sorularının, sabit nokta problemleriyle ifade edilmelerine olanak sağlar. Böylece uzayları sınıflandırma ile denklem çözme (yani sabit noktaları bulma) arasındaki ortak bağlantı, bir  $X$  uzayının sürekli dönüşümü kavramıdır. Uzaya sürekli bir dönüşüm uygulandığında değişmeden kalan bir nokta veya özellik bulmak istendiğinde topoloji büyük ölçüde bu değişmeyen özellikleri veya noktaları bulmakla ilgilenir.

Buna göre, dönüşüm kümesi, Öklid Geometrisi'nin özelliklerini tanımlayan katı-hareket dönüşümleriyle sınırlanmak yerine başlangıçta yakın olan noktaları sonradan da yakın olacak şekilde dönüştüren bütün dönüşüm ya da fonksiyonları içerecek şekilde genişletilmektedir. Sadece dönüşmüş her noktanın, ilk uzayın bir ve sadece bir noktasına karşılık geldiği ve tersinin de doğru olduğu sürekli dönüşümlere izin verilmektedir. Başka bir deyişle sürekli olan ve tersi de sürekli olan, yani hedef uzaydaki her dönüşümün uygulandığı kaynak uzaydaki bir noktaya karşılık geldiği dönüşümler ile ilgilenilmektedir. Bu tür dönüşümlere **homeomorfizm** (eşbiçimlilik) denir. Yırtan bölen değil eğen, genişleten dönüşümler ele alınır. Topolojide izin verilen dönüşümler o kadar geneldir ki olanaklı sürekli dönüşümlerden herhangi biri seçilerek geometrik bir nesne deforme edildiğinde, nesnenin sadece en temel özellikleri değişmeden kalır. (Casti, 2000, 56)

Bu bölümde, sabit nokta teoreminin ispatı sırasında topolojinin bu özelliklerinden yararlanılacaktır.

### 2.3.2 Sabit Nokta Teoremi ve Genel Denge

#### 2.3.2.1 Sabit Nokta Teoremi İçin Matematiksel Altyapı

**Tanım 2.2: (Dışbükey Kombinasyonlar (Convex Combination))**  $x^i$  vektörleri  $\lambda_i$  negatif olmayan vektörleri göstermek ve  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  koşulunu sağlamak üzere,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$  sonlu dışbükey kombinasyonlar olarak tanımlanırlar.

**Tanım 2.3: (Dışbükey Örtü (Convex Hull))**  $S \subset R^n$  olmak üzere  $S$  alt kümesinin dışbükey örtüsü, bu kümeden elde edilebilen bütün sonlu dışbükey kombinasyonların kümesidir. Dışbükey örtü,

$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$  formundaki tüm vektörlerin kümesidir. (Border, 1999, 10)

Dışbükey örtü, dışbükey kapanış olarak da adlandırılmaktadır. Bir  $X$  kümesinin dışbükey kapanışı, bu  $X$  kümesini içeren bütün dışbükey kümelerin kesişimi ya da bu  $X$  kümesini içeren dışbükey kümelerin en küçüğü olarak da tanımlanabilir. (Klein, 1973, 324-327) Kapalı sınırlandırılmış ve dışbükey bir küme, uç noktalarının dışbükey örtüsüdür.

**Tanım 2.4: (Dışbükey Koni (Convex Cone))**  $C$  konisi,  $R^n$  uzayının boş olmayan bir alt uzayıdır.  $x \in C$ ,  $\lambda \in R_+$  olmak üzere  $\lambda x \in C$  dir. Eğer;  $x, y \in C$  olmak üzere,  $x + y \in C$  ise  $C$ , dışbükey bir konidir. (Border, 1999, 12-13)

**Tanım 2.5: (Dışbükey Çok Yüzeyle Kümeler (Convex Polyhedral Set))** Sonlu sayıda uç noktaya sahip olan bir dışbükey kümeye dışbükey çok yüzlü denir.

**Tanım 2.6: (Doğrusal Manifold)** Çoklu düzlemlerin herhangi bir kesişmesi doğrusal manifold olarak isimlendirilir. Kapalı kümelerin kesişimi kapalı olacağından ve de çoklu düzlemler de kapalı küme nitelikleri taşıdıklarına göre bunların kesişiminden oluşan doğrusal manifold da hem kapalı hem de dışbükey bir kümedir. Doğrusal Manifold'un bu tanımı Debreu (1959) yapmıştır. Ancak daha genel anlamda manifoldlar genel denge teorisinden diferansiyel teknikleri ele alındığı 3.2.6. bölümünde yer almaktadır.

Kapalı yarı uzaylar, çokyüzlü düzlemler ve doğrusal bükümler kapalı ve dışbükey kümelerdir.

**Tanım 2.7: (Kompakt Kümeler ve Kompakt Uzaylar)** Bileşimleri  $A \subset X$  kümesini kapsayan ve  $\cup_i G_i = X$  olan açık kümelerin  $\{G_i\}$  ailesine  $A \subset X$  kümesinin açık örtüsü denir. Bileşimleri  $A \subset X$  kümesini kapsayan  $A$  kümesini örten aileye verilen bir örtünün alt örtüsüdür denir. Eğer alt aile yalnız sonlu sayıda küme kapsıyorsa, bu aileye de sonlu alt örtü denir.

Bir kümenin her açık örtüsünün sonlu tane alt açık örtüsü varsa, bu kümeye kompakt denir. (Kolmogorov ve Fomin 1970, 92 ; Dönmez, 2000, 108-109)

Kompaktlık özelliği Heine–Borel Teoremi ile tanımlanan kapalı ve sınırlı aralıklarla ilişkilidir. (Lipschultz, 1965, 151). Heine-Borel Teoremine göre  $R$  uzayının kapalı ve sınırlı bir alt kümesinin her açık örtüsünden sonlu bir alt örtü çıkarılabilir. Küme için tanımlanan kompaktlık özelliği, bir  $(X, \tau)$  uzayı verildiğinde eğer  $X$  kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, uzay için de geçerlidir. (Yüksel, 1998, 185-186) Tanım gereği her kompakt uzayın kapalı bir alt uzayı da kompakttır. Kompakt kümenin önemli bir özelliği üzerinde bir uç değer teoremi tanımlanabilmesidir.  $f : X \rightarrow Y$  sürekli olmak üzere, eğer  $X$  kompakt ise her  $x \in X$  için  $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$  koşulunu sağlayacak  $c$  ve  $d$  noktaları vardır. (Munkres, 2000, 165 ve 175)

Kompakt olma özelliğinin sabit nokta teoremi açısından önemli bir özelliği de dizisel kompakt olan bir kümenin sınırlı ve kapalı olmasıdır. (Klein, 1973, 64-65). Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayında her dizi bir bir yakınsak alt diziye sahipse bu uzaya dizisel kompaktır.

**Tanım 2.8: (Metrik Uzaylar)**  $\rho : X \times X \rightarrow E^1$  şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon her  $x, y, z \in X$  için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $(X, \rho)$  bir metrik uzaydır.

- $\rho(x, y) \geq 0$
- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (simetri özelliği)
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (üçgen eşitsizliği) (Borges, 2000, 31)

**Tanım 2.9: (Topolojik Uzaylar)**  $G \subset X$  alt kümelerinin bir  $\tau$  sistemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $(X, \tau)$  ikilisine topolojik uzay denir.

- $X \in \tau$  ve  $\emptyset \in \tau$
- Açık kümelerin sonlu ya da sonsuz sayıda  $\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$  birleşimleri ve sonlu sayıda  $\bigcap_{k=1}^n G_k$  kesişimleri  $\tau$ 'ya aittir.

**Tanım 2.10: (Homeomorfizm)** Topolojik eşyapı dönüşümü olarak adlandırılan homeomorfizm şu şekilde tanımlanabilir;  $X$  ve  $Y$  iki topolojik uzay ve  $f : X \rightarrow Y$  birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$  ve  $f^{-1}$  fonksiyonları sürekli iseler  $f$  bir homeomorfizmdir ve  $X$  ve  $Y$  topolojik uzayları homeomorfturlar. Homeomorf olan iki topolojik uzaydan biri için doğru olan her topolojik özellik diğeri için de geçerlidir. (Gürkanlı, 1993, 67)

**Tanım 2.11: (Lebesgue Ölçüsü)**  $U = \{G_i\}$ ,  $X$  metrik uzayının  $A$  alt kümesinin bir örtüsü olsun. Eğer çapı  $\delta > 0$  sayısından küçük olan her  $A$  altkümesi için,  $A$  kümesini kapsayan örtünün bir ögesi varsa,  $\delta > 0$  sayısına gerçel sayısına bu örtü için bir Lebesgue sayısı denir. (Dönmez, 2000, 298)

**Tanım 2.12: ( Simpleks)** Bir simpleks; uç noktaları temsil eden köşelerle, bir üçgenin bir tür  $n$  boyutlu benzeridir.

Simpleksi bir anlamda dışbükey kümelerin en basit hali olarak da tanımlamak mümkün olabilir.

Bir  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\} \subset R^m$  kümesinde  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i = 0$  eşitliği ancak  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  olması durumunda mümkünse bu kümeye (lineer) bağımsız küme denir.

$n$  boyutlu bir simpleks;  $n+1$  elemanlı bağımsız kümenin tüm pozitif dışbükey kombinasyonlarının kümesidir. Kapalı  $n$  boyutlu bir simpleks ise  $n+1$  vektörün bağımsız kümelerinin dışbükey örtüsüdür.

$x^0 x^1 \dots x^n$  şeklinde gösterilen simpleks  $x^i$  vektörlerinin bütün kesin pozitif dışbükey kombinasyonlarının kümesidir.

$$x^0 x^1 \dots x^n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i : \lambda_i > 0, i = 0, \dots, n; \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Burada her  $x^i$  simpleksin bir vertexidir ve her  $k$ -simpleks  $x^{i_0} x^{i_1} \dots x^{i_k}$ ,  $x^0 x^1 \dots x^n$  simpleksinin bir yüzüdür. (Border, 1999, 19)

Aynı anlama gelmek üzere  $x^0, x^1, \dots, x^n$ ,  $n+1$  tane lineer bağımsız noktalar olmak üzere,

bütün bu noktaların  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i$  kümesine  $n$  boyutlu simpleks denir.

Simpleksin bütün vertexlerinin kümesi;  $\{x^0, \dots, x^n\}$  simpleksin *0-çatısıdır* yine başka bir önemli kavram da  $\lambda_i$  ile gösterilen Simpleksin **ağırlıkmerkezi** (*barycentric*) **koordinatlarıdır**.<sup>1</sup> (Klein, 1973, 125)

Yukarıda yapılan simpleks tanımlaması daha önce ele alınan dışbükey kombinasyonlar tanımı ile birleştirilince simplekslerin açık ve dışbükey noktalar kümesi oldukları söylenebilir.

<sup>1</sup> Möbius tarafından keşfedilen, **Barycentric koordinatlar** üçlülerden oluşur. Simpleksin her yüzünün orta noktasının vertexlerden uzaklığını ifade ederler. Bir anlamda köşelere göre koordinatlarıdır.  
<http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html>

$\{v_\mu\}$ ,  $K$  simpleksel kompleksin tepeleri olsun.  $x \in K$  olmasının anlamı  $x = \sum_{\mu} x_{\mu} v_{\mu}$  ancak bir şekilde yazılabilir

ve bu durumda  $(x_{\mu})$ ,  $K$  içindeki  $x$ 'in **ağırlık merkezi koordinatlarıdır**. Ve  $x_{\mu}$  ler sıfırdan farklı ve sonlu sayıdadır (Borges, 2000, 181)

Tüm  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i$  noktalarının kümesi simpleksin kapanışı olarak tanımlanır ve şu şekilde ifade

edilir.  $\bar{S} = \overline{x^0 x^1 \cdots x^n}$ . Bir  $n$  boyutlu simpleksin kapanışı ile kendisi arasındaki fark  $\bar{S}^n / S^n = B^{n-1}$  simpleksin sınırındır.

Tanımdan çıkarılabileceği gibi, bir simpleksin tüm yüzlerinin bileşimi simpleksin kapanışını verir.  $\cup S^{i_k} = \bar{S}$

Kapalı bir simpleks  $\bar{S}^n$  aynı zamanda kompakt (kapalı ve sınırlandırılmış olduğundan) bir kümedir. Aynı zamanda kendi tepelerini içeren en küçük dışbükey kümedir.

$\{S\}$ ,  $R^n$  uzayındaki simplekslerin sonlu bir kümesini göstermek üzere, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, sonlu simpleksel  $K$  dışbükeyi olarak isimlendirilir

- Her bir yüzü  $K$ 'da meydana geliyor ve  $K$ 'da dışbükeylik ortaya çıkıyorsa
- $K$ 'nın  $S_1$  ve  $S_2$  gibi herhangi iki simpleksinin kesişimi boş kümedir.  $S_1 \cap S_2 = \{ \}$

**Tanım 2.13:** Aşağıdaki koşulları sağlayan  $K$  uzayı simpleksel komplekstir. <sup>2</sup> (politop)

- Her  $s_\alpha$  kapalı simpleks olmak üzere  $K = \cup s_\alpha$  dir.
- Her  $\alpha, \beta$  için  $s_\alpha \cap s_\beta$  bir kapalı simplekstir. (Borges, 2000, 181)

**Tanım 2.14: (Kompleks)** Bir  $S$  yüzeyi üzerinde, bir  $m$ -simpleks diye,  $s^m$  ile gösterilir.  $m=0,1,2$ ,  $R^2$  düzleminde geometrik bir  $e^m$ ,  $m$ -simpleksinin topolojik tasvirine denir.  $s^m$  lerden oluşan herhangi bir koleksiyona ise kompleks denir. Varsayalım ki bir  $S$  yüzeyi üzerinde  $K = \{s\}$  tanımlanmış olsun, öyle ki

- $S$  (veya  $\bar{S}$  kenarlı yüzey) bütün  $s$  lerin birleşimidir.
- $i \neq j$  ise  $s_i \cap s_j$  ya boştur, ya bir kenardır ya da bir köşedir.

<sup>2</sup> Simpleksel kompleks (simplicial complex); üçgenselleştirilmiş (triangulation) bir uzaydır.  $R^n$  içinde bir  $K$  simpleksleştirilmesi aşağıdaki koşulları sağlayan bir simpleksler koleksiyonudur.

- $K$  simpleksinin bütün yüzleri  $K$ 'dadır.
- $K$ 'nın herhangi iki simpleksinin kesişimi, içlerinden birinin yüzüdür.

<http://mathworld.wolfram.com/SimplicialComplex.html>

**Üçgenleştirme; (Triangulation)** Bir yüzeyin üçgen şeklinde kümeleme işlemidir. Genellikle üçgenlerin kenarları iki bitişik üçgen tarafından paylaşılırlar. Yüeyde sonlu sayıda üçgen olması durumunda bu üçgenselin kompakt olduğu söylenebilir. <http://mathworld.wolfram.com/Triangulation.html> Üçgenleme; Yüzeyin bir üçgenin içine homomorf parçalara bölünmesidir (Uluçay, 1972, 172)

- $S$  yüzeyine ait her bir noktanın yalnız sonlu sayıda  $s$  üçgenlerini kesen bir civarı vardır.

Bu durumda  $K = \{s\}$ ,  $S$  yüzeyinde bir üçgenleme tanımlıyor denir. Böyle bir  $K$  yapısına sahip,  $S$  yüzeylerine polihodron denir ve  $|K|$  ile gösterilir.  $|K|$  bir nokta kümesidir ve  $K$ ,  $|K|$ 'nı bir örtüsünü oluşturur. (Uluçay, 1972, 172-173)

**Tanım 2.15:**  $\bar{K}$ , bütün simpleksel  $K$  komplekslerinin birleşimi olsun.  $P = \bar{K}$  bir çokyüzlüdür.

**Tanım 2.16:** Aşağıdaki koşulların sağlanması halinde  $K'$ ,  $K$ 'nın bir altbölümüdür.

- $\bar{K} = \bar{K}'$
- $K'$ 'nin her açık  $S'$  simpleksi  $K$ 'nın  $S$  açık simpleksini içerir.

**Tanım 2.17:**  $S^n$  ve  $S^m$  sırasıyla  $m$  ve  $n$  boyutlu simpleksler olsunlar.  $f: S^n \rightarrow S^m$  sürekli eşlemesine aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda benzer eşleme denir.

- $S^n$  simpleksinin her  $x^i$  tepesi  $S^m$  simpleksinin bir  $y^j$  tepesine  $f(x^i) = y^j$  şeklinde eşlenebilir.
- $x = \sum \lambda_i x^i$ ,  $\sum \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$  ve  $y = \sum f(\lambda_i x^i) = \sum \lambda_i f(x^i)$  olmak üzere her  $x \in \bar{S}^n$  noktası için  $f(x) = y \in \bar{S}^m$  vardır.

**Tanım 2.18:**  $\bar{K}$ ,  $K$ 'nin simpleksel ayrışmaları ile elde edilmiş bir çokyüzlü ve  $x$ ,  $\bar{K}$ 'nin bir noktası olsun.  $x \in \bar{K}$  noktasını içeren  $K$ 'nin açık simpleksine  $x$ 'in taşıyıcı simpleksi denir.

**Teorem 2.8:**  $K'$ ,  $K$  kompleksinin alt bölümü olsun.  $f: K' \rightarrow K$ ,  $K'$ 'nin her  $x''$  tepesini,  $K$ 'daki  $x''$ 'nin taşıyıcısı olan herhangi bir tepesine  $x = f(x'')$  olmak üzere taşıyor olsun. Bu durumda  $f$  simpleksel bir eşlemedir.

**Teorem 2.9: (Sperner Teoremi)**  $S$ ,  $n$  boyutlu bir simpleks,  $K$  bu simpleksin üç köşelere ayrılması<sup>3</sup> ve  $K'$  de  $K$ 'nin bir altbölümü olsun.  $f$  fonksiyonu  $K'$  altbölümünün her  $x'$  tepesini  $F(x') = x'$  eşlemesi ile  $K$ 'daki taşıyıcı simpleksinin bir tepesine atar.  $K'$  içinde en

<sup>3</sup> Nikaido, Sperner teoremini verirken simpleksin  $n$  defa barycentric olarak altbölümlere ayrıldığı ifadesini kullanıyor. (Nikaido, 1968, 61)

azından öyle bir  $n$  boyutlu  $S'_0$  simpleksi vardır ki tepeleri  $f$  fonksiyonu tarafından  $S$  simpleksinin bütün tepelerinin  $x^0, \dots, x^n$  kümesinin içine eşlenmiş olsun.

**Kanıt:** Bu teoremin ispatında güçlü bir savun ispatlanması yaklaşımı kullanılır. Buna göre simplekslerin gösterilen tanımına uyanların sayısı tektir.  $j=1, \dots, w$  olmak üzere  $S'_j, K'$  altbölümünün  $n$  boyutlu simpleklerini temsil etmektedir.  $S'_j$  dizisinin, tepeleri  $f$  fonksiyonu tarafından bütün tepelere  $x^1, \dots, x^n$  eşlenen  $n-1$  boyutlu yüzüne  $S'_j$ 'nin farklılaştırılmış yüzü denir ve  $Z'$  ile gösterilir.  $r_j, S'_j$ 'nin farklılaştırılmış yüzlerinin sayısı olsun. Bu durumda aşağıdaki alternatiflerden birisi gerçekleşir.

- $S'_j$  teoremden ileri sürülen savı sağlıyorsa, açıkça  $r_j = 1$  dir.
- $S'_j$  teoremin özelliklerini sağlamıyorsa fakat bütün tepeler  $S'_j$ 'nin tepelerinin imajları olarak ortaya çıkıyorsa  $r_j = 2$  dir.
- Eğer bütün  $x^1, \dots, x^n$  ler imajlarda meydana gelmiyorsa  $r_j = 0$  dir.

Modüler aritmetik (mod olarak kabul edilen sayıya bölündüğünde kalanlar) hatırlanarak

$$r \equiv \sum r_j \pmod{2} \text{ eşitliği yazılır.}$$

$Z'$   $f$  fonksiyonu tarafından  $\{x^1, \dots, x^n\}$  içine eşlenen  $n-1$  boyutlu bir simpleks olduğuna göre, olası iki durum söz konusu olabilir.

- Eğer  $Z'$ ,  $S'$ 'nin iç simpleksi ise  $S'_j$ 'lerden ikisinin farklılaştırılmış yüzüdür. Ve  $\sum r_j$  içinde iki defa sayılır.
- Eğer  $Z'$ ,  $S'$ 'nin  $n-1$  boyutlu bir yüzünün üzerinde bulunuyorsa, bu yüz  $x^1 \dots x^n$  olmalıdır. Teoremin taşıyıcı koşulları yüzünden  $Z'$ , bir  $S'_j$  için farklılaştırılmış bir yüzüdür ve  $\sum r_j$  içinde sadece bir kez sayılır.

$n-1$  boyutlu simplekslerden yukarıda verilen ikinci türe girenler varsayım gereği tek sayıdadır.

**Teorem 2.10: (Lebesgue Teoremi)**  $F = \{A_1, \dots, A_m\}$  kompakt metrik  $S$  uzaylarının kapalı kümelerinin bir sonlu koleksiyonu olsun. Ve  $F$ 'nin Lebesgue numarası olarak bir  $\sigma > 0$

tanımlayalım. Simpleksin bir  $L$  kümesinin yarıçapı  $\sigma$ 'dan küçükse,  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  kümelerinin hepsi kesişirler ve  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \{ \}$  dir.

**Kanıt:** Böyle bir sayının olmadığını varsayarsak, her  $n$  tamsayısı için aşağıdaki koşulları sağlayan boş olmayan bir  $L_n$  kümesi var olmalıdır.

- $L_n$  kümesinin çapı  $1/n$  'den daha küçüktür ve  $F_n$  alt kümelerinin ortak noktası  $F$  dir.
- $F_n$  'deki elemanların kesişimi boşdur.

$F$ , sonlu bir koleksiyondur ve sadece  $2^m - 1$  tane boş olmayan alt koleksiyona sahiptir ve bunların bazıları sonlu sayıda tekrar eder.

Bu yolla  $x^{n_1}, x^{n_2}, \dots$  serisi belirlenebilir. Eğer  $S$  kompakt ise bu seriye yakınsayan bir alt dizi seçilebilir. Öyle ki limit noktasının her komşuluğu  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  kümesinin noktalarını içerir. Açıktır ki  $x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  dir. Ya da aynı anlama gelmek üzere  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \{ \}$  Dikkat edilirse bu sonuç başlangıçtaki kabul ile çelişir.

Lebesgue ve Sperner teoremleri teorem 2.11'in ispatında kullanılacaktır.

**Teorem 2.11: (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Lemması)** Simplekslerle ilgili bir teorem olarak,  $A_0, A_1, \dots, A_n$  şeklinde ifade edilen kapalı kümeler koleksiyonunun,  $\overline{x^{i_0} \dots x^{i_k}} \subset A_{i_0} \cup \dots \cup A_{i_k}$  koşulunu  $S = x^0 \dots x^n$  simpleksinin her yüzü için sağladığını söylenebilir. Bu durumda  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \{ \}$  olur.

**Kanıt:**  $\sigma > 0$   $\{A_0, \dots, A_n\}$  kümesinin Lebesgue numarası ve  $K'$ , çapı  $\sigma$ 'dan küçük olan simpleksler içindeki  $\bar{S}$ 'in simpleksel bir altbölümüdür.

Bu durumda  $K'$  'nün bütün tepelerini,  $f(v)$  şeklinde bir numara atayan (tam sayılar boyunca) bir  $f$  fonksiyonu aşağıdaki koşullar altında tanımlanabilir.

- $x^{f(v)}$  v'nin taşıyıcı simpleksi olan yüzüne ait bir tepedir.
- $v \in A_{f(v)}$  dir.

Koşullara ve Sperner Teoremine göre  $K'$  içinde tepeleri  $f$  fonksiyonu tarafından tüm tam sayılara eşlenen bir  $n$  boyutlu  $S'$  simpleksi vardır. Dahası  $S' \{A_0, \dots, A_n\}$  koleksiyonunun her

$A_i$  kümesinin sahip olduğu bir ortak noktaya sahiptir. Bu nedenle  $S'$ , Lebesgue sayısından daha küçük bir yarıçapa sahiptir ve bunun da anlamı  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \{ \}$  dır.

### 2.3.2.2 Sabit Nokta Teoremleri

Sabit nokta teoreminin<sup>4</sup> varlığı ile ilgili olarak en basit ispat yöntemi bir  $[0,1]$  aralığından kendi üzerine tanımlı bir sürekli bir fonksiyonun  $f(x^*) = x^*$  şeklinde bir sabit noktaya sahip olmasıdır. Söz konusu olan bir birim kare üzerinde sürekli bir fonksiyonun yani her  $x \in [0,1]$  elemanını bir başka noktaya eşleyen fonksiyonun mutlaka en az bir kez orjinden geçen ve yatay eksen ile 45 derecelik açı yapan  $f(x) = x$  doğrusunu keseceğidir.

Bu ispat iki boyutlu geometrik bir yaklaşımla açıkça görülür. Bu geometrik yaklaşımın matematiksel ifadesi öncelikle **orta değer teoremini** gündeme getirir.

Noktadan noktaya eşleme yapan bir sürekli fonksiyonun sabit noktası ile ilgili bu iki boyutlu geometrik ispata benzer bir şekilde noktadan kümeye sürekli bir karşılama için Kakutani Sabit Nokta Teoremi'nin varlığı da geometrik olarak iki boyutlu bir uzayda ispat edilir.<sup>5</sup>

Bu bölümde genel denge teorisinin klasik topolojiye dayanan çözümlerine yer verilmiştir. Yani bir anlamda Arrow-Debreu'nun denge modelinde kullanılan tekniklere bağlı kalınmıştır. Bununla birlikte 1970'lerde genel denge literatüründe özellikle dengenin kararlılığı alanında diferansiyel topoloji teknikleri kullanılmaya başlanmıştır. Genel denge çerçevesinde diferansiyel topolojinin kullanılmaya başlanması ile birlikte dengenin varlığı da bu yeni

---

<sup>4</sup> Genel denge analizi ve oyun teoreminde kullanılan sabit nokta teoremleri genellikle Brouwer ve Kakutani sabit nokta teoremleri olduğundan çalışmada bu iki teorem ele alınacaktır. Bu iki teoremin yanı sıra ekonomi uygulamalarında yer alan iki teorem daha vardır. Browder'in teoremine göre  $K \subset R^m$  kompakt ve dışbükey ise ve  $\gamma : K \rightarrow K$  boş olmayan dışbükey değerlere sahip ve bütün  $y \in K$  için  $\gamma^{-1}(y)$  açık ise  $\gamma$  bir sabit noktaya sahiptir. (Border, 1999, 72) Eilenberg-Montgomery Teoremi bir anlamda Kakuta Teoremi'nin genelleştirilmiş halidir. (Klein, 1968, 142) Teorem bütülebilmek özelliğinde sahip bir kümenin kendi üzerine tanımlanmış boş olmayan, kompakt değerler alan bir eşlemenin varlığına dayanır. (Border, 1999, 73) Bu teoremlerin yanı sıra özellikle fonksiyonel analiz kapsamında Schauder Sabit Nokta Teoremi, (Musayev ve Alp, 2000, 438-439) Banach'ın metrik uzay üzerinde tanımlı bütüleme dönüşümlerinin tek bir sabit noktası olduğunu ispatlayan

tekniklerle tekrar ispatlanmıştır. Bununla birlikte klasik topoloji kullanılarak yapılan genel dengenin varlığı ispatının herhangi bir eksikliğinden söz edilmemiştir. Dengenin varlığının diferansiyel topoloji ile gösterilmesinin en önemli örneği **Smale**'in "*Global Analysis and Economics*" başlıklı çalışmasıdır. Smale bu makalesinde dengenin varlığını Sard teoremine ve diferansiyel hesaplama yöntemlerine dayanarak ispatlamaya çalışmış ve aynı zamanda sabit nokta yöntemlerinden daha çok arz ve talep eşitliği denklemini kullanmıştır. Smale amacının Arrow-Debreu teoreminin diferansiyel hesaplama teknikleri ile ispatı olduğunu belirtmektedir. Aynı zamanda makalede optimizasyon ve refah ekonomisinin ana teoremlerinin diferansiyel hesap yolu ile geliştirilmesinin de yer aldığı, manifold yapılanmasının optimal ve denge kümelerinin yerine geçebileceği söylemektedir. Smale bu teoremin ispatında global analizin merkezinde olan ve onun ekonomideki uygulamaları olan sonuçlarından ikisinin kullanıldığını belirtmektedir. Bunlar ters eşleme teoremi (*inverse mapping theorem* ya da *implicit function theorem*) ve Sard Teoremi'dir (Smale, 1991, 331-334). Smale'in denge ispatına Ters eşleme teoremi ve Sard Teoremleri ile birlikte genel denge teorisinde diferansiyel topoloji tekniklerin kullanımı ele aldığımız 3.2.6. bölümde değinilecektir. Yine aynı bölümde Scarf'ın da önemli bir çalışmasına değinilecektir. Bu bölümde genel denge ispatı Arrow-Debreu çözümüne dayanan ve klasik topoloji tekniklerinin kullanıldığı çerçevede ele alınmıştır.

**Teorem 2.12: (Brouwer Sabit Nokta Teoremi)**  $f(x)$  bir kapalı simpleks olan  $\bar{S}$  kümesinin kendi üzerinde tanımlı noktadan noktaya eşleme yapan, sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f(x) = x$  eşitliğini sağlayan bir  $x$  sabit noktası vardır.

**Kanıt:** Bu simpleks elemanın olan iki  $x, x'$  nokta alarak bunları barycentric koordinatlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılsın.

- $x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_n x^n$
- Her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\lambda_i \geq 0$  ve  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$  dir.

Benzer tanımlamayı  $\hat{x}$  noktası için de yapalım

- $x' = \lambda'_0 x^0 + \lambda'_1 x^1 + \dots + \lambda'_n x^n$
- Her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\lambda'_i \geq 0$  ve  $\sum_{i=0}^n \lambda'_i = 1$  dir.

Bu tanımlamaların yanında Her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\lambda'_i \leq \lambda_i$  olsun.  $A_i$  bu şekilde tanımlanan bütün noktaların kümesi olsun.  $A_i$  kümesinin kapalı bir küme olduğu ve bu nedenle gerekli varsayımlarını sağlayacağı söylenebilir. Bu yüzden eğer  $x$  noktası simplekse ait  $x^{i_0} \dots x^{i_k}$  yüzünün bir noktası ise  $\lambda_{i_0} + \dots + \lambda_{i_k} = 1 \geq \lambda'_{i_0} + \dots + \lambda'_{i_k}$  olur.

- $\lambda'_i \leq \lambda_i$  ilişkisini en azından bir  $i$  için sağlanmış olmalıdır. Bu yüzden  $x \in A_{i_0} \cup \dots \cup A_{i_k}$  yazılmaktadır. Dolayısıyla  $\overline{x^{i_0} \dots x^{i_k}} \subset A_{i_0} \cup \dots \cup A_{i_k}$  yazılabilir. Teorem 2.11'e göre bütün  $i$  ler için  $\lambda'_i \leq \lambda_i$  olmak üzere bir  $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$  vardır. Bu nedenle  $x$  ile görüntüsü olan  $f(x) = x'$  arasında bir nokta vardır.  $\lambda_i$  ve  $\lambda'_i$  toplamaları 1'e eşit olduğundan ikincisi ancak her  $i$  için  $\lambda'_i = \lambda_i$  olması halinde mümkündür. Bunun anlamı  $f(x) = x$  olmasıdır.

Kapalı bir simpleksin  $\bar{S} = \bar{S}^n$  kendi doruklarını içeren en küçük dışbükey ve kompakt (kapalı ve sınırlı) küme olarak düşünülebileceği ve bu nedenle sabit nokta teoremini tanımlamak için simpleks tanımlanmasının bir zorunluluk olmadığı görülmektedir. Topoloji ile ilgili açıklamalara ve homomorfizm kavramına geri dönülürse Brouwer sabit nokta teoremini  $n$  boyutlu bir küre  $n$  boyutlu bir küp ya da daha genel anlamda simpleksin kapanışı  $\bar{S}$  ile homeomorf olan herhangi bir kümeye uygulanabilir. Dolayısıyla Brouwer Sabit Nokta teoremi şu şekilde de ifade edilebilir.

$X$ ,  $R^n$  uzayının *boş olmayan, kompakt dışbükey* altkütmesi ve  $f$ ,  $X$ 'ten  $X$ 'e ( $X$  üzerinde tanımlı) tek değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  sabit noktaya sahiptir.

Noktadan noktaya bir eşleme tanımlayan Brouwer sabit nokta teoremini çok değerli dönüşümlere genişletmek için noktadan kümeye dönüşümleri temel alan Kakutani sabit nokta teoremini kullanılır.

**Teorem 2.13: (Kakutani Sabit Nokta Teoremi)**  $x \rightarrow F(x)$ ,  $n$  boyutlu kapalı bir simpleks  $\bar{S}$ 'ten bu kapalı simpleksin yine kapalı ve dışbükey olan bütün alt kümelerinin ailesi  $R(\bar{S})$ 'ye üst yarı sürekli noktadan kümeye bir eşleme olsun. Bu durumda  $F(x)$ 'in bir sabit noktası vardır.

**Kanıt:**  $K^{(v)}$ ,  $n$  boyutlu kapalı bir simpleks  $\bar{S}$ 'in  $v$ 'inci ağırlık merkezi alt bölümü olsun ve  $x^v$   $K^{(v)}$ 'nin bir tepesini (verteks) temsil etsin.  $x^v$  tepelerinin her biri hayali  $F(x^v)$  kümesinin herhangi bir  $y^v$  noktasının yerine kullanılır.  $x^v \rightarrow y^v$  eşlemesi  $K^{(v)}$ 'nin tüm simpleksleri içindeki genişlemelere dahildir. Burada  $\bar{S}$ 'nin kendi üzerinde tanımlanmış sürekli ve tek değerli fonksiyonları  $f_v : \bar{S} \rightarrow \bar{S}$  kastedilmektedir.

- Brouwer'in teoremine göre  $f_v : \bar{S} \rightarrow \bar{S}$  fonksiyonunun  $x_v \in \bar{S}$  olmak üzere  $x_v = f_v(x_v)$  şeklinde ifade edilebilecek bir sabit noktası vardır.  $v=1,2,\dots$  olmak üzere  $x^v$  serisini dikkate aldığımızda  $\bar{S}$  kompakt olduğuna göre  $j=1,2,\dots$  olmak üzere  $x \in \bar{S}$  noktasına yakınsayan bir  $(x_{v,j})$  alt serisine sahiptir. Bu durumda  $x \in \bar{S}$  noktasının noktadan kümeye eşlememizin sabit noktası olduğu ispat edilebilir.  $S^{(v)} = S^{n,(v)}$ ,  $K^{(v)}$ 'nin  $x^v$  noktasını içeren  $n$  boyutlu bir simpleksini temsil etsin

$i=1,2,\dots,n$  olmak üzere  $S^{(v)}$ 'nin  $n+1$  tane tepelerini,  $x_0^v, x_1^v, \dots, x_n^v$  şeklinde ifade edilebilmek üzere  $x_i^v$  ile gösterelim. Bazı  $(\lambda_i^v)$ 'ler için  $x$  noktasına yakınsayan  $(x_i^{v,j})$  serisini alalım.

$\lambda_i^v \geq 0$  ve  $\sum_{i=0}^n \lambda_i^v = 1$  olmak üzere  $x_v = \sum_{i=0}^n \lambda_i^v x_i^v$  olarak yazılabilir.

$f_v(x_i^v) = y_i^v$  olarak yazılabilir.

$y_i^v \in F(x_i^v)$  olduğundan şu eşitlik yazılabilir  $x_v = f_v(x_v) = \sum_{i=0}^n \lambda_i^v y_i^v$  dir.

$(y_i^{v,j})$  şeklinde bir alt seri alındığında şu eşitlikler yazılabilir  $\lim_{j \rightarrow \infty} y_i^{v,j} = y_i$  ve  $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_i^{v,j} = \lambda_i$

$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i y_i$   $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$   $\lambda_i \geq 0$  olduğu bilindiğine göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_i^{v,j} = x;$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_i^{v,j} = y_i$$

$$y_i^{v,j} \in F(x_i^{v,j})$$

$F(x)$  karşılmasının üst yarı sürekli varsayımından  $y_i \in F(x)$  olduğu sonucu elde edilebilir.

Bu nedenle  $F(x)$  dışbükey olduğundan  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i y_i \in F(x)$  yazılabilir. Bu durumda  $x$  noktadan kümeye yapılan eşlemenin bir sabit noktasıdır. (Klein, 1973, 139)

### 2.3.2.3 Oyun Teorisinde Sabit Nokta Teoremi ve Nash Dengesi

2.1. Bölümünde Oyun teorisi ile Genel Denge Teorileri arasındaki ilişkilere değinilmiş her iki teoremin de sabit noktaların varlığına dayandıkları ifade edilmiştir. Bu bölümde oyun teorisindeki denge durumları kavramı ve sabit nokta teoremine dayanan Nash dengesi matematiksel olarak ele alınacaktır.

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$

ortaksız oyununda  $\forall i \in I$  ve  $\forall s_i \in S_i$  için

$H_i(s^* \| s_i) \leq H_i(s^*)$  eşitsizliğini sağlayan  $s^*$  durumuna denge durumu denir.

**Tanım 2.19:**  $\Gamma$  oyunun bir  $\Gamma^*$  karma yapısının denge durumuna karma stratejilerde  $\Gamma$  oyunun denge durumu denir.

Böylece, herhangi bir  $i$  oyuncusu ve bu oyuncunun herhangi bir  $\sigma_i$  karma stratejisi için

$$H_i(\sigma^* \| \sigma_i) \leq H_i(\sigma^*)$$

eşitsizliği geçerli ise,  $\sigma^*$  durumu,  $\Gamma^*$  oyununda bir denge durumudur.

**Teorem 2.14:**  $\Gamma$  oyununda  $\sigma^*$  durumunun bir denge durumu olması için gerek ve yeter şart.

$\forall s_i \in S_i$  pür stratejisi için,

$$H_i(\sigma^* \| s_i) \leq H_i(\sigma^*) \text{ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.}$$

**Kanıt:** Gereklik aşıkardır. Çünkü, pür strateji karma stratejinin özel bir halidir. Yeterlilik için,  $i$  oyuncusunun keyfi bir  $\sigma_i$  karma stratejisini seçip  $\sigma_i(s_i)$  ile eşitsizlik ile çarpılırsa

$$s_i \in S_i$$

$$\sum_{s_i \in S_i} H_i(\sigma^* \| s_i) \sigma_i(s_i) \leq \sum_{s_i \in S_i} H_i(\sigma^*) \sigma_i(s_i)$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafına aşağıdaki dönüşümler uygulandığında sağ tarafta da toplamın dışına  $s_i$  den bağımsız  $H_i(\sigma^*)$  1 alınırsa ikinci eşitsizlik bulunur.

$$H_i(\sigma) = \sum_{s \in S} H_i(s) \sigma(s) = \sum_{s_1 \in S_1} \dots \sum_{s_n \in S_n} H_i(s_1, \dots, s_n) \prod_{i=1}^n \sigma_i(s_i)$$

$$H_i(\sigma \| s_j^0) = \sum_{s_1 \in S_1} \dots \sum_{s_{j-1} \in S_{j-1}} \sum_{s_{j+1} \in S_{j+1}} \dots \sum_{s_n \in S_n} H_i(s \| s_j^0) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sigma_i(s_i)$$

J.F. Nash herhangi bir sonlu ortaksız oyun için karma stratejilerde denge durumlarının varlığını ispatlamıştır.

**Teorem 2.15:** Herhangi bir  $\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$  ortaksız oyununda en az bir tane denge durumu (karma stratejilerde) vardır.

**Kanıt:**  $\Gamma$  oyununda  $i$  oyuncusunun  $m_i$  tane pür stratejisi varsa, oyuncunun bütün karma stratejilerinin  $\sum i$  kümesi, geometrik olarak  $(m_i - 1)$  - boyutlu bir simpleks belirler. Bu simpleksi  $S^{(i)}$  ile gösterilebilir. Böylece karma stratejilerde herhangi bir

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

durumu,  $S^{(1)} \times \dots \times S^{(n)}$  kartezyen çarpımında bir noktadır. Bu kartezyen çarpım  $(m_1 + \dots + m_n - n) -$  boyutlu bir Öklid uzayının dışbükey, kapalı ve sınırlı bir alt kümesidir.

Keyfi bir  $\sigma$  durumu ve  $i$  oyuncusunun herhangi pür stratejisi  $s_i^{(j)} \in S_i$  için tanımlanmış  $\phi_{ij}$  fonksiyonları sadece negatif olmayan değerler alır.

$\phi_{ij}$  fonksiyonu,  $i$  oyuncusunun  $\sigma_i$  stratejisi yerine  $s_i^{(j)}$  pür stratejisinin geçmesiyle,  $\sigma$  durumuna göre,  $i$  oyuncusunun ödemeler fonksiyonundaki artışı gösterir. Bu fonksiyon, yer değiştirmeden doğabilecek azalmayı göstermez, çünkü böyle durumlarda  $\phi_{ij}(\sigma) = 0$  değerini alır.

$$\forall i = 1, \dots, n \text{ ve } \forall j = 1, \dots, m_i \text{ için}$$

$$\frac{\sigma_i(s_i^{(j)}) + \phi_{ij}(\sigma)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(\sigma)} \quad (1)$$

yapısı göz önüne alınırsa, açıktır ki, bu yapı negatif değildir. Üstelik

$$\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\sigma_i(s_i^{(j)}) + \phi_{ij}(\sigma)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(\sigma)} = 1 \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, (1) kesri  $i$  oyuncusu tarafından  $s_i^{(j)}$  pür stratejisinin oynama olasılığını gösterir. Böylece bütün  $s_i^{(j)}$  pür stratejileri için bu kesirlerin koleksiyonu,  $i$  oyuncusunun bir karma stratejisi olarak yorumlanabilir.

(1) kesirleri her bir  $i$  için kurulduğundan toplamaları, bütün oyuncuların karma stratejiler sistemini, yani  $\Gamma$  oyununda bir durumu belirler. Böyle bir durum,  $\sigma$  başlangıç durumunun bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon  $f(\sigma)$  ile gösterilecektir.  $f$  fonksiyonu, kapalı, dışbükey ve sınırlı bütün durumlar kümesi  $\Sigma$  yı tasvir eder.

Üstelik  $f(\sigma)$ , sürekli bir fonksiyondur. Gerçekten,  $f$  fonksiyonunun değeri olan durumun her bir bileşeni (1) formunda bir kesirdir. Bu kesrin payındaki ilk terim, başlangıç durumunun bir bileşenidir ve bağıntı süreklidir. Payındaki ikinci terim  $H_i(\sigma)$  ve  $H_i(\sigma \| s_i^{(j)})$  lineer fonksiyonları, 0 sabiti ve maksimizasyon operatöründen oluşmuştur. ( $\max\{0, x\}$  fonksiyonu  $x$  in sürekli fonksiyonudur. ) Sonuç olarak  $\phi_{ij}(\sigma)$  lar yine  $\sigma$  nın sürekli fonksiyonlarıdır. Böylece (5) kesrinin payı,  $\sigma$  nın sürekli fonksiyonudur. Kesin paydası da, değeri en az 1 olduğundan süreklidir. O halde  $f$  fonksiyonu gerçekten sürekli bir fonksiyondur.

Yukarıdaki ifadelerden **Brouwer'in Sabit Nokta Teoremi**'nin şartları sağlanır. Bu teorem, sonlu-boyutlu bir uzayın dışbükey bir altkümelerini kendisine tasvir eden sürekli  $f$  'nin en azından bir sabit noktası olduğunu, yani  $f(\sigma^0) = \sigma^0$  olacak şekilde  $\sigma^0$  noktasının varlığını ifade eder.  $\sigma^0$ , sabit noktalardan biri olsun.  $\forall i$  ve  $j$  için,

$$\sigma_i^0(s_i^{(j)}) = \frac{\sigma_i^0(s_i^{(j)}) + \phi_{ij}(\sigma^0)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(\sigma^0)} \text{ dir.}$$

Herhangi bir  $i$  oyuncusu için  $\sigma_i^0(s_i^0) > 0$  ve  $\phi_{i0}(\sigma^0) = 0$  olacak şekilde bir  $s_i^0$  pür stratejisi mevcuttur. Bu özel strateji için

$$\sigma_i^0(s_i^0) = \frac{\sigma_i^0(s_i^0) + \phi_{i0}(\sigma^0)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(\sigma^0)}$$
 yazılabilir ve buradan da

$$\sigma_i^0(s_i^0) + \sigma_i^0(s_i^0) \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(\sigma^0) = \sigma_i^0(s_i^0) + \phi_{i0}(\sigma^0)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafından eşit terimleri atarak ve sağ taraftaki ikinci terimin de sıfır olduğu hatırlanarak

$$\sigma_i^0(s_i^0) \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(\sigma^0) = 0$$

oluğu görülür.  $\sigma_i^0(s_i^0) > 0$  dan dolayı

$$\sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(\sigma^0) = 0$$

dır.  $\forall i, j$  için  $\phi_{ij}(\sigma^0) \geq 0$  olduğundan, son denklem de göz önüne alınarak  $\phi_{ij}(\sigma^0) = 0$  olur.

Böylece max işaretinin sağında hiçbir pozitif sayı yoktur, yani

$$H_i(\sigma^0 \| s_i^{(j)}) \leq H_i(\sigma^0)$$

dir. Bu eşitsizlik her bir  $i$  oyuncusu ve bu oyuncunun herhangi  $s_i^{(j)}$  pür stratejisi için sağlandığından, Teorem 2.14,  $\sigma^0$  durumunun bir denge durumu olduğunu ifade etmektedir.

Nash teoreminin asıl önemi, denge noktasının varlığını garantilemesidir. Bununla beraber teorem, denge durumunun belirlenişine uygulanamaz. Çünkü, Brouwer'in sabit nokta teoremi sabit noktanın varlığını ispatlarken, bu noktanın nasıl bulunacağı sorusunu yanıtlamaz. Sonuç olarak, Brouwer'in sabit nokta teoremine dayanan Nash teoremi, denge durumunun nasıl bulunacağını göstermektedir. (Ahlatçioğlu ve Tiryaki, 1998, 129-133)

## 2.4 Denge Analizi

Denge analizi başlığı altında, varlığı önceki bölümde ispatlanan denge durumunun tekliği ve kararlılığı incelenmektedir.

### 2.4.1 Genel Dengenin Tekliği

Genel dengenin tekliğini gösteren üç farklı yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi ekonomideki malların ikame edilebilirliğidir.

Genelde  $\frac{dZ_j}{dp_j}$  toplam türevleri işaret değiştirmiyorsa ve hiçbir  $p_j$  değeri için sıfıra eşit

değilseler birden fazla denge noktası var olamaz. Hicksian kararlılık koşulları uyarınca dengenin bir komşuluğu içinde tüm  $j$  ler için  $\frac{dZ_j}{dp_j} < 0$  olmalıdır. Dolayısıyla Hicksian

kararlılık (istikrar) koşullarını her noktasında sağlayan bir sistemin bir tek dengesi vardır. Kabaca ikame edilebilir (gros ikame) varsayımı sistemin her noktada istikrarlı olmasını sağladığından dengenin tekliğini de göstermektedir. (Henderson ve Quant, 1998, 253-254)

Arrow ve Hahn  $S_i = -Z_i$  olmak üzere bir aşırı arz vektörü tanımlarlar ve  $p^*$  denge fiyatında

$s_i(p^*) \geq 0$  dir.  $s_{ij}(p) = \frac{\partial s_i}{\partial p_j}$  anlamına gelmek üzere kabaca ikame edilebilirlik  $i \neq j$  olmak

üzere  $s_{ij}(p) < 0$  olarak ifade edilir. (Arrow ve Hahn, 1971, 221)

Tüm malların birbirlerinin yerine geçebilmeleri oldukça sınırlandırıcı bir varsayımdır. Bundan biraz daha az sınırlandırıcı olan bir diğer dengenin tekliği ifadesi ise ekonominin diagonal egemenliğe sahip olmasıdır. Bu ikinci analizin dayandığı temel, malların taleplerinin kendi fiyatları karşısındaki duyarlılıklarının diğer malların fiyatlarına karşı gösterdikleri tepkilere egemen olmasıdır. Arrow ve Hahn diagonal egemenliği şu şekilde formüle ederler.

- $s_{ij}(p) = \frac{\partial s_i}{\partial p_j}$  olmak üzere bütün  $i$  ler için  $s_{ii}(p) > 0$  ve

- $h(p)$  pozitif bir vektör olmak üzere

$h_i(p)s_{ii} > \sum_{n>j \neq i} |s_{ij}(p)|h_j(p)$  koşulu gerçekleşiyorsa bu ekonomi için  $p$  fiyatında diagonal egemen denir. (Arrow ve Hahn, 1971, 233) Benzer bir tanımlamayla, kompleks  $A = (a_{ij})$  matrisinin, pozitif  $\pi_i$  sayılarının bir kümesinin bulunması durumunda  $|a_{ii}|\pi_i > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\pi_j$  koşulunu sağlaması halinde diagonal egemendir. (Nikaido, 1968, 385)

Bütün fiyat vektörleri için ekonominin diagonal egemenliğe sahip olması durumunda denge tek olacaktır.

Dengenin tekliğinin ispatı için ortaya konulan bir diğer teoremden Gale Özelliği'nin varlığı durumudur. Aşırı arz vektörünün elemanlarının fiyat vektörünün elemanlarına göre kısmi türevlerinden oluşan  $J(p)$  jakobiyanı Gale özelliğine sahip olursa tek bir fiyat vektörü var olacaktır. Gale özelliğini Arrow ve Hahn şu şekilde tanımlamaktadırlar.  $A$  bir kare matris ve  $T$  aynı dereceden köşegen matris ve  $v$  pozitif bir sütun vektör olmak üzere  $TATv \leq 0$  eşitliğinin tek çözümünün  $v = 0$  olmasıdır. (Arrow ve Hahn, 1971, 208)

Dengenin tekliğinin sağlanabilmesinin bir çok sınırlandırıcı varsayıma bağlı olması nedeniyle çoklu dengeler durumunda, sonlu sayıda denge ile ilgilenilmeye başlanmıştır. Debreu kritik denge noktalarının dışarıda bırakılarak yalnız düzgün denge noktalarının içerildiği düzgün ekonomilerde denge kümesinin sonlu olduğunu ortaya koymuştur. Bir anlamda dengenin tekliği yerine yakınsal teklik üzerinde durulmaya başlanmıştır. (Bulutay, 1980, 218)

Çoklu denge olasılığı, kararsız denge durumunu içerir ki bu durumun ekonomik analizi zorlaştıracığı açıktır. Eğer ekonomi süreksizlik yaratan sıçramalar yaratıyorsa, verilenlerin değişmesi halinde tek olarak belirlenmiş yeni bir dengeye doğru hareket edebilir, ancak bu durum önceden belirlenebilecek hakim bir durum değildir. (Krauss ve Johnson, 1974, 18) Dengenin tekliğine engel olan iki durum olabilir. Bunlardan birincisi talep ile arz arasındaki ilişkinin karşılama olmasına izin verilmesi durumunda gerçekleşir. İkinci olarak bütün arz ve talep ilişkilerinin fonksiyonlarla ifade edilmesi halinde bile bireysel maksimizasyonu ve piyasanın temizlenmesini sağlayacak birden fazla fiyat kümesi bulunabilir. (Quirk ve Saposnik, 1968, 97)

#### 2.4.2 Genel Dengenin Kararlılığı

Bu bölümde dengeden ayrılma durumunda sistemin kendiliğinden yeniden dengeye gelip gelemeyeceği ele alınmaktadır. Dengeden küçük sapmalar sonrasında yeniden denge

durumuna gelen sistemler kararlı sistemlerdir. Literatürde bu durum yakınsal kararlılık olarak ele alınır. Tümel kararlılıkta ise dengenin civarında bulunması gerekmeyen bir noktadan dengeye gidiş incelenir. (Bulutay, 1980, 238)

*Kararlılık* kavramı, bir kitle, yeterince küçük bütün yer eğitirmelerinden sonra başlangıçtaki durumunu alıyorsa denge kararlıdır şeklinde ifade edilebilir. Benzeri şekilde bir hareket, küçük bozmalara başlangıç değerlerinde ve değiştirgenlerdeki küçük değişimlere duyarsızsa kararlıdır.

Matematiksel olarak bir çok kararlılık tanımı vardır. Bunlardan **Lyapunov** ve **Arrow-Hurwicz** tanımları ele alınacaktır.

