

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

139 760

**HANKEL, MELLİN DÖNÜŞÜMLERİ VE ONLARIN
UYGULAMALARI**

Elektrik Müh. Erdal ÇELİK

-139760-

**F.B.E Matematik Müh. Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Tahir ŞİŞMAN(Y.T.Ü)

Öğrenci

Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU

Yrd. Doç. Dr. İbrahim EMİROĞLU

İSTANBUL ,2003

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KÜTÜPHANE BASKISI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....iii

ÖNSÖZ.....iv

ÖZET.....v

ABSTRACT.....vi

1 GİRİŞ.....1

2 FOURIER SERİSİ VE İNTEGRALI.....3

2.1 Tanım.....3

2.2 Fourier Serisi.....3

2.3 Kompleks Metodlar.....5

2.4 Fourier İntegrali.....6

3 HANKEL DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI.....8

3.1 Giriş.....8

3.2 Hankel Dönüşümü ve Örnekleri.....8

3.3 Hankel Dönüşümünün İşlemsel Özellikleri.....11

3.4 Kısmi Diferansiyel Denklemler Hankel Dönüşümünün Uygulamaları.....14

3.5 Sonlu Hankel Dönüşümleri.....17

3.6 Sonlu Hankel Dönüşümleri Uygulamaları.....20

4 MELLİN DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI.....22

4.1 Mellin Dönüşümü ve Örnekler.....22

4.2 Mellin Dönüşümünün İşlemsel Özellikleri.....26

4.3 Mellin Dönüşümünün Uygulamaları.....31

4.4 Serilerin Toplamına Mellin Dönüşümünün Uygulanması.....35

4.5 Genelleştirilmiş Mellin Dönüşümü.....38

5 SONUÇLAR.....42

KAYNAKLAR.....43

EKLER.....44

Ek 1 Bessel Denklemi ve Çözümü45

Ek 2 Gamma Fonksiyonları50

Ek 3 Beta Fonksiyonları52

ÖZGEÇMİŞ.....53

SİMGE LİSTESİ

$B(x,y)$	x,y argümanlarına göre Beta fonksiyonu
c	sabit
$\tilde{f}_n(\kappa)$	$f(r)$ 'in n sıradan Hankel Dönüşümü
$\tilde{f}(p)$	$f(x)$ fonksiyonunun Mellin Dönüşümü
$H\{f(x)\}$	$f(x)$ fonksiyonunun Hankel Dönüşümü
$H(r)$	Heaviside unit step Fonksiyonu
$M(f(x),p)$	$f(x)$ fonksiyonunun Mellin Dönüşümü
$M\{f(x)\}$	$f(x)$ fonksiyonunun Mellin Dönüşümü
$M_{-}\{f(r)\}$	Genelleştirilmiş Mellin Dönüşümü
$J_n(x)$	n sıradan Bessel fonksiyonu
P	Zarın yüzey yoğunluğu
T	Zarın gerilimi
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
$I_0(x)$	Modified Bessel fonksiyonu
$\delta(r)$	Dirac delta fonksiyonudur
$\zeta(x)$	Riemann Zeta Fonksiyonu
$\xi(p,a)$	Hurwitz Zeta Fonksiyonu



ÖNSÖZ

Bu tezin gerçekleşmesinde onunla çalışmaktan büyük zevk aldığım, her türlü desteği veren, akademik kariyer yapmayı bana sevdiren, Y.T.Ü gelişmesinde çok katkısı bulunan saygıdeğer hocam Prof. Tahir Şişman’a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tezin hazırlanmasında, kaynak sağlama konusunda bana büyük yardımları dokunan İ.T.Ü Yüksek Lisans Öğrencisi Murat Yel’e, bilgisayarda karşılaştığım sorunları gideren İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Bilgisayar Laboratuvar Sorumlusu Fizik Müh. Selahattin Dinç ve Y.T.Ü de Araştırma Görevlisi olan Reşit Şener’e teşekkür ederim.



ÖZET

Çoğu mühendislik bilimi, matematiksel fizik ve uygulamalı matematikteki lineer sınır değer ve başlangıç değer problemleri Fourier Dönüşümlerinin kullanılması ile etkili bir şekilde çözülür. Bu dönüşüm diferansiyel ve integral denklemlerin çözümü için çok kullanışlıdır. Bu na ek olarak Hankel ve Mellin Dönüşümleri kompleks Fourier Dönüşümlerinden türetilir.

Kernel olarak Bessel fonksiyonlarını içeren Hankel Dönüşümü, silindirik polar koordinatlarda açık olarak ortaya çıkan asimetrik problemlerin çözümünde kullanılır. Bu bölümde Hankel Dönüşümünün temel özelliklerini ve tanımını vereceğiz. Silindirik polar koordinatlarda bulunan asimetrik problemlerin çoğu Hankel Dönüşümleri yardımıyla çözülür. Kısmi diferansiyel denklemlere Laplace ve Hankel Dönüşümlerinin