Bir dinamik dizgenin, bir denge noktası  $y^*$  olsun Herhangi bir  $\varepsilon > 0$  gerçel sayısı için  $\|y^0 - y^*\| \leq \delta \Rightarrow \|y(t, y_0) - y^*\| \leq \varepsilon$  koşulunu sağlayan bir  $\delta = \delta(\varepsilon)$  noktası varsa  $y^*$  Lyapunov kararlıdır. Bu tanıma göre kararlılık denge noktasına yeterince yakın bir yerden başlayan bir hareketin  $\varepsilon$  yarı çaplı bir civar içinde sınırlı kalacağı yani  $y^*$  noktasından fazla uzaklaşmayacağı anlamına gelmektedir. Arrow – Hurwicz'in tanımı ise şu şekilde ifade edilebilir. Bir dinamik dizgenin çözümü başlangıç noktası  $y_0$  olduğunda  $\phi(t, y_0)$  olsun. Eğer  $y^*$  denge noktasının bütün  $y_0 \in N(y^*, \varepsilon)$  için  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y_0) = y^*$  koşulunu sağlayan  $y^*$  yerel kararlıdır. Aynı koşullar geçerli olmak üzere eğer  $y^*$  denge noktası tüm  $y_0$  noktaları ve çözümler için  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y_0) = y^*$  oluyorsa  $y^*$  tümel kararlıdır. (Ersel, 1980, 463-465)

Genel denge çözümlemesi piyasalar arasındaki karşılıklı bağımlılık ilişkilerini dikkate aldığı için bir mala olan aşırı talep bütün mal fiyatlarının bir fonksiyonudur ve bu nedenle bir piyasada dengenin bozulması diğer piyasaları da etkileyecektir. Walras'a göre denge kararlıdır. Ona göre başlangıçta dengeden uzak olan bir sistem, bir süreç sonucunda dengeye ulaşacaktır. Sistemin dışındaki bir birimin bütün piyasaları denge fiyatına getirdiği varsayılırsa, bu süreç tamamlandığında en son piyasa dengeye gelecek, fakat piyasalar arasındaki karşılıklı bağımlılık nedeniyle daha önce dengeye gelmiş piyasalara denge bozulacaktır. Ancak Walras'a göre bu dengesizlik başlangıçtaki dengesizlikten daha küçük olacaktır. Walras, arz ve talebin kendi fiyatındaki değişikliklere diğer fiyatlardaki değişikliklerden daha duyarlı olduğunu varsaymaktadır. Bu süreç tekrarlandığı takdirde sistem deneme yanılma yoluyla ya da piyasa mekanizmasının işlemesiyle (tatonnement) nihai olarak dengeye ulaşacaktır. Bu uyumlama süreci teorik olarak defalarca tekrarlanabilir, ancak

bu süreç gerçek dünyada bir zaman alacaktır. Walras, yeni bir dengeye erişmek için ne kadar zamana gereksinim olacağı konusunu tartışmamıştır. Bu yüzden de tatonnement süreci bu uyumlama sürecini hemen hemen bir yana bıraktığından, genel olarak tatminkar olmayan bir mekanizmadır. (Koutsoyiannis, 1997, 564)

**Simpson**, genel sistemin istikrarı ile ilgili teoremlerin genellik derecesi sınırlandırılmış, sınırlı sayıda özel durum için ispatlandığını, iki türlü olan bu teoremlerin, birinci tipte olanlarının özel bir dışsal nedenden (bunun genellikle Walrascı aşırı talep hipotezine bağlı olduğunu belirtmektedir) kaynaklanan bir dengesizlik olduğu varsayılarak sistemin davranışı araştırılmakta ve sistemin tanımlı olduğu bir denge komşuluğu içinde dengenin istikrarlı olmasını sağlayan koşullarla ilgili teoremler kanıtladıklarını, ikinci sınıfa ait istikrar teoremlerinin ise hangi tür genel denge sistemlerinin bu koşulları sağlayan dengelere sahip oldukları ile ilgilendiklerini söylemektedir. (Simpson, 1975, 56-57)

Arrow ve Hahn kararlılık konusunu bir tatonnement süreci içinde tellalın (auctioneer) varlığı çerçevesinde incelemişler ve tellalın kuralları başlığı altında ilk varsayımları,  $G_i(z_i)$  olarak tanımladıkları  $z_i$  için işaret koruyucu bir fonksiyon olmak üzere  $G_i(0) = 0$  ve  $G_i' > 0$  koşullarını sağlar ve buna dayanarak, her  $i$  için;

$$p_i \leq 0 \text{ ve } z_i(p) < 0 \text{ ise } \frac{dp_i}{dt} = 0 \text{ dir.}$$

$$\text{Aksi halde } \frac{dp_i}{dt} = G_i[z_i(p)] \text{ dir.}^1 \text{ (Arrow – Hahn, 1971, 266)}$$

Bu aşırı talep pozitif olduğunda zaman içinde tellalın fiyatları arttırdığı bir uyarılma süreci olarak düşünülebilir.

Kararlılık (istikrar) koşulları durağan ve dinamik istikrar olarak iki ana başlık altında incelenebilir.

#### 2.4.2.1 Durağan Kararlılık

Hicks tarafından formüle edilen durağan analize göre

<sup>1</sup>  $z_i$  aşırı talebin pozitif olması durumunda fiyatın zamana bağlı değişimi de pozitif olur. Yani zaman gectikçe fiyat artar.

$\frac{\partial Z_k}{\partial p_j} \neq 0$  ise  $Q_j$  piyasasındaki dengenin bozulması  $Q_k$  piyasasında da dengenin bozulmasına

yol açar. Yalıtılmış bir piyasaya ilişkin Walrasyan istikrar koşulu,

$\frac{\partial Z_j}{\partial p_j} < 0$  olmasını gerektirir. (Bu kısmi türev alınırken diğer fiyatların tümü sabit kabul

edilmiştir. Piyasalar arasındaki etkileşimi yansıtabilmek için kısmi türevler yerine  $\frac{dZ_j}{dp_j}$

toplam türevi kullanılmaktadır.

Eğer  $\frac{dZ_j}{dp_j} < 0$  ise Hicks'in tanımlamasına göre,  $Q_j$  piyasası

- $p_j$  dışındaki  $(m-1)$  fiyatın hepsi de katıysa
- eğer intibak ediyorsa
- eğer fiyatlardan  $(m-3)$  tanesi katı ama  $p_h$  ve  $p_k$  gibi iki tanesi oynaksa ve bu iki fiyat  $Z_h = 0$  ve  $Z_k = 0$  olacak bir biçimde intibak ediyorsa, tam istikrarlı olacaktır.

Bu son durum genişleterek numeraire dışındaki tüm fiyatların oynak olduğu duruma ulaşılabilir. Bu durumda numeraire dışındaki kalan  $(m-1)$  tane piyasa tam istikrarlı olmalıdır.

$m$  mallı bir sistemin aşırı talep fonksiyonları  $j = 2, \dots, m$  olmak üzere,  $Z_j = Z_j(p_2, \dots, p_m)$  dir. Numeraire'e ilişkin aşırı talep fonksiyonu diğer  $(m-1)$  piyasadan elde edilebileceği için dışarıda bırakılmıştır.

Fiyat değişikliklerinin aşırı talepler üzerindeki etkisi,  $Z_j = Z_j(p_2, \dots, p_m)$  toplam türevseli alınarak bulunur.

$b_{jk} = \frac{\partial Z_j}{\partial p_k}$  göstermek üzere; toplam türevsel aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$dZ_2 = b_{22} dp_2 + b_{23} dp_3 + \dots + b_{2m} dp_m$$

$$dZ_3 = b_{32} dp_2 + b_{33} dp_3 + \dots + b_{3m} dp_m$$

.....

$$dZ_m = b_{m2} dp_2 + b_{m3} dp_3 + \dots + b_{mm} dp_m$$

Bir denge noktasının küçük bir komşuluğu içinde  $b_{jk}$  ifadesinin sabit varsayılabilirliğinden hareketle,  $(m-1)$  değişkenli ve  $(m-1)$  denklemlili doğrusal eşanlı bir denklem sistemi oluşturulur. Dikkat edilirse bu sistemin katsayılarının  $Z_2, \dots, Z_m$  denklem sisteminin  $p_2, \dots, p_m$  fiyatlarına göre Jakobian'ını oluşturmaktadır.

$Q_j$  piyasasındaki dengenin bozulduğunu ve diğer fiyatların hepsinin de katı olduğu durumu ele alınırsa,  $k=2, \dots, k \neq j$  için  $dp_k = 0$  değeri yukarıda türevsellerden oluşturulan sistemde yerine konulduğunda, bu sistemin  $(j-1)$ . denklemi

$$dZ_i = b_{ij} dp_i \text{ haline gelir.}$$

Denklemin her iki yanı da  $dp_j$  'ye bölüldüğünde  $Q_j$  piyasasının tam istikrar için ilk koşul,

$$\frac{dZ_i}{dp_i} = b_{ij} < 0 \text{ olarak elde edilir.}$$

Bu koşul, yalıtılmış bir piyasanın tam istikrar koşulunun aynıdır. Sistemin tamamının istikrarlı olabilmesi için ise denklem  $j=2, \dots, m$  için geçerli olmalıdır. Öyleyse, bir çoklu piyasanın tam istikrarlı olabilmesinin ilk koşulu, her piyasanın ayrı ayrı istikrarlı olmasıdır.

Şimdi de  $Q_j$  piyasasında dengenin bozulduğu, yalnızca  $p_h$  fiyatının intibak ettiği ve diğer fiyatların katı olduğu durumu ele alalım.  $k \neq j, h$  için  $dZ_h = 0$  ve  $dp_k = 0$  değerleri yine türevsel sistemde yerlerine konulduğunda  $Q_j$  ve  $Q_h$  mallarına ait denklemler

$$dZ_i = b_{ij} dp_j + b_{jh} dp_h$$

$$0 = b_{hj} dp_j + b_{hh} dp_h$$

haline gelir. Cramer kuralı kullanılarak,  $dp_j$  'nin çözüm değeri

$$dp_j = \frac{\begin{vmatrix} dZ_j & b_{jh} \\ 0 & b_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}} = dZ_j \frac{b_{hh}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}}$$

olarak bulunur. Her iki yan, sağ yandaki sabit terime ve  $dp_j$  'ye bölünürse,  $Q_j$  piyasasında tam istikrar için ikinci koşul elde edilir.

$$\frac{dZ_j}{dp_j} = \frac{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}}{b_{hh}} < 0$$

$p_h$  piyasasının tam istikrarlı olabilmesi için ise, terimin paydası negatif olmalıdır. Dolayısıyla, sistemin tamamının istikrarlı olabilmesi için terimin payı pozitif olmalıdır.

Son olarak,  $Q_j$  piyasasında dengenin bozulduğu,  $p_h$  ve  $p_i$  gibi iki fiyatın intibak ettiği ve geriye kalan  $(m-4)$  fiyatın katı olduğu bir sistemi ele alalım.  $dZ_h = dZ_i = 0$  ve  $dp_k = 0$  değerleri yerine konulduklarında, ilgili denklemler,

$$\begin{aligned} dZ_j &= b_{jj}dp_j + b_{jh}dp_h + b_{ji}dp_i \\ 0 &= b_{hj}dp_j + b_{hh}dp_h + b_{hi}dp_i \\ 0 &= b_{ij}dp_j + b_{ih}dp_h + b_{ii}dp_i \end{aligned}$$

haline gelir. Sistem, Cramer kuralıyla  $dp_i$  için çözülürse,

$$dp_i = \frac{\begin{vmatrix} dZ_i & b_{jh} & b_{ji} \\ 0 & b_{hh} & b_{hi} \\ 0 & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}} \quad \text{elde edilir. Paydaki determinant birinci}$$

sütuna göre açılır ve sistem  $dE_j/dp_j$  için çözülürse  $Q$  piyasası için üçüncü tam istikrar koşulu bulunur.

$$\frac{dZ_j}{dp_j} = \frac{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}} < 0$$

$j = h$  ve  $h = i$  dersek,  $Q_h$  piyasasında tam istikrar olması için bu ifadenin paydası pozitif olmalıdır. Dolayısıyla, sistemin bir bütün olarak tam istikrarlı olabilmesi için, payı negatif olmalıdır.

Sistemin bir bütün olarak tam istikrarlı olabilmesi için aşağıdaki,  $1, 2, 3, \dots, (m-1)$  mertebesinden Jacobian determinantlarını,

$$b_{jj}, \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}, \dots$$

tüm  $j, h, i, \dots$  değerleri için negatiften başlayarak işaret değiştirerek gitmesi gerekir.

Bir çok çoklupiyasa sistemi açısından tam istikrar koşulları, gerektiğinden daha kuvvetlidir. Eğer sistemdeki fiyatların hepsi de oynaksa,  $dZ_j/dp_j$  için geçerli olan tek değer, diğer  $(m-2)$  piyasasının intibak edecekleri varsayımına dayanılarak hesaplanan değer olacaktır. Yukarıdaki hesaplama yöntemini izleyerek,  $Q_2$  piyasasının istikrar koşulu

$$\frac{dZ_2}{dp_2} = \frac{\beta}{\beta_{22}} < 0 \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

$\beta$  türevsel sistemin Jacobian determinanı,  $\beta_{22}$  ise  $b_{22}$ 'nin kofaktörüdür. Hicksian terminolojide, bu koşulun numeraire dışındaki tüm mallar için geçerli olduğu bir sistem, bir bütün olarak *eksik istikrarlı* olarak adlandırılır. Eksik istikrar için, her piyasanın ayrı ayrı istikrarlı olması zorunlu değildir. (Henderson ve Quant, 1998, 246-250)

Bir anlamda bütün mallar kabaca birbirlerinin yerine ikame edilebildiklerinde, Hicksgil koşullarla dinamik koşullar özdeş anlama gelir. (Bulutay, 1980, 253)

#### 2.4.2.2 Dinamik Kararlılık

Dinamik kararlılıkta, denge bozucu bir değişiklikten sonra fiyatların zaman patikası incelenir. Bir çoklu piyasa sisteminde dengeden küçük bir ayrılışı takiben fiyatların hepsi de zaman içinde bir denge düzeyine yaklaşıyorlarsa bu denge dinamik olarak istikrarlıdır.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{it} = p_i^*$$

Daha kapsamlı bir analizde dinamik kararlılığı, tümel ve yakınsal kararlılık olarak iki başlık altında incelemek mümkündür. Tümel kararlılık yaklaşımında,

- Açıklanmış tercihler kuramının zayıf belitinin varlığı
- Kabaca birbirleri yerine ikame edilebilir malların varlığı
- Diagonal egemenliğin varlığı, durumlarında dengenin karalı olduğu gösterilebilir (Bulutay, 1980, 255-260) Her üç durum için de tatonnement sürecinin var olduğu varsayılacaktır.

#### 2.4.2.2.1 Tümel (Global) Kararlılık

Hangi noktadan başlanırsa başlansın daima denge noktasına yönelme söz konusu ise sistemin kararlı olduğu söylenebilir. Tümel kararlılık yalnızca, denge tek noktada olduğunda ortaya çıkar. Bu durumda Lyapunov fonksiyonu ile dengenin kararlılığı ifade edilebilir.

**Tanım 2.20: (Lyapunov Fonksiyonları)**  $\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt}$  olmak üzere<sup>2</sup> bu sürekli ve türevi

alınabilir bir fonksiyon olan  $V(y)$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir Lyapunov fonksiyonudur denir.

- 1- Bütün  $y$  ler için  $V(y) \geq 0$
- 2- Ancak ve ancak  $y = 0$  iken  $V(y) = 0$
- 3-  $y \neq 0$  için  $\frac{dV}{dt} < 0$
- 4-  $|y| \rightarrow \infty$  olduğunda  $V(y) \rightarrow \infty$  dir<sup>3</sup>

**Teorem 2.16: (Lyapunov Kararlılık Teoremi)** Eğer bir sistem için Lyapunov fonksiyonu varsa sistem kararlıdır. Buna ilave olarak fonksiyon  $\dot{V}_i < 0$  koşulunu sağlıyorsa, sistem asimptotik kararlıdır denir. (Lancaster, 1968, 199-200)

Global kararlılık Lyapunov ve Lipschitz fonksiyonlarına dayanılarak yapılabilir.

$F(p)$  toplam aşırı talep fonksiyonunu göstermek üzere  $\bar{p}$  denge fiyat vektörü  $D(p - \bar{p})$  şeklinde tanımlanmış bir uzaklık fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması halinde global kararlıdır.

herhangi  $p \neq \bar{p}$  için  $\frac{dD(p - \bar{p})}{dt} < 0$  dir.

Bu durumdan farklı olarak uzaklık fonksiyonu  $D^*(F(p))$  şeklinde de tanımlanmış olabilir ki bu durumda da

<sup>2</sup> Lancaster aynı ifadeyi vektör notasyonu ile  $\dot{V} = \nabla V \cdot Dy$  şeklinde göstermektedir

<sup>3</sup> Ersel  $y^*$  ile denge noktası olarak tanımlayarak bu maddeyi  $\|y - y^*\| \rightarrow \infty$  olduğunda  $V \rightarrow \infty$  dir şeklinde ifade eder. (Ersel, 1981, 467)

$$\frac{dD^*(F(p))}{dt} < 0 \quad \text{herhangi } p \neq \bar{p} \text{ koşulu sağlanmalıdır.}$$

Arrow-Hurwicz'in kullandığı öklitçi uzaklık fonksiyonu

$$D(p - \bar{p}) = \sum_{i=0}^n (p_i - \bar{p}_i)^2 \quad \text{veya}$$

$$D^*(F(p)) = \sum_{i=0}^n (F_i(p))^2 \quad \text{olarak tanımlanabilir.}$$

Bu durumda *tatonnement*  $p_i = g_i(F_i(p))$  şeklinde tanımlanan ayarlama mekanizması çalışır.

$g_i(F_i(p))$  kısaca  $F_i(p)$  olarak da ele alınabilir.

**Teorem 2.17:** Saf mübadele durumunda bir tek denge varsa denge global kararlıdır.

**Kanıt:** Bu teoremin kanıtında öncelikle bütün tüketicilerin açıklanmış tercihler kuramının zayıf belitinin varlığı koşulunun sağlandığını varsaydıkları kabul edilir.  $j$  inci tüketici için  $x'^j$  ve  $x''^j$  gibi iki mal sepeti için  $p'$  ve  $p''$  gibi iki fiyat vektörü olsun. Bu durumda  $(x'^j \neq x''^j)$  olmak üzere

$$\sum_{i=0}^n p'_i x'_{ij} \geq \sum_{i=0}^n p'_i x''_{ij} \Rightarrow \sum_{i=0}^n p'_i x'_{ij} > \sum_{i=0}^n p''_i x''_{ij} \quad \text{eşitsizliği sağlanmaktadır.}$$

Buna eşdeğer olarak aşırı talep terimleri de

$$z'_{ij} = x'_{ij} - x'^0_{ij}, \quad z''_{ij} = x''_{ij} - x''^0_{ij} \quad \text{dir.}$$

$$\sum_{i=0}^n p'_i z'_{ij} \geq \sum_{i=0}^n p'_i z''_{ij} \Rightarrow \sum_{i=0}^n p'_i z'_{ij} > \sum_{i=0}^n p''_i z''_{ij} \quad (z'_j \neq z''_j) \quad \text{olmalıdır.}$$

Bu durumda

$$\frac{dD(p - \bar{p})}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n (p_i - \bar{p}_i)^2 = 2 \sum_{i=0}^n (p_i - \bar{p}_i) \dot{p}_i = 2 \sum_{i=0}^n p_i F_i(p) - 2 \sum_{i=0}^n \bar{p}_i F_i(p) \quad \text{olur.}$$

Walras kanununa göre  $\sum_{i=0}^n p_i F_i(p) = 0$  olacağından,  $\frac{dD}{dt} < 0$  dir.

Eğer  $\sum_{i=0}^n \bar{p}_i F_i(p) > 0$  ise

Yukarıda ki notasyonlara göre  $F_i(p) = \sum_{j=1}^m z_{ij}(p)$  dir.

Her  $i = 0, \dots, n$  ve  $j = 1, \dots, m$  için  $z_{ij}(\bar{p}) = 0$  olur.

$p'' = \bar{p}$  ve  $p' = p$  olduğunu kabul ederek ve  $p$  herhangi bir fiyat vektörü olmak üzere

$$\sum_{i=0}^n p_i z'_{ij} = 0 \quad (\text{bütçe kısıtı})$$

$$z''_{ij} \equiv z_{ij}(\bar{p}) = 0 \quad \text{olduğundan} \quad \sum_{i=0}^n p_i z''_{ij} = 0 \quad \text{dır.}$$

Bu yüzden  $\sum_{i=0}^n p_i z'_{ij} \geq \sum_{i=0}^n p_i z''_{ij}$  dir ve bunun anlamı da  $\sum_{i=0}^n \bar{p}_i z'_{ij} > 0$  olmasıdır.

$$\sum_{i=0}^n \bar{p}_i F_i(p) = \sum_{i=0}^n \bar{p}_i \sum_{j=1}^m z'_{ij} > 0 \quad \text{ifadesi yazılabilir.}$$

Benzer bir teorem de şu şekilde ifade edilebilir, aşırı talep fonksiyonu açıklanmış tercihler kuramının zayıf belitinin varlığı koşuluna uyarsa ve denge tek ise, denge global olarak kararlıdır. (Quirk ve Saposnik, 1968, 179-181)

Modelde ele alınan uzaklık fonksiyonunun, Lyapunov fonksiyonu olmanın özelliklerine sahip olduğu gösterilerek, toplam aşırı istem fonksiyonları açıklanmış tercihler kuramının zayıf belitini sağladıklarında ve Walras yasası geçerli olduğunda, dengeyi veren  $p^*$  fiyat vektörü tümüyle kararlı olacağı sonucuna ulaşılabilir.

$$V(t) = \sum_{i=1}^I (p_i(t) - p_i^*)^2$$

Bu ifade  $x$  in denge fiyatından sapmayı gösterdiği bir Lyapunov fonksiyonu olarak alınabilir. Bu karesel fonksiyonun, Lyapunov fonksiyonu olmanın 1, 2 ve 4 özelliklerini sağladığı açıktır, 3. özelliğin sağlandığını göstermek için zamana göre türevi alındığında,

$$\frac{dV}{dt} = 2 \left[ p(t) - p^* \right] \frac{dp}{dt} \quad \text{elde edilecektir.}$$

Buradaki  $dp/dt$  yi yukarıda belirtilen en basit şekliyle,  $z(p(t))$  ye eşit olarak alındığında ve Walras yasası gereği,

$p(t) z(p(t)) = 0$  olduğu gözönünde tutulduğunda, son ifade,

$$\frac{dV}{dt} = -2 p^* z(p(t)) \text{ şeklinde yazabilir.}$$

Açıklanmış tercihler kuramının zayıf belitinin,

$$p^* s(p) < 0$$

olarak gösterilebileceği düşünülürse, bu eşitsizlikte aşırı arz yerine aşırı talep konularak, açıklanmış tercihler kuramının zayıf belitinin varlığı durumunda,

$$\frac{dV}{dt} = -2 p^* z(p(t)) < 0$$

sonucuna ulaşılabilecektir.

Malların kabaca birbirlerinin yerine geçebilir olmaları durumunda açıklanmış tercihler kuramının zayıf beliti gerçekleşmiş olacaktır.<sup>4</sup>

**Hahn** ise global karalılık konusuna daha farklı yaklaşmıştır.  $x \in R^n$  ve  $F$ ,  $n$  boyutlu vektör değerli ve  $R^n$  uzayında sürekli bir fonksiyon olmak üzere  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x)$  tanımlanmış ve  $F(x^0) = 0$  koşulunu sağlayan  $x^0$  denge noktası olarak kabul edilmiştir.

**Tanım 2.21:**  $F(x)$ , bir  $L$  sabiti için aşağıdaki koşulu sağlıyorsa Lipschitz fonksiyonudur.

$$|F(x) - F(x')| \leq L |x - x'|$$

**Teorem 2.18:**  $F(x)$  Lipschitz fonksiyonu ise  $x(t, x(0))$  fonksiyonunun çözümü tek ve sürekli.  $\bar{x}(0)$ ,  $F(x)$  fonksiyonunun denge noktasıdır.

**Tanım 2.22:** Her  $\varepsilon > 0$  için aşağıdaki koşulu sağlayan  $\varepsilon$  değerine bağlı bir  $\delta$  varsa  $x(t, \bar{x}(0))$  çözümü kararlıdır.  $|x(0) - \bar{x}(0)| \leq \varepsilon$  tüm  $t \geq 0$  dır.

**Tanım 2.23:**  $x(t, \bar{x}(0))$  çözümü aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda global kararlıdır.

- Kararlıdır ve

<sup>4</sup> Bir örnek üzerinden bu ilişkinin gösterilmesi için Bulutay (1980) 255-259'a bakılabilir.

-  $F$ 'in tanım kümesindeki herhangi bir  $x(0)$  için,

$$\lim_{t \rightarrow x} |x(t, x(0)) - x(t, \bar{x}(0))| = 0 \text{ dır. (Hahn, 1991, 747-751)}$$

Diagonal matrisin egemenliği ile ilgili olarak ekonominin diagonal egemenliğe sahip olması durumunda tümel kararlılığın söz konusu olacağı söylenebilir.

$V = \text{Max}_i |z_i| / d_i$  olarak alındığında  $\frac{dV}{dt} < 0$  özelliği sağlanıyorsa amaçlanan sonuca ulaşılmış olacaktır.

$$z_{ij} = \frac{\partial z_j}{\partial p_j} < 0 \text{ olmasına dayanılarak}$$

Diagonal egemenliğin varlığı sonucu, bütün  $j = 1, 2, \dots, l$  ler için,

$d_j |z_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i |z_{ji}|$  .. söz konusu bulunacaktır. (Bu ifadede  $d_1, d_2, \dots, d_l$  ler artı sayılardır.)

Yukarıdaki  $V$  ifadesinde en çoğu sağlayanın  $k$  olduğunu kabul edilirse;

$|z_k| / d_k \geq |z_i| / d_i$  .. olduğu söylenebilir.

Bu durumda  $V = |z_k| / d_k$  olacaktır. Bu kullanılarak da,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{d_k} (z_k \text{ nin işareti}) \sum_j z_{kj} \left( \frac{dp_j}{dt} \right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{d_k} (z_k \text{ nin işareti}) \sum_j z_{kj} (z_j) \text{ yazılabilecektir.}$$

Denge gerçekleştiğinde  $dV/dt = 0$  olacak ve bütün  $z_j$  ler sifıra eşit bulunacaktır. Ama dengede bulunulmadığında enaz bir tane  $z_j$  sifirdan farklı bulunacak ve yukarıdaki tanım gereği  $|z_k| > 0$  olacaktır. Bu durumda  $j = k$  olarak alındığında ve  $|z_k|$  ile çarpıldığında, yukarıdaki ifade,

$$d_k |z_{kk}| |z_k| > \sum_{i \neq k} d_i |z_{ki}| |z_k| \text{ şeklini alacaktır.}$$

Öte yandan,  $|z_k| \geq |z_i| \frac{d_k}{d_i}$  olduğu için,

$$\sum_{i \neq k} d_i |z_{ki}| |z_k| \geq \sum_{i \neq k} d_i |z_{ki}| \frac{d_k}{d_i} |z_i| \text{ yazılabilecektir.}$$

Böylece,  $|z_{kk}| |z_k| > \sum_{i \neq k} |z_{ki}| |z_i|$  eşitsizliğine ulaşılabacaktır.

Şimdi  $z_{kk} < 0$  olduğu için,  $|z_{kk}| = -z_{kk}$ , ayrıca,

$$|z_k| = (z_k \text{ in işareti}) (z_k) \text{ dır.}$$

O halde,  $|z_{kk}| |z_k| = (-z_{kk}) (z_k \text{ nin işareti}) (z_k)$  olarak yazılabilir.

Diğer taraftan  $\sum_{i \neq k} |z_{ki}| |z_i| \geq (z_k \text{ nin işareti}) \sum_{i \neq k} z_{ki} z_i$  olarak yazılabilir.

Bu durumda  $(-z_{kk}) (z_k \text{ nin işareti}) (z_k) > (z_k \text{ nin işareti}) \sum_{i \neq k} z_{ki} z_i$  şeklinde gösterilebilir.

Bunda da,  $(z_k \text{ nin işareti}) \sum_{i \neq k} z_{ki} z_i + z_{kk} (z_k \text{ nin işareti}) (z_k) < 0$

$(z_k \text{ nin işareti}) \sum_{i \neq k} z_{ki} z_i < 0$  sonucuna ulaşılır.

Bu sonucu yukarıda verilen  $dV/dt$  ifadesinde kullanınca  $dV/dt < 0$  eşitsizliğini elde eder, böylece de amaçlanan sonuca ulaşılmış olur.

Bu noktada diğer bir kararlılık analizi olan yakınsal kararlılık kavramını ele alınacaktır.

#### 2.4.2.2.2 Yakınsal Kararlılık

Tatonnement kuralı

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i(z_i(p)), \quad i = 1, \dots, l \quad \text{şeklinde tanımlanabilmektedir.}$$

Bu ifadenin denge fiyatı olan  $p^*$  nin etrafında Taylor serisi şeklinde açılır ve bu seride birinci derecenin üstündeki terimler atılırsa,

$$\frac{dp_1}{dt} = f_1(z_1(p^*)) + f_1' \sum_{r=1}^l \frac{\partial z_1}{\partial p_r} (p_r - p_r^*)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = f_2 z_2 (p^*) + f_2' \sum_{r=1}^l \frac{\partial z_2}{\partial p_r} (p_r - p_r^*)$$

⋮

$$\frac{dp_l}{dt} = f_l z_l (p^*) + f_l' \sum_{r=1}^l \frac{\partial z_l}{\partial p_r} (p_r - p_r^*)$$

denklem sistemi elde edilir.

$$\partial z_i / \partial p_r = z_{ir} \text{ ler,}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1l} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2l} \\ \vdots & & & \\ z_{l1} & z_{l2} & \dots & z_{ll} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir jacobian oluştururlar.  $A$  matrisine eşit olan bu Jacobian'da yer alan kısmi türevler denge fiyatında elde edilmektedir.

Bu son denklemlerde  $z_i(p^*) = 0$  olduğu göz önüne alınıp  $p_r - p_r^* = P_r$  olarak tanımlandığında

$$\frac{dP_i}{dt} = f_i' \sum_{r=1}^l z_{ir} P_r, \quad i = 1, \dots, l$$

denklemler sistemine varılacaktır. ( $p_i^*$  sabit olduğu için  $d p_i / dt = d P_i / dt$  olacaktır.)

Mal sayısı bir ( $l = 1$ ) olduğunda ve  $f_1' = k$  olarak alındığında söz konusu sistem,

$$\frac{dP_1}{dt} = k z_{11} P_1 = k \frac{\partial z_1}{\partial P_1} P_1 \text{ şeklinde bir birinci sıra doğrusal türevsel (diferansiyel) denkleme}$$

dönüşecektir.

Bu denklemin çözümüne,  $P = P(0) e^{k z_{11} t}$  olarak ulaşılabacaktır.

Mal sayısı birden fazla olduğunda benzer biçimde hareket edilebilecektir. Bu durumda  $P_i = c_i e^{\lambda t}$  ( $i = 1, \dots, l$ ) denenerek yukarıdaki türevsel denklemler sistemi için çözüme ulaşma yoluna gidilecektir. Bu denemeyle,

$$c_1 \lambda e^{\lambda t} = f_1' z_{11} c_1 e^{\lambda t} + \dots + f_l' z_{l1} c_l e^{\lambda t}$$

$$c_2 \lambda e^{\lambda t} = f_2' z_{21} c_1 e^{\lambda t} + \dots + f_2' z_{2l} c_l e^{\lambda t}$$

⋮

$$c_l \lambda e^{\lambda t} = f_l' z_{l1} c_1 e^{\lambda t} + \dots + f_l' z_{ll} c_l e^{\lambda t}$$

elde edilecektir. Bunlardan,

$$\begin{bmatrix} f_1' z_{11} - \lambda & \dots & f_1' z_{1l} \\ f_2' z_{21} & f_2' z_{212} - \lambda & \dots & f_2' z_{2l} \\ \vdots & & & \\ f_l' z_{l1} & \dots & \dots & f_l' z_{ll} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklemlerine geçilebilecektir. Bu ifade, jacobian  $A$  olarak,  $c_i$  ler  $x_i$  olarak alındığında ve

$$K = \begin{bmatrix} f_1' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2' & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & f_l' \end{bmatrix}$$

dendiğinde,

$$(K A - \lambda I) x = \theta$$

şeklinde yazılabilecektir. bunun  $x \neq \theta$  şeklinde bir çözümü olması,

$$|K A - \lambda I| = 0$$

koşulunun gerçekleşmesine bağlıdır. Yine aynı yerde belirtildiği üzere  $\lambda_r$  ler  $KA$  nın özgül köklerini gösterirler. Böylece mal sayısı birden fazla olduğunda,

$$\frac{dP_i}{dt} = f_i' \sum_{r=1}^l z_{ir} P_r, \quad i = 1, \dots, l$$

türevsel denklemler sisteminin çözümü,

$$P_i(t) = \sum_{r=1}^l \alpha_{ir} e^{\lambda_r t}, \quad i = 1, \dots, l$$

ile elde olunacaktır.

Burada ele aldığımız modelde yakınsal kararlılığın,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t) = 0$$

olması durumunda gerçekleşeceği düşünülmektedir. Öte yandan sonsuza yönelindiğinde ( $t \rightarrow \infty$  olduğunda), ulaştığımız çözüm formülünde özgül köklerin yer aldığı üstel terim egemen olmaktadır. Yani,  $\lambda_r$  ler eksi değer taşıdıklarında istenilen sonuç gerçekleşebilmektedir. Diğer bir deyişle yakınsal kararlılığın sağlanabilmesi için  $KA$  nın bütün özgül köklerinin (ya da özgül köklerin gerçel sayı şeklindeki kısımlarının) eksi olması gerekeceği sonucu ortaya çıkmaktadır. (Bulutay, 1979, 261-265)

Kararlılık ile önemli yaklaşımlardan biri de **Perron-Frobenius** teoremine dayanır. Bu teoremin gerektirdiği koşulları sağlayan bir matris salt değeri en büyük olan özgül değerinin (*Perron-Frobenius kökü*) bazı durumlarda birden küçük olabilir. İşte bu koşulların sağlanması halinde kararlılık sağlanacaktır.  $A$  eksi olmayan bir matris olmak üzere  $I - A$  Matrisinin asal minörlerinin determinatlarının tümü pozitif ise  $A$  kararlı bir matrisdir.

Perron Frobenius teoreminden hareketle ulaşılan iki sonuç daha vardır bunlardan birincisi

$$|S_j| = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \text{ olarak tanımlandığında } |S_j| < 1 \text{ ise } A \text{ matrisinin kararlı olması diğeri ise matrisin}$$

$$\text{izinin salt değerinin boyutundan küçük olmasıdır. } \left| \sum_{i=1}^n a_{ii} \right| < n \quad (\text{Ersel, 1980, 476-477})$$

Kabaca ikame özelliği ile ilgili olarak, teorem şu şekilde ifade edilebilir.

**Teorem 2.19: (Perron-Frobenius)**  $M$  elemanları negatif olmayan, ayrıştırılmaz  $n \times n$  bir matris olsun. Bu matrisin en büyük karakteristik kökü  $\lambda^*$  aşağıdaki özellikleri sağlayacaktır.

- $\lambda^*$  reel ve pozitif
- $M$  matrisinin her  $\lambda$  kökü için  $\lambda^* \geq |\lambda|$  dir.
- Her  $i = 1, \dots, n$  için  $m_{ii}$  matrisin  $i$  inci köşegen elemanı olmak üzere,  $\lambda^* > m_{ii}$  dir.
- $Mx^* = \lambda^* x^*$  denkleminde elde edilecek karakteristik vektör  $x^* \lambda^*$  'nın kesin pozitif seçilmesine bağlı olarak vardır ve bu vektör matrisin bu özellikleri sağlayan tek vektörüdür.

$A = M - cI$  verildiğinde  $A_{ij}$ ,  $M - cI$  ifadesinin  $i$  inci satır ve  $j$  inci sütununa göre açılmış

kofaktördür.  $c > \lambda^*$  olmasının anlamı  $\frac{A_{ij}}{|A|} < 0$  dır ve  $c > \sum_{j=1}^n m_{ij}$  olmasının anlamı her  $i \neq j$  için

$$\frac{A_{ij}}{|A|} > \frac{A_{ii}}{|A|} \text{ dir.}$$

Perron-Frobenius teoremi kabaca ikame durumuna uygulanır.  $M$ , ayrıştırılmaz negatif olmayan ve en büyük karakteristik kökü  $\lambda^*$  olan bir kare matris olsun  $M - cI$  ifadesinin kararlı olması ancak ve ancak  $c > \lambda^*$  olması durumunda mümkündür.

$\mu$ ,  $M - cI$  matrisinin karakteristik kökü olsun. Bu durumda  $|M - cI - \mu I| = 0$  koşulu sağlanmaktadır. Bu ifade  $|M - (c + \mu)I| = 0$  şeklinde de ifade edilebilir.  $\lambda$ ,  $M$  matrisinin kökü olduğundan  $\lambda = c + \mu$  yazılabilir.  $M - cI$  ifadesinin kararlılığı ancak ve ancak her  $\mu$  için  $\mu < 0$  olması ile sağlanır. Bu durumda  $\lambda - c < 0$  olur. Frobenius teoremine göre  $\lambda^* \geq |\lambda|$  olduğundan  $M - cI$  ifadesinin kararlılığı ancak ve ancak  $c > \lambda^*$  olması durumunda mümkündür.

Her  $i = 1, \dots, n$  için  $m_{ii}$  matrisin  $i$  inci köşegen elemanı olmak üzere,  $\lambda^* > m_{ii}$  olduğundan,  $c > \lambda^*$  olmasının anlamı  $M - cI$  matrisinin köşegen elemanlarının negatif diğer elemanlarının ise negatif olmayan terimler olması anlamına gelir. Bu kabaca ikame edilebilirlik durumuna karşılık gelir. (Quirk, Saposnik, 211)

Quirk ve Saposnik, tatonnement süreçlerinde dahi kararsızlığın ortaya çıkabildiği iki örnek olarak, H. Scarf ve D. Gale'nin örneklerini vermektedirler. (Quirk ve Saposnik, 1968, 188-191)

Bunun yanında tatonnement sürecinden farklı bir şekilde denge durumu dışında mübadele yapılabilmesi durumunda da kararlılığa ulaşılabilme yolunda çalışmalar olmuştur. Walras modelindeki tatonnementin çok sınırlandırıcı olduğunu ve piyasalar temizlenmeden mal alış verişi yapılamadığını, kontratları dengesizlik döneminde yenilemenin mümkün olduğunu ancak alış verişin ancak denge durumunda mümkün olduğunu bunun da belki yüksek derecede organize olmuş bazı mal piyasalarında geçerli olabileceğini ancak ekonomideki bütün piyasalar için çok fazla bir varsayım olduğunu söyleyen Negishi genel dengenin kararlılığını tatonnement olmayan süreçlerin aracılığıyla ele alınması gerektiğini belirtmektedir. (Negishi, 2000, 7)

Hahn ve Negishi, bireysel ve toplam aşırı talep fonksiyonlarının arasındaki ilişki ile ilgili şartların sağlanması durumunda, tek değerli aşırı talep fonksiyonunun ve diferansiyellenebilir toplam aşırı talep fonksiyonunun var olacağını ve tatonnement olmayan durumlarda da denge pozisyonuna yakınsayacağını göstermişlerdir. (Quirk ve Saposnik, 1968, 193) Hahn ve Negishi tatonnement olmayan süreçlerde de kararlılığa ulaşılabilirliğini gösterirken, Uzawa tatonnement sürecinin varlığının kararlılığın gerçekleşmesini engellediğini, tatonnement olmayan süreçlerle daha güçlü sonuçlara ulaşılabilirliğini iddia etmektedir. (Bulutay, 1980, 274-279)

Genel denge modeli açısından teklik ve kararlılık koşulları ele alındığında kabaca ikame edilebilirlik varsayımının rekabetçi bir ekonomide geçerli olduğu düşünülebilir. Çok sayıda malın bulunduğu bir piyasada mallar arasında ikame ilişkisinin güçlü olduğu düşünülebilir. Bütün mallar arasında ikame ilişkisi olmayacağı açıktır ancak bu noktada tüketicinin bütçe olanakları açısından bakılarak ikame kavramı daha geniş bir açıdan yorumlanabilmektedir. (Parasız, 1999, 30)

## 2.5 Modelin Gelişmesi

Tam rekabetçi bir piyasada Arrow – Debreu genel denge modelinin incelenmesinden sonra bu bölümde, genel denge modelindeki kimi gelişmeler ve bir anlamda gerçek dünyaya daha yakınlaşma çabaları ele alınacaktır. Çalışmada önemli bir yer tutacak olan zaman ve belirsizlik altında genel denge analizi daha ayrıntılı bir biçimde ikinci bölümde ele alınacaktır.

### 2.5.1 Paranın Modele Dahil Edilmesi:

**A. Koutsoyiannis** gibi bazı iktisatçılar genel denge analizinin mikroiktisat ile makroiktisat arasında bir bağ kurduğunu, hatta makroiktisadın çok sayıda piyasanın kolaylık sağlamak amacıyla bütünleştirildiği bir genel denge modeli teorisi olduğunu söyler. Genel denge yaklaşımının enflasyon veya irade dışı işsizlik gibi makro olguların analizi için uygun bir araç olabilmesi için, paranın sisteme dahil edilmesi gerektiğini de vurgulamaktadır. (Koutsoyiannis, 1997, 566)

**D. Patinkin'e** göre Keynes'in denge teorisi genel denge modelinin, parayı da kapsayacak şekilde genişletilmiş ve irade dışı işsizliği içeren özel bir halinden başka bir şey değildir. Patinkin'in modelinde de aşırı talep fonksiyonlarından hareket edilir. Patinkin kitabının mikroekonomi bölümünde öncelikle bir değiş tokuşa dayalı bir mübadele ekonomisi tanımlayarak, sonraki bölümde para ekonomisi için aşırı talep fonksiyonlarını ele almıştır. Yine bu bölümde fiyat vektörünün bütün elemanlarını bu fiyatlardan birine bölerek; göreceli (nisbi) fiyatları elde etmiştir. Patinkin;  $p_1, \dots, p_{n-1}, p_n$  şeklinde ifade edilen fiyat vektörünü

$\frac{p_1}{p_n}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_n}, 1$  olarak normalleştirmektedir. (Patinkin, 1989, 17)

Saf mübadele sisteminde denklemlerden bir tanesi fazlalıktır (diğerlerine bağlıdır), dolayısıyla bu sistemin çözümünden sadece  $n - 1$  göreceli fiyat veya fiyat oranı elde edilebilir. Burada  $p_n$  numeraire olarak seçilmiş olan  $n$ . malın fiyatıdır. Aşırı talep denklemlerinin oluşturduğu sistem sadece göreceli fiyatları belirleyebilmektedir. Fiyatların mutlak düzeyleri belirlenmemektedir. Saf mübadele sistemi mutlak fiyatlara göre sıfıncı dereceden homojendir. Bir başka deyişle, tüm malların fiyatları aynı oranda değiştiğinde mübadeleye konu olan mal miktarlarında herhangi bir değişiklik olmayacaktır. (Koutsoyiannis, 1997, 567)

Bu saf mübadele sistemini şu şekilde özetlenebilir. Ele alınan ekonomide tüketiciler tarafından tutulan  $n$  tane üretilmiş mal ya da hizmet faktörü olduğu varsayılın. Bu durumda her piyasa için talep, arz ve aşırı talep denklemleri aşağıdaki formda yazılabilir.

$$q_i = q_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$x_i = x_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$Z_i = q_i(p_1, p_2, \dots, p_n) - x_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$Z_i = 0$   $i$  piyasasının dengesi için aşırı talep sıfır olmalıdır. (Simpson, 1975, 61)

Walrascı genel denge modelleri, genel denge sorununu parayı kullanmaksızın çözmektedir. Bunu sağlayan durum ise, mübadele yapanlar arasında herhangi bir işlemin yapılmasından önce denge fiyatlarının tatonnement varsayımı altında oluşmasıdır. Fiyatların *tatonnement* sürecinde oluşturduğu bir ekonomide, enformasyon hemen hemen tamdır. Tatonnement'in içerdiği bir diğer olgu da paranın rolüne ilişkindir. Para yansızdır ve kaynak tahsisi üzerinde hiçbir etkisi yoktur. Durum böyle olunca, hemen bütün malların fiyatlarının önceden belirlendiği bir tatonnement ekonomisinde paraya gereksinim yoktur. Yalnızca bir değişim aracı işlevi görür ve paranın özel bir statüye uyumlaştırılmasına gerek yoktur. Buna karşılık tatonnement sürecinin olmadığı durumda, dengesizlik içinde yapılmasına izin verilen işlemler için paraya ihtiyaç vardır. Eğer bu süreç (Walrascı dengede olduğu gibi) dengeye ulaşıyorsa, devreye sokulan paranın yine büyük bir anlamı olmayacaktır. Çünkü paranın kaynak tahsisi üzerindeki etkisi oldukça sınırlı kalacaktır. O halde, paranın ekonomi üzerindeki rolünü ortaya koyabilmek için, tam enformasyondan uzak ve Walrascı dengeye yönelmeyen süreçlerin göz önüne alınması gerekmektedir. (Parasız, 1999, 72-73)

Para bir mal olarak bu saf değişim modeline dahil edildiğinde, mal sayısının  $(n+1)$  olduğu düşünülebilir. Tanım gereği,  $p_{n+1} = 1$  dir. Bu paranın fiyatıdır.

Bu durumda para için aşırı talep fonksiyonu

$$Z_{n+1,k} = q_{n+1,k} - q_{n+1,k}^0 \text{ dir.}$$

Temel neoklasik düşünceye göre para tüketici fayda fonksiyonunda yer almaz. Tüketicilerin işlem amaçlı olarak para talebinde bulundukları düşünülebilir. Bu para talebi tüketicinin başlangıç stoklarının sabit bir orandaki parasal değeridir.

$$q_{n+1,k} = \alpha_k \sum_{i=1}^n p_i q_{ik}^0$$

Bu durumda tüketicinin paraya aşırı talebi

$$Z_{n+1,k} = \alpha_k \sum_{i=1}^n p_i q_{ik}^0 - q_{n+1,k}^0 \quad \text{dir.}$$

Buna göre toplam aşırı talebi

$$Z_{n+1} = \alpha_k \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n p_i q_{ik}^0 - \sum_{k=1}^s q_{n+1,k}^0 \quad \text{olur.}$$

Bu noktada yine neoklasik iktisadın ünlü varsayımlarından birini yaparsak, başlangıç donanımlarındaki tüm mal ve para stoklarının dağılımlarının tüm tüketiciler için eşit olduğunu ve her  $k$  için  $\alpha_k = \alpha$  olduğu kabul edilirse

$$Z_{n+1} = Z_{n+1}(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad \text{yazılabilir.}$$

Genel dengenin tanımına göre bir pür mübadele ekonomisinde her mal ve para için aşırı talep eşzamanlı sıfır olmalıdır.

$$Z_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1) \quad (\text{Simpson, 1975, 62-63})$$

Aslında Walrascı modelde tüm fiili alış verişler denge fiyatlarından yapıldığından ayrıca bir mübadele aracı olarak paraya ihtiyaç olmadığı da düşünülebilir. Yukarıda ele alınan yapıya göre paranın ödeme aracı olarak talep edilmesinin ailelerin fayda fonksiyonlarından bağımsız oldukları sadece toplumdaki gelenekleri yansıttıkları düşünüldüğünden her ailenin (tüketicinin) para talebi toplam gelir (toplam harcamalarının) sabit bir oranı olarak düşünülmektedir. Fayda fonksiyonlarında bulunmadığı için paranın fiyatı bire eşit olarak kabul edilmektedir. Bu durumda paranı fiyatı da nisbi kıtlık fiyatı değil bir *numeraire* olmaktadır. (Akat, 1980, 304-306)

Bir numeraire'in seçilmesi denge değişim ilişkilerini değiştirmez. Ancak şimdi parasal fiyat herhangi bir maldır. (numeraire olarak seçilmiş mal koşullarında). Böylece nispi fiyat herhangi bir mala göre belirlenmektedir. Dolaşımdaki para yalnızca işlemlere aracılık yapmaktadır. Para kendisi için talep edilmemektedir. Üretim sürecinde yalnızca mallar arz edilmemekte, bu sırada faktörlere yapılan ödemeler nedeniyle aynı zamanda bu malların satılması için gerekli talep yaratılmaktadır. Bir başka deyişle, her arz kendi talebini

yaratmaktadır. Bu ifade Say Yasasının ifadesidir. Say'a göre, bir değişim ekonomisinde genel bir aşırı üretim durumu olamaz. Diğer bir deyişle, bu yasa bir değişim ekonomisinde gönülsüz eksik istihdam dengesinin varlığını kabul etmemektedir. Say'a göre, halk mal ve hizmet arz ederek bunun karşılığında da diğer mal ve hizmetleri istemektedir. Parayı kişiler bizzat para olarak yanında tutmak için talep etmezler. Kişiler parayı mal ve hizmet satın almak için elinde bulundururlar. Böylece, her arz bir talep yaratmaktadır. Halk sadece mal ve hizmet satın almak için çalışmaktadır.

Say bazı malların talebine bağlı olarak üretiminde aşırılığının oluşabileceğini kabul etmektedir. Çünkü talep bu mallardan başka mallara kaymış olabilir. Fakat bu talep kayması, bu kez harcamaların yöneldiği alanlarda kıtlık yaratacaktır. Ekonomik süreç içinde bu kıtlıklar ve fazlalıklar ortadan kalkacak ve böylece talep arza eşit olacak, dolayısıyla genel bir aşırı üretim durumunu oluşmayacaktır.

Say yasası tüm malların arzının, tüm malların talebine eşit olduğunu göstermektedir. Say Yasası aslında bir takas ekonomisi için geçerlidir. Her arz diğer mal ve hizmetler için eşdeğer talep yaratmaktadır. Dolayısıyla her zaman talep arza eşittir. Bir takas ekonomisinde, bir malı başkası satın almaksızın satmak mümkün değildir. Böylece bir ekonomide, genel bir aşırı üretim durumu olanaksızdır. İşte Say Yasası bu özdeşliği vurgulamaktadır.

Say Yasası paranın yalnızca bir değişim aracı olarak kullanıldığı bir dünyada geçerlidir. Buradaki para, soyut, bir hesap birimi, yani *numeraire* dir. Ticaret, takasın tüm özelliklerini taşır. Hiç kimse bu tür bir parayı para olarak tutmak istemez. Bu sadece bir muhasebe parasıdır. Bu yüzden de tüm malların toplam değeri, piyasaya arzedilen tüm mallara eşittir. Yeniden özetlersek,  $n$  mal (eşya+para) talep edilmekte ve arzedilmektedir. Yukarıdaki özdeşliği malların miktarları yerine değerleri açısından yazıldığında arz ve talep edilen miktarlarının malların fiyatlarıyla çarpılması gerekir. Say Yasasının

$\sum_{i=1}^n P_i D_i \equiv \sum_{i=1}^n P_i S_i$  şeklinde gösterilmesi *Walras Yasası* olarak ifade edilmektedir. (Parasız, 1999, 75-78)

Simpson Say Yasası'nı  $\sum_{i=1}^n p_i Z_i = 0$  olarak ifade eder ve neoklasik sistemde paranın sadece hesap birimi olarak kullanılması ve aşırı talep fonksiyonlarının fiyatlara göre sıfırıncı dereceden homojen olmaları durumunda Say Yasası ile Walras Yasası'nın özdeş olduğu belirtilmektedir. (Simpson, 1975, 62-63)

Ancak para bir kez dolaşıma girince halk bunu elde etmek, tutmak da isteyecektir. Çünkü bilindiği gibi para hesap birimi olduğu kadar iyi bir değer saklama aracıdır da. İşte paranın değer saklama işlevi Say Yasasının formülleştirilmesinde yer almamaktadır. Yani talep edilen mal ve hizmetler arasında, para aktif olarak bulunmamaktadır.

Patinkin para kavramını Walrascı genel denge modeli çerçevesinde ele alarak makro ekonominin mikro temelleri yaklaşımının da kurucularından biri olmuştur. (Akat, 1980, 300) Değişim ekonomisinde denge fiyatlarının bir temel özelliğinin, belli bir fiyatlar kümesinde her mal piyasasının dengede olduğu varsayımı olduğunu belirten Patinkin para piyasasında da dengenin var olması gerekliliği savunulmaktadır. Patinkin "*Problemin Walras Kanunu'na Göre Tanımlanması*" başlığı altında, net para talep miktarının sıfır olması gerektiğini bundan dolayı, belli bir fiyatlar kümesinin bir denge kümesi olup olmadığını belirlemek için, para piyasasına bakmanın gerekli olmadığını, onun yerine, bu fiyatlar kümesinin ayrı ayrı her mal piyasasında dengeyi kurduğunu göstermek yeterli olacağını belirtmektedir. Dengede her mal piyasası için aşırı arz tanım gereği sıfır olduğundan para için de aşırı talep sıfır olmak zorundadır. (Patinkin, 1989, 35-36)

Patinkin'in sitemini denklemlerle özetlenebilir. Patinkin öncelikle parayı fayda fonksiyonuna dahil etmiştir. Böylece

$U_k = U_k(q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{nk})$  şeklinde tanımlanan fayda fonksiyonu yerine

$U_k = U_k\left(q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{nk}, \frac{M_k}{P_0}\right)$  denklemi yazılabilir.

$P^0 = \sum_{i=1}^n w_i P_i$ ;  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  Bu denklemde  $M_k$  tüketicilerin ellerinde tuttıkları para miktarı bir fiyat endeksidir. (Simpson, 1975, 65)

Bu şekilde paranın reel satınalma gücünü bulmak için nominal para miktarı bir fiyat endeksine bölünmüştür. Bir ailenin ailenin elindeki nominal para miktarı fiyat endeksine bölününce o ailenin reel nakit stoğu bulunmuş olur. Walras buna arzulanan nakit demektir. Fayda fonksiyonuna bu reel nakit girecektir. (Akat, 1980, 308)

Paranın fayda fonksiyonuna dahil edilmesinin anlamı, tüketicilerin gelirlerinin bir kısmını tasarruf edip para halinde tutmalarına izin verilmesidir. Paranın esas gücü likidite özelliği yani diğer mallara dönüştürülebilme hızıdır.

Bütçe kısıtına bağlı olarak bütün tüketicilerin faydaları maksimize edildiğinde Patinkin sistemi şu şekilde özetlenebilir.

Talep Eşitlikleri;

$$q_i = q_i(p_1 / p^0, p_2 / p^0, \dots, p_n / p^0, M / p^0) \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$q_m = q_m(p_1 / p^0, p_2 / p^0, \dots, p_n / p^0, M / p^0)$$

Arz Eşitlikleri

$$x_i = x_i(p_1 / p^0, p_2 / p^0, \dots, p_n / p^0, M / p^0) \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x_m = M / p^0$$

Denge Koşulları;

$$q_i = x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$q_m = x_m$$

Fiyat Endeksi Eşitliği,

$$p^0 = \sum_{i=1}^n w_i p_i \quad \text{dir.}$$

Bu durumda sistemde  $3n + 4$  denklem ve  $3n + 3$  bilinmeyen bulunmaktadır. Denklem sayısı bilinmeyen sayısından bir fazla olduğundan ilk adımda Walras Kanunu kullanılamaz, ancak yine Walras Kanunu'na göre mal piyasalarının tümü dengede ise para piyasası kendiliğinden dengededir. Bu durumda denklemlerden biri atılarak sistem belirlenebilir.<sup>1</sup> (Simpson, 1975, 66)

### 2.5.2 Artan Getiriler Ve Monopolcü Rekabet

Walras'ın ve Hicks'in genel denge üzerine çalışmaları sadece tam rekabet koşullarını ele almaktaydılar. Bununla birlikte Walras monopol gibi diğer sistemleri de içeren sistemlerin göz önüne alınmasını gerektiğini vurgularken Hicks monopol varsayımının kabulünün ekonomi kuramının üzerinde çok yıkıcı etkileri olacağını vurgulamaktadır. (Parasız, 1999, 72)

<sup>1</sup> Benzer yoldan tahvil piyasalarını ad modele dahil eden bir çalışma için Akat (1980) 315-334 bakılabilir.

Genel dengenin varlığının arz talep eşitliği yerine tam rekabet şartlarında sosyal refahın maksimizasyonu yöntemiyle gösterdiğini söyleyen **Negishi**, tam rekabet varsayımının gerçekçi olmadığının kabul edilmesinin bir zorunluluk olduğunu vurgulayarak, genel denge analizlerinde yapılan tam rekabet varsayımının yerine daha gerçekçi olan monopolcü rekabet varsayımını koymaktadır. (Negishi, 2000, 5-10)

Ortak görüş, rekabetçi denge konseptinde ekonomik ajanların sayısının çok olduğu ve hiçbirinin fiyatları etkileyemeyen *fiyat alıcılar* olduklarıdır. Buna karşın üretim tarafında firmaların sayıları yeterince büyük olmayabilir. Bu durumda Cournot'un kısmi analiz çözümüne benzer bir şekilde firmalar davranışları işbiriksiz oyunların oyuncularına benzerdir. Ve bu oyundaki denge Nash denge noktası formunu sağlamaktadır. (Gabszewicz ve Vial, 1999, 709)

Arrow-Debreu modelinde olduğu gibi karar alıcıların tam olarak bilgilendirildiği hipotezinin iki sonucu vardır. Birincisi tam rekabet piyasasında, mükemmel bilgiye sahip olma ve fiyat alıcı davranıştır. İkincisi dışbükey bir tercihler kümesi üzerinde tanımlı içbükeyimsi bir fayda fonksiyonunun varlığıdır. Ancak bu teorem, dışsallıkların, asimetric bilginin, monopolistik ya da oligopolistik rekabetin bulunduğu piyasalarda geçerliliğini yitirir. Ölçeğe göre artan getirinin ya da dışbükey olmayan teknolojilerin varlığı bunun örneğidir. Üretim kümesinin dışbükeyliğinin toplanabilirlik ve bölünebilirlik özelliklerini gösterdiğini bunun anlamının da teknolojik olarak olanaklı iki üretim planının bulunması halinde bunların toplamından oluşan bir üretim planı da mümkün olmasıdır. Bunun anlamı ölçeğe göre azalan getirilerdir. Bölünebilirlik özelliğinin bulunmaması ölçeğe göre artan getirilerin varlığına işaret eder. Artan getiriler firmaların ölçek ekonomilerine sahip olmalarına önderlik eder ki, bu durum piyasa rekabetinde gerçek anlamda değişimleri gerektirir; firmaya piyasa fiyatlarını etkileme imkanı verir. Genel denge modeli dışbükey olmayan teknolojilerin varlığı durumunda ciddi zorluklarla karşılaşır, dışbükeyliğin olmaması dengenin varlığını başarısızlığa uğratar. Bunun anlamı dışbükey olmayan teknolojilerin varlığı durumunda genel denge analizi yapabilmek için firmaların daha genel kurallar izlemelerine izin verilmesi ve denge kavramının yeniden tanımlanmasını gerektirir. Bunun anlamı denge ile optimum arasındaki aynılık ilişkisinin sürdürülemeyeceğidir. Bu yüzden dışbükey olmayan teknoloji durumunda dengenin varlığı ile optimallik analizi birbirinden ayrı iki soru olarak ele alınabilirler. (Villar, 1996, 6)

Dolayısıyla denge halinde Pareto optimuma erişmenin ancak tam rekabet varsayımında gerçekleştiği görülebilir. Örneğin monopol dengesinin Pareto anlamda bir optimuma tekabül etmemesinin nedeni, fiyatların o malların marjinal maliyetlerinden daha fazla olmasıdır. Satış

miktarının arttırılması amaçlandığında bir birimlik artış nedeniyle fiyatta oluşacak indirim stok etkisi yüzünden tüm üretim miktarına yansıyacak bu da monopolün karında düşüşe neden olacaktır. Ancak fiyat farklılaştırılması ile bu sorun aşılabılır ya da Pareto optimale yaklaşma mümkün olabilir. Özellikle sabit maliyetin çok yüksek olduğu durumlarda ise bu maliyeti karşılayabilmek için yüksek miktarda üretim yapmak gerektiğinden ancak bu durumda da fiyatları düşürmek gerekeceğinden monopolün dengesi Pareto anlamında optimum değildir. Eksik rekabetin söz konusu olduğu farklı oligopol modellerinden taraflardan hiçbirinin tek taraflı bir kararla bu durumu değiştirmekte çıkarı olmadığı bir kaynak dağılımına tekabül eden Cournot-Nash dengesinde, dengenin varlığının belirsiz olduğu, mevcut olsa bile Pareto anlamında optimum olmadığı gösterilmiştir. Pareto anlamında optimumu sağlayan Bertrand dengesi gibi modellerde ise başka güçlükler söz konusudur. (Guerrien, 1999, 144-159)

Konu Arrow ve Hahn'ın 1971 yılında yazdıkları "*Genel Rekabetçi Analiz*" (General Competitive Analysis) isimli kitaplarında ele alınmıştır. Kitabın altıncı bölümü "*Alternatif Varsayımlar Altında Genel Denge*" başlığını taşımaktadır. Bu bölümde "*Dışsallıklar*", "*Monopolistik Rekabet Altında Denge*" gibi altbaşlıklar var. Kitabın yedinci bölümü ise "*Dışbükey Tercihler ve Üretim ile Piyasa*" başlığını taşımaktadır. (Arrow-Hahn, 1971, 129-182)

Arrow ve Hahn, monopolistik rekabet altında dengeyi incelerken öncelikle monopolistik firmalar arasında karşılıklı etkileşim bulunmadığını varsaymaktadırlar. Bu durumda firmalar o andaki fiyatı almakta, verilen ve algılanan talep fonksiyonlarını kontrol edememekte ve algılamalar gözlenen fiyat ve tahsisler üzerine kurulmaktadır. En azından denge durumunda gözlenen noktada talep fonksiyonun doğru olduğu varsayılmaktadır. Gerekli bir varsayım olmamakla beraber monopolistik firmanın denge noktasındaki talep esnekliğini doğru olarak algıladığı kabul edilmektedir.

Daha önce de belirtildiği gibi monopolistik firmanın üretim olanakları kümesinin dışbükey değildir. Yazarlar dışbükeylik varsayımını gevşetmelerine rağmen yine de olanaklı üretim tahsisleri kümelerinin bazı koşulları sağlamalarının garantilemek için bazı hipotezlere gereksinimleri olduğunu, özellikle de kaynakların sınırlı olması durumunda bu olanaklı üretim kümesinin de sınırlı olması gerektiğini belirtmektedirler. (Arrow-Hahn, 1971, 152)

Dışbükey tercihler varsayımının bırakılması halinde bir çeşit dengeye ulaşıp ulaşılamayacağını sorusunu ortaya koyan **Hiderbrand** dışbükeyleştirilmiş bir ekonomide rekabetçi bir sonucu ulaşılabileceğini savunmakta ve aşırı talep kümesinin dışbükey örtüsünü

$p^*$  fiyat vektörü ve  $w^+ = (x^+, y^+)$  tahsisi birlikte, arz ve talep arasındaki uyumsuzluğun sınırlandığı bir denge yaklaşımını oluştururlar. Ekonominin ne kadar geniş olduğundan bağımsız olarak sınır dışbükey olmama derecesi tarafından belirlenir. Dışbükey olmamanın derecesinin tanımı için öncelikle  $\{x \mid |x - x^0| \leq R\}$  formundaki  $S$  kümesinin yarıçapı  $rad(S)$  tanımlanmaktadır. Benzer bir şekilde iç yarıçap da  $r(S)$  olarak tanımlanır. Her  $x \in con S$  için tanım gereği,  $x$  noktasını kapsayan bir sonlu  $T \subset S$  altkümesi vardır. Bu şekilde tanımlanmış her  $x$  için  $rad(T)$  bir alt sınır sahiptir. Bu alt sınırın  $con S$  dışbükey örtüsü içindeki bütün  $x$ 'ler üzerinde  $r(S)$  bir üst sınır olarak tanımlanır. Eğer  $x \in S$  ise  $rad(T)$ 'nin alt sınırı sıfırdır. Dışbükey kümeler için  $con S = S$  dir ve bu nedenle  $r(S) = 0$  dir. Buradan  $r(S)$  dışbükey olmamanın ölçüsü olarak tanımlanır. (Arrow-Hahn, 1971, 173-175)

Arrow-Hahn yaklaşımı **Shapley-Folkman** teoremini kullanarak hem üretim olanakları kümelerinin hem de kayıtsızlık eğrilerinin dışbükeyleştirilmesine dayanmaktadır. Arrow ve Hahn'a göre bütün üretim olanakları kümeleri yerine bunların dışbükey örtülerinin konulması durumunda rekabetçi piyasa için tanımlanmış varsayımlar sağlanmış olur. (Arrow-Hahn, 1971, 175)

**Teorem 2.20: (Shapley-Folkman Teoremi)**  $F$  dışbükey  $S$  kümelerinin bir ailesi olsun,  $S \in F$  olmak üzere  $rad(S) \leq L$  dir. Buna bağlı olarak herhangi bir sonlu  $F' \subset F$  alt ailesi ve herhangi bir  $x \in con \sum_{S \in F'} S$  ise öyle bir  $y \in con \sum_{S \in F'} S$  vardır ki  $n$  uzayın boyutu olmak üzere  $|x - y| \leq L\sqrt{n}$  dir. (Arrow-Hahn, 1971, 396)

Shapley-Folkman teoremi ile bir anlamda çok sayıda ajanın bulunduğu bir durumda aşırı talep fonksiyonlarının dışbükey bir örtüden çok da farklı olmadığını göstermektedir. Bunun anlamı dışbükey olmayan geniş ekonomilerin dengeye yaklaşacağıdır. (Hildenbrand ve Kirman, 1976, 165-167)

Bu teoreme göre  $R^l$  uzayına ait  $S_1, S_2, \dots, S_n$  boş olmayan kümeler olmak üzere bu kümelerin toplamının dışbükey örtüsüne ait bir  $z \in con \sum_{i=1}^n S_i$  noktası alındığında, bu nokta  $x_i \in S_i$  noktalarının toplamı olarak yazılabilir.  $z = \sum_{i=1}^n x_i$  dir. Bu toplam oluşturulurken uzayın boyutu olan  $l$  sayısından fazla sayıda olmayan  $S_i$  lerin dışbükey örtülerinden noktalar alınmıştır.  $l$  yi aşmayan sayıda noktaların kümelerin kendilerinden değil de bunların dışbükey örtülerinden

göz önüne alarak dışbükeyliğin yokluğunun ortadan kaldırılabileceğini belirtmektedir. (Hildenbrand ve Kirman, 1976, 165-167)

Genel yaklaşımlardan biri, bireysel üreticiler için söz konusu olan dışbükeylikte sapmaların toplam davranışlar üzerinde etkisiz kalacağı yönündedir. Monopolistik rekabetin olduğu bir ekonomide genel dengeye ulaşma sorununun bir anlamda dışbükeylik varsayımının sağlanmadığı durumları ele almakla eşdeğer olduğu söylenebilir. Yine Arrow ve Hahn'a döndüğümüzde yazarların üretim ve tüketimde dışbükeylik varsayımının sağlanmadığı koşullarda bile rekabetçi bir dengeye yaklaşmanın mümkün olduğunu söylemektedirler. Bu yaklaşımda dışbükeylik koşulunu sağlamayan kümeler yerine bunların dışbükey örtülerini kullanılmaktadır. 2.3. bölümde tanımlanan dışbükey örtü kavramından hareketle bir kümenin dışbükey örtüsünün bu kümeyi içeren en küçük dışbükey küme olduğuna dikkat edilmelidir.

Arrow ve Hahn her firmanın üretim olanakları kümeleri yerine bu kümelerin dışbükey örtülerini kullanmışlardır. Buna benzer bir işlemi tüketici tercihleri için de yapmışlar tüketici tercihlerinin dışbükey örtülerini almışlardır. Bu durumda dışbükeyleştirilmiş bir ekonominin daha önceki bölümlerde ele alınan ve dengenin kurulduğu bir rekabetçi ekonominin varsayımlarını sağladığı kabul edilebilir.

$p^*$  dengeyi sağlayan fiyat vektörü,  $w^* = (x^*, y^*)$ , verilmiş bir dışbükeyleştirilmiş fayda seviyesinde,  $x_h^*$  maliyet minimizasyonunu sağlayan tüketim miktarı ve  $y_f^*$  dışbükeyleştirilmiş üretim olanakları kümesinde karı maksimize eden üretim miktarı mümkün kaynak dağılımlarını göstermektedir. Bazı fayda seviyeleri ve verilmiş  $p^*$  fiyat vektörleri için her  $x_h^*$  talep karşılama vektörlerinin dışbükey kombinasyonlarıdır. Her  $h$  için bir  $x_h^*$  vektörü seçilerek, dışbükey olmamanın maksimum derecesine bağlı bir büyüklük tarafından sınırlandırılmıştır.

$$\left| \sum_h x_h^* - \sum_h x_h^+ \right|$$

Benzer bir yorumla orijinal üretim olanakları kümesinde ve  $p^*$  fiyatında karı maksimum yapan bir  $y_f^+$  seçilebilir.

$$\left| \sum_f y_f^* - \sum_f y_f^+ \right|$$

alınması durumunda, boş olmayan kümelerin toplamı bu toplamın dışbükey örtüsü içine yerleştirilebilir.

Bu teoremin genel bir sonucu olarak, tercihlerin dışbükey olmaması nedeniyle bireysel aşırı talep kümeleri dışbükey olmasalar bile bunların toplamının bir dışbükey küme olarak alınabilecek olmalarıdır. Ancak dışbükey olan bu toplam kümenin oluşumunda bireysel aşırı talep kümelerinin dışında kalan fakat bu kümelerin dışbükey örtülerine dahil olan en fazla  $l$  sayıda sapma dikkate alınmalıdır. Bu kümeler dengeden sapmanın nedenini oluştururlar. Ekonomide mal sayısından ne kadar fazla kişi olursa dengeye o kadar yaklaşılabilecektir. Toplam taleple arz arasındaki farklılığın (dengeden sapmanın) nedeni bu en çok  $l$  sayıda olabilen ve dışbükey olmayan bireysel aşırı talep kümelerinin yarattığı sapmalardır. Kişisel tercihlerde ortaya çıkabilen bu dışbükeylikten sapmaların büyüklükleri ve ekonomideki ağırlıkları önemlidir. (Bulutay, 1980, 167)

Bazı varsayımların sağlanması halinde karar alıcıların (iktisadi ajanların) sayılarının yeterli ölçüde fazla olduğu bir ekonomide tercihlerde dışbükeylik olmaması durumunda da yaklaşık bir dengenin bulunabileceği ortaya konmuştur. Arrow ve Hahn'ın aşağıdaki teoremleri bu sonucun üretim ekonomisi içinde geçerli olacağını göstermektedir.

**Teorem 2.21:** Eğer bütün  $f$  değerleri için  $r(Y_f) \leq L$  ve bütün  $h$  değerleri için  $f, r(\{x_h | x_h \geq_h x_h^+\}) \leq L$  ise,  $n$  malların sayısını göstermek üzere  $L\sqrt{n}$  ifadesinin tazmin edilmiş bir dengesi vardır.

$p^*$  ve  $\omega^*$  dışbükeyleştirilmiş bir ekonominin dengesi olsun.  $y_f^* \in \text{con } Y_f$  olduğuna göre  $y_f^*$ ,  $Y_f$ 'nin en azından bir sonlu altkümесinin bir dışbükey kombinasyonudur. Bu tür bütün altkümelerden en küçük çapa sahip olan bir tanesi  $r(Y_f) \leq L$  varsayımına dayanılarak seçilir.  $y_f^*$  ler üzerine yayılmış ve  $\text{rad}(T_f) \leq L$  için  $T_f \subset Y_f$  kümesi bulunur. Tanımdan negatif değerli olmayan  $\alpha(y_f)$  fonksiyonu  $y_f \in T_f$  için vardır ve aşağıdaki koşulları sağlar.

$$\sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) y_f = y_f^* \text{ ve } \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) = 1$$

$\alpha(y_f) > 0$  olduğu varsayıldığında

$$p^* y_f^* = \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) p^* y_f \text{ dir.}$$

Ancak bütün  $y_f \in T_f$  ler için  $y_f \in Y_f \subset \text{con} Y_f$  olduğundan kar maksimizasyonu gereği yine bütün  $y_f \in T_f$  ler için  $p^* y_f^* \geq p^* y_f$  dir.  $\alpha(y_f) > 0$  olması

$\{x_h \mid x_h \geq_{hk} x_h^*\}$  kümesi bazı  $x_h^0$  lar için  $\{x_h \mid x_h \geq_h x_h^0\}$  formundaki kümelerin bir dışbükey örtüsüdür. Bu kümenin  $\text{rad}(S_h) \leq L$  koşulunu sağlayan  $S_h$  gibi sonlu bir alt kümesi vardır.  $S_h$  içindeki bütün  $x_h$  lar için  $p^* x_h = p^* x_h^*$  dir.

Bu durumda  $S_h$  içinden bir  $x_h^0$  seçilebilir. Yapıdan dolayı aşağıdaki eşitlik yazılabilmektedir.

$$x^* - y^* = \sum_h x_h^* - \sum_f y_f^* \in \sum_h \text{con} S_h + \sum_f \text{con}(-T_f) = \text{con} \left[ \sum_h S_h + \sum_f (-T_f) \right]$$

Bu noktada Shapley-Folkman teoremi uygulanarak;

$$z^+ \in \sum_h S_h + \sum_f (-T_f) \text{ eşitliğinin varlığı gösterilebilir.}$$

$$|x^* - y^* - z^+| \leq L\sqrt{n}$$

$$z^+ = \sum_h x_h - \sum_f y_f \text{ koşulunu sağlayacak}$$

$$x_h \in S_h \text{ ve } y_f \in T_f$$

Tazmin edilmiş denge yaklaşımında  $p^* > 0$  fiyat vektörü ve  $\omega^* = (x^*, y^*)$  ile  $\omega^+ = (x^+, y^+)$  aşağıdaki koşulları sağlayan iki tahsis olsun.

- a)  $x^{**} \leq y^{**} + \bar{x}$
- b)  $p_i^* = 0 \quad x_i^{**} < y_i^{**} + \bar{x}_i$
- c)  $y_f^+, y_f \in Y_f$  için  $p^* y_f$  i maksimize eder.
- d)  $x_h^+, x_h \geq_h x_h^+$  için  $p^* x_h$  i minimize eder.
- e)  $p^* x_h^+ = M_h^+ = M_h^*$
- f)  $|\omega^{**} - \omega^+| \leq A$

$$|\omega^{**} - \omega^+| = \sqrt{\sum_h |x_h^{**} - x_h^+|^2 + \sum_f |y_f^{**} - y_f^+|^2}$$

$m$  ekonomideki ajanların sayısı ve  $A$ ,  $m$  sayısına bağlı bir sabittir.

**Teorem 2.22:** Bir pür mübadele ekonomisinde, bütün  $h$  değerleri için

$r(\{x_h \mid x_h \geq_h x_h^+\}) \leq L$  dır. Bu durumda tazmin edilmiş bir denge vardır.

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $x^{**}$  bulunabilir

$$x^{**} = x^* \text{ ve } p^* x_h^{**} = p^* x_h^+ \quad (x_h^{**} \geq 0)$$

Eğer bu özelliklerde bir  $x^{**}$  bulunursa  $x_h^{**} \in X_h$  olacaktır ve  $A = L\sqrt{n}$

$P = \{i \mid x_i^+ - x_i^* > 0\}$   $N = \{i \mid x_i^+ - x_i^* \leq 0\}$  olmak üzere aşağıdaki ifadeler yazılabilir. (11)

$$\sum_h x_{hi}^{**} = \sum_h x_{hi}^* \quad i \in P$$

$$\sum_h x_{hi}^{**} = \sum_h x_{hi}^* \quad i \in N$$

$$\sum_{i \in N} p_i^* (x_{hi}^{**} - x_{hi}^+) = \sum_{i \in P} p_i^* (x_{hi}^+ - x_{hi}^{**}) = a_h$$

$$x_{hi}^{**} \geq 0 \quad (i \in P)$$

$$x_{hi}^{**} \geq 0 \quad (i \in N)$$

$$x_{hi}^+ - x_{hi}^{**} \geq 0 \quad (i \in P)$$

$$x_{hi}^+ - x_{hi}^{**} \leq 0 \quad (i \in N)$$

$$x_h^+ \in X_h, \quad x_h^+ \geq 0 \quad \text{ve} \quad x_{hi}^{**} \geq 0 \quad i \in N \quad \text{olduğuna göre eğer} \quad x_{hi}^+ - x_{hi}^{**} \leq 0$$

sağlanıyorsa,  $i \in P$ ,  $x_i^+ > 0$  ve  $x_i^* / x_i^+ < 1$  dir.

$i \in P$  için  $x_{hi}^{**} = \frac{x_i^*}{x_i^+} x_{hi}^+$  tanımlandığında yukarıda verilen ifadeler sağlanır.

$$a_h \geq 0 \text{ olmak üzere } a = \sum_h a_h \quad w_h = \frac{a_h}{a} \quad \text{eğer } a > 0 \text{ ise ve}$$

$$\sum_h w_h = 1 \quad \text{eğer } a = 0 \text{ ise olmak üzere,}$$

$$x_{hi}^{**} = x_{hi}^+ + w_h (x_i^* - x_i^+) \text{ tanımlanabilir ve}$$

$$\sum_{i \in N} p_i^* (x_{hi}^{**} - x_{hi}^+) = w_h \sum_{i \in N} p_i^* (x_i^* - x_i^+)$$

$p^* x_h^* = p^* x_h^+$  olduğundan

$$\sum_{i \in N} p_i^* (x_i^* - x_i^+) = \sum_h \sum_{i \in N} p_i^* (x_{hi}^* - x_{hi}^+) = \sum_h \sum_{i \in P} p_i^* (x_{hi}^+ - x_{hi}^*) = \sum_h a_h = a$$

$$\sum_{i \in N} p_i^* (x_{hi}^{**} - x_{hi}^+) = w_h a = a_h \text{ yazılabilir.}$$

Bu durumda  $x^{**}$  ifadesinin uygun bir tahsis olduğu söylenebilir.

Tanımlardan  $|x^* - x^+| \leq L\sqrt{n}$  ve  $|x^{**} - x^+| \leq L\sqrt{n}$  dir.

$$\text{Ancak } |x^{**} - x^+|^2 = \sum_i (x_i^{**} - x_i^+)^2 \text{ ve}$$

$$(x_i^{**} - x_i^+)^2 = \left[ \sum_h (x_{hi}^{**} - x_{hi}^+) \right]^2 \text{ dir ve bütün terimler aynı işarete sahiptir.}$$

Dolayısıyla  $(x_i^{**} - x_i^+)^2 \geq \sum_h (x_{hi}^{**} - x_{hi}^+)^2$  yazılabilir ve  $i$  üzerinden toplanırsa

$$|x^{**} - x^+| \leq |x^{**} - x^+| \leq L\sqrt{n} \text{ olduğu gösterilebilir. (Arrow-Hahn, 1971, 180)}$$

Bu yaklaşımla bir anlamda bireysel düzeydeki dışbükeylikten sapmalar göz ardı edilerek, dışbükey örtüler kullanılarak dışbükeyleştirme sağlanmakta ve genel dengenin varlığı için gerekli koşullar yerine getirilmiş toplam arz toplam talep eşitliği sağlanmış olmaktadır. Bir anlamda matematiksel kanıtlama ile dışbükeylikten sapma büyük olmadıkça maksimum fayda ve kar sağlayan mal demetleri toplamının arz talep eşitliğini sağlayan mal demetleri toplamına yakın çıkacağı sonucu ortaya konmaktadır. Bu yakınlık birbirinden çok farklı olmayan tüketici birbirine benzeyen üretici sayılarının artışına bağlı olarak artmaktadır.(Bulutay, 1980, 165)

Monopolistik rekabet ile ilgili ulaşılan sonucu Hart'ın makalesine dayanarak şu şekilde özetlemek mümkündür. Firmalar ekonominin toplamına göre büyük iseler monopol güçlerini kullanabilirler ve monopolistik rekabetçi denge Pareto optimal değildir. Öte yandan ekonominin bütünü içinde değerlendirildiğinde firmalar küçük iseler, monopol güçleri ortaya çıkmaz ve monopolistik rekabetçi denge Pareto optimaldir. (Hart, 1999, 761) Bu yorumdan, Shapley – Folkman teoremi aracılığıyla dışbükeyleştirme çabaları ile ne amaçlandığı da anlaşılmaktadır. Dışbükeylik özelliğini bozan artan getirilere sahip üretim yapan üreticilerin varlığı halinde bunların genel ekonomi içinde küçük karar alıcılar oldukları varsayılırsa ki varsayılmaktadır, monopolistik özelliklere sahip olsa da, Pareto optimal rekabetçi bir dengeye

ulaşılması mümkündür. Ulaşılacak istenen sonuç bu şekilde belirlendikten sonra iş matematiksel olarak dışbükeyleştirilmenin gösterilmesinden ibarettir.

Negishi günümüzde hakim olan Neoklasik teorinin referanslarını tamamıyla, neoklasik teorinin orjinal tanımlayıcısı olan Marshalcı gelenekten farklı olan Walrascı ya da neo-Walrasyan ekonomik teoriden aldığını, ancak bu Walrascı ana akım ile direkt olarak ilişkili olmayan teorilerden hareketle günümüzde hakim olan ekonomiye karşı bir teori geliştirilebileceğini söylemektedir. (Negishi, 1985, 1) Negishi bir anlamda Keynesci ekonominin Walrascı olmayan mikroekonomik temellerini geliştirmeye çalışmıştır.

Monopolcü rekabet ve genel denge ile ilgili çok önemli bir makale de Negishi'ye aittir. "*Monopolistic Competition and General Equilibrium*" Negishi'nin modelinde  $m$  mal  $n$  tüketici ve  $r'$  tam rekabetçi  $r - r'$  monopolistik rekabetçi olmak üzere  $r$  firma vardır.  $i$  inci tüketicinin tüketim vektörü  $x_i$  ve başlangıç donanımları vektörü  $\bar{x}_i$ ,  $k$  inci firmanın üretim vektörü  $y_k$  ve  $r_k$  üretim olanakları kümesidir.

$x_i^*, y_k^*, P^*$ , sırasıyla  $x_i, y_i, P$  ifadelerinin beklenen değerleri ve  $\lambda_{ik}$   $k$  inci firmanın  $i$  inci tüketiciye dağıtılan kar payıdır. Negishi rekabetçi firmaların kümesini  $R^1 = (1, \dots, r')$  ile monopolistik rekabetçi firmaların kümesini  $R^2 = (r' + 1, \dots, r)$  ile ifade eder.  $j \in J^k$  ifadesinin anlamı  $j$  inci malın piyasasında  $k$  inci firmanın baskın olduğudur.  $j \in J^0$  ise bu piyasada hakim olan herhangi bir firma olmadığı anlamına gelir.

Negishi'nin varsayımları şunlardır:

Varsayım 1:  $U_i(x_i)$  fada fonksiyonları sürekli, azalmayan, doyumsuz ve benzer içbükeydir.

Varsayım 2: (1)  $0 \in Y_k$ ; (2) olanaklı üretim kümeleri  $Y_k$  dışbükey ve kompaktır.

Bu varsayımlar rekabetçi bir ekonomi için denge teorisi ile benzerdir ve Negishi bu varsayımın gerekli olmadığını belirtir.

Varsayım 3: Her monopolistik rekabetçi firma bu özellikteki diğer firmalardan ayrılır.

$$k, k' \in R^2$$

için  $J^k \cap J^{k'} = \emptyset$ . Bu varsayım iki taraflı monopol, oligopol gibi seçenekleri dışlayarak modelin monopolistik rekabetle sınırlandırılmasını sağlar.

Varsayım 4:  $k$  ıncı firma ( $k \in R^2$ ) çıktı ya da girdileri için subjektif ters talep veya arz fonksiyonlarına sahiptir.

$$P_j^* = P_j \left( y_{kj}^*, P, \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j} \right)$$

tek değerli ve süreklidir.

$$y_{kj}^* = \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j} - \sum_i \bar{x}_{ij} \text{ ise } P_j = P_j^*(y_{kj}^*, P, \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j}), \text{ dir.}$$

Bu varsayım göstermektedir ki (piyasanın mevcut durumu ile ilgili bilgiler  $P, \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j}$  verilmişken) firma  $P_j^*$  ve  $y_{kj}^*$  ile ilişkili olarak bir piyasa durumu beklentisine sahiptir.

Varsayım 5:  $P_j^* = P_j \left( y_{kj}^*, P, \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j} \right)$  fonksiyonu lineerdir ve  $y_{kj}^*$  ye göre azalır.

**Tanım 2.24:**  $(P, x, y_k)$  vektörler kümesi bir aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda bir dengeyi ifade eder.

(1)  $x_i, U_i(x_i)$  nin maksimum noktası ise

$$\sum_j P_j x_{ij} \leq \sum_j P_j \bar{x}_{ij} + \sum_k \lambda_{ki} \sum_j P_j y_{kj} = M_i > 0$$

(2)  $y_k, k \in R^1, y_k \in Y_k$  olmak üzere  $\sum_j P_j y_{kj}$  'nin maksimum noktasıdır.

(3)  $y_k, k \in R^2, (P_j = a_j y_{kj} + b_j, j \in J_k)$  noktası  $y_k \in Y_k$  olmak üzere fonksiyon  $\sum_{j \in J^k} P_j y_{kj} + \sum_{j \in J^j} (a_j y_{kj} + b_j) y_{kj}$  karesel fonksiyonunun maksimum noktasıdır.

(4)  $\sum_i x_{ij} \leq \sum_i \bar{x}_{ij} + \sum_k y_{kj}, P_j (\sum_i x_{ij} - \sum_i \bar{x}_{ij} - \sum_k y_{kj}) = 0.$

**Teorem 2.23:** Ele alınan varsayımlar altında tanımdaki denge elde edilir.

**Kanıt:** Sistem, fiyatlara göre sıfırıncı dereceden homojen olduğuna göre, fiyat vektörü  $P \in S_m$  olacak şekilde normalize edilebilir. ( $S_m$  m boyutlu bir simpleksi ifade etmek üzere)

Tanım 2.24 ve varsayımlara göre  $\Gamma_i$  geniş, dışbükey bir kompakt küme olmak üzere  $x_i \in \Gamma_i$  yazılabilir.

$P \in S^m$ ,  $y_k \in Y_k$  verilmiştir. Tanım 1.5.1 göre

$$M_i = \sum_j P_j \bar{x}_{ij} + \max \left[ 0, \sum_k \lambda_{ik} \sum_j P_j y_{kj} \right] > 0. \text{ dir.}$$

Eğer  $P \in S^m$ ,  $x_i \in \sum_p$ ,  $y_k \in Y_k$  verilmişse, aşağıdaki eşleme izlenebilir.

$$P_1^0 = \frac{1}{\lambda} \max \left[ 0, P_j + \mu \left( \sum_i x_{ij} - \sum_k y_{kj} - \sum_i \bar{x}_{ij} \right) \right]; \quad \mu > 0;$$

$$\lambda = \sum_j \max \left[ 0, P_j + \mu \left( \sum_i x_{ij} - \sum_k y_{kj} - \sum_i \bar{x}_{ij} \right) \right] > 0$$

Bütün bunlar birleştirilerek  $S^m \times \prod_i X_i \times \prod_k Y_k$  uzayının kendi üzerine bir eşleme tanımlanabilir. Bu ifade kompakt dışbükey bir kümeden kendi üzerine üst yarı sürekli bir eşleme olduğundan **Kakutani** Sabit Nokta Teoremi'ne göre bir  $(\bar{P}, \bar{x}_i, \bar{y}_k)$  sabit noktası vardır. Walras Kanunu'na göre yazılabilir.

$$\sum_i \bar{P} \bar{x}_i - \sum_k \bar{P} \bar{y}_k - \sum_i \bar{P} \bar{x}_i = 0,$$

$$\bar{P}_j \left( \sum_i \bar{x}_{ij} - \sum_k \bar{y}_{kj} - \sum_i \bar{x}_{ij} \right) = 0 \text{ yazılabilir.}$$

Varsayım 5 gereğince  $P_j^*$ 'in sabit olduğunu kabul etmiş oluyoruz ki bu durum rekabetçi dengeye karşılık gelir.  $\sum_i P_j y_{kj}$  kar fonksiyonunun içbükey olması durumunda varsayım 5'in değiştirilmesi gerekir.

Varsayım 5\*:

$$\begin{aligned} P_j^* &= P_j^* (y_{kj}^*, P, \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j}) = a_j y_{kj}^* + b_j, y_{kj}^* > \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j} - \sum_i \bar{x}_{ij} \\ &= a_j' y_{kj}^* + b_j', y_{kj}^* < \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j} - \sum_i \bar{x}_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{ve } a_j (P_j, \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j}) < a_j' (P, \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j}) < 0.$$

$$\text{Varsayım 4 ile birlikte } y_{kj}^* = \sum_i x_{ij} - \sum_{k' \neq k} y_{k'j} - \sum_i \bar{x}_{ij} \text{ de}$$

$$a_j y_{kj}^* + b_j = a_j' y_{kj}^* + b_j' \text{ denklemini elde edilmektedir.}$$

Birinci teoremda ana rolü üretim kümesinin dışbükeyliği varsayımı oynuyordu. Negishi rekabetin bazı mükemmel olmayan yanları ile karşılaşıldığında üretim kümesinin dışbükey olduğunu varsayamayacağımızı, monopolistik rekabet ve artan getirilerin göz önüne alınması gerektiği belirtiyor. Negishi'ye göre üretim kümesinin dışbükey olması gerekmeden **büzülebilir** olması varsayımına dayanılarak dengenin varlığının ispat edilebileceğini söyleyerek ikinci teoremi ortaya koymaktadır.

**Teorem 2.24:** İlk dört varsayım ve Varsayım 5\* sağlandığı takdirde tanımlanan denge elde edilebilir. Negishi tanımıdaki 3. koşulun büzülebilme anlamına geldiğini belirterek bu teoremin ispatlanabileceğini belirtmektedir.<sup>2</sup>

Negishi aynı makalesinde rekabetteki bazı aksamalar durumunda da ekonominin kararlılığının ispatlanabileceğini ifade etmektedir. (Negishi, 1999, 703-708)

Negishi dışbükeylik varsayımının kullanılmadığı monopolistik rekabet durumunda dışbükeylik özelliğine oldukça yakın büzülebilme özelliğini ve yine sabit nokta teoremini kullanmıştır.

Ekonomideki karar alıcıların sayısının az olması durumunda kullanılan diğer bir yaklaşım ise “çekirdek” (core) yaklaşımıdır. Karar alıcıların sayıları az olduğunda bunların fiyatları veri olarak almak yerine fiyatları etkileme girişiminde bulunabilirler. Genel denge çerçevesinde çekirdek kavramı pazarlık ve rekabet konsepti içinde yer alır.

Çekirdek kavramı oyun kuramı çerçevesinde Gillies ve Shubik tarafından geliştirilmiştir. Scarf tüketicilerin tercihlerinin dışbükey olması halinde çekirdeğin boş olamayacağını göstermiştir. (Bulutay, 1980, 174-175)

Bu tür küçük ekonomilerde oyun teorisinden alınan çekirdek kavramı kullanılabilir. Çekirdeğin tanımlanması genellikle bir Edgeworth kutusu üzerinde yapılır. Karar alıcıların her ikisinin de kontrat eğrisi üzerinde karşı çıkmadıkları bir alanı üzerinde tanımlanır. Çekirdek kavramı üzerine çalışmaları kontrat eğrisi adı altında ilk başlatan Edgeworth olmuştur. Daha sonra çekirdek kavramı fayda transferi ile birlikte farklı bir formda oyun

<sup>2</sup> Negishi'nin dışbükeylik koşulunun sağlanmasına gerek olmadığı bunu yerine kümenin büzülebilirlik özelliğine sahip olmasının yeterli olduğu görülüyor, Büzülebilirlik özelliği dışbükeylik ve kompaktlık özellikleri ile yakından ilgilidir.  $(x, d)$  bir metrik uzay olmak üzere, bir  $\alpha < 1$  sayısı için  $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$  ifadesi sağlanıyorsa,  $f$  bir büzülme dönüşümüdür. (Munkres, 2000, 182) Tam bir metrik uzayda tanımlı büzülme dönüşümleri bir sabit noktaya sahiplerdir. (Kolmogorov ve Fomin, 1970, 66)  $E$  kümesi eğer bir  $h: E \times [0, 1] \rightarrow E$  tanımlı bir sürekli fonksiyon varsa ve her  $x$  için  $h(x, 0) = x$ ,  $h(x, 1) = \bar{x}$  ve  $h(x, t) = (1 - t)x + t\bar{x}$  dir. Tanımdan da görüldüğü gibi dışbükey bir küme aynı zamanda büzülebilirdir. (Border, 1999, 73)

teorisinde ortaya çıkmıştır. Edgeworth'un konrtat eğrisi ile oyunun çekirdeği arasındaki bağlantıyı ortaya koyan Shubik olmuştur.(Debreu ve Scarf, 1972)

Arrow ve Hahn'a göre bir pür mübadele ekonomisinde çekirdek olanaklı ve hiçbir koalisyon tarafından bloke edilmeyen bütün tahsislerin kümesidir. (Arrow-Hahn, 1971, 184).

Starr, çekirdekteki herhangi bir tahsisin bireysel olarak rasyonel olduğunu ve yine çekirdekte yer alan tahsislerin Pareto etkin olduğunu ve rekabetçi dengenin de bu çekirdek içinde yer aldığını belirtmektedir. Bunun anlamı yeterince büyük ekonomilerde rekabetçi denge ile çekirdeğin hemen hemen özdeşirler ve bütün çekirdek tahsisleri neredeyse rekabetçi dengedir. Geniş ekonomilerde monopolistik stratejik davranışların getirisinde bir çoğalma neredeyse yok gibidir. Dolayısıyla stratejik davranışın bir anlamı da yoktur. Bu durumda en iyisi ajanların fiyat alıcı rekabetçi davranışı takip etmeleridir. (Starr, 1997, 159-162) Her ajanın etkisi kesin olarak ihmal edildiğinden çekirdek ve rekabetçi denge kümesi çakışır. Ancak ekonomilerde sonlu sayıda katılımcı olacağından her ajanın etkisi yok sayılamaz ve bu yüzden de çekirdek genellikle rekabetçi denge kümesinden büyüktür. Genel eğilim bireylerin fiyat sistemini değiştirebilecek önemde olmadıkları geniş ekonomide çekirdek ve rekabetçi denge arasında bir fark olmadığıdır. Oysa küçük ekonomilerde kendi çıkarlarına olmak üzere rekabetçi tahsisi değiştirebilirler. Bu tür ekonomilerde rekabetçi çözüm akla yakın değildir. (Hilderbrand ve Kirman, 1974, 78)

Çekirdeği biraz daha teorik bir denge konsepti olarak değerlendiren W. Hildenbrand ekonominin çekirdeğini, ekonominin, hiçbir karar alıcı grubunun durumlarını daha iyiye götüremedikleri durumu olarak tanımlamaktadır. Rekabetçi denge çekirdeğe aittir. Bu yüzden de merkezi olmayan bir ekonomiye ait bir durum denge fiyat sisteminde işbirliği yapmak yoluyla daha iyiye götürülemez. Bu durum rekabetçi dengenin Pareto etkin olması özelliğini desteklemektedir. (Hildenbrand, 1991, 831-832)

Bir anlamda ekonomi büyüdükçe çekirdek rekabetçi dengeye yönelecektir. Dolayısıyla çekirdek yaklaşımı büyük ekonomilerde genel dengenin varlığını desteklemektedir.

### 2.5.3 Kamu Malları ve Dışsalıkların Modele Dahil Edilmesi

Genel Denge modeli formüle edilirken eksik rekabet koşullarının yanı sıra kamu malları ve dışsalıklar da analiz dışı tutulmuştur. Bunun başlıca nedeni piyasa başarısızlıkları olarak görülen bu unsurların tam rekabetçi ideal bir ekonomik modele uyumsuz olmalarıdır. Ancak

bu söz edilen unsurların ekonomi içinde önemli bir yere sahip olmaları, genel denge analizine katılmalarını gerektirmiştir.

Tam rekabetin Pareto optimal bir kaynak tahsisine yol açtığı sonucu, tüketim ve üretimde dışsal etkilerin olmadığı yani hiçbir tüketicinin faydasının diğer tüketicilerin faydasına dayanmadığı ve hiçbir girişimcinin toplam maliyetinin diğer girişimcilerin çıktı düzeyinden etkilenmediği varsayımına dayanmaktadır. Eğer tüketimde ve üretimde dışsal etkiler varsa, Pareto optimalite tam rekabet koşulları altında dahi gerçekleşmeyebilir. (Henderson ve Quant, 1998, 273) Dışsal etkiler ve kamu malları dahil olduğunda da dengeye ulaşılabilir ancak bu denge artık Pareto optimum değildir. Bu durum etkinliğin sağlanması için ekonomiye dışardan müdahale edilmesinin nedenlerinden biridir. (Guerrien 1999, 84)

Tam rekabetçi bir ekonominin etkin kaynak tahsisini sağladığını ifade eden Pareto optimallik kavramının neoklasik iktisatta vazgeçilemez bir yeri olduğundan neoklasikler piyasayı yeniden Pareto optimal koşullara getirecek araçları bulmaya çalışmışlardır. Bu çabalar bir anlamda devletin ekonomiye müdahalesinin gerekçesini ve sınırlarını da belirlemiş ve Neoklasik kamu ekonomisinin de önemli çalışma alanlarından birini oluşturmuşlardır. Neoklasik kamu ekonomisinin gelişiminde önemli ismi A. C. **Pigou**, önemli dışsal ekonomiler yaratan kamusal mallar için marjinal sosyal fayda ile marjinal sosyal maliyeti eşitleyici çözümlere yönelmiş, eşitliğin sağlanmadığı durumlarda vergi ve sübvansiyon politikalarının kullanılması ile eşitliğin sağlanabileceğini göstermiştir. Neoklasik çerçevede ele alındığında negatif dışsallık problemi ile karşılaşıldığında geleneksel çözüm kota uygulamak ve dışsallık yaratan aktiviteye vergi koymaktadır. Bu çözüm **Pigou**'cu vergilendirme olarak bilinmektedir. (Mas-Colell – Whinston - Green, 355) Pozitif dışsallık durumunda ise devlet sübvansiyon yolu ile müdahale eder ve optimal üretimi sağlar.

Pigou'nun geliştirdiği teori kadar hatalı bir teörinin bu kadar etkili olmasının ilginç olduğunu savunan R. **Coase**, zararlı etkilere sebep olan işletmelerin zarara katlananları tazmin etmeye zorlanması gerekeceğinin düşünülmesinin alternatif sosyal düzenlemeler ile elde edilecek toplam üretimle karşılaştırılmamasının sonucu olduğunu, aynı hatanın vergilerin ya da primlerin kullanımıyla zararlı etkiler problemini çözmek için sunulan tekliflerde de bulunabileceğini ifade eder. Coase iktisatçıların vergi ile zarar görenlerin tazmin edilmesi arasındaki farklılığa da dikkat etmediklerini, bu tür sorunların vergileri kullanarak çözme önerisinin zorluklarla dolu olduğunu, optimal koşulların sağlanmasının garanti olmadığını vurgulamaktadır. (Coase, 1960) Dışsallık yaratmanın ticareti söz konusu ise yani kirlilik yaratma izni piyasada ticarete konu olabiliyorsa, taraflar arasında (maliyetsiz bir şekilde)

yapılacak pazarlık, mülkiyet hakkının nasıl tahsis edildiğine bağlı olmaksızın etkin çıktıya önderlik edecektir. Mas Collel'e göre dışsallık probleminin bu çözümü vergi sistemine göre anlamlı üstünlüklere sahiptir. (Mas-Colell – Whinston - Green, 355)

Denge durumundaki Pigou'cu verginin değeri ile Coase'un önerdiği pazarlık sonucunda ulaşılabilecek tazmin değerinin birbirlerine eşit olduğu matematiksel olarak kolaylıkla gösterilebilir. (Binger ve Hoffman, 1998, 585-587) Coase'un argümanları işbirliğine dayanan oyunlar ortaya koyar, oyuncular arasındaki işbirliği, tahsisatın Pareto optimal olmasını sağlar. Önemli olan mülkiyet haklarının açık bir şekilde belirlenmesidir. Ancak bu hakların hangi tarafa verildiği sonucu etkilemez. Etkinlik mülkiyet haklarının dağılımından bağımsızdır<sup>3</sup>. Örneğin kirletme hakkının başlangıçta kime verildiği önemli değildir. İzin firmaya, tüketicilere verilmiş ya da ikisi arasında paylaştırılmış olabilir. Taraflar, kirletme izninin piyasadaki fiyatının, kirliliğin neden olduğu marjinal zarara eşit olduğu seviyeye kadar aralarındaki pazarlığa devam edebilirler.

1960'lı yıllardan itibaren Virginia okulu ya da Kamu Tercihi Teorisyenleri neoklasik teorisinin etkinsizlikle mücadele aracı olarak giderek genişleyen kamu kesiminin demokrasiler için bir tehdit olduğunu ileri sürerek ekonomik politikaya ilişkin yeni yorumlar, öneriler geliştirmişlerdir. G.Tullock ve J. Buchanan devletin ekonomideki varlığının dışsallıklarla ilgili bir önlem olarak görülmesini de eleştirmektedirler. Buchanan, Coase 'a atıfta bulunarak dışsallıkların ortaya çıkardığı birçok piyasa başarısızlığının mülkiyet haklarını uygun biçimde tanımlanması ile aşılabileceğini öne sürmektedir.

Tullock'a göre ise negatif dışsallıklar yalnızca piyasa sürecinde ortaya çıkmaz. Kamusal faaliyetler de negatif dışsallıklar yaratır. Üstelik kamusal faaliyetler ne kadar geniş bir alanı kapsarsa herhangi bir bireyin tercihlerinin ortalamadan sapması ve tatminsizliği o kadar fazla olacaktır. Kamu tercihleri teorisine göre piyasanın yetersizliklerinin abartılarak kamunun idealize edilmesi yanıltıcıdır. Virginia Okulu piyasanın başarısızlığı teorisine karşı kamunun başarısızlığı teorisini geliştirmiştir. (Ölmezoğulları, 1999, 121-122)

Tekrar kamu mallarının genel denge modeline dahil edilmesine dönülürse, kamu mallarının tüketiminde rakip olmama ve bölünmezlik gibi özelliklerin neden olduğu bireylerin tercihlerini açıklamamaları olgusu bu tür mallar için piyasada fiyat teşekkül etmesine imkan bırakmamaktadır. Fiyat olmayınca kardinal fayda kavramından hareketle faydayı ölçmek ve

<sup>3</sup> Gürültü kirliliğinin yarattığı maliyetin sorumluluğunun bir havayolu şirketi ve inşaat firması arasında farklı oranlarda paylaştırıldığında etkin sonuca nasıl ulaşılacağı ile ilgili statik bir oyun örneği için (Bierman – Fernandez, 1998, 83-94) bakılabilir.

üretimi marjinal faydanın fiyatla eşitleneceği noktaya kadar sürdürmek imkanı da kalmayacaktır. **Marshall, Lindahl, Wicksell, Pigou** marjinal fayda yaklaşımının kamusal mallar içinde geçerli olabileceği görüşünü savunmuşlar, toplumun belli sosyal kesimlerinin ödeyebilecekleri toplam vergiyi belirli bir kamusal mal için ödenmesi kabul edilen adil bir fiyat gibi düşünmüşler, kamu mal üretiminde de marjinal faydanın saptanabileceğini ileri sürmüşlerdir. Devleti bir tür üretici ve tüketici gibi düşünmüşlerdir. Buna göre bireyler özel malalara olan taleplerini ve tercihlerini nasıl ödemeye razı oldukları fiyat ile gösteriyorlarsa kamusal mal tercihlerini de ödemeye razı oldukları vergi ile belli ederler.

Kamu ekonomisinin gelişiminde önemli bir isim olan K. Wicksell kamu harcamaları ile vergiler arasındaki ilişkiyi ortaya koyarken, piyasa tipi çözüm önerileri geliştirmiştir. Pareto optimalitesine uygun bir biçimde kollektif karar alma yönünden bazı koşulları incelemiş, bu amaçla oybirliği ve yaklaşık oybirliği yöntemlerini savunmuştur. Lindahl ise Wicksell'in gelir dağılımı modelini yorumlayarak kişilerin vergi yüklerini fayda ilkesi yönünden tutarlı olarak saptamıştır. (Şener, 2001, 5) E. Lindahl, kamu mallarının etkin düzeyinin belirlenmesinde piyasanın özel malların üretiminde izlediği yolun mümkün olduğunca taklit edilmesini önermiştir. Lindahl toplam talep eğrisinin (ki bu eğri özel mallara olan talep eğrisinden farklı olarak her bireyin kamu malı talep eğrisini dikey olarak toplayarak çizilen) arz eğrisi ile kesiştiği yer olduğu belirtilmiştir. **Lindahl dengesi** kamu mallarının talep eğrisi ile arz eğrisinin tam kesiştiği noktadadır. (Stiglitz, 1994, 210) Bu noktada kamu mallarını da içeren bir ekonomide dengenin ilk tanımı Lindahl tarafından verildiği söylenebilir. Yararlanmaya göre vergilendirme ilkesinin bir uzanımı olan Lindahl çözümü, kamusal etkinliğin tüketimi ve vergi yükünün dağılımının optimal ve adil kurallarını belirlemeyi hedefleyen normatif bir yaklaşımdır. Lindahl'ın amacı toplamları üretim fiyatına eşit olan kişiselleştirilmiş fiyatları devreye sokarak, rekabetçi dengeyi kamu mallarının bulunduğu bir yapıya uygulamaktır. Bu fiyatlar Lindahl'a göre özel malların piyasa fiyatları ile aynı rolü oynayacak ve kamu malları için talep işlevleri (karşılamları) yaratacaktır. Lindahl'ın önerdiği dağılım süreci de dengenin tüketiciler için aynı olduğu ve bireysel fiyatların toplamını üretim fiyatına eşit olduğu noktada gerçekleşecektir. Kamu malını üretmenin toplam maliyeti  $\sum_i B_i = 1$  şeklinde ifade olunur: Bu vergi payları da kişiselleştirilmiş fiyatlar ya da Lindahl fiyatları olarak anılır.

Özel mallar durumunda fiyatın veri olarak alınıp, miktar ayarlamasının yapılması, buna karşılık kamu malları söz konusu olduğunda, ödeme istekliliğine bağlı olarak fiyat ayarlaması yapılmasıdır. Dolayısıyla,  $x_h, h \geq 0$ ,  $x_g \geq 0$  ve  $p_h x_{ig} + p_{g1} x_g = p_r w_{ih}$  kısıtları altında  $\max u_1(x_{ih}, x_g)$  probleminin çözülmesi Lindahl dengesini verecektir.

Dengeye karşılık gelen dağılım dışındaki herhangi bir dağılım tarafların birinin diğerinin izin verebileceğinden çok kamu etkinliğinden yararlanması ile sonuçlanacak ve dolayısıyla dengeden uzaklaşacaktır. Bu yüzden de denge noktası iki tarafın da üzerinde fikir ve çıkar birliğine sahip oldukları tek noktadır ve bu niteliğiyle de Lindahl dengesi pareto optimalitesinin koşullarını sağlar.

$h$  özel mal ve  $g$  kamu mallarından oluşan bir model olsun ve toplam üretim kümesini  $p_h y_h - p_g y_g = 0$  ve  $y_h \in R''$ ,  $y_g \in R''$  olarak tanımlayalım ve kesinlikle pozitif fiyatlar altında bu küme ölçeğe göre sabit getiri özelliğine sahip olsun. Yine başlangıç donanımlarının yalnızca özel mallardan oluştuğunu varsayalım ve tüketim kümesi de  $R''$  nin negatif olmayan kadranı olsun. Bu çerçevede elde edilebilir tüketim programları  $(\{x_{ih}\}, y_g)$  olarak tanımlanır ve  $\sum_i x_{ih} = y_h + w_h$  Her  $i$  için  $x_{ih} \geq 0$   $y_g \geq 0$   $[y_h, y_g] \in Y$  koşulları sağlanıp bir simpleks oluşturur.

Bu koşullar altında Lindahl dengesinin  $((X_i, P_i), Y, (W_{ih}))$  ile ifade edilen bir özel sahiplik ekonomisine karşılık gelen bir dağılım ve bir fiyat sistemi olarak dengeyi sağladığı ve bu dengenin Pareto optimalitesine karşılık geldiği kanıtlanılabilir. (Çakır, 1993, 43)

Kamu hizmetleri konusunda yurttaşların bir tek üretim düzeyi üzerinde görüş birliğine varmaları gerekir. Ortak tüketim mallarından yararlananların tümü sabit bir üretim miktarından yararlanırlar. Ortak tüketim malı olmayanlarda (eğitim, sağlık gibi) da genelde hizmet miktarı sabittir. Kişilere istedikleri hizmetin miktarını ve niteliğini belirleme olanağı tanınmamıştır. Bu durumda belirli miktarda bir kamu hizmeti, bu hizmete talepleri farklı olan kişilere farklı tutarlarda para ile ölçülebilir faydalar sağlar. Her bir kişi için üretimin marjinal faydasının fiyatına eşitlenmesi, ancak fiyatların farklılaştırılması ile mümkündür. Yurttaşların gönüllü olarak, vergi farklılaştırılması yolu ile sabit bir kamu hizmeti miktarına farklı vergiler ödemesi gerekir. İşte Lindahl yurttaşların bu ödeme konusunda nasıl anlaşabileceklerini göstermiştir. (Bulutoğlu, 1997, 37-50) Bu analizde kamu üretiminin maliyeti ayrı ayrı tüketicilerin ödedikleri vergilerin toplamı olarak düşünülür. L. Johansen, 1963'de Lindahl'ın 1919'da ortaya koyduğu çözümü revize ederek bir Pareto optimumu olduğunu kanıtlamıştır. (Cullis, 1992, 72-75)

Genel denge kuramının temelinde belirli tüketim ve üretim olanakları altında bunlara bağlı olarak oluşturulan üretim ve tercih işlevlerinden hareketle, rekabetçi bir ekonomide dengeyi sağlayan bir fiyat vektörünün bulunup bulunamayacağı sorununa bir cevap arayış vardır.

Bulunabilecek böyle bir denge fiyat vektörünün kar ve fayda maksimizasyonunu gerçekleştireceği varsayılır. Kamu mallarının dışlanamama ve rekabetin olmaması gibi özellikleri genel denge analizine dahil edilmelerini zorlaştırdıysa da **Smuelseon, Musgrave, Von Neumann** gibi iktisatçıların katkılarının sonrasında *kamu mallarını da içeren bir ekonomide dengenin ilk tanımı* Lindahl tarafından verilmiştir. Bütün bu çalışmalarda kamu mallarının özellikleri matematiksel modele mümkün olduğunca doğru olarak yansıtılmaya çalışılarak, ekonomide kamu mallarının etkin üretim düzeyine ulaşılmaya çalışılmıştır. Ancak kamu mallarına olan talebin, kamu mallarını üreten devlet otoritesine nasıl yansıtılacağı yani bir anlamda oylama ilkeleri ve devlet aygıtının kurumsal yapısı ikinci plana atılmıştır. Bu soruların cevabını ise Kamusal Tercihler Okulu, Sosyal Tercihler Okulu, Anayasal İktisat gibi akımlar ele almışlardır.

Tam rekabetçi bir ekonominin analizi olarak ortaya çıkan genel denge modeli başlangıçta, oldukça kısıtlayıcı varsayımlara dayanan ve Pareto anlamda etkinsizlik yaratan ekonomik durum ve aktiviteleri analiz dışında bırakan bir model olmuştur. Çalışmada ele alınan Arrow-Debreu modeli rekabetçi bir ekonomide bu dengenin varlığının ispatlanmasına öncelik vermiş ve bunun için de topolojik uzaylara dayanan matematik teknikler kullanılmıştır. Bu yönüyle genel denge kuramı 20. yüzyıl hakim iktisat görüşü neoklasik iktisadın iktisat disiplini bir bilim haline getirmek ve fizik bilimine benzemek için yoğun matematik kullanımına yöneldiği süreç içinde çok önemli bir adım olmuştur. İktisat dünyası, fizik biliminin geçirdiğine benzer bir süreci izlerlerken, matematik kullanarak gelişen fizikten farklı olarak iktisadın ulaşabileceği son noktanın matematikselleşmiş bir disiplin olabileceğini öngörememişlerdir. Belki iktisat dünyası için ulaşılan bu sonuç tatmin edici olabilir ancak matematik dünyasında “*matematik bilimi*” terimi hemen hiç kullanılmazken iktisatçıların matematikselleşmiş bir disiplini “*iktisat bilimi*” olarak tanımlamaları oldukça çelişkilidir. Benzer şekilde hem **Popper**’in yanlışlamaya dayanan analizinin, varsayımlar üzerine inşa edilmiş iktisat için genel olarak çok sert bulunması ama öte yandan iktisadın bilimselliğinin sorgulanmaması gibi.

Çalışmanın bu birinci bölümünde, rekabetçi bir ekonomide genel dengenin varlığı ve bu dengenin Pareto anlamında etkinliği matematiksel bir kurgu içinde gösterildikten sonra, genel denge modelinin dayandığı topolojik uzaylar ele alınmış ve dengenin varlığının ispatında kullanılan sabit nokta teoremleri üzerinde durulmuştur. Genel denge ispatında kullanılan ve daha yeni diferensiyel topolojiye dayanan tekniklerle ilgili kısa bilgi ise 3.2.6 bölümünde verilmiştir.

Dengenin tekliği ve kararlılığı ile ilgili çalışmalar ele alındıktan sonra, başlangıçta, Pareto anlamında etkinsizlik yarattıkları ve rekabetçi bir ekonominin örneğin üretim olanakları kümesinin dışbükeyliği gibi temel varsayımları ile eştikleri için analiz dışı tutulan ve piyasa başarısızlıkları olarak adlandırılarak düzeltilmesine çalışılan eksik rekabet, dışsalılıklar, kamu malları gibi kavramların da denge analizine nasıl dahil edildikleri incelenmiştir. Eksik piyasaların modele dahil edilmesinde de olduğu gibi varsayımların ve kullanılan teoremlerin amaçlanan sonuca ulaşmak üzere seçildikleri açıkça görülmektedir. Genel denge kuramı Noklasik iktisat içinde hakim konuma geldiğinden dolayı kamu mallarının denge analizi çerçevesinde fiyatlandırılmasının sağlanması ve vergilendirme ve sübvansiyonlar yolu ile dışsalılıkların yarattığı Pareto etkinsizliğinin giderilmesi hedeflenmiştir. Aynı bölümde genel denge modelinde başlangıçta yer almayan para kavramının modele dahil edilme süreci de incelenmiştir.



### 3. ZAMAN VE BELİRSİZLİK ALTINDA GENEL DENGİ

Gerek doğa bilimlerinde gerekse sosyal disiplinlerde aksiyomatik modellerden gerçek dünyaya yaklaşılmaya çalışıldıkça dikkate alınması gereken iki önemli kavram zaman ve belirsizliktir .

#### 3.1 Belirsizlik Kavramının İktisada ve Genel Denge Modeline Giriş

İktisat disiplininin gelişiminde doğa bilimlerinin, özellikle de fizik biliminin geçirdiği aşamaların benzerlerini yaşadığı söylenebilir. Hatta öyle ki 1980'lerde hakim iktisat okulunun kökenlerini sorgulamaya yönelen bir yaklaşıma göre neoklasik iktisadî anlayabilmenin tek yolu fizik kuramının tarihini anlamaktan geçmektedir. (Çakır, 1994) Ancak fizikteki gelişmeler doğayı açıklayabilme amacıyla ortaya çıkarken iktisattaki gelişmeler daha çok iktisadî bir bilim haline getirme çabalarının bir sonucuydu. R. Kuttner iktisat - fizik ilişkisini A. Smith'e kadar götürerek Smith'in piyasa ekonomisindeki denge kavramının da 18. yüzyıl Newton mekaniğinin bir varyasyonu olduğunu, fiziğin o zamandan beri iktisadın peşinden koştuğu bir model olduğunu söylemektedir. (Kuttner, 2000) Toplumsal yasaların doğal yasalardan farklı olarak genel ve evrensel değil belirli bir kültürel sisteme özgü kurallar olduğunu savunan “*yorumsama programının*” varlığına rağmen pozitivist yöntemi benimseyen dönemin çağdaş siyasal ve toplumsal teorisi, toplumsal dünyanın doğal dünyadan farklı olmadığını, bu nedenle doğal bilimlerinde başarıyla uygulanan pozitivist açıklama biçiminin toplumsal bilimlerde de kullanılabileceğini iddia etmiştir. (Sunar, 1999, 25)

19. yüzyılın sonları fizik biliminin ulaştığı kesinlik ve elde ettiği saygınlık, iktisatçıları da etkiliyor ve onları iktisadî, fiziğin ulaştığı kesinlik düzeyine ulaştırmaya çabalamaya itiyor. Fiziğin kesinliğe ulaşmasında büyük rolü olan matematiksel yöntemlerin kullanılışı bu yolla iktisada geçmiş oluyor. İktisadî matematikselleştirmeye yönelen ve bir kısmı da mühendis kökenli olan bu iktisatçılar, matematik kullanmadan iktisadın fizik kadar saygın bir bilim olamayacağını söylemekteydiler. (Çakır, 2001)

Determinizm Newton Mekaniği'nin bir özelliği olarak 19. yüzyılda en parlak dönemine ulaşmış, yine bu dönemde Laplace gibi bilim adamları, geçmişe bakarak tüm evrenin geleceğinin kesinlikle belirlenebileceğini ileri sürmüşlerdir. Nasıl ki fizik biliminin Newton ile bütüncül, evrensel, determinist bir konumuna geldiği, hatta bir anlamda artık bu bilimin

sınırlarının sonuna geldiği düşünölmüşse, iktisat kuramında da **marjinalist** devrimle birlikte tamamen kompleks bir bilime ulaşıldığı düşünölmüştür.

**W. S. Jevons**'un iktisattaki değeri kavramının mekanikteki enerjiyle özdeşleştirmesi, **Walras**'ın pür iktisat kuramının her anlamda matematiksel-fiziksel bilimlere benzediğini savunması ve genel denge modelini buna dayanarak kurması, **Pareto**'nun iktisat bilimi kuramının rasyonel mekaniğin kesinliğine sahip olduğuna inanması bunun örnekleridir. (Çakır, 1995) Popper'e göre Newton fiziğinin determinist yapısı, yani tarihselciliği iktisat dahil pek çok sosyal bilimi etkilemiştir. (Popper, 1998, 60)

Bu süreç içerisinde iktisadın kesinliğe ulaşmasında engel olarak ve belirsizliklerin kaynağı olarak görölen sosyal etkilerden uzaklaşmaya çalışıldığı görölmektedir. Örneğin iktisadın sosyal niteliğinden soyutlanması yolunda adımlar atan Jevons sosyal olguların yalnız kuramdan değil pratikten de atılmasını sağlamaya çalışmaktaydı. (Buğra, 1999, 171)

Ancak 20. yüzyıldaki gelişmelerle, klasik fiziğe duyulan güven ve bu fiziği niteleyen determinizm, en yüksek noktasına ulaştığı bir dönemde yıkılmıştır.\* O zamana kadar göz kamaştırıcı başarılarla yol açan Newton mekaniğinin birden birtakım olguları açıklamakta yetersiz kaldığı görölmüştür. Bu tür olgular hem makro hem mikro düzeyde ortaya çıkmıştır. Bu güçlüklerin giderilmesi yolunda girilen çabalar sonucunda iki büyük düşünce sistemi doğmuştur. Bunlardan biri uzay, zaman, kütle gibi kavramların mutlak değil bağıl olduğu görüşüne dayanan relativite teorisi diğeri **Planck**'ın maddenin saldığı ısı ve ışığın öteden beri sanıldığı gibi sürekli bir akış değil, quanta adını verdiği süreksiz veya kesik paketlerden ibaret olduğu iddiasını getiren kuantum teorisidir. Bu iki sistem kendi alanlarında Newton mekaniğinin yerini aldılar. (Yıldırım, 1991, 128) Önce **Einstein**'ın görelilik teorisi ve Planck ile başlayan kuantum mekaniği, her ne kadar Planck, görelilik teorisini klasik fizikte yapılan bir stil değışikliğı olarak tanımlasa da (Planck, 1996, 80) **Newton** mekaniğinin geçerli olduğu sınırları belirlemiş, onun evrensellik iddiasına son vermiş ve klasik determinizm ilişkisinin geçersizliğini göstermiş, elektronların yörüngeler arası hareketleri gibi hareketlerin önceden kestirilemeyeceğini, ancak çok sayıda alınacak parçacıkların olası hareketleri hakkında olasılıksal öngörülerde bulunulabileceğini göstermiştir. Fizikteki determinist nedensellik ilişkisi yerini olasılıksal bir nedensellik ilişkisine bırakmıştır. İki yarıklı bir girişim deneyinde ışığın hem parçacık hem de dalga özelliğı göstermek zorunluluğı, kuantum fiziğinin bir sistemi betimlemek için gereken modelin etkileştiğı aletin tabiatına ve gözlem tabiatına bağımlılığı, (Rae, 1999, 18) **Heisenberg**'in bir elektronun konum ve hızının ikisini birden istediğimiz kesinlikte aynı anda belirlemenin imkansız olduğunu, bu iki büyüklüğe ilişkin

belirsizliklerin çarpımının, Planck sabiti bölü taneciğin kütlesinden daha küçük kılınmadığını ortaya koyması, (Heisenberg, 1993, 24) dahası bunun bir ölçüm hatası olmadığı düşüncesinin yerleşmesi ve kaos teorisi ile birlikte görebildiğimiz ve dokunabildiğimiz evrende bile determinist bir yaklaşım çerçevesinde olguların önceden belirlenemeyeceğinin ortaya konması (Gleick, 1997, VIII) iktisadın, kesinliği nedeniyle öykündüğü fiziğin de aslında hiç de kesin olmadığını göstermesi bakımından önemli olmuştur.

İktisat, hep örnek aldığı fizikten, dışsal toplumsal, siyasi ve teknolojik etkilere çok daha açık olmasıyla ve ilgilendiği alanın belirsizliğinden kaynaklanan sorunlar yüzünden bir türlü kesin bir bilim haline gelemeyip, ulaşamayan bir ideal olarak fizik bilimini taklit etmeye çalışırken belki de ilginç bir nokta olarak fizik özellikle de mikro düzeyde Heisenberg ile birlikte belirsizliğe yer vermesine karşın iktisatta bir fetiş haline gelen kesinlik arayışı kimi iktisatçılar tarafından sürdürülmeye çalışılmıştır. (Çakır, 1994).

Fizik bilimindeki kesinlik anlayışının sorgulanmasına neden olan bu değişim etkilerini önce bilim felsefesinde, Popper'den, Kuhn, Lakatos, Feyerabend'e bir dizi bilim felsefecisi aracılığıyla gösterirken, onların sayesinde sosyal disiplinleri de etkilemiştir. Yani bir anlamda adı geçen bu düşünürler doğa bilimlerindeki değişimin içerdiği felsefi anlamı sosyal bilimcilerin anlayabilecekleri bir şekle getirmişlerdir. Nitekim bugün iktisat metodolojisi tartışmalarında hemen her makalede düşüncelerine atıfta bulunulan Popper, "*eleştirel akılçılık*" olarak adlandırılan ve bir kuramın bilimsel olma niteliğini, bilimsellik ölçütünü doğrulama yerine, yanlışlanabilirlik ya da test edilebilirlik olarak belirlediği yöntemini kurarken, Einstein'ın yer çekimi teorisinin, sınanabilir olma niteliğinden ne kadar etkilendiğini, 1919'da Eddington'un güneş tutulmasıyla ilgili gözlemlerinin Einstein'ın teorisini yanlışlayabilecek bir yapıya sahip olduğunu anlatarak ve Einstein'ın teorisini Marx'ın tarihsel maddeciliği, Freud'un psiko-analizi, Adler'in bireysel psikolojisi ile karşılaştırarak anlatmıştır. (Popper, 1991, 186) Yine Popper, "*Bilimsel Araştırmanın Mantığı*" isimli kitabında, özellikle Kuantum Mekaniği ve Heisenberg'in belirsizlik bağıntılarının istatistiksel bir yorumu üzerinde durmuştur. (Popper, 1998, 248-284)

İktisat - fizik ilişkisi açısından değinilmesi gereken bir nokta da şudur. Kuantum teorsisi ile birlikte doğa olgularını mekanik modellere uyarlamak yerine soyut matematiksel ilişkilere indirgeyerek açıklama yoluna gidilmesi (Yıldırım, 1994, 155) ki Einstein'ın uyguladığı yeni matematiksel biçimlerle (Lorentz Dönüşümleri ve Minkowski dört boyutlu uzayının kullanımı ile) yeni tanımlamalara gitmesi de (Einstein, 1993, 32-39 ve 55-57) buna örnek olarak verilebilir, deney ve gözlemlere dayalı fizik yerine matematiksel modellere, yüksek soyutlama

düzeylerindeki akıl yürütmelere dayanan daha sonra elde edilen bulguların ancak mümkün olduğunda deneylerle sınanmasına çalışılan bir döneme girilmiş olmuştur. Bu dönemde kuantum mekaniği uzunca bir süre bu matematiksel modellemeler sayesinde ilerlemiştir, ancak bu yöntemin olası sakıncası kapalı ve sınanamaz bir sistem yaratma potansiyelidir.

İktisadın da bu soyutlama ve matematikselleşme sürecinden belli oranda da olsa etkilendiğini, ve matematiksel soyutlamalar ve topolojik uzayların kullanıldığı akıl yürütmelerle örneğin genel dengenin varlığının ispatlandığını görüyoruz. Genel denge kuramını tutarlı bir aksiyomlar kümesinden mantıksal olarak türetilmiş bir teorem ya da teoriler grubu ve kuramın gerçeklerini topolojik tümevarımlardan elde edilen mantıksal bir ölçüt olarak niteleyen ve kuramın, açıklayıcı olma özelliğinin dengenin varlığı ile sınırlı olduğu ve iktisat içinde daha özgül bir kuramın gelişimine izin vermeyen ve gözlemlerden hareketle doğrulanması mümkün olmayan kapalı bir sistem oluşturduğu (Çakır,1993, 4-5) iddiası önemlidir. Gerçekten de fizikteki matematik kullanımındaki değişime benzer bir şekilde iktisatta da marjinal analizde kullanılan küçük değişimler yani diferansiyel hesaplar yerine topolojik uzaylar üzerindeki çalışmalar ağırlık kazanmaya başlamıştır. İkinci Dünya Savaşı'nın sonuna kadar matematiksel ekonomi, ekonomideki diferansiyel hesap (differential calculus) uygulamaları ile aynı anlama geliyordu. Bu matematiksel yaklaşım Cournot (1838) tarafından başlatılmış, Walras (1874) ve Pareto (1909) tarafından genel denge analizinde kullanılmıştır. Hicks'in Değer ve Kapital (Value and Capital) (1939) ve Samuelson'un Ekonomik Analizin Temelleri (Foundations of Economic Analysis) (1947) ile klasik devrin zirvesine yükselmiştir. İkinci Dünya Savaşı sonrasında genel denge teorisi adım adım ekonominin merkezine doğru ilerlerken, bu süreç içerisinde kullanılan tekniklerde önemli değişiklikler gerçekleşmiştir. Hesaplamaların yerini dışbükeylik teorisi (convexity theory) ve topoloji almıştır. Modern geleneğin ana kitapları olarak sayılabilecek Debreu'nun Değer Teorisi "Theory of Value (1959), Arrow ve Hahn'ın Genel Rekabetçi Analiz (General Competitive Analysis) (1971), Scarf'ın Computation of Equilibrium Prices (1982) ve Hilderbrand'ın, Çekirdek ve Geniş Ekonomilerde Denge (Core and Equilibria of a Large Economy) gibi eserlerde türev ya hiç yoktur ya da çevresel (ikincil) bir rol oynamıştır. (Mas-Colell, 1985, 1) İktisatta matematik kullanımının bu yeni şekliyle yükselişini Ward formalist devrim olarak nitelendirmiştir. (McCloskey, 1994, 127) Ancak şu da belirtilmelidir ki 1970'lerle birlikte diferansiyel yaklaşım genel denge teorisine yeniden dönmüş ve yeni bir alan olarak diferansiyel topoloji hem genel dengenin ispatında hem de özellikle finans ekonomileri gibi alanlarda kullanılmaya başlanmıştır. Debreu, Smale, Balasko, Chichilnisky, Mas-Collell

diferensiyel topoloji tekniklerini genel denge teorisi çerçevesinde kullanmışlardır. (Mas-Colell, 1985, 1 ve Quinzii-Magill, 1996, 60-61)

Belirsizlik kavramının temel rol oynadığı **kaos** teorisi de fizik-matematik çıkışlı bir teori olmakla birlikte son yıllarda başta iktisat olmak üzere sosyal bilimleri de etkilemektedir. Örneğin, bir sıvının ısıtılması ile bir ekonomik sistemdeki teknolojik değişimlerin artması arasında paralellik kuran bir yoruma göre teknolojik gelişmenin (ya da ısının) daha yüksek düzeylerinde periyodik salınımların ortaya çıkması gerekir ve ekonomide de buna benzer yaklaşık biçimde periyodik olarak nitelendirilebilecek ekonomik çevrimler görülmektedir. Hatta daha da yüksek teknolojik düzeylerde iki ya da daha çok periyodik çevrimin süperkonumun görülebileceği, son olarak da teknolojik gelişmenin yeterince yüksek bir düzeye erişmesiyle de düzensiz değişimler ve başlangıç zamanına hassas bağlılık gösteren türbülanslı bir ekonomi ortaya çıkar. Ekonomi konusunda yazılmış ders kitaplarının çoğunda genel amaç, toplum için yarar sağlayacak bir dengenin bulunması ve uygulanması olarak belirlenir. Buna karşılık fizik alanındaki kaos örnekleri bazı dinamik koşulların dengeden çok kaotik ve kestirilemez bir zamansal evrime yol açtığını göstermektedir. Buna dayanılarak ekonomide de daha iyi bir dengeyi amaçlayan önlemlerin, bunun yerine sonuçları kestirilemeyen denetimsiz dalgalanmalara yol açma olasılığının bulunduğu, günümüz ekonomisinin karmaşıklığının bu tür kaotik oluşumlara zemin hazırladığı gibi yorumlar yapılmaktadır. (Ruelle, 1996, 81-83)

Aslında kaos ve lineer olmayan sistemlerin ekonomiye uygulanması da daha önce söz ettiğimiz diferansiyel hesapların ya da topolojik uzayların kullanılmasına benzer bir süreç izlemiştir. “*Ekonomide Kaos ve Doğrusal Olmayan Sistemler*” başlıklı bir kitapta, erken dönemde çoklu çözümleri içeren lineer olmayan modelleri geliştiren iktisatçıların, Marshall ya da Walras kadar önemli olmalarına rağmen yıllardır gözardı edildiklerini, son yıllarda matematik ve doğa bilimleri alanlarındaki çalışmalarla doğrusal olmayan sistemlerin analizinde önemli ilerlemeler olduğu, bu metodların uygulamalarının ekonomide yeni yeni yer bulmakla birlikte şimdiden oldukça önemli sonuçlar verdiği ve doğrusal olmayan metodların, borsalar, döviz piyasaları, dış açık problemleri, depresyon, hiperenflasyon gibi pek çok bağlamda yararlı olduklarının ispatlandığı iddia ediliyor. (Creedy and Martin, 1994, 7) Mandelbrot’un ölçekler değiştiğinde düzensizliğin sabit kalmasına ve doğadaki şekillerin bir ana şeklin sürekli olarak kendisini küçük parçalarda tekrar ettiğine dayanan ve dünyamızın düzenli bir düzensizlik sergilediğini iddia ettiği, fraktal geometri olarak isimlendirdiği yapının (Gleick, 1997, 113) da hisse senetleri fiyatlarının kendi kendini tekrarlayabilen yapısıyla

ilişkili olduğu, hisse senetleri fiyatlarının kendi geçmiş fiyatları ile ve başka değişkenlerle sistematik bir ilişki içinde olabileceği ve bu sistematik ilişkilere eşlik eden bir tesadüf faktörünün de her zaman gündemde olabileceği, tesadüfi süreçlerin bazı gizli deterministik kurallarla iç içe olabileceği ve bu birlikteliğin sonuçta bir ana fraktal şekle götürebileceği, borsada Fibonacci serileri gibi bazı katsayı ve şekillerin oldukça kararlı bir şekilde tekrarlanabilmesinin bunun örneği olabileceği yorumları yapılmaktadır. (Erol, 1999, 312)

İktisat gibi pek çok sosyal bilim alanında insana bağlı olarak determinist şemalar kurmak zaten kimi sıkıntılar yarattığından, fizik bilimindeki bu anlayış değişikliği doğa bilimlerine öykünen sosyal bilimcilerin de büyük bir baskıdan kurtulmalarına olanak sağlamış ve daha önce bilim olma niteliğini sarsacağı için analiz dışı bıraktıkları kimi kavramları incelemeye başlamışlardır. Bu kavramlardan özellikle önemli olan iki tanesi zaman ve buna bağlı olarak da belirsizliktir. Bu sayede açıkça yanlış olan alıcıların mallar hakkında mükemmel bilgi sahibi olduğu türünden bazı kısıtlayıcı varsayımlardan kurtulma yolu açılmıştır. A. Musgrave'in (1981) vurguladığı gibi iktisattaki bazı ilerlemeler, gerçekçi olmayan varsayımları iktisat teorisinden ayıklama isteğinden belli oranda teoriyi daha gerçekçi yapma arzusundan kaynaklanmaktadır Ancak M. Friedman (2000) gibi kimi iktisatçılara göre, bir varsayım, içsel olarak tutarlı olduğu ve verilerle çürütülemediği sürece sözkonusu varsayımın ampirik açıdan doğru olup olmaması önemli değildir. Rekabetin eksik olduğu bir dünyada bile ekonomik işlemlerin klasik iktisadın aksiyomlarına uyuyormuş gibi modelleştirilmesi doğrudur.

Doğa bilimlerinden, bilim felsefesi aracılığıyla sosyal bilimler alanına geçen belirsizlik kavramı, modernite teorilerin sorgulanması ve postmodernist söylemlerin hemen her disiplinde ön plana çıkmasında önemli bir rol oynamıştır.

Zaman ve belirsizlik 20. yüzyıl iktisat düşüncesinde önemli bir tartışma konusu olmuştur. Popper'in bilimsellik kriteri olarak ortaya koyduğu yanlışlanabilirlik kriterini iktisada taşıyan T. W. Hutchison neoklasik iktisadı değerlendirirken bireylerin geleceği mükemmel olarak bildikleri doğru bekleyişlere sahip oldukları varsayımının teorileri test edebilme özelliğinden soyutladığını vurgulamıştır. (Alada, 2000, 67) Mises'in iktisadın zaman boyutuna vurgu yapıp onu, zamansız matematik ve mantıktan ayırma çabasından, Avusturya Okulu'nun iktisat zamandadır ve denge yoktur saptaması ve beklentilerin öznel olduğu ve bilgisizliğe yol açtığı yorumlarına kadar konu derinlemesine tartışılmıştır. (Eren, 1994, 267-269)

Bu tartışmalar iktisadın matematiksel formalizmden biraz olsun kurtulup somut hayata yaklaşması konusundan önemli adımlar olmuşlardır. Avusturya Okulu iktisatçıları Walrasgil

denge analizini zamansız üretim, tam bilgi ve bekleyişler, maliyetsiz mübadele, anında dengeye varma ve kurumların dikkate alınmaması gibi nitelikleri yüzünden eleştirerek, zaman, belirsizlik, bilgi ve bekleyişler, geliştirdikleri konjonktür (dengesizlik) analizlerinde önemli bir yer verirler. (Yay, 1993, 49) Örneğin bütün bilgilerin sübjektif olduğunu iddia eden F.A. Hayek denge kelimesinin bir anlamı varsa, ancak planlarının ne olacağını tam olarak bilen tek birey bağlamında mevcut olabileceğini, bütün olarak toplum içinde bunun asla gerçekleşmeyeceğini söyler. (Butler, 2001, 77-78)

Teorisinde zamana önem verdiği için, aynı önemli vurguyu fizikte yapan Einstein ile aralarında benzerlik kurulan Keynes'de, (Togati, 2001) zaman kavramının anlamı yerleşik iktisattakinden farklıdır. Analizlerinde, geleneksel zaman bütünüyle atılmamakla birlikte, tarihsel ya da G. Shackle'nin deyişi ile beklentisel zaman önemli yer tutar. (Eren, 1994, 292-295) Keynes, belirsizliğin ölçülebilir olmadığı saptamasını yaparak F. Knight'ın yaptığı risk belirsizlik ayrımını izlemiştir. Knight, belirsizlik faktörünün bir eksik bilgi unsuru olan riskten farklı olarak ölçülemez olduğunu söyler. Keynes'in benimsediği Knight tarafından yapılan bu belirsizlik formülasyonu Smith'e dayandırılabilir. (Alada, 2000, 81-84) Bu anlamıyla ölçülebilen belirsizlik olarak tanımlanan risk sonuçta bir kesinliği ifade etmektedir ve geleneksel iktisadın algılayışından bir farkı yoktur. (Eren, 1994, 292-295)

Genel denge teorisi çerçevesinde de ele aldığımız gibi geleneksel yaklaşımda para numerierdir. Bunun sonucunda değer kuramı kesinlik ilişkisi vardır. Keynes de ise para yatırım (ki bu gelecek zamanı kapsar), belirsizlik, ilişkisi vardır ve paranın önemi bu gün ile gelecek arasında bağlantı kurmasındadır. Bu anlamda Keynes'de belirsizliğin kaynağının para olduğu söylenebilir. Paralı ekonomide para yarın sorunlarını ortaya çıkarmaktadır. Yarın eksik bilgidен dolayı belirsizliğe yol açar. Belirsizlik dışsal değil içsel bir değişkendir. (Eren, 1994, 292-294) Keynes'in belirsizlik ve tarihsel zamana verdiği önem onu dengesizliğe götürmektedir. Keynesçi iktisatta belirsizliğin içsel olması ve sistemin doğasından kaynaklanması aynı zamanda Avusturya Okulu'ndan farklı olarak krizlerin nedeni olarak kabul edilmesine neden olur. (Eren, 1994, 296-297)

Ekonomide belirsizlik kavramının ön plana çıktığı bir başka alan ise finansal ekonomidir. Finans alanındaki belirsizlik, risk ve olasılık faktörlerinin varlığı, ekonomi ve finansı klasik fizik yerine kuantum fiziğine benzeten yorumlar yapılmasına da neden olmaktadır. (Erol, 1999, 294)

Neoklasik iktisadın temel varsayımlarından birisi de statik denge varsayımdır. Marshall'ın kısmi denge analizi de Walras ve Pareto'nun genel denge analizi de statik denge tahlilleri

olarak kabul edilirler. Bu tahlillerde iktisadi sürecin dengeye kadar geçirdiği zaman ihmal edilmiştir. (Kazgan, 1993, 110) Zaman kavramının ve dolayısıyla belirsizliğin modele dahil edilmesi denge düşüncesinin değil dengeye ulaşma metotlarını değişmesine neden olmuş, zaman içinde de dengeye ulaşılabilceği ispatlanmak istenmiştir.

Belirsizlik kavramının genel denge modeli çerçevesinde ilk ele alınışı **Debreu**'nun "Değer Kuramı", (Theory of Value) adlı ünlü çalışmasında olmuştur. Debreu, denge analizini, belirsiz olayların tüketim ve üretim kümelerini ve ekonominin kaynaklarını belirlediği durumlara genişlettiğini belirttiği kitabının 'belirsizlik' başlıklı yedinci bölümü bu konuya bir giriş niteliğindedir. (Debreu, 1959, 98-102) Bu durumda, transfere konu olan mallar öncelikle fiziksel özelliklerinin yanı sıra konumları ve bulundukları zamanla da belirlenirler. Aktiviteleri  $T$  temel zaman aralığına genişletilmiş ekonomi modelinde çevrenin taşıdığı belirsizlik sonlu sayıdaki alternatiflerden birinin seçilmesi sonucu meydana çıktığı varsayılır. Bu alternatifler  $T$  zamanındaki olay olarak adlandırılır ve  $e_T$  olarak gösterilir. Debreu bu olaylara örnek olarak atmosferik koşullar, doğal felaketler ve teknik olanakları göstermektedir. Başlangıç zamanında ajanlar  $T$  zamanında gerçekleşecek olaylar hakkında bazı bilgilere sahiptirler.

Her ne kadar Debreu, belirsizlik başlığını kullanmış olsa da belirsizlik faktörünün bir eksik bilgi unsuru olan riskten farklı olarak ölçülemez olduğunu söyleyen Knight gibi iktisatçıları dikkate alırsak aslında Debreu'nun kullandığı bu kavramın tartışılabilir olduğunu görürüz. Genel denge analizlerinde yer alan eksik bilgi unsuru, risk faktörüne indirgenerek bireysel karar sürecine bir değişken olarak eklenir ki bu belirsizlikten farklı bir kavramdır. (Alada, 2000, 114)

Belirsizlik altında denge ile ilgili önemli bir adım da Arrow ve Hahn'ın birlikte yazdıkları "Genel Rekabetçi Analiz", (General Competitive Analysis) isimli kitapta yer almıştır. Yazarlar öncelikle, malların fiziksel olarak aynı dahi olsalar içinde bulundukları zaman ve konuma göre farklılarmış gibi ele alınabileceklerini vurguluyorlar. (Arrow-Hahn, 1971, 122) Eğer denge modeli zaman içinde genişletilirse mallar için farklı zamanlarda farklı piyasalar ortaya çıkmış olur. Ancak Hahn daha sonra modelin yetersizliğini bilgiye ulaşma maliyeti ve süreçleri, işlemler ve işlem maliyetleri, bekleyiş ve belirsizlik açıkça ve kapsamlı olarak denge kavramına dahil edilmelidir diyerek Arrow-Debreu yaklaşımını eleştirmiştir. (Alada, 2000, 121)

Genel denge yaklaşımında, genel olarak geleceğin bilinmeyişi risk kavramı çerçevesinde ele alınarak, karar verme aşamasındaki bireyin davranışı soyutta ölçülebilir belirsizlik anlayışı ile değerlendirilme yoluna gidilmiştir. Bu şekilde klasiklerden neo klasiklere değişmeyen bir unsur olarak geçen bireylerin geleceği mükemmel olarak gördükleri ve rasyonel olarak tercihte bulundukları yaklaşımı normda korunmuş olmaktadır. (Alada, 2000, 82)

Tam anlamıyla dinamik bir genel denge modelini formüle eden ilk iktisatçının Lindahl olduğu genel kabul görür. Lindahl'ın bu orijinal fikrini Hicks yaymıştır. Walras - Pareto'nun bir periyotlu dengesinden Lindahl - Hicks'in dönemsel (temporary) dengesine geçişte önceki modelin temellerine bireysel beklentiler ilave edilmiştir. Ekonomik ajanlar her zaman periyodunda o anki bilgi ve sübjektif beklentilerine dayanarak gelecek bir periyotta gerçekleşecek bir ekonomik durum için optimal programlarını seçerler. (Nicola, 1994, 12)

Neoklasik çözümlemede zaman faktörünü dikkate alan dinamik denge tahlilleri giderek önem kazanmakla birlikte bazı iktisatçılar, neoklasik denge analizine dinamik bir içerik kazandırma çabalarının zamandan bağımsız sabit bir sosyal yapı varsayımını korudukları bu nedenle de neoklasik analizin, statik denge analizi olmaktan kurtulamadığını vurgulamaktadırlar (Kara, 2001, 28)

Çalışmanın bu bölümünde zamanlı ve dolaylı olarak belirsizlik faktörünün yer aldığı bir modelde genel denge ele alınacaktır. Genel denge analizinde belirsizlik kavramı genel olarak bir risk faktörü olarak ele alınmaktadır. Bununla birlikte yapılan daha yeni çalışmalarla belirsizliğin içsel olması durumu da analize dahil edilmiştir.

### 3.2 Dönemler Arası Denge

Bir anlamda belirsizliğin kaynağı olarak adlandırılabilir zaman kavramının modele ilave edilmesiyle fayda fonksiyonunun ifadesinde de bazı farklılıklar ortaya çıkar. Durağan zaman formunda fayda fonksiyonu gibi ifade edilebilir.

$U(c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^T u_t(c_t)$  Bu fonksiyonda  $u_t(c_t)$ ,  $t$  periyodu içinde yapılan tüketimden elde edilen faydayı gösterir. Zaman kavramıyla birlikte fayda fonksiyonu aşağıdaki ifade edilebilir.  $U(c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^T \alpha^t u_t(c_t)$  Bu durumda aynı fayda fonksiyonunu her periyot için kullanırken  $t$  inci periyodun faydasını iskonto faktörü  $\alpha^t$  ile çarpılır. Böylece gelecekteki faydaların bugünkü değerleri hesaplanmış olur. (Varian, 1992, 358)

Benzer bir şekilde beklenen fayda, Daniel Bernoulli'nin, dünyada  $m$  farklı durumun bulunduğu ve bunların olasılıklarının sırasıyla  $p_1, \dots, p_m$  olduğunda hareketle  $\sum_{i=1}^m p_i U_i(x)$  şeklinde de ifade edilebilir. Bu modelde  $U_i(x)$   $i$  inci durumun gerçekleşmesi halinde  $x$ 'in faydasıdır. (Arrow, 1984, 127-128) Bu anlamda beklenen fayda  $E(U)$ , olanaklı çıktıların faydalarının beklenen değerleri ile ifade edilen belirsizlik altında tercihlerin gösterilmesi olarak da tanımlanabilir.  $E(U) = \sum_{i=1}^m p_i U(x_i)$ . (Eren, Donduran, 2001, 421) Bu modelde tüketici her durumda aynı faydaya fonksiyonuna sahip ve her durumda fayda o durumun gerçekleşme olasılığı ile çarpılmış durumda. Beklenen fayda dönemler arası ya da durumlar arası bir nitelik kazanmış olmaktadır.

Bu kavramlaştırma John von Neumann ve Oskar Morgenstren'in oyun teorisi ile ilgili önemli çalışmalarına "*Theory of Games and Economic Behavior*" dayanmaktadır. Fayda kavramının ele alındığı bölümde, sayısal faydanın olasılık kavramı ile birlikte kullanılması, faydanın sayısal değerlerinin lineer dönüşümlerle belirlenmesi, matematiksel beklentiler gibi kavramlar ele alınarak geliştirilmiş, ek bölümünde ise faydanın aksiyomatik davranışları incelenerek alınarak bir anlamda belirsizlik altında beklentilerin yapısı ele alınmıştır. (von Neumann-Morgenstren, 1990, 15-31 ve 617-632)

Arrow beklenen fayda teoremini formüle eder; olaylar üzerinde reel değerli bir fayda fonksiyonu tanımlamak mümkün ise aşağıdaki özellikleri sağlar.

- $a^1 > a^2$  olması, ancak ve ancak  $U(a^1) > U(a^2)$  olması durumunda mümkündür.
- $U(a) = E\{U[a(s)]\}$  dır. (Arrow, 1984, 180)

Fayda fonksiyonun stokastik durumlarına örnek olarak bir karar alıcının von Neumann-Morgenstren fayda fonksiyonu  $U(\Pi)$  ile gösterildiğini varsayalım. Bu durumda üreticinin amacı, karının beklenen değerini maksimize etmektir.  $E\{U[\Pi(q)|x]\}$  fayda fonksiyonu genellikle lineer olmadığından, *risk-tarafsız* olma durumu ancak özel bir durumdur. Pozitif marjinal fayda her yerde artan ise risk tercih eden bir ekonomik ajan söz konusudur.

$$\frac{\partial U(\Pi)}{\partial \Pi} > 0 \text{ olduğu varsayımı altında}$$

$$\frac{\partial^2 U(\Pi)}{\partial \Pi^2} \begin{cases} > 0, \text{ risk - tercih eden} \\ = 0, \text{ risk - tarafsız} \\ < 0, \text{ riskten - kaçan} \end{cases} \text{ olduğu söylenebilir. (Nguyen, 1997, 9)}$$

Bu tanımlamalar ışığında fayda fonksiyonu  $u^i(x_0^i, x_1^i, \dots, x_S^i) = v^i(x_0^i) + \delta \sum_{s=1}^S \rho_s v^i(x_s^i)$  dır.

Burada  $v^i$  reel değerli, artan, içbükey  $R_+$  'da tanımlı bir fonksiyon,  $\delta_i$ , parametresi  $0 < \delta_i < 1$  olmak üzere, ajanın gelecek tüketimlerinden elde edeceği faydanın bugünkü değere indirgenmesini sağlayan iskonto faktörünü ve  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_s)$  durumların gerçekleşme olasılıkları olmak üzere tüketimin sağladığı fayda,  $t = 0$  zamanında yapılan tüketimin faydası ile  $t = 1$  zamanında yapılan tüketimin beklenen faydasının bugünkü değere indirgenmiş halinin toplamıdır. (Quinzii, Magill, 1996, 51)

Dönemlerarası denge bölümünde, Arrow-Debreu'nun koşula bağlı piyasalarını ve Arrow'un teminat piyasalarını ele alınmıştır. Bununla birlikte konuya bir giriş niteliğinde Malinvaud'un modeli üzerinde durulacaktır. Bu modele göre hane halkının tüketim ve üretimle ilgili kararlarının birden fazla dönemi kapsadığı varsayımı yapılır. Bu şekilde bir anlamda kısa dönem analizleri ile uzun dönem analizleri birleştirilmiş olur. Zaman boyutunun daha aktif bir biçimde denge analizine dahil edilmesiyle, karar alıcıların ufkunun bir tek dönem ile sınırlayan kısıtlayıcı varsayımlardan kurtularak somut zamanda yürütülecek analizlere doğru bir adım atılmış olur. (Akat, 1980, 268)

Hane halkının (ailelerin) ekonomiyi içinde bulunan  $t = 1$  döneminde daha sonraki dönemlerle ilgili hesaplarını yapabilmeleri için daha sonraki dönemlerde yapılacak

mübadelelerin bu dönemden bağlanmasına olanak veren kurum için alivre piyasalar terimi de kullanılmaktadır. Alivre piyasanın anlamı bir alıcı ve satıcının karşılıklı olarak belirli malı belirli bir fiyattan ve belirli bir tarihte alıp satmayı kabul etmeleridir. Bu şekilde malın teslim edildiği dönemdeki fiyattan bağımsız olarak, mübadele önceden yapılan kontrat çerçevesinde gerçekleştirilir. Doğal olarak alivre piyasada satışın yapılması ile teslim anı arasında geçen sürede malın fiyatı yükselmişse alıcı, düşmüşse satıcı karlı bir iş yapmış olacaktır. Modele göre dengede herşey birinci dönemde gerçekleşmektedir. Tüm mallar için alivre piyasaların varlığı ailelere gelecekle ilgili bütün kararlarını bugün almak olanağı vermektedir. (Akat, 1980, 270-288). Koşullu mallar piyasasının kolektif risklere karşı önemli bir rol oynadığını söyleyen **Malinvaud**, bireylerin, çeşitli durumların olasılıklarını bildiklerini ve buna bağlı olarak bu durumlarda elde edecekleri faydaları ağırlıklandırabildiklerini belirtmektedir. Malinvaud'a göre bireyler gerçek olasılıkları bilmemelerine rağmen sübjektif olasılıklara sahiplerdir ve sübjektif olasılıkların herkes tarafından aynı şekilde biçimlendirilirler. (Malinvaud, 1973)

Zaman ve gelecek piyasalarının dahil edildiği bir genel denge modelinde bir mal üç soru ile tanımlanır. Bu sorular ne, nerede ve ne zamandır. Walras'ın müzayedecisi ile kişiselleştirilen piyasa mekanizmasında yalnızca bir karşılaşma (buluşma) olur ve her tarihe ait bütün mallar için eşzamanlı olarak denge sağlanır. Şu andan sonlu bir ufka kadar her hane halkı bir tek bütçe sınırlamasına sahipken, firmalar da yine aynı zamansal süreç içinde girdileri için yaptıkları harcamalar ve kazançları için tek bir kar hesaplanmasına sahiptir. (Starr, 1997, 180)

Gerek Malinvaud'un tanımladığı dönemlerarası denge modeli gerekse, Arrow-Debreu (1954) ve Debreu (1959) ele alındığında Arrow-Debreu genel denge modelinin ve buna dayanılarak aşağıda ele alınacak Arrow-Debreu koşula bağlı piyasalarında gelecekteki olası piyasalar kümesinin tümü için başlangıç periyodunda mükemmel öngöründe bulunulabildiği varsayılır. Bu yüzden piyasanın bir kez açılması yeterlidir. İkinci bölümün giriş kısmında da belirtildiği gibi bu analiz olasılık ve istatistik teorisindeki beklenen değer kavramına karşılık gelmektedir.

Dönemlerarası genel denge modelinin temel özelliklerini bu şekilde belirledikten sonra. Dönemlerarası optimizasyon kavramına kısaca değinilecektir.

### 3.2.1 Dönemler Arası Optimizasyon

Öncelikle iki dönemli bir modeli ele alıp sonra bunu çok dönemli bir modele genişletelim. İki periyodun her birinde yapılan tüketimi  $(c_1, c_2)$  ile gösterelim. Tüketici birinci periyotta

$w_1$  başlangıç donanımına sahip olsun ve servetini iki varlığa (asset) yatırabilsin. Varlıklardan biri belirli bir getiriye  $R_0$  diğeri tesadüfi  $\tilde{R}_1$  bir getiriye sahip olsun. Bu tüketicinin, birinci periyotta verdiği bir kararla  $c_1$  kadar tüketim yaptıktan sonra kalan servetinin  $x$  oranını riskli varlığa ve  $1-x$  oranını da belirli getirisi olan varlığa yatırdığını varsayalım. Bu durumda tüketicinin portföyünde  $(w_1 - c_1)x$  liralık  $\tilde{R}_1$  getirili ve  $(w_1 - c_1)(1-x)$  liralık  $R_0$  getirili varlığı var. Bu durumda tüketicinin ikinci periyottaki serveti;

$$\tilde{w}_2 = (w_1 - c_1)[\tilde{R}_1 x + R_0(1-x)] = (w_1 - c_1)\tilde{R} \text{ dır.}$$

Burada  $\tilde{R} = [\tilde{R}_1 x + R_0(1-x)]$  ifadesi tüketicinin portföy getirisidir. Modelde portföy getirisi belirsiz olduğu için tüketicinin ikinci dönem serveti ve buna bağlı olarak da ikinci dönem tüketimi de belirsizdir. Bu noktada tüketici için bir fayda fonksiyonu

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \alpha Eu(\tilde{c}_2) \text{ şeklinde tanımlanabilir.}$$

Burada  $\alpha < 1$  olmak üzere iskonto faktörüdür.  $V_1(w_1)$  başlangıç periyodunda  $w_1$  servetine sahip olan tüketicinin ulaşabileceği maksimum fayda olsun.

$$V_1(w_1) = \max_{c_1, x} u(c_1) + \alpha Eu[(w_1 - c_1)\tilde{R}]$$

Bu ifadenin maksimum değerini modelde tüketicinin belirleyebileceği iki değişken olan  $c_1$  ve  $x$  göre türevlerini alarak birinci mertebe koşullardan

$$u'(c_1) = \alpha Eu'(\tilde{c}_2)\tilde{R}$$

$$Eu'(\tilde{c}_2)(\tilde{R}_1 - R_0) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitliklerden birincisini dönemler arası optimizasyon koşulu olarak değerlendirilebilir. Bu koşulun ifadesi birinci periyottaki tüketimin marjinal faydasının ikinci dönemdeki tüketimin beklenen marjinal faydasının indirgenmiş durumuna eşit olması gerektiğidir. Portföy optimizasyon koşulu olarak adlandırılan diğer eşitlik ise güvenli varlıktan riskli varlığa küçük miktarda bir parasal hareketin yarattığı beklenen marjinal faydanın sıfır olduğudur. Bu iki eşitlikte iki bilinmeyen  $c_1$  ve  $x$  çözülebilir.

Modeli  $T$  periyot için ele aldığımızda  $t$  anında  $w_t$  servetine sahip olan tüketicinin bu servetin  $x_t$  oranını riskli varlığa yatırdığını varsayalım. Bu tüketicinin  $t+1$  periyodundaki

serveti şu şekilde ifade edilebilir.  $\tilde{w}_{t+1} = (\tilde{w}_t - c_t)\tilde{R}$  Önceki modele benzer şekilde  $\tilde{R} = [\tilde{R}_1 x_t + R_0(1 - x_t)]$   $t$  ve  $t+1$  periyotları arasındaki portföy getirisini ifade eden eşitliği vardır. Bu dönemlerarası optimizasyon probleminin çözümünde dinamik programlama metodu kullanılır. İki dönemli modelle benzer şekilde maksimizasyon problemini

$$V_{T-1}(w_{T-1}) = \max_{c_{T-1}, x_{T-1}} u(c_{T-1}) + \alpha E u[(w_{T-1} - c_{T-1})\tilde{R}] \quad \text{şeklinde tanımlanabilir.}$$

Buradan birinci mertebe koşulları elde edilir.

$$\begin{aligned} u'(c_{T-1}) &= \alpha E u'(\tilde{c}_T) \tilde{R} \\ E u'(\tilde{c}_T)(\tilde{R}_1 - R_0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Varian, 1992, 358})$$

Zamanlı modelde portföy seçimi ve menkul kıymet (aktif) fiyatlandırması için kendini yineleyen yapıda dinamik optimizasyon problemi çözümüne dayanan, dinamik programlama yöntemleri kullanılmaktadır. (Duffie, 1996, 47) Dinamik optimizasyon; varyasyon hesabı, optimal kontrol teorisi ve dinamik programlama (Bellman) gibi alternatif metotların kullanımı yolu ile çözülebilir. (Chiang, 1992, 17-22) Burada ele alınacak olan Bellman fonksiyonunu

$$V_s(x_s) = \max_{u_s} F(s, x_s, u_{s+1}) + V_{s+1}(g(t, x_t, u_t)) \quad \text{şeklinde karakterize etmek mümkündür;}$$

Belmann denklemi bu şekilde tanımlandığında birinci mertebe koşullar için de

$$F_u(s, x_s, u_s) + V'_{s+1}(g(t, x_t, u_t))g_u(t, x_t, u_t) = 0 \quad \text{ifadesi yazılabilmektedir. (Hassler, 1998, 4)}$$

Bellman denkleminin birinci mertebe koşulları genellikle stokastik Euler denklemi olarak adlandırılırlar ve menkul değer fiyatları dengesini karakteristiğini gösterirler.  $d_t > 0$  indirgeme iskonto katsayısı olmak üzere, tüketime bağlı olarak refahın ifadesi

$$W_t^c = \frac{W_{t-1}^c + e_{t-1} - c_{t-1}}{d_{t-1}}, t \geq 1. \quad \text{dir. Bu aktör için fayda maksimizasyonu problemini ise}$$

$\max U(c)$  dir ve  $c_T \leq W_T^c + e_T$  kısıtına bağlı olarak çözülür. Fayda fonksiyonu daha önce ele

$$\text{aldığımız gibi beklenen değere bağlıdır. } U(c) = E \left[ \sum_{t=0}^T u_t(c_t) \right]. \quad \text{Burada } u_t \text{ kesin artan ve her } t$$

için sürekli bir fonksiyondur. O anki servet  $W_t^c = w$  olarak verildiğinde, herhangi bir  $t$  anında geriye kalan artan faydayı maksimize etmek için şu formül kullanılabilir.

$$V_t(w) = \sup_{c \in L_+} \sum_{s=t}^T u_s(c_s) \quad (W_t^c = w \text{ kısıtı altında}) \quad \text{Yukarda belirtilen servetin dinamik ifadesi}$$

$W_t^c = \frac{W_{t-1}^c + e_{t-1} - c_{t-1}}{d_{t-1}}, t \geq 1$ . ve  $c_t \leq W_t^c + e_t$  olarak ifade edilir. Eğer bütçe-olanaklı bir

tüketim mümkün değilse  $V_t(w) = -\infty$  dir.

Buradan  $V_T(w) = u_T(w + e_T)$  dir, ve  $t < T$  olmak üzere Bellman eşitliği

$$V_T(w) = \sup_{c \in R_+} u_t(\bar{c}) + V_{t+1}\left(\frac{w + e_t - \bar{c}}{d_t}\right) \text{ dir. Buradan hareketle optimal tüketim politikası, } C_t(w)$$

Belmann eşitliğinin çözümünü göstermek üzere ve  $t < T$  ve  $C_T(w) = w + e_T$  ifadesi

$c_t = C_t(W_t^c)$  olarak gösterilir. Bellman denkleminin birinci mertebe koşullarını şu şekilde

yorumlamak mümkün olabilir. Her  $t$  için  $u_t$ 'nin kesin konkav ve pozitif bölgede

diferensiyellenebilir olduğunu varsayalım. Optimal tüketim politikası  $c^*$ 'nin kesin pozitif

olduğu varsayımı altında  $W^*$ 'nin  $c^*$  ile ilişkili servet süreci olarak tanımlayalım.  $V_t$  herhangi

bir  $t$  için, kesin konkav ve  $W_t^*$ 'de sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda

$V_t'(W_t^*) = u_t'(c_t^*)$  yazılabilir. Bellman fonksiyonunun birinci mertebe koşullarından bir

periyodun indirgeme (iskonto) oranı  $d_t = \frac{u_{t+1}'(c_{t+1}^*)}{u_t'(c_t^*)}$  dir. Buradan hareketle, bir  $T > t$ 'de

vadesi dolacak birim risksiz tahvilin  $t$  zamanındaki fiyatı  $P_{t,T} \equiv \frac{u_T'(c_T^*)}{u_t'(c_t^*)}$  olarak tanımlanabilir.

Bu tüketimin iki zaman arasındaki marjinal ikame oranıdır. (Duffie, 1996, 47-49)

### 3.2.2 Finans Ekonomilerinin Özellikleri

Bu bölümde belirsizlik ve zaman analizinin en yoğun olarak kullanıldığı genel olarak finans piyasaları olarak ifade edilebilecek piyasaların temel özelliklerini bir dizi varsayım ile ele alınır. Finansal piyasaların dengesi esasında Arrow-Debreu dengesi olarak tanımlandığından, bu varsayımları genelleştirilebilir.

Tüketim kümesinin, mal uzayının negatif olmayan kadranında yer aldığı,  $X^i = R_+^n$  ve  $i$  inci ajan için (ekonomide karar alıcı) tüketim kümesi üzerinde tam, geçişli ve sürekli bir tercih önsıralamasının tanımlı olduğunu varsayarsak,

$u^i : R_+^n \rightarrow R$  fayda fonksiyonudur.

**Varsayım 3.1. Güçlü Monotonluk:**

- i.  $u^i : R_+^n \rightarrow R$  Fayda fonksiyonu  $R_+^n$  uzayında sürekli ve
- ii. Herhangi  $x, x' \in R_+^n$  için  $x \geq x'$  ve  $x \neq x'$  için  $u^i(x) > u^i(x')$  dir.

**Varsayım 3.2. Güçlü Monotonluk Ve Kesin İçbükeyimsilik**

Fayda fonksiyonun birinci varsayımı sağlamasının yanında, her  $x, x' \in R_+^n$  için,  $0 < \lambda < 1$  olmak üzere;

$$u^i(\lambda x + (1 - \lambda)x') > \min(u^i(x), u^i(x')) \text{ dir.}$$

Bu varsayım sürekli talep fonksiyonları ile çalışmak istendiğinde kullanılır.

**Varsayım 3.3. Düzgün Tercihler (Smooth Preferences)**

Diferensiyellenebilir talep fonksiyonlarına ihtiyacımız olduğunda bu teoreme başvurulabilir.

$R_{++}^n$  mal uzayının pozitif kadranını gösterir.

$$R_{++}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid x_j > 0, j = 1, \dots, n\}$$

Eğer,  $u^i$  fonksiyonun  $k$  ıncı dereceye kadar tüm kısmi türevleri sürekli ise  $u^i$  yerine  $R_{++}^n$  uzayında  $C^k$  kullanılabilir. Bu özelliğin tüm  $k$  değerleri için geçerli olması durumunda  $C^\infty$  sembolü kullanılır.

- i.  $u^i : R_+^n \rightarrow R$  sürekli bir fonksiyon ve  $R_{++}^n$  uzayında  $C^\infty$  tanımlı.

$$\text{ii. } U^i(x) = \{x' \in R_+^n \mid u^i(x') \geq u^i(x)\} \subset R_{++}^n, \forall x \in R_{++}^n.$$

Burada kayıtsızlık eğrilerinin pozitif mal tomarlarından geçtiği, ve negatif olmayan kadranın sınırlarını kesmediği iddia ediliyor. Bu iktisadi ajanın maksimizasyon problemini tüketim kümesinin sınırında çözmesine engel olduğunu iddia eder.

$$\text{iii. Her } x \in R_{++}^n \text{ için, } \left( \frac{\partial u^i(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^i(x)}{\partial x_n} \right) \in R_{++}^n$$

$$\text{iv. } \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial u^i(x)}{\partial x_j} = 0 \text{ olmak üzere, her } x \in R_{++}^n \text{ için ve } h \neq 0 \text{ iken } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 u^i(x)}{\partial x_j \partial x_k} < 0 \text{ dir.}$$

Bu madde her pozitif tüketim vektörünün  $u^i$  fayda fonksiyonunun ikinci dereceden türevinin karesel bir formu şeklinde yazılabileceğini belirtmektedir. (Quinzii, Magill, 1996, 50)

Bu son varsayım 1972'de Debreu tarafından standart genel denge modelindeki mallar için elde edilen diferensiyellenebilen talep fonksiyonları kullanılarak ortaya konmuştur ve finans piyasaları modelinde de aynı rolü oynamaktadır.

**Tanım 3.1:**  $x = (x^1, \dots, x^I)$ ,  $\mathfrak{I}(u, w)^1$  ekonomisi için bir tahsis olsun aşağıdaki iki koşulun sağlanması durumunda Bu tahsis her ajan için yapılabilir.

$$x^i \in R_+^n, i = 1, \dots, I$$

$$\sum_{i=1}^I (x^i - w^i) \leq 0$$

Buradan hareketle ulaşılabilir tahsisler kümesi tanımlanabilir.

$$F = \left\{ x \in R_+^{nI} \mid \sum_{i=1}^I (x^i - w^i) \leq 0 \right\}$$

F kümesi toplam donanımlara bağlıdır.  $W = \sum_{i=1}^I w^i$

**Tanım 3.2:**  $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^I)$  dağıtımını aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda Pareto optimumdur.

- i.  $\bar{x} \in F$
- ii. Öyle bir  $x = (x^1, \dots, x^I) \in F$  yoktur ki en az bir  $i$  için  $u^i(x^i) \geq u^i(\bar{x}^i)$  koşulunu sağlasın. (Quinzii, Magill, 1996, 49-50)

### 3.2.3 Arrow – Debreu Koşula Bağlı Piyasalarında Genel Denge

Ekonomik açıdan önemli etkiler yaratabilecek ve ajanların kararlarını etkileyebilecek, hava durumu, sağlık, teknolojik değişimler gibi bir çok olay açık bir şekilde öngörülemez, işte bu noktada belirsizlik devreye girer. Genel denge literatüründe; belirsizlik gelecekte ne olacağı bilinmeyen ancak ne olabileceğinin bilinebileceği bir durum olarak tanımlanır. Bu yüzden de bir olası durumlar ağacı kurarak muhtemel tüm durumların önceden bilinebileceği ancak

<sup>1</sup> Her tüketici için başlangıç donanımları ve fayda fonksiyonlarından oluşmuş ikililerin oluşturduğu küme finans değişim ekonomisi olarak tanımlanır ve  $\mathfrak{I}(u, w)$  ile gösterilir.

bunlardan hangilerinin gerçekleşeceğini bilinmediği bir sistem önerilir. Bu ağaçta gösterilecek olası belirsiz olaylar zaman periyotlarının sonlu sayıda olduğu varsayımına dayanarak, her zaman sonlu sayıda olacaktır. (Starr, 1997, 185-186)

Arrow-Debreu modelinde dönemlerarası mükemmel öngörünün yapılabildiği, başlangıç zaman periyodundan koşula bağlı gelecek piyasalarına ulaşılabilceği bir dünya tasvir edilmiştir. Bu modelde iktisadi ajanların yapması gereken tek şey koşula bağlı gelecek piyasalarına ait mallar için başlangıç zamanında harcamalarını yapmak ve gelişmeleri seyretmektir. Bu mükemmel öngörü sayesinde ajanlar harcama ve satışlarını başlangıç periyodunda gerçekleştirirler. Sözleşmeler bir kere başlangıç periyodunda yapıldıktan sonra piyasaların açık kalmasına gerek yoktur. Buna dayanarak Arrow-Debreu modelinde piyasalar sadece bir kere açılırlar. (Açılışlar bile Pareto optimalliği ve karşılıklı fayda sağlayacak alışverişler mümkün olmayacaktır)

**Tanım 3.3:** Koşula bağlı olarak yapılan bir kontrat, belirsiz  $s$  durumunun gerçekten meydana gelmesi koşuluyla anlaşmaya konu olan malı, belirlenmiş bir zamanda teslim etmeyi taahhüt eder,  $s$  durumu gerçekleşmezse herhangi bir işlem yapılmaz. Bu alışverişin başlangıç periyodunda hesaplanmış bedeli yine başlangıç periyodunda yani 0 zamanında ödenir.

Koşula bağlı piyasalarda herhangi bir tüketim akımı

$$\sum_{s=0}^S \pi_s x_s^i \leq \sum_{s=0}^S \pi_s w_s^i \text{ koşulunu sağlamalıdır.}$$

Ajanların tercihlerinin her zaman monotonik olduğu varsayımı altında, ajan her zaman tüm gelirini harcar. Burada  $i$  inci ajanın bütçesini aşağıdaki gibi iki farklı şekilde ifade edilebilir.

Bu denklemlerde  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_S)$  koşullu piyasa fiyatları vektörüdür.

$\pi \in R^n, w^i \in R^n$  olmak üzere  $\pi w^i = \sum_{s=0}^S \pi_s w_s^i$  yazılabileceğine göre, koşullu piyasanın bütçe

kümesi şeklinde ifade edilebilir.

$$B(\pi, w^i) = \left\{ x^i \in R_+^n \left| \sum_{s=0}^S \pi_s x_s^i = \sum_{s=0}^S \pi_s w_s^i \right. \right\}$$

$$B(\pi, w^i) = \left\{ x^i \in R_+^n \left| \pi(x^i - w^i) = 0 \right. \right\}$$

**Tanım 3.4:** Bir  $\mathfrak{I}(u, w)$  ekonomisi için koşullu piyasa dengesini sağlayan  $(\bar{x}, \bar{w}) \in R_+^{nI} \times R_+^n$  kümesi şu şartları sağlamalıdır.

$$\bar{x}^i \in \max \{u^i(x^i) \mid x^i \in B(\bar{\pi}, w^i)\}$$

$$\sum_{i=1}^I (\bar{x}^i - w^i) = 0$$

burada fayda fonksiyonun bütçe kısıtı altında maksimizasyonu söz konusudur. (Quinzii, Magill, 1996, 49-54)

Koşullu mal piyasasında denge, belirli gelecek piyasası dengesi şeklinde oluşur. Arz talep eşitliği sağlanana kadar fiyat ayarlaması burada da söz konusudur. Hane halkının istikrarlı bir tüketim için koşullu mallar seçmesini temin etmenin yolu bu malların tesliminin olaylardan bağımsız olarak aynı tüketim planına göre yapılmasıdır. (Starr, 1997, 188)

Koşullu mal piyasası dengesi, ajanların fiyat alıcı oldukları rekabetçi bir denge örneğidir. Her bir ajan koşullu  $s$  kontratlarından istediği kadarını bunların  $\pi_s$  fiyatlarını etkilemeden satın alabilir. Ajanların tercihleri kesin monoton olduğundan, eğer ajanların maksimizasyon problemlerinin bir çözümü olacaksa, kontratların fiyatlarının her durum için pozitif olması gereklidir. Bu tür bir ekonomide denge durumunda serbest kontratlar bulunamaz.

**Özellik:** Fayda fonksiyonunun varsayım 3.1'i sağlaması durumunda, aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

i.  $\max \{u^i(x^i) \mid x^i \in B(\bar{\pi}, w^i)\}$  probleminin çözümü vardır.

ii.  $\bar{\pi} \in R_{++}^n$

iii.  $B(\bar{\pi}, w^i)$  bütçe kümesi kompaktır.

Bu özelliğin sağlandığını göstermek için bazı  $s$  durumları için  $\pi_s = 0$  olduğunun varsayılması durumunda, monotonluk koşulları gereği  $s$  durumu sınırsız olur ve bu da (i) maddenin çözümü olmasını engeller.  $i$  inci ajanın gelirini  $m^i = \sum_{s=0}^S \bar{\pi}_s w_s^i$  ile tanımlandığında

$x^i \in B(\bar{\pi}, w^i)$  olduğuna göre bunun anlamı  $0 \leq x_s^i \leq \frac{m^i}{\bar{\pi}_s}$  olduğudur ki bu da  $B(\bar{\pi}, w^i)$  bütçe

kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. Öte yandan  $\bar{\pi}x^i$  eşlemesi süreklidir ve  $B(\bar{\pi}, w^i)$  kümesi kapalı ve kompaktır. Bir sürekli fonksiyonunun kompakt bir kümede bir maksimuma sahip olduğunu önceki bölümlerde Weierstrass teoremi ile gösterilmişti buradan hareketle maksimum probleminin çözüme sahip olduğu da söylenebilir. (Quinzii, Magill, 1996, 49-56)

Koşullu piyasalarda dengenin varlığı, birbiriyle ilişkili şu iki problemin eşzamanlı çözümüne bağlıdır.

- i. Sabit olarak alınan  $\bar{\pi}$  fiyatında her tüketici fayda maksimizasyonu sağlayan bir  $\bar{x}^i$  talep vektörü bulabilmelidir.
- ii. Bu fiyat derneşik talep ve toplam arzın eşitliğinden elde edilebilmelidir.

**Teorem 3.1: ( Koşullu Piyasalarda Dengenin Varlığı )** Varsayım 3.2. nin sağlanması koşuluyla,  $\sum_{i=1}^I w^i \in R_{++}^n$  sağlanıyorsa, bir değişim ekonomisi olan  $\mathfrak{I}(u, w)$  değişim ekonomisi bir koşullu piyasa dengesine sahiptir.

Koşullu piyasa ekonomisinde denge ispatı da pek çok yönüyle ilk bölümde ele alınan genel denge ispatı ile benzerlikler göstermektedir.  $i$ . ajanın fayda fonksiyonunun kesin quasi konkavlık özelliği göstermesi neden iyle maksimum problemi, bir talep fonksiyonu tanımlanmasını sağlar.  $f^i : R_{++}^n \rightarrow R^n$  Bu talep fonksiyonu kullanılarak eşitliği yazılabilir.

$$f^i(\pi) = \max \{ u^i(x^i) \mid x^i \in B(\bar{\pi}, w^i) \} \quad i = 1, \dots, I$$

Bu noktada bir derneşik aşırı talep fonksiyonu tanımlayabiliriz.  $Z : R_{++}^n \rightarrow R^n$  olmak üzere

$$Z(\pi) = \sum_{i=1}^I (f^i(\pi) - w^i) \text{ dir,}$$

bu aşırı talep fonksiyonundan elde edilen  $(\bar{x}, \bar{\pi})$  ikilisi ancak ve ancak aşağıdaki koşulları sağlamaları durumunda koşullu piyasanın dengesini verirler.

$$\bar{x} = (f^1(\bar{\pi}), \dots, f^I(\bar{\pi}))$$

$$Z(\bar{\pi}) = 0$$

Yine varsayım 3.2'yi kullanarak, bireysel talep fonksiyonu  $f^i$  nin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu söyleyebiliriz.

- i.  $f^i(\pi) \geq 0$  her  $\pi \in R_{++}^n$  için
- ii.  $f^i$ ,  $R_{++}^n$  'de sürekli
- iii.  $f^i(\alpha\pi) = f^i(\pi)$  her  $\alpha > 0$  ve her  $\pi \in R_{++}^n$  için

(önceki bölümde gördüğümüz gibi talep fonksiyonu sıfırıncı dereceden homojendir)

iv.  $\pi f^i(\pi) = \pi w^i$  her  $\pi \in R_{++}^n$  için

v.  $\pi^\nu \in R_{++}^n$  olmak üzere  $\pi^\nu \rightarrow \pi \in \partial R_{++}^n$  ve eğer  $\pi w^i > 0$  ise  $\nu \rightarrow \infty$  iken  $\|f^i(\pi^\nu)\| \rightarrow \infty$

olmak üzere,  $x$  vektörünün normu  $\|x\| = \left( \sum_{s=0}^S x_s^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  dır.  $\partial R_{++}^n$  pozitif ortantın sınırındır.

ii ve v maddelerinin ispatı dizisel kompaktlık özelliğine dayanır.  $R^n$  uzayındaki her sınırlı ve sonlu dizi bir yakınsak alt diziye sahiptir. Aslında v. özelliğin anlamı bazı malların fiyatlarının çok ucuz duruma gelmesiyle bu malalra olan talebin artacağıdır.

Aşırı talep fonksiyonunun özellikleri;

i. Her  $\pi \in R_{++}^n$  için  $Z(\pi) \geq -w$  (alttan sınırlılık)

ii.  $Z, R_{++}^n$  'de sürekli (süreklilik)

iii.  $Z(\alpha\pi) = Z(\pi)$  her  $\alpha > 0$  için ve her  $\pi \in R_{++}^n$  için (homojenlik)

Bu özellik genel denge modelinin karakteristik özelliğidir. Herbiri bireye ait talep ve dolayısıyla toplam aşırı talep sadece görelî fiyatlara bağlıdır. Fiyat seviyesini belirlemek için fiyat normalizasyonunu yapılabilir.

iv.  $\pi Z(\pi) = 0$  bütün  $\pi \in R_{++}^n$  'ler için (Walras Kanunu)

v. Eğer  $\pi^\nu \in R_{++}^n$  ise öyleki  $\pi^\nu \rightarrow \pi \in \partial R_{++}^n$ ,  $\pi \neq 0$ , şu halde  $\nu \rightarrow \infty$  iken  $\|f^i(\pi^\nu)\| \rightarrow \infty$  dur (sınır davranışı)

Dengenin matematiksel ispatı için  $\sum_{s=0}^S \pi_s^2 = 1$  normalizasyon işlemi uygulanabilir. Bu işlemi

birim çember üzerinde yapılan bir normalizasyon işlemi olarak düşünmek mümkün olabilir. Normalize edilmiş fiyat vektörünü başlangıçlı orjinde olan bir yarıçap olarak ele alınırsa bu yarıçapın birim küreyi kestiği noktadan bir çoklu düzlem de küreye teğet olacaktır. Çoklu düzlem ile fiyat vektörünün (yarıçap) kesiştikleri noktaya  $\hat{\pi}$  diyelim.  $n = S + 1$  olmak üzere  $R^n$  uzayında  $n-1$  boyutlu birim küreyi tanımlayalım

$$S^{n-1} = \left\{ \pi \in R^n \mid \sum_{j=1}^n \pi_j^2 = 1 \right\} \text{ dir.}$$

$g(\pi_1, \dots, \pi_n) = \sum_{j=1}^n \pi_j^2 = 1$  şeklinde bir fonksiyon tanımlandığında kürenin yüzey derecesi,  $g(\pi) = 1$  dir. Teğet çoklu düzlemin, birim küre ile teğet olduğu  $\hat{\pi}$  noktasında denklemi,  $\nabla g(\hat{\pi})(\pi - \hat{\pi}) = 0$  koşulunun sağlanması ancak  $(\pi - \hat{\pi}) = 0$  olması halinde mümkündür ki bunun için de  $\hat{\pi}\pi = 1$  olmalıdır.<sup>2</sup>

Orjinden geçen ve çoklu düzleme paralel bir teğetsel uzay tanımlanabilir

$$T_{\hat{\pi}} = \{z \in R^n \mid \hat{\pi}z = 0\}.$$

Buna göre Walras yasasına göre derneşik aşırı talep fonksiyonunun  $Z(\hat{\pi})$  bu teğetsel uzay üzerinde yer alması gerekir.

$v: S^{n-1} \rightarrow R^n$  şeklinde bir eşleme tanımlayalım öyleki  $v(\pi) = T_{\pi}$  ve her  $\pi \in S^{n-1}$  olsun, bu durumda yapılan eşlemeye bir *vektör alanı*<sup>3</sup> denir. Walras yasası,  $Z: S_{++}^n \rightarrow R^n$  derneşik aşırı talep fonksiyonunun, pozitif birim küre üzerinde bir vektör alanı tanımladığı anlamına gelir. Negatif olmayan birim küre üzerindeki vektör alanı,  $\partial S_+^{n-1}$  sınırı üzerinde bir iç noktalama (inward pointing) olarak adlandırılır. Eğer her  $\pi \in \partial S_+^{n-1}$  için  $\pi_j = 0$  ile birlikte  $v_j(\pi) \geq 0$  ise  $v(\pi)$  vektörünün yeri  $S_+^{n-1}$ 'nin iç bölgesindeki bir  $\pi$  noktasında belirlenir.

Sıfır fiyatında sınırsız olduğu için aşırı talep fonksiyonun kendisi bu sınır üzerinde tanımlı değildir. Dahası tanımlanmış varsayımlarımıza göre mallardan birinin fiyatı sıfıra yakınsama eğilimi gösterdiğinde bu malın aşırı talebi çok büyük bir değere yakınsar.

$$\pi_j \rightarrow 0, Z_j \rightarrow \infty$$

Çeşitli malların fiyatları aynı anda sıfıra yakınsama eğilimi gösterdiklerinde belki her biri için aşırı talep sonsuza yakınsamayabilir ancak aşırı talep bu mallardan en az biri için sonsuza yakınsar. Aşırı talep fonksiyonunun bu davranışı bazı fiyatlar sıfıra gittiğinde aşırı talep fonksiyonunun sınırın yakınında belirlenebileceği anlamına gelir. Böylece  $S^{n-1}$  üzerinde

<sup>2</sup>  $\nabla g(\hat{\pi}) = \frac{\partial g(\pi_1)}{\partial \pi_1}, \dots, \frac{\partial g(\pi_n)}{\partial \pi_n}$   $g$  fonksiyonun  $\hat{\pi}$  noktasındaki kısmi türevlerinden oluşan gradyendir.

<sup>3</sup> Vektör alanı kavramını 2.2.6. bölümde ele alacağız.

tanımlı  $\tilde{Z}$  vektör alanı tanımlanmış olur. Bu vektör alanı ancak derneşik aşırı talep fonksiyonu sıfıra eşit olduğunda sıfır olur ve sınırda bir iç işaretlemidir. Sınırın küçük komşuluları dışında  $Z$  ile  $\tilde{Z}$  aynıdır. Bu vektör alanı  $Z$ 'nin sıfır olduğu değerleri içermez. Bir denge fiyat vektörünün varlığı, negatif olmayan birim küre üzerinde, sürekli, iç işaretleme vektör alanlarının sıfır değerine sahip olmasına bağlıdır.

Eğer  $v: S^{n-1} \rightarrow R^n$ , negatif olmayan birim küre üzerinde, sürekli iç işaretleme vektör alanı ise, öyle bir  $\bar{\pi} \in S^{n-1}$  vardır ki,  $v(\bar{\pi}) = 0$  dır. Bu teze göre sadece vektör alanının, bölgenin sınırındaki davranışlarına dayanarak, onun bu bölgenin içindeki özellikleri ile ilgili sonuçlara ulaşılabilir.

Koşullu piyasa dengesinin pareto optimalliği ele alındığında; Arrow – Debreu'nun koşullu piyasa sistemi Pareto optimal bir kaynak tahsisi için ideal bir mekanizma meydana getirmiş olur.

**Teorem 3.2:(Koşullu Piyasa Dengesinin Pareto Optimalliği)**  $\mathfrak{Z}(u, w)$  ekonomisinin 2.1 varsayımını (güçlü monotonluk) varsayımını sağladığını kabul edelim. Eğer  $(\bar{x}, \bar{\pi})$  koşullu piyasa dengesi ise  $\bar{x}$  tahsisi (dağılımı) Pareto oprimaldir.

$\bar{x}$ 'nin Patero optimal olmadığı varsayımından yola çıkarsak öyle bir  $x \in F$  olmalıdır ki  $u^i(x^i) \geq u^i(\bar{x}^i)$  koşulunu sağlasın. Bununla birlikte,  $\bar{x}^j$ ,  $j$ 'inci ajan için bir optimal olduğundan bazı  $j$ 'ler için  $u^j(x^j) > u^j(\bar{x}^j)$  yazılabilir. Bu durumda  $x^j \notin B(\bar{\pi}, w^j)$  ya da buna eşdeğer olarak  $\bar{\pi}x^j > \bar{\pi}w^j$ .  $i \neq j$  için  $u^i$  monotonik olduğundan  $\bar{\pi}x^i > \bar{\pi}w^i$  yazılabilir.

Bundan dolayı  $\bar{\pi} \sum_{i=1}^I x^i > \bar{\pi} \sum_{i=1}^I w^i$  sonucuna ulaşılır ki bu durum  $x \in F$  önkabulü ile çelişir.

Dolayısıyla  $\bar{x}$  Pareto optimum olmalıdır<sup>4</sup>. (Quinzii, Magill, 1996, 60)

Yukarıda model kesikli zaman analizi ile ele alınmıştır. Literatürde kesikli zaman yaklaşımı yerine sürekli zaman yaklaşımını kullanan çalışmalarda vardır. Temel yapının değişmediği bir sürekli zaman yaklaşımında, menkul değerler piyasasının dengesi sürekli bir zaman kümesinde ele alındığında Arrow – Debreu dengesini şu şekilde ifade etmek mümkün olabilir.

$P(c): L \rightarrow R$  sıfır olmayan lineer bir fiyat fonksiyonu ve tüketim sürecinin  $\sum_{i=1}^m c^i \leq \sum_{i=1}^m e^i$

koşulunu sağladığından olanaklı olduğunu düşünelim. Arrow Debreu dengesi fiyat

<sup>4</sup> Koşullu piyasa ekonomisi dengesinin Pareto etkinliği diferensiyellenebilirlik özelliği kullanılarak da ifade edilebilir. (Quinzii ve Magill, 1996, 60-62)

fonksiyonu  $\Pi$  ve olanaklı dağılımları (tahsisleri) içerir. Bu durumda her  $i$  için  $c^i$ 'nin çözümü  $\Pi(c) \leq \Pi(e^i)$  kısıtı altında  $\sup_{c \in L_+} U_i(c)$  probleminin çözümüdür. Eğer  $\Pi(c): L \rightarrow R$ 'ye

fiyat fonksiyonu, doğrusal ve kesin artan ise  $L$ 'de tek bir  $\Pi$  vardır ve

$$\Pi(c) = E \left( \int_0^T \pi_t c_t dt \right) \text{ şeklinde gösterilir. (Duffie, 1996, 221)}$$

### 3.2.4 Finansal Piyasalarda Denge

Koşullu piyasalar ele alınırken söz konusu kontratların, tüm olası durumları içerdiği varsayımı yapılır, oysa ters seçim (adverse selection) ya da ahlaki davranış (moral hazard) gibi olasılıklar dikkate alınamadığı için bir anlamda tüm koşulları tanımlamak zordur. Bu durum rasyonelliğin sınırlandırılması olarak da düşünülebilir. Bu tür riskler farklı finansal kontratlar tarafından içerilebilirler.

Finansal piyasalar dengesinde kullandığımız formülasyonla ilgili olarak;

$J$  menkul değerlerinin geri  $t=1$  zamanındaki ödemeleri

$$V = \begin{bmatrix} V_1^1 & \cdots & V_1^J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_S^1 & \cdots & V_S^J \end{bmatrix} S \times J \text{ boyutlu matrisi ile gösterilir.}$$

$J$  menkul değerlerinin mübadele edildiği finansal ekonomi  $I$  tane ajandan oluşur ve

$\mathfrak{I}(u, w, V)$  ile, daha önce ele aldığımız koşullu piyasa ekonomisi ise  $I_S$ ,  $S \times S$  boyutlu,

$\mathfrak{I}(u, w, I_S)$  ile gösterilir.  $q = (q_1, \dots, q_J)$  menkul değerlerin sıfır zamanında hesaplanmış fiyat

vektörü,  $z^i = (z_1^i, \dots, z_J^i)$ ,  $i$  inci ajanın portföyünü, ( $z_j^i > 0$  ise menkul değer satın aldığı,  $z_j^i < 0$  ise sattığı anlamına gelmek üzere)

Bu durumda  $i$  inci ajanın bütçe kümesi;

$$B(q, w^i, V) = \left\{ x^i \in R_+^n \left| \begin{array}{l} x_0^i = w_0^i - q_1 z_1^i - \cdots - q_J z_J^i, \quad z^i \in R^J \\ x_s^i = w_s^i + V_s^1 z_1^i + \cdots + V_s^J z_J^i, \quad s = 1, \dots, S \end{array} \right. \right\} \text{ dir.}$$

$W$  sıfır ve bir zamanlarının birleştiren menkul değerlerin getiri matrisi olarak yazılabilir.

$$W = W(q, V) = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_1 & \cdots & \cdots & -q_J \\ V_1^1 & \cdots & \cdots & V_1^J \\ \vdots & & & \vdots \\ V_S^1 & \cdots & \cdots & V_S^J \end{bmatrix}$$

Bu durumda bütçe kümesi yeniden tanımlanabilir.

$$B(q, w^i, V) = \left\{ x^i \in R_+^n \left| \begin{array}{l} x_0^i = w_0^i - q_1 z_1^i - \cdots - q_J z_J^i, \quad z^i \in R^J \\ x_s^i = w_s^i + V_s^1 z_1^i + \cdots + V_s^J z_J^i, \quad s = 1, \dots, S \end{array} \right. \right\}$$

$i$  inci ajanı bu durumda tüketim ve portföy vektörleri olan ikililerden oluşan bir karar kümesine sahip olmalıdır.

$(x^i; z^i) \in B(q, w^i, V)$  olmak üzere  $x^i - w^i = Wz^i$  dir.

Eğer,  $\bar{x}^i$ ,  $i$  inci ajanı  $u^i(x^i)$  fayda fonksiyonunu  $B(q, w^i, V)$  bütçe kümesi üzerinde maksimize eden tüketim vektörü ve  $\bar{z}^i$  bu tüketimi finanse eden portföy ise;

$(\bar{x}^i; \bar{z}^i) \in \max \{ u^i(x^i) \mid (x^i; z^i) \in B(q, w^i, V) \}$  yazılabilir.

$\langle W \rangle$ ,  $W$  matrisinin sütunlarından üretilen bir alt uzaydır ve mümkün gelir transferlerinin kümesidir. Bunun anlamı finansal piyasalar tarafından teklif edilen fırsatlardır.

$\langle W \rangle = \{ \tau \in R^{S+1} \mid \tau = Wz, z \in R^J \}$  olarak ifade edilir ve gelir transferlerinin alt kümesidir.

Sıfır zamanında hesaplanmış olası durum fiyatları vektörü  $\bar{\pi}$  ile gösterilir ve arbitraj olmaması durumunda  $\bar{\pi}W = 0$  dır. Eğer  $\bar{\pi}$  vektörü normalize edilerek yazılırsa ( $\bar{\pi}_0 = 1$ )  $q_1 = \bar{\pi}_1$  olur.

Bu durumda sıfır kar koşulu  $\bar{\pi}_0 \bar{q} = \bar{\pi}_1 V$  (iki periyot üzerinden değerlendirirsek)

$\bar{q} = \bar{\pi}_1 \Leftrightarrow \bar{q}_j = \sum_{s=1}^S \bar{\pi}_s V_s^j$  olur. Bu ifadede kullanılan  $\bar{\pi}_s$  s olası durumundaki bir birimlik gelirin şimdiki değeridir (sıfır zamanındaki).

$j$  aktifinin fiyatı  $q_j$ , bu durumda aynı aktifin gelecek gelir  $V_s^j$  akımının bugünkü değeridir.

Portföy seçimine bağlı olarak  $t=1$  zamanındaki gelir akımı  $y = \sum_{j=1}^J V^j z_j$  dır. Bu

formülasyonda  $V^j = (V_1^j, \dots, V_S^j)$ ,  $V$  ödeme matrisinin  $j$  inci sütununun elemanlarından oluşur.

Bütün mümkün  $z$  portföylerinin,  $V$  matrisinin sütunlarını kapsaması ile  $\langle V \rangle$  elde edilir.

$$\langle V \rangle = \left\{ y \in R^S \left| y = \sum_{j=1}^J V^j z_j, z_j \in R^J \right. \right\}$$

Bu nedenle  $\langle V \rangle$  alt uzayı,  $J$  temel menkullerine yatırım yapılarak elde edilebilecek tüm olası  $t=1$  zamanı gelir akımlarını içerir.

**Tanım 3.5:** Piyasa alt uzayı  $\langle V \rangle$  üzerine yayılmış herhangi bir  $y$  gelir akımı için  $y = Vz$  olmasını sağlayacak bir  $z \in R^J$  portföyü vardır.

**Tanım 3.6:** Eğer  $q = (q_1, \dots, q_J)$   $J$  temel menkulleri için fiyat vektörü ise piyasa alt uzayı üzerindeki  $y$  gelir akımının maliyeti  $c_q(y)$  dir.

$$c_q(y) = qz$$

Eğer  $\bar{\pi}$ , arbitrajsız  $\bar{q}$  menkul fiyatları vektörünün neden olduğu bugünkü eğer fiyatları vektörü ise;

$$c_q(y) = \bar{q}z = \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \bar{\pi}_s V_s^j z_j = \sum_{s=1}^S \bar{\pi}_s y_s \text{ olur.}$$

Bu eşitlikten anlaşıldığı üzere, gelir akımlarının maliyetleri bugünkü değerlerine eşittir.

$\bar{q}$  arbitrajsız menkul fiyatı ise  $i$  inci ajanın maksimizasyon probleminin çözümü vardır. Fayda fonksiyonu  $u^i$  3.1 varsayımında tanımlanan koşulları sağlaması durumunda  $V_s = (V_s^1, \dots, V_s^J)$ ,  $V$  matrisinin  $s$  satırını göstermek üzere  $i$  inci ajanın maksimum problemi şu şekilde yazılabilir.

$$\max_{(x^i, z^i) \in R_+^{S+1} \times R^J} \left\{ u^i(x^i) \left| \begin{array}{l} x_0^i - w_0^i = -\bar{q}z^i \\ x_s^i - w_s^i = V_s z^i \end{array} \right. \right\} \text{ dir.}$$

$\lambda^i = (\lambda_0^i, \lambda_1^i, \dots, \lambda_S^i)$ , bütçe kısıtları tarafından belirlenen Lagrange çarpanları vektörü olmak üzere Lagrange denklemi

$$L^i(x^i, z^i, \lambda^i) = u^i(x^i) - \lambda_0^i(x_0^i - w_0^i + \bar{q}z^i) - \sum_{s=1}^S \lambda_s^i(x_s^i - w_s^i - V_s z^i)$$

denkleminin bir çözümü olacak  $(\bar{x}^i, \bar{z}^i)$  için yeter ve gerek olan birinci derece koşulları  $\bar{\lambda}^i \in R_{++}^{S+1}$  olmak üzere mevcuttur.

$$\nabla L^i(\bar{x}^i, \bar{z}^i, \bar{\lambda}^i) = 0$$

Bu aşağıdaki denklemler sistemine eşittir.

$$\nabla u^i(\bar{x}^i) = \bar{\lambda}^i$$

$$-\bar{\lambda}_0 \bar{q} + \sum_{s=1}^S \bar{\lambda}_s \bar{V}_s = 0$$

$$\bar{x}_0 - w_0^i = -\bar{q} \bar{z}^i, \quad \bar{x}_s - w_s^i = \bar{V}_s \bar{z}^i$$

Faydanın maksimize edilmesi gelirin marjinal fayda vektörü olan bu  $S+1$  bütçe kısıtına bağlıdır. Yukarıdaki eşitliklere göre gelirin marjinal fayda vektörü  $(\bar{\lambda}^i)$ , malların marjinal fayda vektörüne  $(\nabla u^i(\bar{x}^i))$  eşittir. Eşitliğin her iki yanını da malların  $t=0$  zamanındaki marjinal faydasına bölünürse,

$$\bar{\pi}^i = \pi^i(\bar{x}^i) \quad \text{ile} \quad \bar{\pi}^i = \left( \frac{1}{\bar{\lambda}_0^i} \right) \bar{\lambda}^i \quad \text{elde edilir.}$$

Bugünkü değer vektöründen hareketle;

$$\bar{q}_j = \sum_{s=1}^S \bar{\pi}_s^i V_s^j \quad \text{yazılabilir.}$$

Bu son eşitliğe göre ilave birim menkul değer maliyeti, (ki aynı zamanda bu menkul değer marjinal faydasına eşittir)  $i$  inci ajan için gelecekteki kar payı akımının bugünkü değeridir. Bunun anlamı  $\bar{\pi}^i W = 0$  olmasıdır.

Finansal piyasaların daha iyi anlaşılması için verilmiş olan bu ilişkilerin ışığında finansal piyasa dengesi tanımlanabilir. (Quinzii, Magill, 1996, 76-78)

**Tanım 3.7:**  $j = 1, \dots, J$  finansal kontratı  $V_s^j \in R$  birim mal ya da geliri  $s$  durumunda teslim etmeyi taahhüt eder, kontratın  $q_j$  fiyatı 0 zamanında hesaplanır ve ödenir.

**Tanım 3.8:** Bir finansal piyasa dengesi,  $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q}) \in R_+^I \times R^J \times R^J$  olmak üzere aşağıdaki koşulların sağlanmasına bağlıdır.

- $(\bar{x}^i, \bar{z}^i) \in \max \{u^i(x^i) | (x^i, z^i) \in B(\bar{q}, w^i, V)\}, i = 1, \dots, I$
- $\sum_{i=1}^I \bar{z}^i = 0$

İkinci eşitlik  $\bar{x}$  tahsisinin uygun olduğunu gösterir. Her  $s$  durumunda mallar için anlık piyasaların dengede olduğunu gösterir.  $\sum_{i=1}^I (\bar{x}^i - w^i) = 0$  (Quinzii, Magill, 1996, 65-69)

### 3.2.5. Arbitraj ve Denge

Genel denge modelinde geçerli olan serbest mal olmaması koşulunun genelleştirilmiş anlamı arbitrajın olmamasıdır. Rekabetçi finansal ekonomilerde yatırımlar sabit getirili olduklarından arbitraj fırsatı yoktur.

**Tanım 3.9:**  $W(q, V)$  finans piyasalarındaki yatırım olanaklarını göstermek üzere, eğer yarı pozitif bir gelir akışına sahip portföy yoksa arbitraj fırsatı yoktur. Bunun anlamı  $z \in R^J$  olmak üzere  $Wz > 0$  olmamasıdır.

**Teorem 3.3:** ( Finans Piyasalarında Arbitrajın Olmaması ) Fayda fonksiyonu varsayım 3.1'i sağlıyorsa aşağıdaki koşullar eşdeğerdir;

- $\max \{u^i(x^i) | x^i \in B(\bar{q}, w^i, V)\}$  probleminin çözümü vardır.
- Finansal piyasalarda arbitraj fırsatı yoktur.
- $\bar{\pi}W(q, V) = 0$  koşulunu sağlayacak bir  $\bar{\pi} \in R_{++}^n$  vektörü vardır.
- Finansal piyasadaki bütçe kümesi  $(\bar{q}, w^i, V)$  kompaktır.

Birinci bölümde rekabetçi bir ekonomide dengeyi incelerken kullanılmış olan çoklu düzlemler ve sürekli fonksiyonların kompakt kümeler üzerinde bir maksimuma sahip olma özellikleri finansal piyasaların dengesi incelenirken de kullanılır. Monoton tercihlere sahip olan ajanın maksimum probleminin bir çözümünün olması ancak ve ancak finansal piyasalarda arbitraj fırsatlarının olmaması durumunda mümkündür .

Durum fiyatları vektörü  $\pi \in R^{S+1}$  bir  $H_\pi$  çoklu düzlemi tanımlar;

$$H_\pi = \{\tau \in R^{S+1} \mid \pi\tau = 0\}.$$

Teorem 3.3'e göre finansal piyasada arbitraj fırsatının olmaması ile  $\langle W \rangle$  piyasa alt uzayında ayırıcı bir  $H_\pi$  çoklu düzlemi tanımlayan bir  $\pi \in R^{S+1}$  pozitif olası durum fiyatları vektörünün var olması eşdeğerdir. Bu çoklu düzlem piyasa alt uzayını, bedelsiz kazanç sağlanmasına olanak verecek uzaydan ayırır.

$H_\pi^- = \{\tau \in R^{S+1} \mid \pi\tau \leq 0\}$  ve  $H_\pi^+ = \{\tau \in R^{S+1} \mid \pi\tau \geq 0\}$  olmak üzere, bu ifade aşağıdaki gibi gösterilir;

$\langle W \rangle \subset H_\pi^-$  ve  $R_+^{S+1} \setminus \{0\} \subset H_\pi^+$  Her  $j$  aktif için  $\bar{\pi}$  olası durum fiyatları vektörü yatırım aktiviteleri üzerinde,  $t=0$  zamanında fiyatı  $q_j$  olan ve  $t=1$  zamanında  $s$  durumunun gerçekleşmesi halinde  $V_s^j$  kadar getiri elde etmeyi sağlayan bir kar tanımlar. Eğer  $W^j = (-q_j, V_1^j, \dots, V_S^j)$ ,  $W$  matrisinin  $j$  inci sütununu gösteriyorsa  $j=1, \dots, J$  olmak üzere

$$\bar{\pi}W^j = 0 \text{ dir.}$$

Bunun anlamı her  $j$  aktif için bir birimlik yatırım için sıfır kar vardır. Teoremin iddiası bütün aktiflerin sıfır kar yarattığı bir yatırım altında olası durum fiyatlarının pozitif bir vektörünün varlığının arbitraj olmaması durumu ile eşdeğer olduğudur. (Quinzii, Magill, 1996, 69-75)

Başka bir yaklaşımla Arbitraj olmaması durumunun, aktif fiyatları ile getirileri arasındaki lineer ilişkinin varlığı anlamına geldiğini **Farkas Önermesi**'nin kullanarak gösterebilir.  $R_s$  reel  $N_s \times I_s$  boyutlu bir matris olsun ve  $q(s) \in R^{I_s}$  vektörü  $q_s z \geq 0$  koşulunu her  $z \in R^{I_s}$  için  $R_s z \geq 0$  ile birlikte ancak ve ancak  $q_s^T = \lambda_s^T R_s$  koşulunu sağlayan pozitif bir  $\lambda_s = (\lambda_s(s'))_{s' \in \sigma^{-1}(s)}$  vektörü vardır.  $\lambda_s$  vektörler kümesi  $(N_s - I_s)$  boyutlu çokludüzleminin pozitif kadran ile kesişiminden elde edilir. (Hernandez ve Santos, 1993, 124)

Belirsizlik kavramı, içlerinden birinin doğru olduğu açıklanacak sonlu bir olası durumlar kümesi olarak kabul edilerek,  $S$  olası durumların  $J$  ise menkul değerlerin sayısı olmak üzere, bir  $J \times S$  boyutlu  $D$  matrisi tanımlanır.  $D_{js}$ ,  $j$  menkul değerinin  $s$  durumundaki ödemesini

gösterir.  $\theta$  portfolyosunun  $q$  fiyatından piyasa değeri  $q\theta$ , ve geri ödemesi  $D^T\theta$  dır. Ancak iki durumda  $\theta$  portfolyosunda arbitraj olasılığı bulunduğu söylenebilir.

$$q\theta \leq 0 \text{ ve } D^T\theta > 0 \text{ veya } q\theta < 0 \text{ ve } D^T\theta \geq 0$$

$\pi$  durum-fiyat vektörü olmak üzere  $q = D\pi$  yazılabilir.  $\pi_s$  elemanını  $s$  durumunda elde edilen ilave marjinal maliyeti olarak düşünebiliriz. Ancak ve ancak bir durum-fiyat vektörü var olduğunda arbitraj olasılığı yoktur. Bu teoremin ispatı ayırıcı çoklu düzlemlerin bir uygulamasıdır.  $L = R \times R^s$  olmak üzere  $M = \{(-q\theta, D^T\theta) : \theta \in R^N\}$ ,  $L$  uzayının bir altuzayı ve  $K = R_+ \times R_+^s$  bir koni olsun.  $K$  ve  $M$ ,  $L$  uzayının dışbükey ve kapalı alt kümeleridirler. Arbitraj olmaması ancak ve ancak  $K$  ve  $M$  uzaylarının tam olarak ve sadece 0 noktasında (orjinde) kesişmeleri durumunda mümkündür. (Duffie, 1996, 3-4) Duffie bireysel ajanın optimizasyon probleminin çözümünün bulunmasının arbitrajın yokluğu anlamına geldiğini de vurgular. (Duffie, 1996, 22)

Aktif fiyatları dengedeysen arbitraj mümkün değildir. Farklılıkları olmakla birlikte finansal aktifler, zamanlar (dönemler) ve olanaklı durumlar arasında gelir transfer eder. Aktif satınalmanın anlamı satınalma gücümüzü bugünden sonraki herhangi bir gelecek duruma transfer etmek demektir. Bunun tersine olmak üzere, açığa satış işlemi ise gelecekteki satınalma gücümüzün bu güne transferi olarak düşünülebilir. Arbitraj eşzamanlı olarak düşük bir fiyattan alınan aktifleri yüksek fiyattan atmak olarak tanımlanabilir. Bu eşzamanlılık nedeniyle arbitrajcının kendi kişisel donanımından herhangi bir masraf nedeniyle ödeme yapması gerekmez. Yine bu eşzamanlılık arbitrajcının risk üstlenmemesini garanti eder. Ancak gerçek dünyada pür arbitraj nadir olarak görülürken, genelde hızlı ya da kısa dönemli spekülasyonlar arbitraj olarak adlandırılırlar. Ancak spekülasyonda önce alım sonra satım yapılacaksa ya da önce açığa satış sonra alım yapılacaksa işlemi yapan kendi kaynaklarını kullanmak durumunda kalacak dolayısıyla risk üstlenecektir. Finansal piyasalar dengesinde arbitraj olmaması bir varsayım olarak kabul edilir ve eğer arbitraj imkanı varsa bunun elimine edilmesi gerektiği belirtilir. Arbitrajın olmaması bir zorunluluktur, çünkü arbitrajın varlığı, tercihlerin miktara bağlı olarak arttığı denge modeli ile uyumsuzdur. Dahası arbitrajın varlığı çoğu aza tercih eden bir rekabetçi ajanın optimal bir portföy stratejisi ile de uyumsuzdur. Çünkü bu durumda bireyler sınırsız bir şekilde arbitraj pozisyonunu tutmak isterler.

Başlangıç periyodunda bir miktar  $a^h$  aktifini  $q$  fiyatından alan ve sonraki periyotta  $r$  getirisini elde eden bir  $h$  tüketicisinin,  $x^h$  bütçesine bağlı olarak faydasını maksimize etmek

istediğini düşünelim, bunun için tüketicinin uyması gereken iki kısıt ile birlikte ( $w$  başlangıç donanımlarını ve  $p$  fiyatları göstermek üzere) tüketicinin fayda maksimizasyonu;

$$\max u^h(x^h) \text{ kısıtlar; } \begin{cases} p_0 x_0^h + q a^h \leq p_0 w_0^h \\ p_1 x_1^h \leq p_1 w_1^h + r a^h \end{cases}.$$

Bu problemin çözümünden seçilen tüketim planı  $x^{h*} = (x_0^{h*}, x_1^{h*})$  ve alınan aktif miktarının  $a^{h*}$  (pozitif ya da negatif olabilir) olduğunu düşünelim. Eğer  $a^h > 0$  ise Ajan  $t=1$  döneminde  $r a^h$  kadar bir gelir elde etmek için  $t=0$  döneminde  $q a^h$  miktarından feragat etmelidir. Eğer  $a^h < 0$  ise açığa satış yaparak  $t=0$  döneminde  $q a^h$  elde eder ve ancak bunun karşılığında  $t=1$  döneminde  $r a^h$  kadar bir ödeme yapmak zorunda kalır.

Bu durumda arbitraj olanağını şu şekilde tanımlayabiliriz.  $a^h \in R$  olmak üzere  $q a^h \leq 0, r a^h > 0$  veya  $q a^h < 0, r a^h \geq 0$  olması arbitraj olanağının varlığını gösterir.

$\tau_0$  başlangıç periyodu  $t=0$ 'da net alış verışı ve  $\tau_1$ 'de  $t=1$ 'deki net alış verışı göstermek üzere,  $\tau_i = p_i(x_i - w_i)$  yazılabilir. Eğer ajan bir birim bono alırsa gelecek bir  $s$  durumunda  $r$  getirisi elde etmek üzere  $q$  kadar bir ödeme yapar. Bu durumu  $\tau_0 = q, \tau_1 = r$  şeklinde ifade edebiliriz. Eğer ajan  $a^h$  miktarında bono satın alırsa net ticaret şu şekilde ifade edilebilir.

$$W = \left\{ (\tau_0, \tau_1) \in R^2 \mid \tau_0 = -q a^h, \tau_1 = r a^h, a^h \in R \right\}$$

$W$  ile eksenleri  $\tau_0$  ve  $\tau_1$  olan  $R^2$ 'de orjinden geçen bir doğru (ya da bir çokyüzlü olarak kabul edebiliriz) gösterilir. Eğer zaman periyodu artarsa bu boyut sayısının artacağı anlamına gelirken, bono (aktif) sayısı kadar farklı  $W$  çok yüzlüleri elde edilir.  $W$ 'nin orjinden geçmesi için her  $a^h \in R$  için  $-q a^h + r a^h = 0$  dır. Diğer bir söyleyişle bu günkü yüklenim  $-q a^h$  gelecekteki kazanca  $r a^h$  eşittir. Sonuç olarak arbitraj olanağının varlığı ile ilgili yapılan tanıma dayanarak  $W$  çokyüzlüsünün üzerinde ya da altındaki noktalarda arbitraj olamayacağı sonucuna ulaşılabilir. Birden fazla bono (aktif) olması halinde  $a_A$  satarak ve  $a_B$  alarak arbitrajcının net kazancı şu şekilde ifade edilebilir.

$\delta_0 = (-q_A a_A) - (-q_B a_B) > 0$  ve  $\delta_1 = r(a_A + a_B) > 0$  ve net kazanç  $\delta = \delta_0 + \delta_1$ . Arbitrajcı için bir sınırlama getirilmediği taktirde fiyatlar sabit kaldığı ve aktiflerin arzı sürdüğü taktirde arbitrajcı bu işlemi sürdürerek kazancını sonsuza götürebilir.

Eğer  $W_A$  ve  $W_B$  çokyüzlülerinin altında kalan ve

$$Z(A) = \{\tau \in R^2 \mid \tau_0 \leq -q_A a^h, \tau_1 \leq r_A a^h, a^h \in R\}$$

$Z(B) = \{\tau \in R^2 \mid \tau_0 \leq -q_B a^h, \tau_1 \leq r_B a^h, a^h \in R\}$  alanların birleşimi  $Z(A) \cup Z(B)$  dışbükey değil ise arbitraj kazancı mümkündür.

Arbitraj fırsatının olmaması için hiç bir  $W_i$  nin  $y$  eksenini pozitif bir değerden kesmemesi ve aktiflerin aynı getiriye sahip olması gerekir. Bunun anlamı tek bir aktifin açığa satılarak ve alınarak kazanç elde edilememesidir. Arbitraj bulunmadığı bir durum ele alındığında orjinden geçen  $W$  çoklu düzlemini orjinde kesen  $W' = \{y \in R^2 \mid yW = 0\}$  bir ortogonal çokludüzlem bulunmalı ve sonuç olarak  $\mu = [1, \mu_1]$  olmak üzere  $\mu \in W'$  alındığında her  $\tau \in W$  için ortogonallik özelliği olarak  $\mu\tau = 0$  yazılabilir.

Sonuç olarak  $[-q, r] \in$  olduğu göz önüne alınarak,  $-q + r\mu_1 = 0$  ya da  $\mu_1 = \frac{q}{r}$  yazılabilir.

Böylece  $\mu_1$  bugünkü değer ya da iskonto edilmiş gelecek değer olarak ifade edilebilir. Bu durumda fayda maksimizasyonunu bir kısıtlı maksimizasyon problemi çözmek üzere Lagrange denklemi ile ifade edilebilir,

$$L = u^h(x_0, x_1) - \lambda^h [(p_0(x_0^h - w_0^h) + p_1(x_1^h - w_1^h)q/r)].$$

Birinci mertebe türevlerden şu ilişki elde edilir.  $\frac{\partial u/\partial x_0}{\partial u/\partial x_1} = \frac{p_0}{p_1} \cdot \frac{r}{q}$  Bu eşitliğin sağ yanındaki

eşitlikler bilindiğine göre  $a^{h*}$ 'ı bulurken kullanılabilecek  $(x_0^*, x_1^*)$  çözülebilir.  $m_0^h = p_0 w_0^h$  şimdiki gelir ve  $m_1^h = p_1 w_1^h + r a^{h*}$  olmak üzere Lagrange denklemi şöyle yazılabilir,

$$L = \psi^h(p_0, p_1, m_0^h, m_1^h) - \lambda^h [q a^h].$$

Bu ifadenin türevinden  $\frac{dL}{da^h} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial m_1^h} \right) \left( \frac{\partial m_1^h}{\partial a^h} \right) - \lambda^h q = 0$  bulunur.  $\frac{\partial m_1^h}{\partial a^h} = r$  olduğundan ifadeyi

yeniden tanımlayabiliriz,  $q = \left( \frac{1}{\lambda^h} \right) \left( \frac{\partial \psi^h}{\partial m_1^h} \right) r$ . Buna göre aktifin gelecekteki marjinal faydası

aktifin fiyatı ile orantılıdır.  $\mu^h = \left( \frac{1}{\lambda^h} \right) \left( \frac{\partial \psi^h}{\partial m_1^h} \right)$  olduğundan  $q = \mu^h r$  yazılabilir.  $a^h$ ,

$\mu^h = q/r$ 'den seçildiğinden,  $\mu^h$ ,  $h \in H$  ajanı için gelecek dönemdeki gelirin marjinal

faydasının kişisel oran faktörü ile ağırlıklandırılmış durumudur.  $a^{h*}$ ,  $\mu^h = q/r$  olduğu durumdan seçilmesinin anlamı,  $h$  ajanının kayıtsızlık eğrilerinin kümesinin bilinmesi halinde, eğimi  $q/r$  olan  $W$  çokludüzlemine teğet olduğu noktada çözüm elde edilir.

Piyasa dengesi  $\sum_{h \in H} a^h = 0$  şeklinde tanımlanır. Bu bir anlamda satın alıcılar tarafından talep edilen toplam aktif, açığa satışlarla arz edilenlere eşit olmalıdır. (CEPA)<sup>5</sup>

Finansal piyasaların dengesinde iki farklı yaklaşım söz konusudur. Bunlardan birincisi aktif fiyatlarına dayanır ancak ikiden fazla periyodu bulunan ekonomilerde dengeyi saptamak zorlaşır. Bu tür ekonomilerde, aktif fiyatları  $q$  değiştiğinde piyasa alt uzayının boyutları  $\langle W(q) \rangle$  da değişebilir ve bu da aktif talebi fonksiyonunda süreksizliklere neden olabilir. İkinci yaklaşım finansal piyasa dengesini, Arrow-Debreu dengesinin sınırladığı, arbitrajın bulunmadığı bir piyasa dengesine dönüştürebilir. Bu dönüşüm geleneksel Arrow-Debreu modeli için geliştirilmiş tekniklerin eksik piyasalar içinde kullanılmasına izin verir. Arbitrajın olmadığı bir denge kavramının ardından arbitrajın bulunmadığı bir eşitlik gelir. Bu eşitlik  $q = \pi_1 V$  dir.

Finans piyasasında  $i$  inci ajanın bütçe kısıtı,

$$B(q, w^i, V) = \left\{ x^i \in R_+^n \left| \begin{array}{l} x_0^i - w_0^i = -qz^i, \quad z^i \in R^J \\ x_s^i - w_s^i = V_s z^i, \quad s = 1, \dots, S \end{array} \right. \right\} \text{ dir.}$$

$q = \pi_1 V$  ise  $t=0$  zamanında bütçe kısıtı

$$x_0^i - w_0^i = -qz^i = -\pi_1 V z^i = -\sum_{s=1}^S \pi_s V_s z^i \text{ dir.}$$

Aynı yaklaşımla birinci zaman bütçe kısıtı ise

$$x_s^i - w_s^i = V_s z^i \text{ dir.}$$

Bu durumda  $\sum_{s=0}^S \pi_s (x_s^i - w_s^i) = 0 \Leftrightarrow \pi(x^i - w^i) = 0$  olur.

Buradan da görülüyor ki  $q = \pi_1 V$  eşitliğinin sağlanması durumunda sıfır zamanındaki  $B(q, w^i, V)$  bütçe kısıtı, koşullu piyasa bütçe kısıtına indirgenebilir.

<sup>5</sup> <http://cepa.newscholl.edu/het/essays/sequence/arbitrage.htm>

**Tanım 3.10:** Finans ekonomisi için arbitrajın bulunmadığı bir denge aşağıdaki koşulları sağlayan, bir tahsis miktarı ve fiyat vektörünü içeren ikilidir.  $(\bar{x}, \bar{p})$

- i-  $x_i \in \max \{u^i(x') \mid x' \in B(\bar{p}, w^i, V)\}, i = 1, \dots, I\}$
- ii-  $\sum_{i=1}^I (\bar{x}^i - w^i) = 0$  (Quinzii, Magill, 1996, 82-85)

### 3.2.6 Genel Denge Teoreminde ve Finansal Piyasalarda Diferensiyel Topoloji Tekniklerinin Kullanılması

Genel denge teorisinin gelişiminde kullanılan matematik tekniklerin zamanla değiştiğini, Hicks ve Samuelson, diferensiyellenebilme, türev hesabına dayanırken, Arrow-Debreu modelinin topolojik kümeler teorisini ve dışbükeylik analizini kullandıkları 1970'lerden itibaren ise diferensiyel topolojinin metotların kullanımının ön plana çıktığı önceki bölümlerde ele alınmıştır.

Diferensiyel topolojinin kullanılması, finansal piyasaların bazı özelliklerinin belirlenmesini izlemeye izin verir. Bu bölümde ele aldığımız finansal piyasalarla ilgili varsayımlarda da diferensiyellenebilme özelliği kullanılmıştır. Finansal piyasaların özellikleri verilirken ele alınan *eğrilik özelliği*, koşullu mal piyasalarında dengeyi tanımlarken ele alınan *vektör alanı* kavramları hep diferensiyel topolojinin konularıdır.

*Vektör alanı* kavramı, çalışmanın birinci bölümünde ele alınan ve dengenin varlığını kanıtlamak için kullanılan sabit nokta teoremleri ile yakından ilgilidir.  $N \subset R^S$   $n$ -boyutlu,  $C^{r+1}$ , kenarlı manifold olsun, bir  $N$  üzerindeki  $C^r$  teğet vektör alanı, bir  $C^r$  özelliği gösteren ve her  $x \in N$  için  $f(x) \in T_x N$  koşulunu sağlayan  $f: N \rightarrow R^S$  fonksiyonudur.  $f(x) = 0$  olduğunda,  $x$  vektör alanının sıfırıdır, eğer  $f(x) \neq 0$  ise  $x$  noktasının komşuluğundaki her  $x'$  için vektör alanının noktaları benzer yönlüdür.  $x$ ,  $C^1$  vektör alanının bir sıfırı ise  $\partial f(x)$ ,  $T_x N$ 'den kendi içine eşlemedir ve  $\partial f(x)$  tekil olmayan ise  $f$ 'in  $x$ 'deki indeksi  $\partial f(x)$ 'in determinantının işaretine eşittir. (Mas-Collell, 1985, 48) Bir  $X$  vektör alanı bir  $M$  manifoldunun,  $E$  altkümesi üzerinde, her  $m \in E$  noktasını  $M$  manifoldunun  $X(m)$  elemanına atayan, bir fonksiyon tanımlar (Bishop ve Crittenden, 1964, 13)

Smale'in tanımladığı teoreme göre, eğer aşırı talep sürekli ve homojen ise ve Walras Kanunu'nu ve sınır koşulunu sağlıyorsa  $Z(p^*) = 0$  olmasını sağlayacak bir fiyat sistemi vardır.  $f: D^\ell \rightarrow R^\ell$  sınır koşullarını sağlayan sürekli bir eşleme olsun.  $x \in \partial D^\ell$  ise. Bu durumda  $f(x^*) = 0$  olmasını sağlayacak bir  $x^* \in D^\ell$  vardır. Bu tanımlamada  $D^\ell = \{x \in R^\ell \mid \|x\| < 1\}$  ve  $\partial D^\ell = \{x \in R^\ell \mid \|x\| = 1\}$  dir. (Smale, 1991, 331-334)

Bu açıklamalardan anlaşıldığı üzere, öncelikle **manifold** (çokkatlılar ya da bükümeler) kavramının tanımlanması gerekmektedir. Chichilnisky, Debreu'nun 1975'deki çalışmasının ardından manifold yapısının ekonomik sistemin davranışlarını anlamakta kullanışlı olduğunun anlaşıldığını, yapraklanmalarla oluşan uzayların dışbükey olmayan ve monotonik olmayan tercihleri içerecek kadar büyük olduğunu belirtmektedir. (Chichilnisky, 1986)

**Manifoldlar** bir Hausdorff uzayının bir açık örtmesi varsa, öyleki bu örtmenin her açık kümesi  $R^n$  Öklidyen uzayında bir açık kümeye homomorfür, bu durumda böyle bir Hausdorff uzayına *n-boyutlu manifold* denir. Her bir manifold lokal eğrisel irtibatlıdır. (Uluçay, 1972, 154) Eğer  $X$  bir Hausdorff topolojik uzayı<sup>6</sup> ise  $X$  içindeki bir  $n$  boyutlu koordinat sistemi,  $R^n$  uzayındaki bir açık kümenin homeomorfizmasıdır. Eğer  $X$   $n$  boyutlu koordinat sistemlerinin alanın tarafından örtülüyorsa,  $n$ -boyutlu topolojik manifold olarak adlandırılır. (Bishop ve Crittenden, 1964, 2-3) Bir topolojik  $M$  uzayı, Bu topolojik uzayın  $E^n$  öklid uzayında diferensiyellenebilen bir değişiklik üzerine homomorfizması varsa bir diferensiyellenebilen manifold yapısı verir. (Auslander ve MacKenzie, 1963, 36) Bu tanımlara göre sayılabilir açık  $U_1, U_2, \dots$ , kümeleri tarafından örtülen  $n$  boyutlu diferensiyellenebilen  $M$  manifoldunun aşağıdaki iki özelliği sağlaması gerekir.

- Her  $U_i$  için,  $V_i$   $n$  boyutlu öklidyen uzay içinde açık küme olduğunda,  $\phi_i: U_i \rightarrow V_i$  homomorfizmi vardır.
- $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  ise  $\phi_i$  ve  $\phi_j$  homomorfizmalarını birleştirerek  $\phi_i(U_i \cap U_j)$ 'den  $\phi_j(U_i \cap U_j)$  üzerine diferensiyellenebilir bir eşleme olan yeni bir  $\phi_{ij} = \phi_j \phi_i^{-1}$  homomorfizması tanımlanabilir. (Wallace, 1968, 21)

Manifoldların belirleyici özelliklerinden birisi bir manifoldun herhangi bir noktasından bakıldığında bakılan noktanın çevresinin düzgün ve normal bir Öklidyen uzayı gibi görünmesidir. Bu özelliği nedeniyle manifoldlar lokal olarak Öklidyen olan topolojik uzaylar

olarak tanımlanırlar.<sup>7</sup> Genellikle antik zamanlarda insanların dünyayın düz olduğuna inanmaları örneği verilerek basitleştirilen manifoldlarla ilgili önemli katkılardan birini de Oyun kuramında denge kavramı ile ilgili olarak adı geçen Nash, “*Reel Cebirsel Manifoldlar*” başlıklı makalesi ile yapmıştır. İki reel cebirsel manifoldun ancak ve ancak analitik olarak homomorfik olduklarında eşdeğerlerdir. Böylece Nash Manifoldların cebirsel değişimler denilen daha basit bir cisim sınıfıyla ilişkili olduğunu göstermektedir.<sup>8</sup> Bu bir anlamda manifoldların ya da herhangi bir yüzeyin öklid uzayları içine yerleştirilebilceği anlamına gelmektedir.

Eğer manifold kendi sınırını kendi sınırını içeriyorsa sınırlı manifold<sup>9</sup> denir. Bir  $C^r$ ,  $n$  boyutlu  $M$  manifoldunun sınırı  $\partial M$  dir. Bu durumda öyle bir  $x \in M$  noktası vardır ki  $M$  içinde hiç komşuluğu yoktur. Tanım sınırın boş olmasına izin verdiği için sınırsız manifoldlar sınırlı manifoldların özel bir durumudur. (Mas-Collell, 1985, 34)

Finansal piyasalarda söz konusu diğer bir özellik de *eğrilik* özelliğidir. Kapalı,  $C^2$ ,  $n$ -boyutlu, sınırlı bir  $M \subset R^n$  manifoldunu ele alalım,  $\partial M$ ,  $C^2$  manifoldunun ortak boyutu 1 dir. Bu durumda  $C^1$  özelliğine sahip Gauss olarak adlandırılan bir  $g: \partial M \rightarrow S^{n-1}$  fonksiyonu tanımlanabilir ki her  $x \in \partial M$  eşlemesi manifolddan  $T_x \partial M$  üzerine dikey izdüşümlerle elde edilmişlerdir. Bu lineer fonksiyonun determinantına  $\partial M$ ’in  $x$  noktasında Gauss anlamında eğriligi denir.<sup>10</sup> Bu değer manifoldun  $x$  noktasındaki düzgünlüğünün ölçüsüdür. (Mas-Collell, 1985, 34)

Önceki bölümde dengenin varlığını kanıtlamak üzere kullanılan sabit nokta teoremi vektör alanlarından yararlanarak yeniden tanımlanabilir.

#### **Teorem 3.4: (Ters Eşleme Teoremi)**

$y \in R^n$ ,  $U \subset R^k$  içinde açık olmak üzere  $C^1$  özelliğindeki  $f: U \rightarrow R^n$  eşlemesinin düzenli bir değeri olsun bu durumda ya  $f^{-1}(y)$  boştur ya da  $U$ ’nun  $n-k$  boyutlu bir  $V$  alt manifoldudur.  $x \in V$  alındığında bir aşağıdaki özellikleri taşıyan bir  $h: N(x) \rightarrow \mathfrak{R}$  diferensiyellenebilir eşlemesi tanımlanabilir.

- $h$  diferensiyellenebilir bir terse sahiptir.
- $N(x)$ ,  $U$  içindeki  $x$ ’in bir açık komşuluğudur.

<sup>7</sup> <http://mathworld.wolfram.com/Manifold.html>

<sup>8</sup> <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Nash.htm>

<sup>9</sup> Sınırlı manifold kavramı, sınırlandırılmış anlamında değil sınıra sahip olan anlamında kullanılmıştır.

<sup>10</sup> Gauss eğrilığının daha genel biçimi Riemann anlamında eğriliktir. (Bishop ve Crittenden, 1964, 161-162)

- $\mathfrak{G}$ ,  $R^k$  uzayında  $0$ 'ı içeren bir açık kümedir.
- $h(N(x) \cap V) = \mathfrak{G} \cap C$  dir. Burada  $C$   $R^k$  uzayının bir koordinat alt uzayıdır. (Smale, 1991, 331-334)

**Teorem 3.5: (Sard Teoremi)**  $r > \max\{0, m - n\}$  olsun.  $C^r$  özelliğindeki  $f : M \rightarrow N$  fonksiyonu  $N$  içinde sıfır ölçüsüne sahiptir. (Mas-Collell, 1985, 42)

**Teorem 3.6: (Poincare-Hopf Teoremi)**  $N$ , kompakt  $n$ -boyutlu, bir  $C^1$  sınırlı manifoldu ve  $f$  bu manifoldun üzerinde sürekli bir vektör alanı olsun.

- $f$   $\partial N$  'de dışarı işaretlemeler yapar (bunun anlamı  $g$ , Gauss eşlemesi iken  $f(x)g(x) > 0$  olmasıdır).
- $f$  sonlu sayıda sıfırlara sahiptir.

**Teorem 3.7: (Brouwer Sabit Nokta Teoremi)** Herhangi bir  $f : B^n \rightarrow B^n$  sürekli fonksiyonunun bir sabit noktası vardır.

**Teorem 3.8: (Örtülü Karşılama Teoremi)**  $X \subset R^n$  açık küme,  $P$  topolojik uzay ve  $f : X \times P \rightarrow R^n$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $f(\bar{x}, \bar{p}) = 0$  olduğunda  $\bar{x}$  vektör alanının sıfırı olarak görülür. Bu durumda bir  $\bar{p} \in V \subset P$  açık kümesi vardır ve bir  $h : V \rightarrow X$  üst yarı sürekli karşılaması  $h(\bar{p}) = \{\bar{x}\}$  ve  $f(h(p), p) = \{0\}$  koşullarını her  $p \in V$  için sağlar.

Eğer  $\bar{x}$  vektörü  $f : X \rightarrow R^n$  için bir sabit nokta olması ancak ve ancak vektör alanının ya da denklemler sisteminin bir sıfırı olması ile mümkündür.

Bu noktada 2. bölümde ele alınan sabit nokta teoremleri yeniden tanımlanabilir.

**Teorem 3.9: (Kakutani Sabit Nokta Teoremi)** Herhangi bir üst yarı sürekli, dışbükey değerli  $f : B^n \rightarrow B^n$  karşılaması sabit noktaya sahiptir. (Mas-Collell, 1985, 48-49)

Ters eşleme fonksiyonuna dayanan bir başka denge ispatı yaklaşımı da şu şekilde ifade edilebilir.  $F$ ,  $S$  üzerinde tanımlı, alttan sınırlı ve  $p^m \rightarrow p \in \partial S$  için  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|F(p^m)\| = +\infty$  şartını sağlayan sürekli bir aşırı talep fonksiyonu olduğunda sürekli, dışbükey ve monoton tercihler için bir  $\mathfrak{S} = (R_+^\ell, \succeq_i, w^i)$  tüketici mübadele ekonomisi vardır.

- $\mathfrak{S}$  ekonomisi  $F$  aşırı talep fonksiyonunu yaratır
- $F^{-1}(0) \subset S$   $\mathfrak{S}$  ekonomisinin denge fiyatları kümesidir.

Bu teoremden hareketle  $A$ ,  $S$ 'nin kompakt ve boş olmayan bir alt kümesi olduğunda ve  $\mathfrak{S}$  ekonomisi ajanları sürekli, kesin dışbükey ve monoton tercihlere sahip iseler bu durumda  $A$   $\mathfrak{S}$  ekonomisinin denge fiyatları kümesidir. Bu teoremin ispetında ancak ve ancak  $p \in A$  olduğunda  $F(p) = 0$  olması kullanılır.

Bu şekilde ters fonksiyon teoremini aracılığıyla aşırı talep fonksiyonları yoluyla denge fiyatına ulaşılmış, Brouwer Sabit Nokta Teoremi kullanılmadan aşırı talep fonksiyonları aracılığıyla rekabetçi dengenin varlığı gösterilmiş olur. (Sonnenschein ve Shafer 1991, 680-682)

### 3.3 Ardışık Ekonomiler ve Aktif Piyasalarında Genel Denge

Koşula bağlı piyasaların yerine finansal değerler (securities) konulduğunda, piyasa alış verişi günden sonra kapanamaz. Alış verişi gelecekte de devam eder. Mal piyasaları bütün zaman periyotlarında açılır. Bu şekilde dönemler arası Arrow - Debreu ekonomisi yerine ardışık ekonomiler geçmiş olur. Genel denge modeli çerçevesinde ardışık ekonomiler fikri Hicks, Lindahl ve Lunberg tarafından ele alınmıştır. Ardışık ekonomilerde başlangıç zamanında belirlenmiş ve bütün zamanları bağlayan bir tane muazzam rekabetçi denge yerine, ardışık denge düşüncesi vardır. Uzun dönem genel dengesi, birbirini izleyen ve birbirleri ile bağlantılı kısa dönem dengelerinden meydana gelmektedir.

Hicks-Lindahl'in ardışık ekonomi modelinde de tüketim kararları alınır, ancak ne dönemlerarası ne de koşula bağlı piyasalarda olduğu gibi öngörüler mükemmel değildir. Ekonomik ajanlar tüketim planlarını malların gelecek fiyatları ile ilgili beklentilerine dayanarak yaparlar. Harcamalar iki şekilde olabilir, şu anda tüketmek üzere mal alınabilir ya da satın alma gücünü gelecek periyotlara tüketim malları almak üzere, taşımak için aktif varlıklar satın alabilir. Piyasa  $t=0$  anında açılır, ancak diğer periyotlarda da açıktır ve taraflar mal ve aktiflerin alış satışlarını tekrar tekrar yapabilirler. Bu periyotlar aktif piyasaları aracılığıyla birbirlerine bağlıdır.

Daha önce incelediğimiz piyasalar bugünkü ve gelecekteki bütün malları içerir ve iktisadi karar birimleri zamanlararası kar ve faydalarını maksimuma çıkarmak için bu piyasalarda faaliyette bulunurlar. Denge durumunda karar birimleri aralarında karşılıklı olarak malların teslimini düzenleyen sözleşmeler yaparlar. İşlemler bu şekilde bir kez tamamlandıktan sonra, karar birimleri tamamen belirli bir plan uyarınca, tüketim, üretim ve değişim faaliyetlerinde bulunurlar. Böyle bir ortamda karar birimleri ne kar ne de tatmin sağlayan parayı elde tutmak çabası içinde olmayacaklardır. Gelecekteki bütün mallar için işlem yapmaya olanak veren piyasalar bugün mevcut olmazlarsa, yani piyasalar her dönem yeniden açılırlarsa, karar birimlerinin davranışı değişebilir.

Her dönem piyasaların yeniden açıldığı ekonomiye ardışık piyasalar ekonomisi denir. Her şey peşin ödenmediğine göre denge durumunda bile karar birimleri bu piyasalarda planlarını ancak beklentilerinin ışığında oluştururlar. Böylece girdi fiyatlarının yükseleceğini düşünen bir üretici, bazı girdileri vadeli piyasalarda satın alacaktır. Karar birimleri malların fiyatlarındaki dalgalanmalardan kar sağlamak beklentisiyle ihtiyaç duymadıkları malları satın

almaya yönelirler. Zaman içinde fiyat değişimleri üzerinde spekülasyon yaparlar. Bu noktada para değer saklama aracı olarak işe karışır.

a) İktisadi karar birimlerinin beklentileri, her ardışık piyasalar ekonomisinde kesin bir rol oynar. Ancak beklentilerin belirsizliği bunların bir parametre olarak dikkate alınmasında güçlükler doğurur. Öte yandan zevkler ve teknolojiyen farklı olarak, **beklentiler**, karar birimlerinin yaşadıkları deneyimlerden aldıkları derslerle sık sık ve ani değişimlere uğrar. Beklentileri modelin dışında düşünmek güçtür. Karar birimlerine ait beklentilerin belirsiz nitelikte oluşu, iktisatçılar arasında **rasyonel beklentiler** varsayımının kabul görmesine neden olmuştur. (Guerrien, 1999, 100-102)

Rasyonel beklentiler terimi iktisat literatürüne **Muth**'un (1961) ünlü makalesi ile girmiştir. Ancak kavram, dengenin varlığı probleminde **Grunberg** ve **Modigliani** tarafından bundan 7 yıl önce kullanılmıştır. **Grunberg** ve **Modigliani**, Brouwer'in sabit nokta teoreminin, doğru tahminlerin varlığı anlamına geldiğini göstermişlerdir. Muth, bu makaleyi onaylamış ancak rasyonel beklentiler varsayımının kullanımı üzerine yoğunlaşmıştır. (Allen ve Jordan, 1998, 42)

Muth, rasyonel beklentiler hipotezini şu şekilde formüle etmektedir. "*Firmaların beklentileri (veya daha genel olarak sonuçların sübjektif olasılık dağılımı) veri bir enformasyon kümesi için teoremin öngörülerıyla aynı dağılıma (veya sonuçların objektif olasılık dağılımına) uymak eğilimindedir.*" Hipotezin iddiaları arasında, bilginin kıt olduğu ve ekonomik sistemin bilgiyi genellikle israf etmeyeceği, beklentilerin biçimlendirilmesinin, ekonomiyi tasvir eden modelin yapısına bağlı olduğu, bir kamu öngörüsünün dahil edilmesinin, içsel bir bilgiye dayanmadıkça ekonomik sistemin üzerinde hissedilir derecede önemli bir etki yaratmayacağı vardır. Hipotezin dayandığı varsayımlar ise

- Tesadüfi hata terimleri normal dağılmıştır.
- Öngörülecek değişkenler için kesinlik eşdeğerleri mevcuttur.
- Sistemin denklemleri beklenti formülleri de dahil olmak üzere doğrusaldır. (Muth, 2000)

Genel denge modelinin, matematiksel teorisinin çok önemli bir ilerleme gösterdiği 50'li yıllar boyunca ve 60'ların başında beklentiler modele girmeye başlamış ve 60'lar ile 70'ler de ise belirsizlik genel denge modelinde yer almıştır. Radner'in göze çarpıcı iki makalesi ile beklentilerin temelini teşkil eden bilgi yapısı üzerine yoğunlaşan dikkate değer yorumlar yapmıştır. (Allen ve Jordan, 1998, 42-43). Radner, belirsizlik karşısında Arrow-Debreu

modelinin kapsam ve açıklama gücünün, detaylı bir değerlendirmesini sağlamıştır. (Majumdar, 1998, 7)

Radner'in, Arrow Debreu modelini, farklı ajanların çevreleri ile ilgili farklı bilgilere sahip olabilecekleri duruma genişlettiği makalesinde ele aldığı modelinde ekonomide gerçekleşen olayların ajanların bilgilerinden çok farklı olamayacağını kabul eder. Yine Radner'in varlık teoremi, ekonomideki bütün ajanların ortak bir bilgi yapısına sahip oldukları varsayımına dayanır. Radner ajanlar arasındaki net ticaretin en çok bütün ajan gruplarının ortak olarak sahip bulundukları bilgiye bağlı olduğunu söyler. (Radner, 1968)

Green 1973'de olası durumlara bağlı bir değişim piyasası tanımlamış, bu piyasada diğer ajanlardan farklı olarak bazı ajanların doğru durum olasılıkları ile ilgili bilgilendirildiklerini iddia etmiştir. Bu modelde, bilgiden yoksun mübadelecileri durum olasılıklarından haberdar eden piyasa fiyatlarının bulunduğu bir rasyonel beklentiler dengesinin olduğunu belirtmiştir. (Allen ve Jordan, 1998, 43-44)

Rasyonel beklentiler dengesi şu şekilde ifade edilebilir. Her  $i$  mübadelecisinin  $S^i$  özel bilgi kümesinden bazı işaretler aldığını varsayalım. ( $S^i$ , sonlu boyutlu bir öklit uzayı ve  $S = \prod_{i=1}^n S^i$  iken)  $\pi$   $S$  üzerinde olasılık ölçüsünü göstermek üzere,  $U$  ile sonsuz, sürekli diferansiyellenebilir, (düzgün) fonksiyonlar kümesi olarak tanımlansın.  $u : R_{++}^\ell \rightarrow R$  Bu fonksiyonlar her  $x \in R_{++}^\ell$  için aşağıdaki koşulları sağlarlar.

- i.  $\partial u^i(x) \in R_{++}^\ell$
- ii.  $\partial^2 u^i(x)$  negatif belirlidir.
- iii. üst sınır kümesinin  $\{x' \in R_{++}^\ell : u(x') \geq u(x)\}$ ,  $R^\ell$  uzayındaki her kapanışı,  $R_{++}^\ell$  uzayı tarafından kapsanır.

$C^\infty$  kompakt açık topoloji olmak üzere,  $U$  topolojik olarak  $C^\infty(R_{++}^\ell, R)$  uzayının bir alt uzayıdır. Her mübadeleci olası durumlara bağlı bir fayda fonksiyonuna sahiplerdir.  $v^i : S \rightarrow U$ . Genel olarak her her mübadelecinin donanımı da olası durumlara bağlı olmalarına rağmen varsayımları basitleştirmek için olası durumlardan bağımsız oldukları kabul edilir;  $w^i \in R_{++}^\ell$

$\Delta$ ,  $R_{++}^\ell$  uzayındaki birim simpleksi göstermek üzere,

$$M = \left\{ (p, y^1, \dots, y^n) \in \Delta \times R^{n\ell} : \sum_{i=1}^n y^i = 0, \text{ ve her } i \text{ için } py^i = 0 \right\},$$

ifadesi fiyatlar kümesini ve toplam kaynak dengesini bireysel bütçe kısıtını sağlayan net ticaretin  $n$  boyutlu ifadesidir.  $M$  uzayı, mübadelecilerin bilgilerini artırmak için kullandıkları piyasa sinyallerini içerir. Rasyonel beklentiler dengesinde,  $i$  mübadelecinin ulaşabildiği bilgi en azından  $s^i$  deki bilgiler en fazla ise bütün  $s$  durumlarının bilgilerdir. (Allen ve Jordan, 1998, 44-45)

Ardışık piyasalar ekonomisine ilişkin denge anlayışı, geçici denge anlayışıdır. Eğer iktisadi karar birimlerinin zevkleri, beklentilerinin biçimi, teknoloji esas alınarak oluşturdukları planları, bir  $t$  anında birbirleriyle uyum halindeyse bu  $t$  anında bazıları vadeli olmak üzere çeşitli piyasalarda arzları ve talepleri eşitleyen bir fiyat sistemini ifade eden geçici bir denge söz konusudur.

Karar birimlerinin  $t$  anında planlarını oluşturmak için yaptıkları tahminlerle  $t+1$  anında yaptıkları tahminlerin farklı olabilirliği nedeniyle ardışık piyasalar ekonomisinden geçici denge söz konusudur. Geçici dengelerin varlığı, ancak iktisadi karar birimlerinin veya piyasaların örgütlenmesiyle ilgili özel varsayımların yapılmasıyla ortaya konabilir.

- Karar birimleri, bir malın fiyatının yükseleceğini umuyorlarsa, bu fiyat hangi düzeyde olursa olsun, hepsi bu malı talep eder ve burada bir denge oluşmaz. Bu asıl modelde mevcut olmayan spekülasyon güdüsünün sonucudur.
- Bir karar birimi herhangi bir malın fiyatının yükseleceğine inanıyorsa, ilke olarak vadeli piyasada bu maldan sınırsız bir şekilde satın alabilir. Öyleyse karar birimlerinin alış veriş olanaklarını sınırlayan özel bazı kurumsal düzenlemelere gitmek gerekir; ya da bu karar birimlerinin gelecekte karşılaşacakları güçlükleri bizzat kendilerinin önceden tahmin ettikleri varsayılacaktır.
- Vadeli piyasalar ya da kredi sistemi mevcutsa o zaman bazı karar birimlerinin geçmiş yüklenimleri zamanında yerine getirmeyi başaramadıkları durumlar ortaya çıkabilir. Tümüyle rasyonel davranan bireyler malları ilerde teslim edemeyeceklerini, ya da teslim etmek istemediklerini açıkça bildikleri halde vadeli satışlar yapabilir ve kasıtlı olarak iflasa gidebilirler. Bu tür girişimlerden kaçınılmak isteniyorsa, karmaşık ve pahalı bir cezalandırma sistemi kurmak gerekir. Böylece bir kez daha piyasaların iyi bir şekilde işlemesi için dışarıdan müdahalenin gerekli olduğu görülmektedir.

- Tercihlerin karar birimlerinin beklentilerine bağlı olacağına göre, kim karar verecektir ? Hisse senedi sahibi hanehalkları mı, yoksa modelde belirsiz bir kişilik olan girişimci mi ? Bunlar arasına bir anlaşmazlık olursa ne olacaktır ? (Guerrien, 1999, 100-104)

İlk olarak Radner'in 1972'de ortaya koyduğu ardışık ekonomi modeli belirsizlik nedeniyle çoklu menkul değer, çoklu zaman periyotları, çoklu durumlar söz konusudur. Başlangıç periyodunda tüm koşula bağlı mallara alış verişi yapmak üzere ulaşılamasa bile Arrow'un 1953'de ortaya attığı ve Radner'in 1972'de ispat ettiği şekilde Pareto optimal dengeye piyasa  $t=1$  periyodunda yeniden açıldığında ulaşılır. Radner'in modeli eksik piyasa durumu ile birlikte bir bölüm 3.4'de ele alınacaktır.

### 3.3.1. Arrow Menkul Değer (Teminat) Piyasaları

Koşullu mal piyasaları, risk üstlenme durumunda dengede malların etkin bir dağılımını (tahsis) sağlar. Ancak bu model piyasa operasyonları nedeniyle potansiyel olarak büyük maliyetlere neden olabilir. Model piyasa zamanında çok sayıda piyasanın aktif bulunmasını gerektirir. Ancak bu piyasalar daha sonra aktif olmayacaklardır. Yine bu model, sözleşmelerle piyasa zamanından önce aktif duruma geçmiş ekonomide her malın piyasa zamanında alım satımını gerektirir. Dolayısıyla modelde piyasa zamanında çok fazla aktif piyasa vardır. Bu durumu aşmak için her periyotta yeniden açılarak alışverişe izin veren bir yapının ilave edilmesi ile Arrow – Debreu genel denge modelinin ana özelliklerini korurken her periyotta aktif olan piyasaların sayısını anlamlı bir şekilde azaltabilir ve her periyotta alış verişi izin verilebilir. Bu yeni tanımlama ile model reel hayata biraz daha yaklaşmış, olacaktır. Arrow sigorta sözleşmesi adı verilen yapıyı şöyle tanımlayabiliriz.  $c(t,s)$  ile tanımlanan sözleşmeye göre öyle bir menkul değer vardır ki eğer  $s$  olayı  $t$  zamanında meydana gelirse bir birimlik ödeme yapacak, aksi takdirde hiçbir ödeme yapmayacaktır. (Starr, 1997, 190-191)

Arrow menkul değer yaklaşımında, koşula bağlı piyasaların bir tam kümesi yerine, finansal aktiflerin çok daha küçük bir kümesi konulabilir. Bu modelde piyasa başlangıç alış-veriş gününden sonra kapanmak zorunda değildir. Alış-veriş gelecekte de sürmektedir. Mal piyasalarının her zaman periyodunda açık olmaları nedeniyle dönemlerarası Arrow-Debreu ekonomisinin yerini ardışık ekonomi almış olur.

$V_{as}$   $a$  menkul değerinin  $s$  durumundaki değeri ve  $p_s$  Arrow Debreu menkul değerinin (teminatının) denge fiyatı olmak üzere, herhangi bir aktifin değerinin, Arrow – Debreu menkul değerinden belirlenebileceğini görebiliriz.  $p_s$ ,  $s$  durumunun gerçekleşme olasılığı

olmak üzere  $p_a = \sum_{s=1}^S \frac{p_s}{\rho_s} V_{as} \rho_s = E \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \tilde{V}_a$  Bu formül  $a$  aktifinin değerinin,  $a$  aktifinin değeri

ile  $(p/\rho)$  bir rastgele değişkenin çarpımının beklenen değerine eşit olduğunu gösterir.

Kovaryans tanımından yararlanılarak aynı ifade şu şekilde de yazılabilir.

$$p_a = \text{cov}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}, \tilde{V}_a\right) + E \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} E \tilde{V}_a \quad \text{Tanım gereği, } E \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \sum_{s=1}^S \frac{p_s}{\rho_s} \rho_s = \sum_{s=1}^S p_s \quad R_0 \text{ 'ın risksiz getiriye}$$

sahip bir portföy olduğundan hareketle,  $E \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{R_0}$  eşitliğini kullanarak

$$p_a = \frac{\bar{V}_a}{R_0} + \text{cov}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}, \tilde{V}_a\right) \text{ yazılabilir. Aktifin fiyatı beklenen değerinin bugüne indirgenmiş}$$

değeri artı risk primidir.  $i$  aktörünün,  $c_{is}$  birim  $s$  Arrow menkul değer hissesi aldığını varsayalım. Bu durumda birinci mertebe koşullar şu şekilde ifade edilebilir;

$$\rho_s u'_i(c_{is}) = \lambda p_s \text{ buradan şu eşitlik yazılabilir. } \frac{u'_i(c_{is})}{\lambda_i} = \frac{p_s}{\rho_s} \quad \text{Bu eşitlik yatırımcının}$$

tüketiminden elde ettiği marjinal fayda ile  $\frac{p_s}{\rho_s}$  arasındaki ilişkiye işaret eder. (Varian, 1992,

382)

Bir koşullu mal piyasası yerine anlık piyasaların (spot markets) ve sigorta sözleşmelerinin karışımından oluşan bir model kullanıldığında da koşullu mal piyasasındaki denge durumunda ulaşılanla aynı dağılıma erişilebilir.

Koşullu malların teslimi için ajanın harcamalarının  $(t,s)$  içinde yer aldığını düşünelim.

$\sum_{i \in (t,s)} p_i x_i^h$  Bu formül günlük geçerli koşullu mal fiyatından, malları  $t$  zamanında  $s$

durumunda teslim almak üzere yaptığı harcama miktarını gösterir. Burada  $p$  koşullu mal piyasasının fiyatıdır. Anında teslim piyasaların  $(t,s)$  'deki mallar için yeniden açıldığını kabul edip  $i$  malı için  $t$  anındaki teslim fiyatının  $q_i$  olduğunu düşünelim.  $(t,s)$  'de ödenecek Arrow

sigorta kontratının fiyatı da  $\theta$  olsun. Ajan  $h$ ,  $S_{t,s}^h$  kadar Arrow sigorta kontratı satın alsın

$$S_{t,s}^h = \sum_{i \in (t,s)} q_i x_i^h, \quad i \in (t,s) \text{ için } p_i = \theta_{t,s} q_i \text{ eşitliği ifade edilebilir. Hane halkının bütçe kısıtı}$$

yeniden şeklinde tanımlanabilir.  $\sum_{t,s} \theta_{t,s} S_{t,s}^h \leq M^h(p) = M^h(\theta, q)$  (Starr, 1997, 190-192)

Koşullu mal piyasaları ile Arrow sigorta sözleşmesi modeli arasında bir eşlik söz konusudur. Koşullu mal piyasasında bütün zamanlar ve çok sayıda koşullu malın ticareti için piyasada bir kez karşılaşılır. Ancak gerçek malların teslimatlarının çoğu gerçekleşmez. Soyut bir satınalma gücünden ödeme yapıldığı Arrow sigorta sözleşmelerinde ise menkul değer piyasasında alış verişin tarafları yine bir kez karşılaşırken mal piyasaları anlık ticaret için her periyotta yeniden açılırlar. Böylece, her malın, her zaman periyodu ve her durumdaki teslimi için açılmış bir piyasa yerine, satınalma gücünü zamanlar ve durumlar arasında dağıtan bir menkul değer (teminat) piyasasını kullanabiliriz. Bu eşdeğerlilik bir anlamda firma ve tüketicilerin, gelecekteki her zaman – durum çifti için mükemmel öngörüye sahip olmaları gerektiğini gösterir. Her ne kadar piyasanın birincil sorumluluğu denge fiyatını belirlemek ise de tarafların piyasada karşılaşmalarından önce fiyatların belirlenmesi ihtiyacı nedeniyle model çok fazla öngörü gerektirir. Modelin gerekliliklerini daha akla yakın bir seviyeye çekmek olanaklıdır. Tüketiciler, iyi belirlenmiş olayların gerçekleşmesi durumunda piyasa fiyatlarının ne olacağını önceden makul bir yakınlıkla tahmin edebilirler. (tarım ürünlerinin fiyatlarının havalanın kötü gitmesi durumunda iyi gitmesi durumuna göre daha yüksek olacağını tahmin etmek gibi) Dahası her aktörün her fiyatı bilmesine gerek yoktur. Koşullu mal piyasalarının ve Arrow sigorta piyasalarının kullanılması piyasa sisteminin, zaman ve belirsizlikte kaynaklanan bozulmaları aşmasını sağlar. (Starr, 1997, 192-193)

Tanımından dolayı, sadece  $s$  durumu gerçekleştiğinde bir birimlik ödeme yapan (bu nümerie maldan da olabilir) Arrow menkul değerinin getiri vektörünü  $r_s = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$  bu şekilde ifade edebiliriz. Getirisi  $r_f = [r_1, r_2, \dots, r_s, \dots, r_S]$  olan bir yeni bono olduğunu varsayalım, bu bononun getirilerini Arrow menkul değerlerinin bir serisi olarak yinelenabilir.  $r_f = \sum_{s \in S} \alpha_{fs} r_s$

burada  $r_s$  Arrow menkul değerinin getirisi,  $q_f = \sum_{s \in S} \alpha_{fs} q_s$  bononun fiyatı ve  $q_s$  de Arrow menkul değerinin fiyatı olmak üzere,  $s$  durumundaki ödeme,  $q_f = \sum_{s \in S} \alpha_{fs} q_s$  şeklinde ifade edilebilir. Böylece bononun fiyatı Arrow menkul değerinin fiyatının bir lineer kombinasyonudur. Buradan hareketle yeni bir aktifin değerinin temel (fundamental) aktiflerin bir lineer kombinasyonu ile belirlenebileceğini görülür. (CEPA)<sup>1</sup>

<sup>1</sup> <http://cepa.newscholl.edu/het/essays/sequence/arbitpricing.htm>

### 3.3.2. Sermaye Varlıkları Fiyatlandırma Modeli ve Denge

Belirsizlik durumunda söz konusu olduğunda bir aktifin (menkul değerin) elde tutulması için riski arttıkça, beklenen getirisinin de artması gerekir.  $a$  aktifinin beklenen getirisini  $\bar{R}_a$  <sup>2</sup> ile ve risksiz menkul değerin (hazine bonosu gibi) getirisini  $R_0$  ifade etmek üzere, belirsizlik durumunda  $\bar{R}_a - R_0 = \text{risk primi}$  yazılabilir. Bu ifadede eşitliğin sol tarafını  $a$  menkul değerinin (aktifinin) fazla getirisi olarak tanımlayabiliriz. Her aktif için fazla getiri, risk primine eşit olduğunda denge sağlanmış olur. Bu bağlamda risk primi tüketici tercihlerinde temel bir belirleyici faktör durumundadır. Ele aldığımız aktifin değeri, bu aktife ikame ya da tamamlayıcı olan diğer aktiflerin varlığına ya da yokluğuna içsel olarak bağlıdır. Aktiflerin fiyatlandırılmasında kullanılan modellerin çoğunda aktifin değeri eninde sonunda diğer aktiflerle kovaryansına bağlıdır. Ortalama – varyans yaklaşımında riskten kaçınmanın anlamı tüketimin beklenen değerindeki<sup>3</sup> bir atışın iyi, tüketimin varyansındaki bir artışın ise kötü olmasıdır. (Varian, 1992, 369-370)

Sermaye varlıkları değerlendirme modeli (CAPM)<sup>4</sup>; bir menkul değerler portföyünün, beklenen getirisi ile sistematik riski arasındaki denge ilişkisini inceleyen bir modeldir. Riskli aktiflerin beklenen getiri oranlarını belirlemek için uygun bir yöntem olarak kullanılır. (Reilly, Brown, 1997,287) Finans piyasalarında makroekonomik olaylarla ilişkili olan risk faktörü, hisse senedi getirisinin piyasa portföyü getirisindeki dalgalanmalara duyarlılığı ile ölçülebilir. Bu duyarlılık  $\beta$  ile sembolize edilir. Herhangi bir varlıktaki beklenen risk primi,  $\beta$  ile piyasa risk priminin çarpımıdır. Yine bu tanımdan hareketle hisse senedinin beklenen getirisi; risksiz faiz oranı ile,  $\beta_a$  ile piyasa risk priminin çarpımının toplamıdır.

$$E(R_a) = \bar{R}_a = R_0 + \beta_a (\bar{R}_m - R_0) \quad (\text{Brealey, Myers, Marcus, 1996, 265-274})$$

Bu formalizasyonda,  $\beta_a$ ,  $a$  aktifinin piyasa ile kovaryansının piyasanın varyansına bölümü

$$\text{olarak } \beta_a = \frac{\text{COV}_{a,m}}{\sigma_m^2} \quad (\text{Reilly, Brown, 1997, 288}) \quad \text{ya da } \beta_a = \frac{\sigma_{a,m}}{\sigma_{m,m}} \quad (\text{Varian, 1992, 375})$$

şeklinde tanımlanabilir.

---

<sup>2</sup>  $\bar{R}_a = \sum_{s=1}^S \rho_s R_{as} = E\tilde{R}_a$

<sup>3</sup> Beklenen değer ortalama ile aynı büyüklüğü ifade eder.

<sup>4</sup> CAPM Capital Aset Pricing Model kavramının kısaltmasıdır. Türkçesi Sermaye Varlıkları Fiyatlandırma Modeli olarak çevrilmiştir. (Seyidoğlu, 2001, 66)

Modele göre, varlığın rastgele dağılımının faydası, olasılık dağılımının iki kavramı olan ortalama (mean) ve varyansa bağlıdır. Ortalama varyans analizi risk içeren durumları, olası sonuçların beklenen değeri ile varyansına dayanarak değerlendirir. Örneğin belirli bir getiri düzeyinde varyansı düşük olan veya belirli bir varyans düzeyinde beklenen getiri daha yüksek olan portfolyolar seçilmeye adaylardır. Bu analizi ortalama – varyans etkinliği olarak da adlandırırız. Bu sözel ifadeyi şu şekilde de ifade edilebilir.

İkinci dönem tüketimi

$$\tilde{C} = (W - c) \sum_{a=0}^A x_a \tilde{R}_a = (W - c) \left[ x_0 R_0 + \sum_{a=1}^A x_a \tilde{R}_a \right] \text{ dir.}$$

Portföy ağırlıklarının toplamının 1 olmasından hareketle  $x_0 = 1 - \sum_{a=1}^A x_a$  yazabiliriz. Bu

$$\text{durumda bütçe kısıtı } \tilde{C} = (W - c) \left[ R_0 + \sum_{a=1}^A x_a (\tilde{R}_a - R_0) \right] \text{ dir.}$$

Köşeli parantez portföy getirisini ifade eder. Hangi portföyün seçileceği yatırımcının fayda fonksiyonuna bağlı olmakla birlikte her şekilde varyansı minimize etmek zorundadır.

**Tanım 3.11:**  $x = (x_0, x_1), x' = (x'_0, x'_1) \in R \times R^S$  ifadesi yarı pozitif vektör eşitsizliğini sağladığında  $u : R^{S+1} \rightarrow R$  fayda fonksiyonu ortalama varyans fayda fonksiyonu olarak isimlendirilir.

Aşağıdaki koşullardan birinin sağlanması durumunda

$$(x_0, E(x_1), -\text{var}(x_1)) > (x'_0, E(x'_1), -\text{var}(x'_1)) \text{ ve buradan hareketle } u(x) > u(x') \text{ yazılabilir.}$$

Sağlanması gereken koşullar;

$$(x_0, E(x_1)) = (x'_0, E(x'_1)) \text{ ve } \text{var}(x_1) < \text{var}(x'_1) \text{ veya}$$

$$(x_0, E(x_1)) > (x'_0, E(x'_1)) \text{ ve } \text{var}(x_1) = \text{var}(x'_1)$$

Bir ortalama – varyans fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir.

$$\sum_{a=0}^A x_a \bar{R}_a = \bar{R}$$

$$\sum_{a=0}^A x_a = 1$$

kısıtları altında  $\min_{x_0, \dots, x_A} \sum_{a=0}^A \sum_{b=0}^A x_a x_b \sigma_{ab}$ , burada  $\sigma_{ab} = \text{cov}(\tilde{R}_a, \tilde{R}_b)$  ifade etmektedir.

$\lambda$  ve  $\mu$  Lagrange çarpanları olmak üzere bu kısıtlı maksimizasyon sorusunu kısmi türevleri sıfıra eşitleyerek birinci mertebe koşulunu şu şekilde ifade ederiz.  $2 \sum_{b=0}^A x_b \sigma_{ab} - \lambda \bar{R}_a - \mu = 0$  <sup>5</sup>.

(Varian, 1992, 372) Bu şekilde bulunan birinci mertebe koşulları üzerinden kimi varsayımlar yapılarak yukarda bulunan Sermaye varlıkları değerlendirme modeli modelinin formülü ifade edilir. Dolayısıyla CAPM modeli portföy getirisinin varyansını minimize etmeye yönelik bir formülasyondan elde edilmiştir. Şimdi CAPM modelinin denge koşullarını sağladığını gösterelim.

**Tanım 3.12:** Bir  $\mathfrak{I}(u, w, V)$  ekonomisi aşağıdaki koşulları yerine getiriyorsa CAPM modelinin varsayımlarını sağlamış olur.

- i. Farklı olası durumlar için (states of nature) objektif olasılıklar bulunmalıdır.
- ii. Risksiz bir menkul değer var olmalıdır
- iii.  $w_1^i \in \langle V \rangle$
- iv.  $u^i : R^{S+1} \rightarrow R$ , ortalama varyanstır

Net arzı sıfıra eşit olan modelin basitleştirilmiş yazılımı  $\mathfrak{I}(u, w, V)$  'dır

**Teorem 3.10: ( CAPM Dengesi )** Eğer  $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ ,  $\mathfrak{I}(u, w, V)$  ekonomisinin, bir finansal piyasa dengesi ise CAPM varsayımlarını  $\text{var}(w_1) > 0$  ile birlikte sağlar. Bundan dolayı

- i. ideal menkul değer  $\bar{\tau}$  şeklinde verildiğinde  $c, c'$  gibi kesin pozitif sabit sayılar vardır ve  $\bar{\tau} = c'\Gamma - cw_1$  yazılabilir.

- ii. Piyasa altuzayındaki  $\langle V \rangle$  herhangi bir gelir akımının  $y$  denge değeri için

$$c_{\bar{q}}(y) = \frac{E(y)}{1+r} - c \cdot \text{cov}(w_1, y) \text{ yazılabilir.}$$

<sup>5</sup> Minimize etmek istediğimiz fonksiyon, konveks ve kısıtlar da lineer olduğu için ikinci mertebe koşullar kendiliğinden sağlanır.

iii.  $(a, b) = (a_1, \dots, a_I, b_1, \dots, b_I) \in R^I \times R^I$  ve  $\sum_{i=1}^I a_i = 0, \sum_{i=1}^I b_i = 1$  olmak üzere bir  $(a, b)$

kümesi vardır ve yandaki ifade yazılabilir.  $\bar{x}_1^i = a_i \Gamma + b_i w_1$

iv. Fayda fonksiyonu  $u^i$  kuazi konkav ise ve  $u^i(x^i) = h(x_0^i, E(x_1^i), \text{var}(x_1^i))$  ifadesini sağlıyorsa,  $h^i$ 'nin, diferensiyellenebilir, ilk iki değişkenine göre artan, üçüncü değişkenine göre azalan ise denge dağılımı (tahsisi) Pareto Optimaldir.

**Kanıt:**  $w_1^i \in \langle V \rangle$  olduğundan, i. ajanın bütçe kısıtı eşdeğer bir formda şöyle ifade edilebilir;

$$\begin{cases} x_0^i - w_0^i = -\bar{q}z^i \\ x_1^i - w_1^i = Vz^i, z^i \in R^I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^i - w_0^i = c_{\bar{q}}(w_1^i) - c_{\bar{q}}(x_1^i) \\ x_1^i \in \langle V \rangle \end{cases}$$

$\bar{y} \in \langle V \rangle$ 'de bir nokta değer olsun. Bu takdirde her  $y \in \langle V \rangle$  olmak üzere

$$c_{\bar{q}}(y) = \left[ \bar{y}, y \right]_{\rho} = \frac{E(y)}{1 + \bar{r}} + \text{cov}(\bar{y}, y) \text{ dir. Her ajan için } E(\bar{y}) = c_{\bar{q}}(\Gamma) = 1/(1 + \bar{r}) \text{ olduğuna göre ve}$$

$\hat{x}_1^i$ 'nin  $\bar{x}_1^i$ 'nin  $\rho$  projeksiyonu olduğunu kabul edersek, aşağıdaki ortogonalite ilişkileri de sağlanır.

$$\left[ \bar{y}, \bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i \right]_{\rho} = 0 \Leftrightarrow c_{\bar{q}}(\bar{x}_1^i) = c_{\bar{q}}(\hat{x}_1^i) \quad (1)$$

$$\left[ \Gamma, \bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i \right]_{\rho} = 0 \Leftrightarrow E(\bar{x}_1^i) = E(\hat{x}_1^i) \quad (2)$$

Bu ilişkilerle  $\left[ \hat{x}_1^i, \bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i \right]_{\rho} = 0$  birlikte kullanılırsa

$$\text{cov}(\hat{x}_1^i, \bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i) = 0 \text{ yazılabilir.}$$

Bu son ifadeden hareketle;  $\text{var}(\bar{x}_1^i) = \text{var}(\hat{x}_1^i) + \text{var}(\bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i)$  yazılabilir. Buradan

$\text{var}(\bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i) > 0$  olması halinde  $\text{var}(\bar{x}_1^i) > \text{var}(\hat{x}_1^i)$  olduğu yandaki eşitliğe bağlı olarak görülür.

$$\left\| \bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i \right\|_{\rho} = \left( \left( E(\bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i) \right)^2 + \text{var}(\bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i) \right)^{1/2}$$

Yukarda ele aldığımız (1) ifadesinden hareketle;  $\bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i = 0$  olmasının ancak ve ancak

$\text{var}(\bar{x}_1^i - \hat{x}_1^i) = 0$  olması durumunda mümkün olacağı sonucunu çıkarabiliriz. (2) ifadesinden

$\hat{x}_1^i$  ve  $w_1^i$  her ikisi de  $\langle V \rangle$  içinde yer alırlar (uzanırlar)  $\hat{x}^i = (\bar{x}_0^i, \hat{x}_1^i)$  aktörün bütçe kısıtını

sağlamaktadır.  $u^i$  ortalama varyans fayda fonksiyonu olduğundan hareketle,  $E(\bar{x}_1^i) = E(\hat{x}_1^i)$

ve  $\text{var}(\bar{x}_1^i) > \text{var}(\hat{x}_1^i)$  koşulları sağlandığında  $\bar{x}_1^i \neq \hat{x}_1^i$  ise  $u^i(\bar{x}^i) < u^i(\hat{x}^i)$  olacaktır. Bu durum

$\bar{x}^i$ 'in Pareto optimal olması ile çelişecektir. Bu yüzden  $\bar{x}_1^i \neq \hat{x}_1^i$  ve  $\bar{x}_1^i \neq \hat{x}_1^i \in \langle \Gamma, \bar{y} \rangle$  olmalıdır.

Bunu takiben  $\sum_{i=1}^I \bar{x}_i^1 = w_1 \in \langle \Gamma, \bar{\gamma} \rangle$  yazılabilir.  $\text{var}(w_1) > 0$  olduğundan.  $\langle \Gamma, w_1 \rangle = \langle \Gamma, \bar{\gamma} \rangle$  dir.

$\bar{\gamma} \in \langle \Gamma, w_1 \rangle$  ifadesinin anlamı  $\bar{\gamma} = c' \Gamma - c w_1$  olmasını sağlayacak,  $c', c$  pozitif sabitlerinin var olduğudur.

### 3.3.3. Arbitraj Fiyatlandırma Teorisi ve Denge

CAPM modeli tüketici zevkleri ile ilgilenirken, Arbitraj fiyatlandırma teorisi, aktif getirilerinin belirlenmesi üzerinde durur. Bir anlamda CAPM talep yanlı bir modelken APT arz yanlı bir modeldir. (Varian, 1992, 376) Yapılan analizler sonucunda genel olarak APT'nin daha önce ele aldığımız CAPM modelinden daha iyi bir tahminci olduğu belirtilmektedir. Özellikle modelin aktiflerin altkümeleri üzerinde test edilebilirlik özelliği vurgulanmaktadır. Oysa CAPM modeli ancak bütün getirilerin zaman serilerine sahip olduğunda ya da gerçek piyasa portföyleri zaman serilerinin varlığında test edilebilir. (Dybvig ve Ross, 1985)

Getiri uzayında  $n$  tane temel lineer bağımsız aktif varsa ve limitsiz açığa satışların<sup>6</sup> olanaklı olduğu bir ortamda şu iki koşul gerçekleşir.

i. Alınan bir  $f$  aktifinin getirisi  $n$  tane temel aktifin getirilerinin  $r_f = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i$  şeklinde

bir lineer kombinasyonudur.

ii.  $f$  aktifinin denge durumundaki fiyatı aynı temel aktiflerin fiyatlarının lineer

kombinasyonu olarak gösterilebilir;  $q_f = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i$ .

İki temel aktifimiz olduğunu varsaydığımızda yeni aktifin getirisi  $r_f = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$  şeklinde ifade edilebilir. Varsayalım ki  $q_f > \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$  olsun, açığa satış yapılabileceğinden  $f$  aktifinden satılarak 1 ve 2 aktiflerinden alım yapılabilir. Satılan miktar  $-(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)$  olur.

$$a^* = [-(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2), \alpha_1 q_f + \alpha_2 q_f] \quad \text{ve} \quad q \cdot a^* = -(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) q_f + \alpha_1 q_f q_f + \alpha_2 q_f q_f = 0$$

yazılabilir. Bunun anlamı  $a^*$  portföyünün maliyetinin sıfır olmasıdır. Herhangi bir  $s$  durumunda  $a^*$  portföyünün getirisi şöyle gösterilir.

<sup>6</sup> Açığa satış; ödünç alınan bir menkul değer, ileride fiyatının düşeceği ve dolayısıyla daha düşük fiyattan satın alınabileceği tahmin edilerek bugünden satılmasıdır.

$$V_s a^* = \sum_{f \in F} r_{fs} a_f = -r_{fs}(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) + r_{1s} \alpha_1 q_f + r_{2s} \alpha_2 q_f$$

ancak  $r_f = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$  olduğunda formül  $V_s a^* = -r_{fs}(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) + r_{fs} q_f$  şeklinde indirgenebilir ya da basitçe.  $V_s a^* = r_{fs}(q_f - \alpha_1 q_1 - \alpha_2 q_2)$  olarak ifade edilebilir. Başlangıçtaki  $q_f > \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$  varsayımına göre, her  $s$  durumu için  $V_s a^* \geq 0$  olur. Buna göre  $a^*$  portföyü gelecekte pozitif getiriye sahip olacaktır. Maliyeti sıfır olduğundan açığa satışlar yapılabilir ve herhangi bir bütçe sınırlandırması ihlal etmeden portföye ilaveler yapılabilir.  $V_s a^* \geq 0$  olduğundan maliyetsiz olarak her zaman artan getirilere sahip olabiliriz. Başka bir tanımlamayla bu arbitraj fırsatına sahip olmak demektir. Kesin monotonik tercihler uyarınca aktörler dengeyi ihlal etmek koşuluyla portföylerine ilave yaparak faydalarını arttırabilirler. Bu yüzden  $q_f \leq \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$  olmak zorundadır. Risk yansız yorumu göz önüne alınırsa, durum fiyatı  $\mu_s$  ve risk yansızlık olasılığı  $\pi_s$  ve risksiz indirgeme getiri oranı  $r$  olmak üzere

$\mu_s = \frac{\pi_s}{(1+r)}$  yazılabilir ve buna dayanarak temel teorem şöyle ifade edilebilir;

$$q_f = \sum_{s \in S} \mu_s r_{fs} \text{ ya da } q_f = (1+r)^{-1} \sum_{s \in S} p_s r_{fs} \text{ dir.}$$

Bu durumda  $f$  aktifinin değeri, risk yansız olasılık altında getirisinin beklenen değeri ve risksiz getiri oranı ile indirgenmiş olarak bulunur. Arbitrajın olmaması durumu pozitif durum fiyatlarının varlığını garanti eder.  $E^*$ 'ın risk yansız olasılıklarla bağlantılı beklenen değer operatörü olduğunu kabul ederek şu eşitliği yazabiliriz.  $E^*(r_f) = \sum_{s \in S} p_s r_{fs}$

$r_{fs}$  sembolü  $f$  aktifinin  $s$  durumundaki getirisini göstermek le birlikte, aynı zamanda  $f$  aktifinin  $s$  durumundaki ödemesinin değerini de gösterir. Şimdi  $R_{fs}$  ile  $f$  aktifinin  $s$  durumundaki finansal gertirisini tanımlayalım.  $q_f$  satınalma fiyatını göstermek üzere

$$R_{fs} = \frac{r_{fs}}{q_f - 1} \text{ yazılır. Eğer aktifin ödemesi her durum için risksiz getiri kadar ise } R_{fs} = r,$$

$$\sum_{s \in S} \mu_s = \frac{1}{1+r} \text{ yazılabilir. (CEPA)}^7$$

<sup>7</sup> <http://cepa.newscholl.edu/het/essays/squence/arbitpricing.htm>

Pek çok aktifin fiyatlarının birlikte hareket ettiği ortak bir gözlemdir. Bu aktif fiyatları arasında yüksek dereceli bir kovaryans olduğunu gösterir. Dolayısıyla aktiflerin getirilerinin bazı ortak faktörlerin ve aktive özel risklerin fonksiyonu olduğu düşünülebilir (Varian, 1992, 376). Arbitraj fiyatlandırma teorisini geliştiren Ross,  $i$  aktifinin  $t$  zamanındaki getirisini çok faktörlü bir modelle açıklıyordu.  $R_{i,t} = b_{i,0} + b_{i,1}f_{1,t} + b_{i,2}f_{2,t} + \dots + b_{i,m}f_{m,t} + \varepsilon_{i,t}$ , bu ifadeyi  $\varepsilon_{i,t}$ 'nin şokların aktifin değerine yaptığı etkiyi göstermek üzere tanımlayabiliriz. (Ross, 1976)

Bu modelden hareketle aşağıdaki koşulları sağlayan bir arbitraj portföyü oluşturulabilir.  $v_i$ ,  $n$  tane aktifin bulunduğu bir ekonomide portföyün ağırlıklarını göstermek üzere  $\sum_{i=1}^N x_i = 0$

ifadesi arbitraj portföyünün bedelsiz yani kendi kendini finas ettiğini gösterirken  $\sum_{i=1}^N x_i b_{i,m} = 0$

ifadesi ise arbitraj portföyü oluşturulurken sistematik risklerin bulunmadığını gösteriyor. Denge durumunda arbitraj portföyünün getirisi sıfır olmalıdır. Aksi halde herhangi bir maliyet

ve risk olmadan sınırsız kazanmak mümkündür. Arbitrajın olmaması  $ER_p = \sum_{i=1}^N x_i ER_i = 0$  şeklinde ifade edilebilir.

APT modeli herhangi bir piyasa dengesinin arbitraj karları olmaması durumuyla uyum içinde olmak zorunda olduğundan, her dengenin, her bir aktifini beklenen değerleri ile bunların getirilerinin karşılıklarının aralarındaki doğrusal ilişki ile belirlenmesi gerektiğini göstermektedir. (Roll ve Ross, 1980)

Modelde belirsiz olan faktörler daha sonraki çalışmalarda, gayri safi hasılda büyüme, tahmin edilemeyen enflasyon, rik primi ve benzeri kavramlarla tanımlanarak model aktifin beklenen değerini hesaplamakta kullanılmıştır. (Chen, Roll and Ross, 1986)

Aynı formülü şu şekilde de ifade etmek mümkün olabilir.  $R_{fs}$   $f$  aktifinin  $s$  durumundaki finansal getirisi ve  $E_f$ ,  $f$  aktifinin beklenen getirisi ve  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$  ler dışsal faktörler olmak üzere,  $R_{fs} = E_f + \beta_{f1}f_1 + \beta_{f2}f_2 + \dots + \beta_{fk}f_k$  yazılabilir. Denklemin  $\beta_{f1}f_1 + \beta_{f2}f_2 + \dots + \beta_{fk}f_k$  kısmını aktifin getirisini önceden tahmin edilemeyen kısmı olarak tanımlayabiliriz. (CEPA)<sup>8</sup> Bu faktörler birbirinden bağımsızdır,  $E(f_1, f_2) = 0$ . (Varian, 1992, 376)

<sup>8</sup> <http://cepa.ewscholl.edu/het/essays/sequence/arbitpricing.htm>

Temel teorem uyarınca  $1 = \sum_{s \in S} \mu_s (1 + R_{fs})$ , yazılabilir. Bu formülde risk yansız gösterim

uyarınca  $\mu_s = \frac{\pi_s}{(1+r)}$  tanımlaması kullanılarak

$$(1+r) = \sum_{s \in S} \pi_s (1 + R_{fs}) = E^*(1 + R_f) = E^*(1 + E_f + \sum_{i=1}^k \beta_{fi} f_i) = E^*(1 + E_f) + \sum_{i=1}^k E^*(f_i) \text{ şeklinde}$$

ifade edilebilir.

$$E^*(1 + E_f) = 1 + E_f \text{ }^9 \text{ olduğundan } E_f - r = \sum_i \beta_{fi} (-E^*(f_i)) \text{ yazılabilir.}$$

Buna göre  $f$  aktifinin beklenen getirisi risksiz getiri ( $f$  aktifinin risk primi) arasındaki fark faktör risk primlerinin lineer bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir.  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$  Arrow menkul değerinin tahmin edilmeyen getirileri olarak düşünülürse Arrow menkul değerinin getirisi de  $R_i = E_i + f_i$  olarak beklenen getiri ile tahmin edilemeyen getirilerin toplamı olarak ifade edilir.  $E_i - r = -E^*(f_i) = \lambda_i$  olarak ifade edilebileceğinden  $\lambda_i$  Arrow menkul değerinin risk primi olarak ifade edilebilir. Buradan bir aktifin risk priminin Arrow menkul değeri gibi temel aktiflerin risk primlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceği görülür. (CEPA) <sup>10</sup> Bu faktör modelinde, beklenen getirilerin doğrusallığı ve arbitrajın yokluğunun doğal bir sonucudur. (Dybvig ve Ross, 1985)

Finansal piyasalar üzerindeki bu analizlerde temel varsayımlardan birisi de menkul kıymet fiyatlarının mevcut tüm bilgileri doğru olarak yansıttığı ve yeni bir bilgi açıklanır açıklanmaz buna cevap verdiğidir. **Etkin Piyasa Kuramı** olarak ifade edilen bu teoreme göre, geçmiş fiyat değişimleri serisi gelecekteki fiyat değişimleri hakkında hiçbir bilgi içermez. Bu anlamda piyasaların hafızası yoktur ve bunun sonucunda etkin bir piyasada finansal yanılsamalar meydana gelmez. Bunun anlamı hisse senedi fiyatlarının rastgele bir seyir izlediğidir. (Brealey, Myers, Marcus, 1996, 330)

<sup>9</sup> Beklenen değerin beklenen değeri kendisine eşittir.

<sup>10</sup> <http://cepa.newschooll.edu/het/essays/sequence/arbitpricing.htm>

### 3.4 Eksik Piyasalarda Genel Denge

Eksik piyasa ya da eksik aktif (menkul) piyasaları kavramının en sade tamını doğrusal olarak bağımsız menkul değerler sayısının, olası durumların sayısından küçük olmasıdır ve  $rank(V) < S$  ile gösterilir.

Bölüm 3.3’de değinilen Radner modeli tam anlamıyla bir eksik piyasa denge modeli değildir, bununla birlikte eksik piyasa olasılıklarını da değerlendirdiği için bu bölümde incelenecektir.

Genel denge modelinin zamanı ve belirsizliği içine alacak şekilde, piyasadaki malların teslimlerinin, zamana ve olası durumlara bağlı olarak genişletilmesinden elde edilen dengenin Pareto etkin olduğunu ve bu piyasalarda gelecek anında teslim piyasalarının aktif olmasına gerek olmadığını gördük. Bununla birlikte başlangıç zamanında koşullu mal kontratlarının, tam bir sistemi bulunmadığı zaman yeni problemler ortaya çıkacaktır. Bu durum gelecek anında piyasalarının aktif olmasına neden olacaktır. Bunun sonucunda ekonomik ajanlar, karar verirken gelecek fiyatlarının ne olacağı ile ilgili tahmin yapmak durumunda kalacaklardır. Beklentiler işin içine girecektir. Arrow'un ortaya koyduğu bu modeli Radner geliştirmiştir. (Shafer, 1998, 20) Bu modelde ardışık piyasalarda fiyat beklentileri dengede önemli bir rol oynamıştır. Modelde belirsizlikler başlangıç zamanında çözülememektedir.

Radner’e göre, eğer karar yapıcılar birbirlerinin davranışları hakkında, çevre hakkında olduğu gibi bilgi alırlarsa, bu onların karar kurallarına bir tür dışsallık olarak girer. Bu tür bir dışsallık, karar yapıcılar birbirlerinin davranışları hakkındaki belirsizliği çevredeki belirsizlik gibi hesaba katmalıdır. (Weintraub, 1974) Ekonomideki diğer ajanların davranışlarının da göz önüne alınması gerekliliği bir anlamda oyun teorisini gündeme getirir

Shafer ardışık bir mübadele için bir model tanımlamaktadır. İki zaman periyodu ve bu zaman periyotlarında  $S$  farklı olası durum tanımlamaktadır. Her bir zaman periyodunda  $I$  tane mal mübadeleye (alış verişe) konu oluyor.  $t=1$  zaman periyodunda yapılan mübadele, gerçekleşmiş olan  $s$  olası durumuna bağlıdır. Bu yüzden mal uzayı  $R^{I \times (S+1)}$  dir.  $I \geq 2$  olmak üzere ekonominin taraflarını belirten ekonomik ajanların sayısıdır ve bunların her biri için bir  $u_i : R^{I \times (S+1)} \rightarrow R$  fayda fonksiyonu ve  $w_i \in R_{++}^{I \times (S+1)}$  donanım vektörü tanımlanır. Fayda fonksiyonunun, düzgün, diferansiyellenebilir, kesin monoton ve kesin benzer içbükey olduğu kabul edilir. Anlık fiyat sistemi  $p \in R_{++}^{I \times (S+1)}$  vektörüdür.  $P(s)$ ,  $t=1$  zaman periyodunda,  $s$

olası durumunun gerçekleşmesi halinde teslim edilecek mal için  $t = 0$  zamanındaki fiyat vektörüdür.

Bu durumda ekonominin tarafları olana ajanların optimizasyon problemleri

$$P(0)(x(0) - w_i(0)) + \sum_{s \geq 1} P(s)(x(s) - w_i(s)) = 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$\max_x u_i(x) \text{ dir.}$$

Bu durumda rekabetçi denge aşağıdaki koşulları sağlayan  $((\bar{x}_i)_{i=1,\dots,I}, \bar{P})$  koleksiyondur.

- $\bar{x}_i$ ,  $i$  ajanının optimizasyon problemini  $\bar{P}$  fiyatında çözer.
- $s = 0, \dots, S$  için  $\sum_i (\bar{x}_i(s) - w_i(s)) = 0$  dir.

Radner modelinde mübadelenin  $t = 0$  zamanında yapıldığı ve kar paylarının  $t = 1$  zamanında geri döndüğü  $J$  tane aktifin olduğu düşünülür. (Bu model risklere karşı koruma sağlayan aktifleri içermez) Bir birim  $j$  aktifinin  $t = 0$  zamanında hesaplanan maliyeti  $q_j$  dir.  $(q = (q_1, \dots, q_J) \in R^J)$ . Bu bir birim aktifin  $t = 1$  zamanında  $s$  olası durumunda hesaplanan getirisi ise  $v_j(s)$  dir.

Eğer aktifin getirisi dışsal olarak veriliyorsa bu tür aktiflere nominal denir. Eğer, aktifin  $s$  olası durumunda getirisi mal vektörünün piyasa değeri ise ve  $v_j(s) = p(s)a_j(s)$  eşitliği bir  $a_j(s) \in R^I$  vektörü için yazılabiliyorsa reel aktif denir. Bu iki aktif çeşidinin bir karışımının varlığı da mümkündür.

Bu durumda  $S \times J$  boyutlu bir  $V$  getiri matrisi tanımlanabilir. Reel aktiflerin varlığı durumunda getiri matrisi  $V(p)$  fiyatların bir fonksiyonudur.  $j$  aktifinin satın alınan miktarını  $z = (z_1, \dots, z_J) \in R^J$  olmak üzere  $z_j$  ile gösterelim.  $z_j$  pozitif ya da negatif olabilir. Planlar, fiyatlar ve fiyat beklentilerinin dengesi için Radner konsepti kullanılabilir.

İktisadi ajanın optimizasyon problemi  $p$  anlık fiyat sisteminde ve  $q$  aktif fiyatları sisteminde yeniden tanımlanabilir.

$$P(0)(x(0) - w_i(0)) = -qz$$

$$p(s)(x(s) - w_i(s)) = \sum_j v_j(s)z_j \text{ olmak üzere,}$$

$\max_{x,z} u_i(x)$  dır.

Optimizasyon problemindeki birinci kısıt mallara yapılan net harcama ve aktiflerinin portföyünün maliyetinin toplamının sıfır olması gerektiğini belirtir. İkinci kısıtın anlamı ise  $t=1$  zamanında mallara yapılan net harcamanın, aktif portföyünün kar paylarına eşit olması gerektiğidir. Modelde aktifler aracılığıyla hem periyotlar arasında hem de  $t=1$  zamanında olası durumlar arasında gelir transferi söz konusudur. Bu kısıtlar ajanın her hangi bir olası durumda iflas etmesini imkansızlaştırır.

Planların dengesinde fiyatlar ve fiyat beklentileri listesi  $((\bar{x}_i, \bar{z}_i)_{i \in I}, (\bar{p}, \bar{q}))$  aşağıdaki koşulları sağlar;

- $(\bar{x}_i, \bar{z}_i)$ ,  $i$  ajanın optimizasyon problemini  $(\bar{p}, \bar{q})$  de çözer.
- $\sum_i (\bar{x}_i(s) - w_i(s)) = 0$
- $\sum_i \bar{z}_i = 0$  dır.

Sıfır zamanında bütün ajanlar için anlık  $\bar{p}(0)$  fiyatları geçerlidir. Bu anlık  $\bar{p}(0)$  fiyatları ile  $\bar{q}$  aktif fiyatlarını "*fiyatlar*" olarak tanımlıyoruz.  $t=1$  zamanında gerçekleşecek anlık fiyatların önceden tahmin edilmesi  $p^e(s)$  "*fiyat beklentileri*" olarak tanımlanır. Ajanın optimizasyon probleminin çözümü de onun "*planları*" olarak tanımlanabilir.

Fiyat beklentileri bütün ajanlar için aynı olursa ve ortak beklentiler de  $\bar{p}(s)$  olursa gözlenen  $\bar{p}(0)$  ve  $q$  fiyatlarında bütün piyasalar temizlenir ve bunun sonucunda dengeye ulaşılmış olur. Aslında bütün ajanlar her  $s$  durumunda piyasayı temizleyecek anlık fiyatları doğru olarak önceden tahmin etmişlerdir. Bu denge konsepti **Radner Dengesi** olarak isimlendirilir. Bu model aynı zamanda mükemmel öngörü dengesi "*perfect foresight equilibrium*" ve rasyonel beklentiler dengesi "*rational expectations equilibrium*" olarak da isimlendirilir. (Shafer, 1998, 23)

Radner, Arrow-Debreu modelinin tam anlamıyla bir yorumunun yapılabilmesi için ekonomik ajanların sahip oldukları hayal gücü kapasitesinin bilinmesini gerektirdiğini, bunun da teoremin sigortaların bir bütün sistemi ve gelecek piyasalarını gerektirmesi ile ilişkili olduğunu söylemektedir. (Radner, 1970, 457)

Modelde ekonominin bütün ajanları, doğru durum gerçekleştiğinde bunu doğrulayabileceklerdir. Buna ilave olarak her ajan her aktifin durumlar arasındaki getirilerinin dağılımını tam olarak bilmektedir. Gerçek aktif durumunda her ajan her  $a_j$  değerini ve nominal aktifler durumunda ise her  $v_j$  değerini bilmektedirler.

Modelde 1 periyodunda  $S$  tane  $y_s = p(s)(x(s) - w(s))$  net harcama vektörü vardır. Bu durumda nominal aktifler için öyle  $z$  portföyleri vardır ki  $y = Vz$  koşulunu sağlar. Fiyatlara göre lineer olan  $V$  getiri matrisi için  $\text{rank} V = S$  olmalıdır. Bu durumda aktif miktarı  $J \geq S$  olmalıdır. Reel aktif durumları için analiz biraz farklıdır.  $V(p)$  getiri matrisinin  $\text{rank}$  değeri fiyatın bir fonksiyonudur ve model için içseldir. Bununla birlikte reel aktif durumunda da  $\text{rank}$  değerinin  $S$  olması durumunda aktif yapılanmasının tam olduğu söylenebilir.  $J \geq S$  olması koşulu burada da geçerlidir.

Modelin ve klasik rekabetçi modelle ilişkisinin daha iyi anlaşılabilmesi için ajanların optimizasyon problemlerinde Kuhn-Tucker, koşulları kullanılır. Klasik rekabetçi modelde  $\theta_i$  çarpan olmak üzere bu optimizasyon problemi şöyle ifade edilir.

$$D_{x(s)} u_i(x_i) = \theta_i P(s), s = 0, \dots, S;$$

$$P(0)(x_i(0) - w_i(0)) + \sum_{s \geq 1} P(s)(x_i(s) - w_i(s)) = 0$$

$\lambda_i(s)$  lagrange çarpanları olmak üzere, Radner modelinde tüketici problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$D_{x(s)} u_i(x_i) = \lambda_i(s) p(s), s = 0, \dots, S;$$

$$-\lambda_i(0)q + \sum_{s \geq 1} \lambda_i(s)v(s) = 0;$$

$$p(0)(x_i(0) - w_i(0)) = -qz;$$

$$p(s)(x_i(s) - w_i(s)) = v(s)z_i, s = 1, \dots, S$$

$P$  fiyatında  $\theta$  Lagrange çarpanı ile bir  $x$  rekabetçi denge tahsisine sahip olduğumuzu varsayalım. Aşağıdaki yöntemle aynı tahsisle Radner dengesinin de elde edilebileceği gösterilebilir.

$\beta(0) = 1$  olmak üzere, sabit ve pozitif  $\beta(s)$  sayıları  $\lambda_i(s) = \theta_i \beta(s)$  olmak üzere tanımlanmış

olsun  $p(s) = \frac{1}{\beta(s)} P(s)$  ve  $q = \sum_{s \geq 1} \beta(s)v(s)$  eşitlikleri, olası bütçe kısıtları dışında bütün Kuhn-

Tucker koşulları sağlarlar. Bütçe kısıtı için  $z_i, s = 0, \dots, S$  kısıtı bütün ajanlar için sağlanır ve

$y_i$   $s$  inci koordinatları.  $y_i = p(s)(x_i(s) - w_i(s))$  olan  $S$  boyutlu bir vektördür.  $y_i = Vz_i$ .

Burada  $V$  vektörünün *rank* değeri  $S$  dir. Bu durumda öyle bir çözüm vardır ki  $\sum y_i = 0$  olduğundan,  $\sum z_i = 0$  olacak şekilde  $z_i$  seçilebilir. Bu durumda aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$\beta(s)p(s)(x_i(s) - w_i(s)) = \beta(s)v(s)z_i$$

$s \geq 1$  için durumlar arası toplam yapıldığında,

$$\sum_{s \geq 1} P(s)(x_i(s) - w_i(s)) = \sum_{s \geq 1} \beta(s)p(s)(x_i(s) - w_i(s)) = \sum_{s \geq 1} \beta(s)v(s)z_i = qz_i \text{ olur.}$$

Öncelikle eğer  $rank V = S$  ise  $q = \sum_{s \geq 1} \left( \frac{\lambda_i(s)}{\lambda_i(0)} \right) v(s)$  denkleminin bir tek çözümü vardır.

Bu nedenle  $\beta(s) = \frac{\lambda_i(s)}{\lambda_i(0)}$  tanımlanabilir daha önce  $\beta(0) = 1$  olarak alındığından ve

$P(s) = \beta(s)p(s)$  olarak tanımlandığından  $\theta_i = \lambda_i(0)$  dir.

Bu kısıtlar altında Kuhn-Tucker koşulları rekabetçi tüketici için sağlanır.

$$\begin{aligned} & P(0)(x_i(0) - w_i(0)) + \sum_{s \geq 1} P(s)(x_i(s) - w_i(s)) \\ &= p(0)(x_i(0) - w_i(0)) + \sum_{s \geq 1} \beta(s)p(s)(x_i(s) - w_i(s)) \\ &= p(0)(x_i(0) - w_i(0)) + qz_i = 0 \end{aligned}$$

Kişisel durum fiyatı olarak adlandırılabilcek  $\frac{\lambda_i(s)}{\lambda_i(0)}$  bütün ajanlar için aynıdır. Ajanların

Kuhn-Tucker koşullarını sağlamaları durumunda, mallar arasındaki marjinal ikame oranları eşitlik sağlamış olur. Bu durum kabullerimize göre Pareto etkin olma durumunu ifade eder. Eksik piyasa durumunda  $rank V < S$  durum fiyatlarının eşit olmasına gerek yoktur.

Radner, modelin bir dengeye sahip olduğunu kanıtlarken aktif piyasasının hacminin sınırlı olması koşulunu getirmiştir.

**Teorem 3.11:** Tanımlanan model, eğer her ajanın optimizasyon problemi  $z \geq b$  formundaki kısıtların ilave edilmesiyle yeniden düzenlendiyse, planların, fiyatların ve fiyat beklentilerinin bir dengesi mevcuttur.

Rekabetçi bir piyasanın temel özelliği olarak hiçbir bireysel ajan, piyasadan anlamlı bir pay alamaz, bu yüzden mübadelenin hacminin a priori olarak sınırlandırılması makuldür.

**Teorem 3.12:** Tanımlanan modelde aktif yapılanması için getiri matrisi sabit bir *rank* değerine sahipse planların, fiyatların ve fiyat beklentilerinin bir dengesi mevcuttur.

Bu teoremin kapsamı dışında kalan, gelecek kontratı olan iki aktif olduğunu düşünelim. Bu durumda  $V(p)$  matrisinin sütunları, iki aktifin olası durumlar arasındaki fiyat vektörlerine karşılık gelir. Bunun sonucunda bazı fiyatlar arasında kaçınılmaz olarak *çoklu-doğrusallık* ortaya çıkar. Bu bazı fiyatlar arasındaki mükemmel ikameye işaret eder ve matrisin *rank* değerinin en azından 1 azalmasına neden olur. Bunun sonucu talep karşılamaasının üstyarı sürekliliğinin olmamasıdır ki bunun teknik sonucu dengenin var olmamasıdır.

**Teorem 3.13:** Modelde;

- Eğer  $J \geq S$  her bir  $w \in R_{++}^{I \times J \times (S+1)}$  için planların, fiyatların ve fiyat beklentilerinin bir dengesi mevcuttur.
- Her  $V(.)$  aktif yapılanması için (nominal aktif) *rank* değeri  $S$  ise bütün donanımlar için planların, fiyatların ve fiyat beklentilerinin bir dengesi mevcuttur.

Hem  $V(p)$  matrisine ait *rank* değerinin fiyatla birlikte değişebildiği hem de piyasanın tam olmadığı durumlarda ( $J < S$ ) rekabetçi denge ile Radner dengesini değiştirmek mümkün değildir. Bununla birlikte sahte denge (pseudo equilibrium) olarak tanımlanan kavram tam piyasa için rekabetçi dengenin yerine geçebilir.

**Teorem 3.14:** Tanımlanan modelde reel aktifler de, her  $(a, w)$  için planların, fiyatların ve fiyat beklentilerinin bir dengesi mevcuttur

Tam piyasa durumunda getiri matrisi tam *rank* değerine sahip olunca rekabetçi denge ve Radner dengesi birbirlerine denk gelirler. Eksik piyasa ve reel aktifler durumunda, Radner'in sahte denge (pseudo equilibrium) olarak tanımladığı kavram gündeme gelir. Reel aktifler durumunda *rank* değerinin alabileceği en büyük değerinden küçük olması nedeniyle denge yoktur.

Sahte denge durumunda üretici ve tüketicilerin planları verilen mal ve hisse senedi fiyatları sistemi için bireysel olarak optimaldir ve verilen fiyat minimumlaştırılması, planlanan tüketici tasarruflarının planlanmış yeni tüketici yatırımlarından fazlasıdır. Denge durumunda eğer tüketici ve üretici planları gerçekleşirse mal ve hisse senedi piyasaları her zaman ve her durumda temizlenmiş olur. Bir sahte denge, eğer başlangıç hisse senetleri piyasası temizlenmiş ve hisse senedi fiyatları bütün zaman ve durumlar için pozitif ise hiçbir tüketici

herhangi bir zaman durum ikilisinde doyuma ulaşamaz. Radner, sahte denge ile doğru denge arasındaki farkı (aralığı) iflas probleminin nasıl formüle edildiğine bağlı gibi gördüğünü belirtiyor. Yine Radner bazı belirli koşullar altında sahte dengenin de bir denge olduğunu belirtmektedir. (Radner, 1972)

Bu noktada iflas koşuluna kısaca değinmek gerekecektir. Bütçe kısıtına ilave olarak tüketiciler, belirsiz açıklarının uzun vadeli bir işleme dönüşmesini önlemek için iflas koşulları ile karşılaşmalıdırlar.  $s$  durumunda tüketim ve portföy planı  $(x^h, b^h)$  olsun.  $s$  durumunu izleyen bütün düğümlerde aşırı taleplerin değeri,  $s$  durumundaki portföyünün değerini aşmazlar. Bunun anlamı tüketicinin gelecekteki net satın almalarını bugünkü tasarrufları ile finanse etmek zorunda olmasıdır. Alternatif olarak  $s$  durumundaki açığın mutlak değeri bütün gelecek aşırı arzlarının limitini aşmamalıdır.

$$\sum_i b_i^h(s) \geq \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{s'} p(s') [x^h(s') - w(s')]$$

Bu şekilde sonsuz bir ekonomi için sonlu ufuklu bir model tanımlanmış olur. Bu durumda stokastik çevreyi sonlu bir ağaç  $(S^L, \sigma)$  olarak tanımlamak mümkündür. Her  $s \in S_L$  için  $\sum_i b_i^h(s) \geq 0$  dir. Aktif ödemelerinin toplamı bir olduğu için bu kısıtı bütçe kısıtı ile ikame edilebilir.

$$\sum_i b_i^h(s) \geq \sum_{s'} p(s') [x^h(s') - w(s')] \quad (\text{Hernandez, Santos, 1993, 126-127})$$

Radner denge ve sahte denge kavramlarını karşılaştırırken yine klasik denge aletleri olan fiyat normalizasyonunu ve birim simpleks kullanır.  $P_0$ ,  $F_0$  'ın birim simpleksi ve  $P = \times P_m$

$[(y_j, z_j)_{j \in J}, (x_i, y_i, f_i)_{i \in I}, (p, v)]$  şeklinde tanımladığı ekonominin dengesi, aşağıdaki koşulları sağlar;

- $(p, v), P$  içindedir; (1)
- her  $j \in J$  için  $(y_j, z_j), \pi_j(p)$  'nin içindedir. (2)
- Her  $i \in I$  için,  $(x_i, z_i, f_i), \gamma(p, v, p[p])$  'nin içindedir. (3)
- Her  $m \in M$  için  $\sum_{k \in I \cup J} z_{km} = 0$  dir; (4)

- Her  $j \in J$  ve her  $m \in M_0$  için  $\sum_{i \in I} f_{imj} = 1$  (5)

2 ve 3. koşullar planların bireysel optimalitelerini gösterirken, 4 ve 5. koşullar mal ve hisse senedi piyasalarının her zaman-olay ikilisinde temizlenmesini ifade eder.

Shafer'in, Radner modeline dayanarak formüle ettiği, teoremler aşağıda verilmektedir.

**Teorem 3.15:** Tanımlanan modelde, aktif yapısı, piyasaları tam veya bütün aktiflerin reel tipte olması gibiye donanım uzayındaki hemen her  $w$  için planların, fiyatların ve fiyat beklentilerinin sonlu sayıda dengeleri mevcuttur ve bu dengelerin her biri lokal olarak donanımlar listesinin ve aktif yapılanması  $a$  veya  $V$ 'nin düzgün bir fonksiyonudur.

**Teorem 3.16:** Model nominal aktifler için ele alındığında,  $V$  getiri matrisinin genel pozisyonu  $J < S$  ve  $I > J$  dir. Öyle ise planların, fiyatların ve fiyat beklentilerinin sonlu sayıda dengesinin tahsisleri kümesi,  $R^{S-1}$  ile homomorf olan bir kümeyi kapsar.

Her  $v_j(s) = p(s)a_j(s)$  fiyatlara göre homojendir. Diğerlerinden bağımsız olarak sıfır periyodundaki fiyatlar için bir normalizasyon işlemi yapılabilir. Bir mal bütün olası durumlar için numerie olarak seçilebilir.  $p(0) = 1$  normalizasyon işlemi süreci şu şekilde özetlenebilir.

$$x(0) - w_i(0) = -qz;$$

$$x(s) - w_i(0) = \sum_j \left( \frac{v(s)_j}{p(s)} \right) z_j, \quad s = 1, \dots, S.$$

$v_j(s) = p(s)a_j(s)$  iken, bütün reel aktifler için, birinci periyottaki kısıtlar

$$x(s) - w_i(s) = \sum_j a_j(s)z_j \text{ dir.}$$

Kuhn-Tucker analizine göre eğer piyasa tam ise bunun sonucunda denge tahsisleri rekabetçi tahsislerle örtüşür (buluşur). Piyasanın eksik olduğunu kabul edersek, birinci periyottaki tüketim vektörünün aşağıdaki kısıtı sağlaması gerekir;

$$\text{Bazı } \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i(1) \\ w_i(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1(1) \\ a_1(2) \end{bmatrix} z_1$$

Tam piyasa durumunun aksine aktif yapısı denge tahsisini etkiler. Tam piyasadaki denge tahsisi, rekabetçi tahsislere karşılık gelirken eksik piyasa durumunda anlamlı şekilde bir farklılık vardır.

Radner modelinin etkinliği ile ilgili olarak Shafer'in ele aldığı bazı teoremler de ispatsız olarak verilecektir.

**Teorem 3.17:**

- Nominal aktifler durumunda  $rank V = S$  ise her Radner dengesi tahsis Pareto etkindir
- Reel aktifler durumunda  $V(\bullet)$  getiri matrisinin  $rank$  değeri  $S$  ise donanım uzayındaki hemen her  $w$  için Radner dengesinin tahsis Pareto etkindir.

**Teorem 3.18:** Eğer  $J < S$  ise  $(w, a)$  için Radner dengesi tahsisleri Pareto etkin değildir.

Radner modeli incelendiğinde tam ve eksik piyasa yapıları arasında esaslı farklılıklar vardır. Bir piyasanın tam olabilmesi için en azından  $S$  tane bağımsız aktif bulunmalıdır. Bu koşul Pareto etkinlik için gerek ve yeter koşuldur.

Eğer aktif yapılanması tamamlanmış, bütüncül ise  $rank(V) = S$  Radner Dengesi, Arrow – Debreu dengesi ile eşdeğerdir.  $x^* \in R^{n(S+1)H}$  tüketim talebi,  $a^* \in R^{FH}$  portföy kararı,  $q^* \in R^F$  aktif fiyatları,  $p^* \in R^{n(S+1)}$  anlık piyasa fiyatları Radner dengesinde oluşmuş olsun,  $(\mu_1, \dots, \mu_S) \in R^S$  çarpanlarının varlığı halinde  $x^*$  dağılımı ve koşullu mal fiyatları vektörü  $(p_0^*, \mu_1 p_1^*, \dots, \mu_S p_S^*) \in R^{n(S+1)}$  Arrow–Debreu dengesini oluştururlar. (Shafer, 1998, 23)

Duruma bağlı beklentilerin yer aldığı dönemler arası denge modeli ile olasılıksal fiyat beklentilerinin bulunduğu eksik piyasalar birbirine oldukça yakındır. (Dreze, 1999, 50)

Eksik piyasalarla ilgili önemli yaklaşımlardan birisi de Hahn'a aittir.

$S$ , ajanların kararlarından bağımsız dışsal, olası durumlarını gösterebilir.  $h$  ajanının tüketim kümesi  $C$ ,  $R_+^{I(S+1)}$  uzayının alt kümesidir. Bu  $S$  durumlarına yayılmış Arrow menkulleri (Arrow Securities) olduğunu varsayalım. Bu ekonominin dengesi daha önce ele aldığımız Arrow-Debreu ekonomisi ile çakışır. Arrow menkulleri ekonomisi, Arrow-Debreu koşullu mal piyasalarından farklı olarak, ardışık (dizisel) bir ekonomidir. Arrow Debreu ekonomisinde fiyat tahminlerinin herhangi bir rolü yokken Arrow menkulleri ekonomisinde ajanların birinci periyotta fiyat tahminlerinde bulunmaları gerekmektedir. Modelde ekonomideki ajanlar mükemmel öngörüye sahipler. Bunun anlamı ajanların başlangıç periyodunda dengede piyasayı temizleyen  $p(s) \in R_+^I$  fiyat vektörünü kesin olarak bilmeleridir. Kısmi olarak bu varsayımdan vazgeçebiliriz. Bu durumda ajanlar ikinci periyodun denge fiyatları kümesini bilmekte ama hangisinin hakim duruma geleceğini

bilmemektedir. İkinci periyot denge fiyatlarındaki belirsizliği kabul edince dışsal belirsizlikler yerine içsel belirsizlik kavramını modele ilave edilmesi gerekmektedir.

$B$  menkulleri ve  $a^h \in R^B$   $h$  ajanının portföyü ve  $\hat{a}$  portföyler matrisi olsun.  $j$  menkulünün geri ödemesi numerie olarak ve  $r_j$  menkullerin ödemelerinin vektörü olsun. Bu durumda  $A = \{\hat{a} | \sum a^h = 0\}$  dır.

Verilen  $p \in R_+^{IS}$  ve  $\hat{a}$  değerleri için  $h$  ajanının ikinci periyot aşırı talep fonksiyonu  $x^h(p, \hat{a}) \in R^{IS}$  dir.

Bu durumda ajanların bütçe kümesi,  $B_h(p, \hat{a}) = \{x^h | p(s) \times x^h(s) \leq R a^h\}$  olur. Bu tanımlamada  $p(s)$ ,  $s \in S$  durumundaki fiyat vektörü,  $x^h(s)$  ise aynı durumdaki aşırı talep vektörüdür.  $p(s) \times x^h(s)$ ,  $R^s$  uzayında  $p(s).x^h(s)$  lerin bileşimlerinden oluşan vektördür.  $E(\hat{a})$  olası ikinci periyot denge fiyatları ve aşırı talep tahsislerinin kümesidir.  $E(\hat{a})$  içindeki her  $\bar{p}, \{x^h(\bar{p}, \hat{a})\}_H$  elemanı, her  $h, x^h \in B^h(\bar{p}, \hat{a})$  için  $\sum_h x^h(\bar{p}, \hat{a}) = 0$  koşulunu sağlar.

İkinci periyotda bazı belirli (özel)  $s$  durumları gerçekleşir bu yüzden  $E(\hat{a})$ , birinci periyotta  $\hat{a}$ 'nın seçilmesi durumunda, olası ikinci periyot getirileri kümesidir. Genellikle ikinci periyotta çoklu dengeler söz konusudur.

Hahn, iki varsayım yapmaktadır.

1. Bütün  $\hat{a} \in A$  değerleri için ikinci periyot ekonomisi düzenlidir (sayılabilir, çoklu dengelere sahiptir).
2.  $n(\hat{a})$ , verilen  $\hat{a}$  değeri için ikinci periyot dengelerinin sayısını göstermek üzere, bütün  $\hat{a} \in A$  değerleri için  $n(\hat{a})$  sonludur. Buna göre,  $n = \max_a n(\hat{a})$  iyi tanımlanmıştır.

Her  $i$  numarası ile bir müzayedeci özdeşleştirilir. Her bir  $\hat{a}$  seçildikten sonra, bazı  $p \in R_+^{IS}$  dir. Bu birinci periyodun sonunda fakat ikinci periyot durumu ortaya çıkmadan önce gerçekleşir.

Ajanlar fiyat belirsizliği ile karşı karşıya dırlar ve belirsizlik durum uzaylarına genişler.

Hahn;  $\Sigma = \{\sigma | \sigma = (s, i), s \in S, i \in (1, n)\}$  olmak üzere, menkul değerlerin  $\Sigma$  tam olduğu bir ekonomi tanımlar. Bunun anlamı menkul değerlerin ödemelerinin genişliğidir.

Birinci periyottaki fiyat beklentileri,  $p(\sigma) = p(s, i)$  eğer  $i$  inci müzayedeci fiyatların oluşumundan sorumlu ise, ikinci periyottaki durumlarda hakimdir. Bu fiyat vektörünün bileşenlerinin ajanların birinci periyottaki inanışları ile desteklenmesi ile eşdeğerdir.

Hahn  $\sum$  tam ekonomisini şöyle tanımlamaktadır;

Bir  $\sum$  tam ekonomisi için, bir denge bütçe koşulunun sağlanması durumunda

$\bar{p} \in R_+^{I(\Sigma+1)}, x^{-h} \in R^{I(\Sigma+1)}, h=1, \dots, H, a^{-h} \in R^\Sigma, \bar{q} \in R_+^\Sigma$  dir. Bütçe koşulu aşağıdaki gibi ifade edilir.  $B^{-h}(\bar{p}) = \{x^h, a^h \mid \bar{p}(0)x^h(0) = 0 \text{ ve } \bar{q}a^h = 0; \bar{p}(\sigma) \times x^h(\sigma) = Ra^h\}$

Herhangi bir  $(x^h, p) \in B^{-h}(\bar{p})$  olmasının anlamı, bütün  $h$  'lar için.  $x^h \leq x^{-h}$  olduğu ve  $\sum_H x^{-h} = 0$  ve  $\sum_H a^{-h} = 0$  olmasıdır.

$\sum$  tam ekonomisi için, bir denge mevcut ise her  $i$  için  $\bar{p}(s, i) = p(s)$  dir. Bu fiyat her  $s$  durumu için tek ve sadece ona bağlı ikinci periyotta piyasa temizleyici fiyattır.

Tercihler  $R^{I(S+1)}$  uzayında tanımlı ve dışbükeydirler. Menkul değerler  $\sum$  tam olduklarında ajan gerçekten belirsizlikten korunmuş olur. Böylece fiyatlar ne olursa olsun, ajan  $s$  durumunda aynı tüketimi yapar. Ancak aşırı talepler  $s$  durumlarına bağlı olduklarından sadece rasyonel olarak tahmin edilmiş piyasa temizleyici fiyatlar var olabilir. Bazı  $\sum -s$  fazla menkul değerlerinin varlığına rağmen Hahn, geleneksel modele dönülebileceğini söylemektedir. Ajanlar, ikinci dönem fiyatlarını doğru bir şekilde hesapladıkları sürece bu fazlalığın görülmemesi gerekmesine rağmen özel bir durum olarak var olabileceğini belirtmektedir.  $\sum$  ve fiyat belirsizliği yeniden ortaya çıkabilir. Bu durumda  $\sum$ -tam dengesi yoktur.

Hahn ikinci özelliği de şöyle tanımlıyor. Eğer bütün menkuller Arrow menkulleriyse ve ajanlar sadece,  $\sigma$  ajanların  $\sum$  üzerindeki beklenti dağılımlarını desteklediğinde bu menkulleri alıyorsa,  $\sum$ -tam rasyonel beklentiler dengesi mevcut değildir. Ajanlar çoklu dengeler olasılığını ve  $\sum$ -tam ekonomisinin kendilerini fiyat belirsizliklerine karşı koruduğunu farkına varırlarsa, her  $s$  için tek bir denge olduğunu düşünerek hareket ederler. Rasyonel beklentiler dengesi için  $s$  durumları için bütün önceki fiyatlar dengeleri, sıfır olasılığına sahip olmalıdırlar.

Tam bir aktif piyasasının anlamı, belirsizliklerin yayılmış bir halde uzay tarafından içerildiğidir. Eğer böyle tam bir yayılma varsa fiyat belirsizlikleri görülmez. (Hahn, 1999, 67-71)



### 3.5 Belirsizliğin İçsel Olma Durumu

Belirsizlik genel denge modeli içinde ilk ele alınmaya başlandığında dışsal bir kavram olarak tanımlanmıştır. Nitekim Debreu belirsizliği üretim ve tüketim kümelerini belirleyen ve malın teslim edileceği tarihte meydana gelmesi olası dışsal bir olay olarak tanımlamaktadır. (Debreu, 1983, 115) Neoklasik okulda genel dengenin diğer büyük ismi Arrow da ekonomik hayatta belirsizliğin kaçınılmaz olduğunu belirterek, belirsizliği, gelecekte bu konuda yapılacak bir çok çalışmaya temel olacak şekilde, duruma (ortama) dışsal olarak verilen bir terim olarak formüle etmiştir. Olası durumlar, ekonomideki aktörler tarafından ortak bir şekilde görünür ve üzerinde anlaşmaya varılabilir olmalıdır. Olası durumlar insanların eylemlerinin değil sadece belirsizliğin etkisinde olmalıdır. Ahlaki davranış (moral hazard) ve ters seçimler (adverse selection), rekabetçi piyasanın varlığında dengenin kurulamamasına neden olabilmektedirler. (Huang, Mou Wu, 1999, 99-100)

Literatürde son zamanlarda içsel belirsizliklerin de ele alındığı görülmektedir. Chichilnisky, Arrow'un bir defasında fiyatlardaki belirsizliğin belki de ekonomideki en önemli belirsizlik formu olduğunu söylemesine karşın Arrow-Debreu piyasalarında belirsizliğe karşı geliştirilen yöntemlerde fiyatlardaki belirsizliğin insan davranışına bağlı olması nedeniyle ihmal edildiğini söylemektedir. (Chichilnisky, 1999, 72)

Yine Chichilnisky ve Geoffery'in "*Felaketler Geleceği: Bilinmeyen Riskler için Finansal Piyasalar*" başlıklı makalelerinde bir periyot içinde hızla değişim gösteren yeni risklerin kaçınılmaz olduğunu belirtmektedirler. (Chichilnisky, Geoffery, 1999, 120)

Genel dengenin bu yeni konseptinde; fiyatların belirsizliği bilgisine rağmen dengenin varlığı kanıtlanmaya çalışılır. Yapının ana çatısı çoklu yapısının yanı sıra bütün sözleşmelerin eşzamanlı olarak kaydedilmesi ile Arrow-Debreu modeline oldukça benzerdir. Arrow-Debreu teorisinde değişkenler (hava koşulları gibi) dışsal olarak tanımlanırlardı. Yeni aktiflerin dahil olmasıyla çoğalan ekonomide, birden fazla piyasa temizleyici fiyatlar ve bu nedenle de bir fiyat belirsizliği ortaya çıkabilir. Arrow-Debreu modelinin ilk problemi ticaretin taraflarını bu belirsizlikten korumaktır. Ancak bunun için modelin yeniden formüle edilmesine ihtiyaç vardır.

Bu durumda, fiyat belirsizliklerinin (risklerinin)<sup>1</sup> ticaretin taraflarının beklentilerini nasıl değiştirdiği ve piyasa davranışlarını nasıl etkilediğinin ele alınması gerekir. Standart Walrasçı

<sup>1</sup> Yine bu makalede de belirsizlik ve risk kavramları arasında bir ayrım yapılmadığı bu iki kavramın birbirini yerine ama genel olarak risk anlamında kullanıldığı görülmüyor.

yaklaşımında müzayedeci fiyat vektörünü duyurur ve bireyler bu fiyatta yaptıkları seçimle ne kadar aktif ellerinde tutacaklarına ve ne kadar tüketim yapacaklarına karar vererek yine bu fiyatta maksimum faydaya ulaşırlardı. Alışveriş yalnızca talep arzı eşit olduğunda yapılırdı ve tüm piyasalar temizlenirdi. Ticaretin taraflarının piyasayı temizleyen ve rast gele seçilmiş olanaklı fiyatlardan birini önceden tahmin etmeleri ya da müzayedecinin bunu açıklaması durumunda problem esasen değiştirilmiş olur. Bu durumda bireylerin optimizasyon problemleri de değişmiş olur. Müzayedecinin açıkladığı denge fiyatlarından, faydalarını maksimize edecek aktifleri seçmek yerine; piyasayı temizlemesi mümkün olan çeşitli beklentiler içinden, beklenen faydayı maksimize etmek amacıyla seçim yapılır. (Chichilnisky, 1999, 73-74)

Bir pür Arrow–Debreu değişim ekonomisinde,  $R = \{r_1, \dots, r_B\}$  olası durumlarına bağlı olarak yapılan ödemeleri yapılan menkul değerlerin getirisini gösteren  $S \times B$ 'lik bir matris olsun.  $rank(R) = S$  olduğundan durumların etkilerinden korunan bir tam bir menkul değerler kümesi mevcuttur. Mübadeleci, sıfır olmayan gradyen değerine sahip ve standart sınır koşullarını sağlayan (fiyat sıfıra giderken aşırı talebin artması) kesin benzer içbükey, iki kez sürekli diferansiyellenebilir, monoton artan Von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyonuna sahiptir.  $ED(p)$  fazla talep fonksiyonunu göstermek üzere, denge fiyat kümesi;

$$E(w) = \{p : ED(p) = 0\} \text{ dir. (Chichilnisky, 1999, 74)}$$

**Tanım 3.13:**  $E(w)$  fiyat belirsizliğinin olduğu bir ekonomi olsun, alış veriş taraf olan aktör  $h$  beklenen faydasını<sup>2</sup> maksimize eder.

$$W^h((x^{hi})_{i=1, \dots, N}) = EU^h((x^{hi})_{i=1, \dots, N}),$$

$i = 1, \dots, N$  'e olası denge fiyatları ve beklentiler, tüm aktörler için aynı olan fiyatlar kümesi üzerindeki olasılık dağılımına bağlı olmak üzere yukardaki ifade tanımlanabilir.

**Varsayım 3.4:** Ekonomi, herhangi bir başlangıç donanımı için sonlu sayıda dengeye sahiptir.

Bu şart pek çok mübadele ekonomisi tarafından sağlanır. Sonlu sayıda dengeleri veren fayda fonksiyonları aileleri çitlenmiş Hessian matrislerinin determinantları her yerde sıfırdan farklı olan  $C^\infty$  fonksiyonlarının ailesidir.

<sup>2</sup> Bu fayda fonksiyonu tanım gereği kesin içbükey benzeri, iki defa sürekli türevi alınabilen, monoton artan bir Von Neumann – Morgenstrein fayda fonksiyonudur.

Fiyat belirsizliğinin bulunduğu bir ekonomide aktifleri bu belirsizlikten koruyacak bir optimal tahsisin bulunamayacağı Hahn ve Chichilnisky tarafından gösterilmiştir. Mübadeleciler fiyat risklerini farkında olmakla birlikte bu risklerden korunmak için araçlara sahip değildirler ve ekonomi eksiktir (incomplete).

$N$  tane fiyat riskinin bulunduğu bir ekonomiye  $N$  tane Arrow securities eklenerek piyasa tamamlanabilir. Bu durumda tamamlanmış ekonomi, dışsal risklerin varlığında risk üstlenmenin optimal bir tahsisini verir.

Aşağıda yer alan sonuçlar içsel riskler durumunda işlemez. Bunun anlamı Arrow-Debreu çerçevesi içsel riskler karşısında bir koruma sağlamaz.

**Varsayım 3.5:** Fiyat risklerinin olduğu bir ekonominin Arrow-Debreu koşullu piyasaları ya da Arrow menkul değerleri ile optimal tahsisi başarması sağlanamaz. Genişletilmiş Pareto etkin bir dağılıma sahip değildir ve rekabetçi bir denge de yoktur.

Buradan, koşullu piyasalara ya da menkuller ekleyerek piyasayı bütünlemek için girişilen çabaların başarısızlıkla sonuçlanacağı söylenebilir. Bu durum aynı zamanda Arrow-Debreu ekonomilerinin fiyat riskleri karşısındaki acizliğini de gösterir.

Chichilnisky, bu noktada yeni bir  $L$  ekonomisi tanımlamaktadır. Bu ekonomide  $H$  hane halkı,  $I$  tane mal,  $S$  tane olası durumlar vardır. Her  $h$  hane halkı  $w^h \in R^{I \times S}$  başlangıç donanım vektörüne sahiptir. Olası durumlar için aktiflerin tam bir kümesi mevcuttur. Her mübadeleci mallar üzerinde bir tercihe  $V^h : R \rightarrow R$  sahiptir. Olası durumlara bağlı mallar,  $x \in R^{I \times S}$  vektörü ile belirtilirler. Bu  $L$  ekonomisi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$L = \{X = R_+^I, s = 1, \dots, S, w^h \in R^{I \times S}, V^h : X \rightarrow R, h = 1, \dots, H\}$$

Olası durumlara ilave olarak bu modelde fiyat belirsizliği durumları da vardır.  $L$  ekonomisinde belirsizliğin yapılandırılması için öncelikle her biri belirsizliğin bir katmanını gösteren  $y = 1, \dots, Y$  elemanlarını içeren bir  $Y$  kümesi tanımlanır. Her  $y$  katmanı için  $J^y$  durumları kümesi vardır.  $J^y$  elemanları piyasa temizleyici fiyat tarafından tanımlanırlar. Her  $Y$  katmanı için piyasa temizleyici bir fiyatın varlığını temsil eden bir *fiyat belirsizliğinin çözümü* tasarlanır. Fiyat belirsizliğinin çözümü, durumların gerçekleşme patikasını da verir ve  $Y$  boyutlu  $(j^1, \dots, j^Y)$ ,  $\forall y = 1, \dots, Y, j^y \in J^y$  vektörü tarafından temsil edilir.  $y$  inci katman

içindeki olası durum kümelerindeki  $j^y$  durumunun gerçekleşme olasılığı  $\sum_{z=1}^{J^y} \pi_{j^z} = 1$  olmak üzere,  $\pi_{j^y}$  dir. Bu durumda fiyat belirsizliğinin çözümü kümesi

$$\Phi = \prod_{z=1}^Y J^z \text{ dir.}$$

Her gerçekleşme patikası  $(j^1, \dots, j^Y) \in \Phi$ ,  $\pi_{j^1 \dots j^Y} = \pi_{j^1} \times \pi_{j^2} \times \dots \times \pi_{j^Y}$  olasılığı ile meydana gelebilir. Gerçekleşme patikaları bir ağaç diyagramı ile ifade edilir.

$L$  ekonomisindeki, belirsizlik yapılanması, sonlu  $Y$  kümesi belirsizlik katmanını, her sonlu  $J^y$  kümesi  $y$  katmanındaki durumu temsil ederlerken ve  $\pi_{j^y}$   $y$  inci katmandaki  $j^y$  durumunun gerçekleşme olasılığı olmak üzere şu şekilde listelenir;

$$\{Y, J^y, y=1, \dots, Y, \pi_{j^y}\}$$

Fiyat belirsizliği çözümü,  $j^y \in J^y$  iken bir vektördür  $(j^1, \dots, j^Y)$ . Fiyat belirsizliği çözümü kümesinin sayısal değeri  $\Phi = \prod_{z=1}^Y J^z$  dir.

$L$  ekonomisinde refahın, belirsizliğin  $y$  inci katmanı durumları arasında transfer edilmesine izin veren bir  $y$  aktifi (asset) tanımlanabilir.

**Tanım 3.14:** Temel  $y$  aktifi bir vektördür.  $(1, \dots, k, \dots, 0) \in R^{J^y}$  Bu vektör  $j^1 \in J^y$  dönemindeki 1 birim karşılığında  $j^y \in J^y$  durumunda  $k$  birimlik ödeme yapar, bunun dışındaki bütün durumlarda 0 birimlik ödeme söz konusudur.  $y$  aktiflerinin bir portföyü,  $y$  aktiflerinin bir lineer kombinasyonudur.  $\theta^{J^y} = (\theta_1, \dots, \theta_{j^y}) \in R^{J^y}$  vektörü, belirsizliğin  $y$  inci katmanlarının  $J^y$  durumları arasında servet transferini temsil eder.

**Varsayım 3.6:** Her katman için, bir tam  $y$  aktif kümesi vardır. Öyle ki  $J^y - 1$  tane farklı temel  $y$  aktifi vardır.

**Varsayım 3.7:** He mübadelecinin başlangıçta herhangi bir fiyat belirsizliği durumu için aktife sahip olmadıklarını varsayarsak her mübadelecinin  $y$  aktif portföysü  $\theta^y$  aşağıdaki

$$\text{koşulu sağlar. } \sum_{i=1}^{J^y} \theta_i^h = 0$$

**Tanım 3.15:**  $\theta$  portföysü, ekonomide fiyat belirsizliği için, önceden tahmin edilmiş (ex ante) bir koruma stratejisidir. Her katman için  $[\theta^y]$   $J^y$  lerden oluşur ve  $\theta = ([\theta^1], \dots, [\theta^Y])$  şeklinde ifade edilir.

$$\theta = ([\theta^1], \dots, [\theta^Y])$$

$$[\theta^y] = (\theta^{j^1}, \dots, \theta^{j^y})$$

$$\theta^{j^y} = (\theta_1^y, \dots, \theta_{j^{y-1}}^y) \in R^{j^{y-1}}$$

$$\text{Ve her } y \text{ için } \sum_{i=1}^{j^{y-1}} \theta_i^y = 0$$

$\theta$  portföy koruma rolünü tanımlamak için her  $y=1, \dots, Y$  için portföynün  $y$  inci katmanı  $[\theta^y]$ ,  $y$  katmanındaki her  $J^y$  durumu için servet transferi vektörü içerir, buna göre  $y-1$  katmanında  $J^{y-1}$  fiyat belirsizliği durumunu sigortalamanın  $J^y$  yolu vardır. Her  $J^{y-1}$  boyutlu  $\theta^{j^y}$  vektörü  $j^y - 1$  aktif tanımlar ki bu aktif  $y-1$  katmanı belirsizliklerinin  $J^{y-1}$  durumları arasında servet transferi yapar. Bu durum gösterir ki belirsizliğin  $y-1$  katmanındaki koruması belirsizliğin yeni bir katmanına döner. Bu yeni  $y$  katmanı, yeni bir  $J^y$  durumlarına sahiptir ve bunların her biri, piyasanın  $y-1$  inci seviyesinin olası piyasa temizleyici fiyatlarını temsil ederler.

$\theta$  portföysü bütün olası belirsizlik çözümleri  $(j^1, \dots, j^Y) \in \Phi$  için önceden tahmin edilen bir yatırım planı yapılmasını sağlar. Bu yüzden fiyat belirsizliklerinin her gerçekleşme patikasında  $\theta$  portföy patikasını tanımlar.

$$\theta(j^1, \dots, j^Y) = (\theta_{j^0}^{j^1}, \dots, \theta_{j^{Y-1}}^{j^Y}) \in R^Y$$

Mübadeleci için  $x^h$  planı, olası her fiyat belirsizliği çözümü için önceden tahmin edilen kontratlardan oluşur. Bu nedenle mübadele planı  $x \in R^{\Phi \times I \times S}$  vektörüdür. Her fiyat belirsizliği çözümü için,  $h$  mübadelecisinin,  $x^h$  mübadele planı,  $R^{I \times S}$  uzayındaki  $Y$  net mübadele vektörünün bir patikasını tanımlar. Her  $y$  katmanındaki her  $j^y$  durumu için  $R^{I \times S}$  uzayındaki bir vektör.

$$x^h(j^1, \dots, j^Y) = (x_{j^1}^h - w^h, x_{j^2}^h - x_{j^1}^h, \dots, x_{j^Y}^h - x_{j^{Y-1}}^h) \in R^{\Phi \times I \times S} \text{ dir.}$$

Yukarıdaki ifadede 0 katmanındaki (yani başlangıç zamanındaki) net mübadele tanımdan dolayı,  $x_{j^0} = w^h$  dır.

$L$  ekonomisi için, yukarıda tanımlanan  $x \in R^{\Phi \times I \times S}$  mübadele planı ile uyumlu önceden tahmin edilen bir fiyat vektörü  $p \in R^{\Phi \times I \times S}$ , her belirsizlik katmanı için, tüm piyasaların denge fiyatlarının listeler. Her fiyat belirsizliği çözümü için  $(j^1, \dots, j^Y) \in \Phi$ ,  $p$  bir fiyat patikası tanımlar. ,  $p(j^1, \dots, j^Y) = (p^{j^1}, \dots, p^{j^Y}) \in R^{\Phi \times I \times S}$

Fiyat belirsizliği çözüldüğü zaman,  $(j^1, \dots, j^Y)$  patikası ve bu patikadaki bütün net mübadeleler  $x^h(j^1, \dots, j^Y)$  gerçekleşmiş olur. Bütün belirsizlikler çözüldükten sonra hane halkının toplam tüketim vektörü;

$$x_{j^Y}^h = w^h + \sum_{z=0}^Y (x_{j^z}^h - x_{j^{z-1}}^h) \in R^{I \times S}$$

$z$  katmanındaki (dönemindeki) donanım  $x_{j^{z-1}}^h$  olduğuna göre,  $(x_{j^z}^h - x_{j^{z-1}}^h)$  net mübadeledir.

$h$  mübadelecisinin  $x^h$  planı ile  $(j^1, \dots, j^Y)$  patikası boyunca net mübadelelerin faydası, başlangıç donanımı ile birlikte ifade edilir.

$$V^h(x^h(j^1, \dots, j^Y)) = V^h\left(w^h + \sum_{z=0}^Y (x_{j^z}^h - x_{j^{z-1}}^h)\right) = V^h(x_{j^Y}^h)$$

**Varsayım 3.8:**  $x^h$  tüketiminin, olası bütün belirsizlik çözümleri üzerindeki beklenen faydası,  $U^h(x^h) = EV^h(x^h(j^1, \dots, j^Y))$  dir.

**Varsayım 3.9:** Her  $p$  fiyat sistemi ve  $\theta^h$  portfolyosu için, bütün önceden tahmin edilen  $x^h$  mübadele planlarının, (mübadelecinin bütün fiyat belirsizlikleri çözümlerinde destekleyebileceği) kümesi, bütçe kümesidir.

$$x^h(j^1, \dots, j^Y) = (x_{j^1}^h - w^h, x_{j^2}^h - x_{j^1}^h, \dots, x_{j^Y}^h - x_{j^{Y-1}}^h) \text{ olduğuna göre ve } \sum_{j^1=1}^{J^1} p^{j^1} (x_{j^1}^h - w^h) = 0$$

koşulunun sağlandığı varsayımıyla, bütçe kümesi;

$$B(p, \theta^h) = \{x^h, \forall (j^1, \dots, j^Y) \in \Phi, p^{j^Y} (x_{j^1}^h - x_{j^{Y-1}}^h) = \theta_{j^Y}^{h^{j^Y+1}} \forall y = 1, \dots, Y\} \text{ dir.}$$

$L$  ekonomisinin dengesinin  $p^*$  fiyat vektöründe sağlandığını, her  $h$  mübadelecisinin alış verişi planının  $x^{h*}$  ve portföyünün  $\theta^{h*}$  olduğunu varsayarsak,  $x^{h*}$  tüketim planının tüketicinin  $U^h(x^h)$  faydasını  $B(p^*, \theta^{h*})$  bütçe kümesi içinde maksimize eder. Bu durumda tüm piyasalar temiz ve bütün mübadeleciler fiyat risklerine karşı sigortalanmış olurlar.

**Tanım 3.16:**  $\forall h$  kendi toplam tüketimlerini ve bundan dolayı fayda seviyelerini fiyat belirsizliğinin gerçekleştiği herhangi bir durumda aynı olduklarında, bütün mübadeleciler  $h=1, \dots, H$ , kendi  $\{x^h\}$  tüketim planlarında, fiyat risklerine karşı tamamen sigortlanamış olurlar.

$$\begin{aligned} x_{j^y}^{h*} &= w^h + \sum_{z=1}^Y (x_{j^z}^* - x_{j^{z-1}}^*) = x_{j^y}^{h*} \\ &= w^h + \sum_{z=1}^Y (x_{j^{z'}}^* - x_{j^{z-1'}}^*) \end{aligned}$$

Bu durumda tam bir fiyat güvencesi altında dengenin varlığını ele alabiliriz.  $L$  ekonomisinde, her üretici için  $x^{h*}$  tüketim planının beklenen faydasını,  $B(p^*, \theta^{h*})$  bütçe kümesi üzerinde maksimize etmesi durumunda, fiyat belirsizliklerine karşı tam güvencenin sağlandığı bir denge vardır. Bu denge durumunda her fiyat belirsizliği çözümünde, bütün aktif piyasalarını fiyat belirsizliğine korunur.

$$(\theta^{h*})_0^1 = 0 \text{ olduğunda } \sum_{h=1}^H (\theta^{h*})_{j^{y-1}}^{j^y} = 0, \text{ dir.}$$

Aynı zamanda belirsizliğin her katmanındaki her bir durumda bütün mal piyasaları da temizlenmiştir.  $x_{j^0}^{h*} = w^h$  olmak üzere,

$$\sum_{h=1}^H (x_{j^y}^{h*} - x_{j^{y-1}}^{h*}) = 0$$

Bundan dolayı;  $\sum_{h=1}^H x_{j^y}^{h*} - w^h = 0$  dir.

**Teorem 3.19:**  $L = \{X = R_+^l, s=1, \dots, S, w^h \in R^{l \times S}, V^h : X \rightarrow R, h=1, \dots, H\}$  ekonomisi, bir  $\{Y^*, J^{y*}, x^{h*}, \theta^{h*}, p^*\}$  dengesine sahiptir. Bu denge aynı zamanda fiyat risklerine karşı tam koruma sağlar ve Pareto, etkin bir tahsis sağlar.

Bu teoremin ispatında öncelikle, hane halklarının tek kaygısının olası durumlar  $s = 1, \dots, S$  tarafından tanımlanmış belirsizlikler olduğu bir Arrow-Debreu  $E_1$  ekonomisini ele alalım.  $E_1$  ekonomisinin Walrasçı bir denge kümesi  $J^{1*} = \{1, \dots, J^{1*}\}$  ile gösterilsin, bu küme  $L$  ekonomimizin fiyat belirsizliğinin birinci katmanını tanımlar. Tanımdan hareketle,  $E_1$  ekonomisinin her bir  $J^{1*}$  dengesi bir  $p^* \in R^{l \times S}$  fiyat vektörünü ve her  $h$  için bir  $x_{j^1}^{h*} \in R^{l \times S}$  tüketim vektöründen oluşur. Bu noktada ikinci bir  $E_2$  ekonomisi aynı hane halkları ve  $E_1$  deki  $l$  malları ve  $S$  olası durumları için tanımlansın.  $E_2$  farklı bir mal uzayı ve her  $h$  için farklı bir başlangıç donanımı ve farklı faydalar belirler eder.

$E_2$  ekonomisinin mal uzayında yeni bir  $J^{1*}$  belirsizlik durumu vardır ve bundan dolayı mal uzayı  $R^{l \times S \times J^{1*}}$  dir.  $E_2$  uzayında  $h$  hane halkının başlangıç donanımı  $E_1$  ekonomisinin  $J^{1*}$  dengesi tarafından tanımlanmıştır.  $h$  mübadelecisinin  $E_2$  ekonomisindeki tüketiminin faydası  $J^{1*}$  durumları üzerindeki tüketimlerin beklenen faydasıdır.

$$V^h : R^{l \times S \times J^{1*}} \rightarrow R$$

Bu modelde bütün durumların gerçekleşme olasılıklarının aynı olduğu değerlendirilmektedir. Bu koşulda fayda fonksiyonu yeniden tanımlanabilir;

$$V^h(y_1, \dots, y_{j^1}) = \sum_{i=1}^{J^{1*}} (1/J^{1*}) U^h(y_i) .$$

Şimdi  $E_2$  ekonomisinin  $J^{2*}$  gibi bir Walrasçı dengeye sahip olduğu varsayalım.  $E_2$  ekonomisinin her bir  $J^{2*}$  dengesi bir  $j^2 = 1, \dots, J^{2*}$  olmak üzere  $p_{j^2}^* \in R^{l \times S \times J^{1*}}$  fiyat vektörü ve her  $h$  için bir  $x_{j^2}^{h*} \in R^{l \times S \times J^{1*}}$  tüketim vektöründen oluşur. Burada  $E_2$  ekonomisinin Walrasçı dengenin  $J^{2*} = \{1, \dots, J^{2*}\}$  kümesi,  $L$  ekonomisinin belirsizliğinin  $y=1$  katmanını tanımlar.

$E_2$  ekonomisinde, fiyat belirsizliğinin  $J^{1*}$  durumları için piyasa bağılılıkları vardır. Ekonominin  $J^{1*}$  fiyat belirsizliği durumları arasında servet transferini sağlayan 1-aktif tanımlanır. Bu servet transferi vektörü  $\sum_{i=1}^{J^{1*}} \theta_i = 0$  olmak üzere  $(\theta_1, \dots, \theta_{j^1})$  dir.

Aktiflerin tümünün fiyat belirsizliğinin  $J^{1*}$  durumları için korumaya ihtiyaçları olduğundan dengede her  $h$  mübadelecisi durumdan bağımsız bir tüketime ulaşabilir. Bunun nedeni bu  $J^{1*}$  durumlarının her birinde  $E_2$  ekonomisinin toplam donanımın  $w = \sum_h w^h$  aynı olması ve her  $h$  mübadelecisi için  $J^{1*}$  durumlarının gerçekleşme olasılıklarının aynı olmasıdır.

$J^{1*}$  durumlarında bütün mübadeleciler, durumdan bağımsız tüketimlere ulaşabilirler. Bunun anlamı  $E_2$  ekonomisinin dengesinde  $h$  mübadelecisinin tüketim vektörü  $x_{j^2}^{h*} \in R^{l \times S \times J^{1*}}$ ,  $S \times l$  koordinat sisteminin  $J^{1*}$  kez tekrar etmesinden oluşur. Buradan bu vektörün tamamıyla  $S \times l$  koordinatları ile özdeş olduğu görülür. Dolayısıyla  $x_{j^2}^{h*} \in R^{l \times S}$  dir. Buna karşılık olarak fiyat vektörü  $p^{j^{2*}} \in R^{l \times S}$  dir.

$E_2$  ekonomisinde her mübadeleci aynı tüketime ulaşmak için servetlerini  $J^{1*}$  durumları arasında kaydırabilirler.  $E_2$  ekonomisinin herhangi bir piyasa temizleyici  $j^2$  dengesinde, bu servet kaymaları  $j^2$  durumunda  $p_{j^2}^*$  denge fiyatından hesaplanmış başlangıç donanımlarının değerlerinin farklılıklarının  $p_{j^2}^* x_{j^1}^{h*}$  vektörüne eşittir. Denge tüketiminin her  $j^1 = 1, \dots, J^{1*}$  için aynı fiyatlarda değeri  $p_{j^2}^* x_{j^2}^{h*}$  dir.

Her  $j^2 = 1, \dots, J^{2*}$  üzerinde  $p^{j^{2*}} x_{j^2}^{h*} = \sum_{j^1=1}^{J^{1*}} (p^{2*} x_{j^1}^{h*})$  dir.

---

Ve yine aynı koşulda  $\sum_{j^1=1}^{J^{1*}} p^{2*} (x_{j^2}^{h*} - x_{j^1}^{h*}) = 0$  (1)

Bu noktada  $[\theta^{h2}]$  şeklinde,  $J^{2*}$  vektörünün koleksiyonları tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} [\theta^{h2}] &= (\theta_1^{h*j^2}, \dots, \theta_{j^1}^{h*j^2}) \\ &= (p^{2*} (x_{j^2}^{h*} - x_{j^1}^{h*}), \dots, p^{2*} (x_{j^2}^{h*} - x_{j^1}^{h*})) \in R^{J^{1*}} \end{aligned} \quad (2)$$

eşitliğinden,  $[\theta^{h2}]$  1-aktifinin 2. katman portföylerini her  $j^2 = 1, \dots, J^{2*}$  için tanımlar.

$$\sum_{j^1=1}^{J^{1*}} \theta_i^{h*j^2} = 0$$

Bu 2. katman portföyünün sağlaması gereken koşuldur.

$E_2$  ekonomisinde  $J^{1*}$  dengeleri arasındaki tüketimlerin eşitliğine ulaşmanın  $J^{2*}$  farklı yolu vardır. ( $E_2$  ekonomisinin her bir dengesi için bir tane) Buna karşılık olarak 1. seviye aktifinin  $J^{2*}$  portföyleri,  $[\theta^{h2}]$  katman 2 portföylerini yaratırlar. (2'de gösterildiği gibi)

Bütün  $J^{1*}$  durumları arasında tüketim eşitliğine ulaşmanın  $J^{2*}$  farklı yolu olduğundan,  $E_2$  ekonomisi,  $y=2$  ikinci katman ile tanımlanan  $J^{2*}$  yeni fiyat belirsizliği durumunu içerir. Bu yeni durumlar içi koruma sağlamak yeni bir  $E_3$  ekonomisi tanımlamayı gerektirir.  $E_2$  ekonomisinin tanımlanmasındakinden tek farkı mal uzayının  $R^{l \times S \times J^{2*}}$  olmasıdır. Bu mal uzayında  $J^{2*}$  tane yeni belirsizlik durumu vardır. Bu işlemi tekrara ederek bir  $\{E_y\}$  ekonomiler dizisi oluşturulabilir. Her  $E_y$  ekonomisi,  $E_{y-1}$  ekonomisinin  $J^{y-1*}$  dengelerinin kümesi tarafından sağlanan donanımına sahiptir. Her  $E_y$  ekonomisi önceki fiyat risklerine karşı korunur.  $E_y$  ekonomisindeki her  $h$  mübadelecisi  $J^{y-1*}$  durumları boyunca durumdan bağımsız tüketimlere ulaşabilirler.

$E_y$  ekonomisi bir  $R^{l \times S \times J^{y-1*}}$  tüketim kümesine sahiptir.  $h$  mübadelecisi  $J^{y-1*}$  dengelerindeki tahsislerinde başlangıç donanımına sahiptir.  $x_{J^{y-1}}^{h*}$   $h$  mübadelecisinin  $E_{y-1}$  ekonomisinde durum bağımsız  $J^{y-1*}$  inci denge tahsisi iken, bu başlangıç donanımları vektörü

$$(x_1^{h*}, \dots, x_{J^{y-1}}^{h*}) \in R^{l \times S \times J^{y-1*}} \text{ dir.}$$

$h$  mübadelecisinin  $E_y$  ekonomisindeki tüketiminin faydası,  $J^{y-1*}$  durumları boyunca tüketimlerinin beklenen faydasıdır.  $V^h : R^{l \times S \times J^{y-1*}} \rightarrow R$ , yine bütün durumlar aynı olasılıkla değerlendirilmektedir.

$$V^h(y_1, \dots, y_{J^{y-1}}) = \sum_{i=1}^{J^{y-1*}} (1/J^{y-1*}) U^h(y_i)$$

$E_y$  ekonomisi, Walrasçı  $J^{y*}$  dengesine sahipse, bu dengelerin her biri bir  $p_{J^{y*}}^* \in R^{l \times S \times J^{y-1*}}$  fiyat vektörü ve her  $h$  için bir  $x_{J^{y*}}^* \in R^{l \times S \times J^{y-1*}}$  tüketim vektöründen oluşurlar.  $E_y$  ekonomisinin Walrasçı dengelerinin  $J^{y*} = \{1, \dots, J^{y*}\}$  kümesi,  $L$  ekonomisinin belirsizliğinin  $y$  inci katmanını belirler.  $E_y$  ekonomisinde meydana çıkan fiyat belirsizlikleri durumları durumlarında bütün aktiflerin korumaya ihtiyaçları olduğundan,  $J^{y-1*}$  durumlarında hane

$E_y$  halkları bütün risklere karşı güvence altına (sigortalanmış) alınmışlardır. Bunun anlamı,  $E_y$  ekonomisinin dengesinde tüketim vektörü  $x_{j^y}^{h*} \in R^{l \times S \times J^{y-1*}}$ ,  $S \times l$  koordinat sisteminin  $J^{y-1*}$  kez tekrar etmesinden oluşur. Buradan bu vektörün tamamıyla  $S \times l$  koordinatları ile özdeş olduğu görülür. Dolayısıyla  $x_{j^y}^{h*} \in R^{l \times S}$  ve fiyat vektörü de  $p^{j^y*} \in R^{l \times S}$  dir.

$E_y$  ekonomisinde her mübadeleci, her durumda aynı tüketim seviyesine ulaşmak için servetlerini  $J^{y-1*}$  durumları arasında kaydırabilirler.  $E_y$  ekonomisinin herhangi bir piyasa temizleyici  $j^y$  dengesinde, bu servet kaymaları  $j^y$  durumunda  $p_{j^y}^*$  denge fiyatından hesaplanmış donanımlarının değerlerinin farklılıklarının  $p_{j^y}^* x_{j^y}^{h*}$  vektörüne eşittir. Tanım gereği her hane halkının tüketimi kendi bütçe kısıtlaması içindedir.

Her  $j^y = 1, \dots, J^{y*}$  üzerinde  $p^{j^y*} x_{j^y}^{h*} = \sum_{j^y=1}^{J^{y*}} (p^{j^y*} x_{j^y-1}^{h*}) = 0$  dir.

$$\text{Bundan dolayı, } \sum_{j^y=1}^{J^{y-1*}} p^{j^y*} (x_{j^y}^{h*} - x_{j^y-1}^{h*}) = 0 \quad (3)$$

Bu noktada  $[\theta^{hy}]$  şeklinde,  $J^{y*}$  vektörünün koleksiyonları tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} [\theta^{hy}] &= (\theta_1^{h*j^y}, \dots, \theta_{j^1}^{h*j^y}) \\ &= (p^{j^y*} (x_{j^y}^{h*} - x_{j^1}^{h*}), \dots, p^{j^y*} (x_{j^y}^{h*} - x_{j^y-1}^{h*})) \in R^{J^{y-1*}} \end{aligned} \quad (4)$$

(4) eşitliğinden,  $[\theta^{hy}]$  (y-1)-aktifinin y. katman portföylerini her  $j^y = 1, \dots, J^{y*}$  için tanımlar.

$$\sum_{i=1}^{J^{y-1*}} \theta_i^{h*j^y} = 0$$

$E_{y*}$  ekonomisi tek ve Pareto etkin Walrasçı dengeye sahiptir.

$\exists Y^*$  vardır ki  $x_{j^y}^{h*} = x_{j^y}^{h*}$ .

Belirsizlik yapısı  $Y^*$  katmanlar indeksi tarafından tanımlanır.  $y=1, \dots, Y^*$ . Her bir katmandaki  $j^y = 1, \dots, J^{y*}$  gösterilen  $J^{y*}$  belirsizlik durumları vardır. Her  $j^y$  için  $\pi_{j^y} = \frac{1}{J^{y*}}$

olasılığı tanımlanır. Her  $y=1,\dots,Y^*$  için  $E_y$  ekonomisinin  $j^y$ ,  $p^{j^y} \in R^{I \times S}$  denge fiyat vektörü olacaktır.

$$p^* = (p^{j^1}, \dots, p^{j^{Y^*}})_{j^1=1,\dots,j^{Y^*}, j^y=1,\dots,j^{Y^*}} \in R^{\Phi \times S}$$

Son olarak da  $h$  hane halkının önceden tahmin edilen  $\theta^{h*}$  portföysü aşağıdaki ifadeye eşit olur.

$$x^{h*} = ((x_{j^1}^{h*} - w^h), \dots, (x_{j^{Y^*}}^{h*} - w^h))_{j^1=1,\dots,j^{Y^*}, j^y=1,\dots,j^{Y^*}} \in R^{\Phi \times S}$$

Denge için  $\sum_{h=1}^H (x_{j^y}^{h*} - x_{j^{y-1}}^{h*}) = 0$  ve bundan dolayı;  $\sum_{h=1}^H x_{j^y}^{h*} - w^h = 0$  olduğundan her piyasa,

$E_{y-1}$  ekonomisinin her piyasanın bağlı olduğu  $J^{y-1}$  belirsizlik durumunu,  $E_y$  ekonomisinin her bir  $j^y$  Walrasçı dengesinde temizlenmek zorundadır. Yine,  $x_{j^y}^{h*} = x_{j^{y-1}}^{h*}$  olduğundan,  $U^h$ ,  $x^{h*}$  vektöründe maksimum değerine ulaşır ve bütün mübadeleciler tam güvenceye sahiplerdir.  $x_{j^y}^{h*} \in R^{I \times S}$  tahsisi  $E_y$  ekonomisinin bir Walrasçı dengesi olduğu için Pareto etkindir. (Chichilnisky, 1999)

İktisat, gerçek dünyaya yaklaşmaya çabaladıkça zaman ve belirsizlik kavramları daha çok tartışılmaya başlanmıştır. Genel denge kuramı da Debreu'dan (1959) başlayarak bu kavramlara analizinde yer vermiştir. Bununla birlikte iktisat literatüründeki belirsizlik – risk tartışmaları çerçevesinde ele alındığında genel denge modelindeki belirsizlik kavramının belirsizlikten çok istatistiksel bir beklenen değer yaklaşımı olduğu görülmektedir. Zamanın modele dahil edilmesiyle farklı zamanlardaki olası durumlar, meydana gelme olasılıkları çerçevesinde incelenmektedirler.

Zaman boyutunun ele alınmasıyla birlikte genel denge modeli finansal piyasaları da kapsamıştır. Başlangıçta zamansız bir ekonomi için ulaşılan sonuçlar yine kimi varsayımlar ve yaklaşım farklılıkları ile zamanın ve dolayısıyla belirsizliğin bulunduğu bir ekonomide elde edilmişlerdir. Koşullu mal piyasalarından, ardışık ekonomilere, eksik piyasalara ve belirsizliğin içsel olduğu durumlara kadar farklı modellerde genel dengeye nasıl ulaşıldığı ele alınmıştır. Finansal piyasaların, makro bir çerçeve yerine mikro bir analize tabi tutulması ve bu soyutlama içerisinde finansal piyasalarda da dengeye ulaşılması önceden beklenen bir sonuç olarak elde edilmektedir.

#### 4. SONUÇ

Çalışmada 20. Yüzyıl iktisadının hakim okulu neoklasik iktisadın temel dayanaklarından biri, kimi iktisatçılara göre **sert çekirdeği** olan Genel Denge Kuramı Arrow-Debreu'nun yöntemiyle ve matematiksel bir yaklaşımla ele alınmıştır. Modelin tarihçesinden başlanarak, önce bir tam rekabet piyasasında dengenin varlığı ve bu dengenin Pareto optimum olduğu ispatlanmış, bunun ardından Pareto etkinsizlik yaratan eksik rekabet, dışsallıklar ve kamu mallarının varlığı durumunda da bir rekabetçi ekonominin, gerekli varsayımlar ve uygun matematiksel teknikler kullanılarak dengeye ulaşabileceği gösterilmiştir.

20. yüzyılda doğa bilimlerinde başlayarak, bilim felsefesi ile sosyal disiplinlerde de ana tartışma konularından biri olan ve iktisadı da etkileyen belirsizlik kavramı, zamanlı modeller yoluyla genel denge analizine de taşınmıştır. Çalışmada zaman ve belirsizlik altında, genel denge modelleri ile bununla bağlantılı olarak finansal piyasalarda genel denge incelenmiş, diferensiyel topoloji tekniklerinin de kullanılması ile rasyonel beklentiler, arbitraj olmaması gibi varsayımlara dayanılarak finansal piyasalarda dengenin varlığı ve etkinliği çeşitli modeller baz alınarak gösterilmiştir. Ancak genel denge çerçevesinde belirsizlik kavramı, belirsizlik-risk farklılığı gözetilmeden gelecekteki olası durumların gerçekleşme beklentileri ile sınırlı kalmıştır. Özellikle finansal piyasalar gibi makro ölçekte pek çok değişken barındıran piyasalardaki bu tür bir mikro tabanlı analiz, gerçek dünyayı açıklayıcı olmamakla birlikte, başarılı bir modelleme olması açısından önemlidir.

Genel denge modeli bir anlamda iktisat disiplininin, yoğun matematik kullanımı yoluyla fizik bilimine benzeyerek bilimselleşme çabasının en önemli örneklerinden birisidir. Ancak bu çabanın sonucunda matematik kullanımıyla aksiyomatikleşmiş ve sınanamaz varsayımlara dayanan matematik benzeri bir yapı ortaya çıkmıştır. Genel olarak neoklasik iktisatçılar bir yandan Popperci anlamda bilimsel olmanın kriteri olan sınanabilirliliğin iktisat için çok katı olduğunu öne sürerlerken, öte yandan bu formalleşmiş aksiyomatik yapıya dayanarak (matematikçiler bile matematiğin bir bilim olduğu iddiasında bulunmazlarken) iktisadın bir bilim olduğunu iddia etmektedirler. Oysa burada bir anlamda ulaşılması hedeflenen sonuca göre belirlenmiş varsayımlarda bulunularak, klasik ve diferensiyel topolojiye dayanan uygun matematiksel tekniklerle tam rekabet piyasalarında hemen her koşulda dengenin sağlanacağı ispatlanmaktadır. Çalışma bu yönüyle sosyal disiplinlerdeki, bir takım değer yargılarının bilimselmiş gibi sunulması sorununa işaret etmektedir. Neoklasik iktisadın bu yapısı, Avusturya Okulu, Kamu Tercihi Okulu gibi politik iktisat okulları tarafından da belli açılardan eleştirilmektedir.

Günümüzde çeşitli açılardan sorgulanmakla birlikte, neoklasik iktisat hala iktisat içindeki hakim okul durumdadır. Genel Denge Kuramı, bir anlamda bu okulun bilimsel dayanağı olarak görülmektedir. Bu açıdan bakıldığında teori, iktisat disiplininin anlaşılması açısından önemli bir modellemedir. Modelin gerçek dünyayı açıklama gücünün sınırlı olduğu açıktır, ancak iktisadın bu tür modellere baş vurmada işlevsel olması da mümkün gözükmemektedir.



**KAYNAKLAR**

- Ahlatçoğlu, M.ve Tiryaki, F., ( 1998 ), **Oyunlar Teorisi**, Yıldız Teknik Üniversitesi Basın Yayın Merkezi, İstanbul
- Akalın G., ( 1981 ), **Kamu Ekonomisi**, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara
- Akat, A.S., ( 1980 ), **İktisadi Analiz**, İÜ İktisat Fakültesi, İstanbul
- Aksoy, Y., ( 2001 ), **Matematik [ve] Tarihi**, Yıldız Teknik Üniversitesi Basın Yayın Merkezi, İstanbul
- Akyüz, Y., ( 1980 ), **Sermaye Bölüşüm Büyüme**, Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayınları No:453, Ankara
- Alada, A.D., ( 2000 ), **İktisat Felsefesi ve Belirsizlik**, Bağlam Yayınları, Ankara
- Allen, B.ve Jordan. J.S, ( 1998 ), "The Existence of Rational Expectations Equilibrium: A Retrospective", **Essays in Economic Analysis Atribute to Roy Radner**, Edited by Majumdar, M.,Cambridge University Press, UK
- Alp, M.ve Musayev, B., ( 2000 ), **Fonksiyonel Analiz**, Balcı Yayınları, Kütahya
- Arrow, K., ( 1984 ), "İndividual Choice under Certainty and Uncertainty", **Collected Papers of Kenneth J. Arrow**, The Belknap Press of Harvard University Press Cambridge, Massachusetts
- Arrow, K. ve Hahn, F.H., ( 1971 ), **General Competitive Analysis**, Holden-Day, Colifornia
- Arrow, K.J. ve Debreu, G., ( 1954 ), "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", **Econometrica, Journal of the Econometric Society**, Vol:22, No:3 July 1954, The University of Chicago, USA
- Auslander, L.ve MacKenzie, R.E, ( 1963 ), **Introduction to Differentiable Manifolds**, McGraw-Hill Book Company, New York
- Aydoğuş, O., ( 1999 ), **Girdi-Çıktı Modellerine Giriş**, Gazi Kitapevi, Ankara
- Bierman, H.S. ve Fernandez, L., ( 1998 ), **Game Theory with Economic Applications**, Addison Wesley
- Binger, B. ve Hoffman, E., ( 1998 ), **Microeconomics with Calculus**, Addison-Wesley
- Bishop, R.L. ve Crittenden, R.J., ( 1964 ), **Geometry of Manifolds**, Acedemic Press, New York
- Blaug, M., ( 1997 ), **Not Only an Economist**, Edward Elgar Publishing Limited, UK
- Blaug, M., ( 1996 ), **Economic Theory in Retrospect**, Cambridge University Press, UK
- Brealey, R.A., Myers, S.C., Marcus, A.C. (1996) **Principles of Corporate Finance**, McGraw-Hill, New York
- Border, K.C., ( 1985 ), **Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory**, Cambridge University Press, New York

Borges, C.R., ( 2000 ), **Elementary Topolgy and Applications** , World Scientific Publishing, Singapore

Buchanan, J. M., "Özel Tercihlerden Kamu Felsefesine Kamu Tercihi'nin Gelişimi", ( Çev., Timur Turgay ) , [www.canaktan.org/ekonomi/anayasal\\_iktisat/turkce-kaynaklar/kamu-tercihi.htm](http://www.canaktan.org/ekonomi/anayasal_iktisat/turkce-kaynaklar/kamu-tercihi.htm)

Buğra, A., ( 1999 ), **İktisatçılar ve İnsanlar**, İletişim Yayınları, İstanbul

Bulutay, T., ( 1979 ), **Genel Denge Kuramı**, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara

Bulutoğlu, K., ( 1997 ), **Kamu Ekonomisine Giriş**, Filiz Kitapevi, İstanbul

Butler, E., ( 2001 ), **Hayek**, Liberte Yayınları, Ankara

Caldwell, B., (1996 ), "Popper'i Netleştirmek", **İktisatta Yöntem Tartışmaları**, (der., Demir, Ö.,) Vadi Yayınları, Ankara.

Casti, J.L., ( 2000 ), **Beş Altın Kural: 20. yy. Matematiğinin Önemli Teorileri**, Sabancı Üniversitesi, İstanbul

Chiang, A.C., ( 1984 ), **Fundamental Methods of Mathematical Economics** , Literatür, İstanbul

Chiang, A.C., ( 1992 ), **Elements of Dynamic Optimization** , McGraw-Hill, New York

Chichilnisky, G., ( 1986 ), "Topological Complexity of Manifolds of Preferences", **Contributions to Mathematical Economics**, Norton-Holland, Amsterdam

Chichilnisky, G., ( 1982 ), "The Topological Equivalence of The Pareto Condition and The Existence of A Dictator", **Journal of Mathematical Economics**, Vol:9 P:223-233, North Holland Publishing Company

Chichilnisky, G., ( 1993 ), "Intersecting Families of Sets and The Topology of Cones In Economics", **Appeared In Bulletin Of The American Mathematical Society**, Vol:29 Number:2 October 1993 p:189-207,

Chichilnisky, G., ( 1999 ), "Existence and Optimality of A General Equilibrium with Endogenous Uncertainty", **Markets, Information, and Uncertainty**, Edited by: Chichilnisky, G., Cambridge University Press, UK

Chichilnisky, G., Heal, G., ( 1999 ), "Catastrophe Futures: Financial Markets for Unknow Risks", **Markets, Information, and Uncertainty**, Edited by: Chichilnisky, G., Cambridge University Press, UK

Coase, R., ( 1960 ), "The Problem of Social Cost", **Journal of Law and Economics**, vol:3 pp:1-44,

Costa, M.L., ( 1998 ), **General Equilibrium Analysis and the Theory of Markets**, Edward Elgar Publishing Limited, USA

Creedy, J., Martin, V.L., ( 1994 ), **Chaos and Non-Linear Models in Economics**, Edward Elgar Publishing Limited, England

Cuddington, J.T. , Johansson, P.O.ve Löfgren, K.G., ( 1984 ) , **Disequilibrium Macroeconomics in Open Economies**, Basil Blackwell Pub., England

Cullis, J.ve Jones, P., ( 1992 ) , **Public Finance And Public Choice Analytical Perspectives**, McGraw-Hill, UK.

Çakır, N., ( 1995 ), "İktisadi Matematiğin Kökeni", **Dünü ve Bugünüyle Toplum ve Ekonomi**, Sayı:8 Temmuz 1995, İstanbul

Çakır, N., ( 1994 ), "Matematiksel Formalizm ve İktisat", **Dünü ve Bugünüyle Toplum ve Ekonomi**, Sayı:6 Mayıs 1994, İstanbul

Çakır, N., ( 2001 ), "Neoklasik İktisat", **İktisatın Dama Taşları**, Çizge Tanıtım, İstanbul

Çakır, N., ( 1993 ) , **Kamu Malları İle Genel Denge**, Yayınlanmamış Doçentlik Tezi, İstanbul

Çallıalp, F., ( 1995 ), **Örneklerle Soyut Matematik**, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

Debreu, G., ( 1983 ) , **Mathematical Economics**, Cambridge University Press, New York

Debreu, G., ( 1959 ) , **Theory of Value**, Yale University Press, USA

Debreu, G.ve Scarf, H., ( 1972 ) , " The Limit Of The Core Of An Economy", C.B. McGuire and Roy Radner, Decision and Organization, North Holland Publishing Company

Dorfman, R., Samuelson, P.ve Solow, R., ( 1958 ) , **Linear Programming & Economic Analysis**, McGraw-Hill Book Company, London

Dönmez, A., ( 2000 ) , **Metrik ve Topojik Uzaylar** , Beta, İstanbul

Dreze, J.H., ( 1999 ) , " The Formulation of Uncertainty: Prices and States", **Markets, Information, and Uncertainty**, Edited by: Chichilnisky, G., Cambridge University Press, UK

Duffie, D., ( 1996 ) , **Dynamic Asset Pricing Theory**, Princeton University Press, New York

Dybvig, P.H. ve Ross, S.A., ( 1985 ) , "Yes, The APT is Testable", **The Journal of Finance**, vol:40 Issue:4, 1173-1188,

Einstein, A., (1991), **İzafiyyet Teorisi**, Say Yayınları, Çeviren: Gülen Aktaş, İstanbul

Eren, E., ( 1994 ) , **İktisatta Yöntem** , Ezgi Kitapevi Yayınları, Bursa

Eren, E., ( 1989 ) , "Leon Walras ve "Bilimsel" Sosyalizm Anlayışı", **Maliye Yazıları**, Mart-Haziran 1989,

Eren, E., ( 2001 ) , "Keynes, Keynesci İktisat Okulları ve Yeni Keynesci İktisat", **İktisatın Dama Taşları**, Çizge Tanıtım, İstanbul

Eren, E., Donduran, M., ( 2001 ) , **Mikro İktisat**, Avcıol Basım Yayın, İstanbul

Erol, Ü, ( 1999 ) , **Vadeli İşlem Piyasaları**, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası, İstanbul

Ersel, H., ( 1981 ) , **İktisatçılar İçin Matematik**, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara

Friedman, M., ( 2000 ) , "Pozitif İktisadın Metodolojisi", (Çev., Orhon, M.), **Devlet Rekabet**

**Mülkiyet ve İktisat**, (Der., Ömer Demir), Değişim Yayınları, Adapazarı

Gabszewicz, J.J., Vial, J.F, ( 1999 ) , "Oligopoly "A la Cournot" in a General Equilibrium Analysis", **Microeconomic Theories of Imperfect Competition**, Edited by: Gabszewicz, J.J., Thisse, J.F., Edward Elgar Publishing Limited, UK

Gibbons, R., ( 1992 ) , **Game Theory for Applied Economists**, Princeton University Press

Gleick, J., (1997), **Kaos**, Tübitak Popüler Bilim Kitapları, Ankara

Guerrien, B., ( 1999 ) , **Neo-Klasik İktisat**, İletişim Yayınları, İstanbul

Gürkanlı, T., ( 1993 ) , **Genel Topoloji**, Ondokuz Mayıs Üniv. Fen Edebiyat Fak. Yay. No:73, Samsun

Hahn, F. , ( 1991 ) , "Stability", **Handbooks in Mathematical Economics** , Volume II, Edited by Arrow, K., Intriligator, M.D., Elsevier Science Publisher

Hahn, F. , ( 1999 ) , "A Remark On Incomplete Market Equilibrium", **Markets, Information, and Uncertainty**, Edited by: Chichilnisky, G., Cambridge University Press, UK

Hart, O.D., ( 1999 ) , "Monopolistic Competition in a Large Economy with Differentiated Commodities", **Microeconomic Theories of Imperfect Competition**, Edited by: Gabszewicz, J.J., Thisse, J.F., Edward Elgar Publishing Limited, UK

Hassler, J., ( 1998 ) , Matfull Class Notes, Stockholm University, Stockholm

Heisenberg, W., ( 1990 ) , **Parça ve Bütün**, Düzlem Yayınları, İstanbul

Henderson, J.M., Quant, R.E., ( 1998 ) , **Mikro İktisat**, Gazi Kitapevi, Ankara

Hernandez, A., Santos, M.S., ( 1993 ) , "Incomplete Financial Markets With an Infinite Horizon", **General Equilibrium Growth and Trade II**, Edited By Becker, R., Boldrin, M., Jones, R., Thomson, W., Academic Press Inc, UK

Hildenbrand, W. and Kirman, A.P, ( 1976 ) , **Introduction to Equilibrium Analysis**, North-Holland Publishing Company Amsterdam Oxford

Hildenbrand, W., ( 1991 ) , "Core of an Economy", **Handbooks in Mathematical Economics** , Volume II, Edited by Arrow, K., Intriligator, M.D., Elsevier Science Publisher

Huang, P., Wu, H., ( 1999 ) , "Market Equilibrium with Endogenous Price Uncertainty and Options", **Markets, Information, and Uncertainty**, Edited by: Chichilnisky, G., Cambridge University Press, UK

Intriligator, M. D., ( 1971 ) , **Mathematical Optimization and Economic Theory**, Prentice-Hall, USA

Johnson P.E. , ( 1998 ) , **Social Choice: Theory and Research**, Sage Publications

Kara, A., ( 2001 ) , **İktisat Kuramında Pozitivizm ve Postmodernizm** , Vadi Yayınları, Ankara

Kazgan, G., ( 1993 ) , **İktisadi Düşünce**, Remzi Kitapevi, İstanbul

Klein, E., ( 1973 ) , **Mathematical Methods in Theoretical Economics**, Academic Press, New

York

Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V., ( 1970 ), **Introduction Real Analysis** , Dover Publications , New York

Koutsoyiannis, A., ( 1997 ), **Modern Mikro İktisat**, Gazi Kitapevi, Ankara

Krauss, M.B., Johnson, H.G., ( 1975 ), **General Equilibrium Analysis**, Aldme Publishing Company, Chicago

Kuttner, R., ( 2000 ), "İktisadın Sefaleti", (Çev., Özvar, E.), **Devlet Rekabet Mülkiyet ve İktisat**, (Der., Ömer Demir), Değişim Yayınları, Adapazarı

Kwang, Y., ( 1990 ), **Welfare Economics**, Macmillan Education Ltd.,

Lakatos, I., Musgrave, A., ( 1992 ), **Bilginin Gelişimiyle İlgili Teorilerin Eleştirisi**, Paradigma , İstanbul

Lancaster, K., ( 1968 ), **Mathematical Economics**, The Macmillan Company Collier-Macmillan, Canada

Lejionhufvud, A., ( 2000 ), "Keynes ve Keynesyenler: Bir Açıklama Önerisi", (Çev., Çağlayan, A.), **Devlet Rekabet Mülkiyet ve İktisat**, (Der., Ömer Demir), Değişim Yayınları, Adapazarı

Lipschutz, S., ( 1965 ), **General Topology**, Schaum Publishing Company, New York

Magil, M. ve Quinzii, M., , ( 1996 ), **Theory of Incomplete Markets**, The MIT Press, Cambridge

Majumdar, M., ( 1998 ), "Searching for paradigms" , **Essays in economic analysis Atribute to Roy Radner**, Edited by Majumdar, M., Cambridge University Press, UK

Malinvaud, E., ( 1973 ), "Markets for an Exchange Economy with Individual Risks", **Econometrica**, vol:41 Issue:3 (May. 1973) 383-410,

Mankiw, G., ( 2000 ), "Makro İktisattaki Son Gelişmeler", (Çev., Acar, M.), **Devlet Rekabet Mülkiyet ve İktisat**, (Der., Ömer Demir), Değişim Yayınları, Adapazarı

Mass-Colell, ( 1989 ), **The Theory of General Economic Equilibrium**, Cambridge University Press, New York

Mass-Colell, A., Whinsten, M.D., Green, J.R., ( 1995 ), **Microeconomic Theory**, Oxfor University Press

McCloskey, D., ( 1994 ), **Knowledge and Persuasion in Economics**, Cambridge University Press, Cambridge

Morishima, M., ( 1997 ), **Walras' Economics: A Pure Theory of Capital and Money**, Cambridge University Press, Cambridge

Munkres, J.R., ( 2000 ), **Topology**, Prentice Hall, Upper Saddle River USA

Musgrave, A., ( 1996 ), "İktisadi Teoride 'Gerçekçi Olmayan Varsayımlar': Saptırılmayan F-Saptırması, İktisatta Yöntem Tartışmaları (Der., Demir, Ö.), Vadi yayınları, İstanbul

- Muth, J.F., ( 2000 ), "Rasyonel Beklentiler ve Fiyat Hareketleri Teorisi" (Çev., Karaman, D.), **Devlet Rekabet Mülkiyet ve İktisat**, (Der., Ömer Demir), Değişim Yayınları, Adapazarı
- Nasar, S., ( 2002 ), **Akıl Oyunları**, Altın Kitaplar, İstanbul
- Negishi, T., ( 2000 ), **Economic Thought from Smith to Keynes**, Edward Elgar Publishing Limited, UK
- Negishi, T., ( 1985 ), **Economic Theories in a non-Walrassian Tradition**, Cambridge University Press, Cambridge
- Negishi, T., ( 1994 ), "Economic Structure and the Theory of Economic Equilibrium", **The History of Economics**, Edward Elgar Publishing Limited, England
- Negishi, T., ( 1999 ), "Monopolistic Competition and General Equilibrium", **Microeconomic Theories of Imperfect Competition**, Edited by: Gabszewicz, J.J., Thisse, J.F., Edward Elgar Publishing Limited, UK
- Nguyen, D., ( 1997 ), **Marketing Decisions Under Uncertainty**, Kluwer Academic Publishers, USA
- Nicola, P.C., ( 1994 ), **Imperfect General Equilibrium**, Springer-Verlag, New York
- Nikaido, H., ( 1968 ), **Convex Structure and Economic Theory**, Academic Press, New York
- Ölmezoğulları, N., ( 1999 ), **Ekonomik Sistemler ve Küreselleşen Kapitalizm**, Ezgi Kitapevi Yayınları, Bursa
- Parasız, İ., Ölmezoğulları, N., Başoğlu, U., ( 1999 ), **Genel Denge**, Ezgi Kitapevi Yayınları, Bursa
- Patinkin, D., ( 1989 ), **Money, Interest and Prices**, The MIT Press, London
- Planck, M., ( 1996 ), **Modern Doğa Anlayışı ve Kuantum Teorisine Giriş**, Spartaküs Yayınları, İstanbul
- Popper, K.R., ( 1991 ), "Bilim Felsefesi: Kişisel Bir Bildiri", **Bilim Felsefesi** (Der., Yıldırım, C.), Remzi Kitapevi, İstanbul
- Popper, K.R., ( 1998 ), **Bilimsel Araştırmanın Mantığı**, Yapı Kredi Yayınları, İstanbul
- Popper, K.R., ( 1998 ), **Tarihselciliğin Sefaleti**, İnsan Yayınları, İstanbul
- Quirk, J., Saposnik, R., ( 1968 ), **Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics**, McGraw-Hill Book Company, New York
- Radner, R., ( 1972 ), "Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets, **Econometrica**, vol:40 Issue:2 ( Mar. 1972) 289-303,
- Radner, R., ( 1968 ), "Competitive Equilibrium Under Uncertainty", **Econometrica**, vol:36 Issue 1 (Jan. 1968) 31-58,
- Rae, A.I.M., ( 1999 ), **Kuvantum Fiziği: Yanılsama mı, Gerçek mi?**, Evrim Yayınevi, İstanbul
- Reilly, F.K. ve Brown, K.C., (1997) **Investment Analysis and Portfolio Management**, The

Dryden Press, Fort Worth

Roll, R., Ross, S.A., ( 1980 ), "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory", **The Journal of Finance**, vol:35 Issue:5 (Dec. 1980) 1073-1103,

Ruelle, D., ( 1994 ), **Raslantı ve Kaos**, Tübitak, Ankara

Savaş, V.F., ( 1999 ), **İktisatın Tarihi**, Siyasal Kitapevi, Ankara

Scarf, H., (1991), "The Computation of Equilibrium Prices: An Exposition", **Handbooks in Mathematical Economics** , Volume II, Edited by Arrow, K., Intriligator, M.D., Elsevier Science Publisher

Sen, A., ( 1999 ), "The Possibility of Social Choice" , **The American Economic Review**, June 1999 Vol:89 No:3,

Shafer, W., ( 1998 ), "Equilibrium with Incomplete Markets in a Sequence Economy", **Essays in Economic Analysis Atribute to Roy Radner**, Edited by Majumdar, M., Cambridge University Press, UK

Shubik, M., ( 1991 ), "Game Theory Models and Methods In Political Economy ", **Handbook of Mathematical Economics**, Volume I, Edited by Arrow, K., Intriligator, M.D., Elsevier Science Publisher,

Simpson, D., ( 1975 ), **General Equilibrium Analysis** , John Wiley and Sons, New York

Smale, S. , ( 1991 ), "Global Analysis and Economics ", **Handbook of Mathematical Economics**, Volume I, Edited by Arrow, K., Intriligator, M.D., Elsevier Science Publisher,

Sonnenschein, H., ve Shafer, W., ( 1991 ), "Market Demand and Excess Demand Functions", **Handbook of Mathematical Economics**, Volume II, Edited by, Arrow, K., Intriligator, M.D., Elsevier Science Publisher,

Sraffa, P., ( 1981 ), **Malların Mallarla Üretimi**, İTÜ Matbaası, İstanbul

Starr, R.M., ( 1997 ), **General Equilibrium Theory**, Cambridge University Press, UK

Stiglitz, J., ( 1994 ), **Kamu Kesimi Ekonomisi**, Çeviren. Ömer faruk Batırel, İkinci Baskı İstanbul Marmara Üniversitesi Yayın No: 549, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yayın No:396,

Sunar, İ., ( 1999 ), **Düşün ve Toplum**, Doruk Yayıncılık, Ankara

Sydsaeter, k., Hammond, P.J., ( 1995 ), **Mathematics for Economic Analysis** , Prentice Hall International , New Jersey

Şener, O., ( 2001 ), **Kamu Ekonomisi**, Beta, İstanbul

Şuhubi, E.S., ( 2001 ), **Fonksiyonel Analiz**, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul

Togati, T.D., ( 2001 ), "Keynes as the Einstein of Economic Theory", History of Political Economy, [www.muse.jhu.edu/journ...-political\\_economy/vo33/33.1 togati.html](http://www.muse.jhu.edu/journ...-political_economy/vo33/33.1_togati.html),

Uluçay, C., ( 1972 ), **Modern Topolojiye Giriş ve Grup Temsilleri**, Şirketi Mürettibiye

Basımevi, İstanbul

Varian, H.R., ( 1993 ), **Intermediate Microeconomics**, Norton &Company, New York

Varian, H.R., ( 1992 ) , **Microeconomic Analysis**, W.W. Norton ve Company, New York

Villar, A., ( 1996 ) , **General Equilibrium with Increasing Returns**, Springer, New York

Von Neumann, J. ve Morgenstern, O., (1990), **Theory of Games and Economic Behavior**, Princeton University Press, Princeton

Wallace, A.H., ( 1998 ) , **Differential Topology First Steps**, W.A. Benjamin, New York

Weintraub, E.R., ( 1974 ) , **General Equilibrium Theory**, Macmillan Studies In Economics, London

Yay, T., ( 1993 ), F.A. Hayek'de **İktisadi Düşünce**, Ezgi Kitapevi Yayınları, Bursa

Yay, T., Yay, G.G., ( 2000 ) , “ İktisat Metodolojisindeki Gelişmeler Işığında Avusturya İktisat Okulu: Eskimiş Bir Metot mu?”, **İktisat Yazıları**, Beta, İstanbul

Yay, T., Yay, G.G., ( 2001 ) , “Yirminci Yüzyılda Yerleşik İktisat” **Ekonomi ve Yönetim Bilimleri Dergisi**, sayı:3

Yıldırım, C., ( 1994 ) , **Bilim Tarihi**, Remzi Kitapevi, İstanbul

Yıldırım, C., ( 1991 ) , **Bilim Felsefesi**, Remzi Kitapevi, İstanbul

Yüksel, Ş., ( 1998 ) , **Genel Topoloji**, Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum Tarihi 14.01.1974

Doğum Yeri Almanya

Lise 1987-1990 Kabataş Erkek Lisesi

Lisans 1991-1998 İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 1998-2002 Yıldız Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü  
İktisat Anabilim Dalı, İktisat Programı

**Çalıştığı Kurumlar**

2000-Devam Ediyor Bahçeşehir Üniversitesi, İşletme Fakültesi,  
İktisat Bölümü Araştırma Görevlisi

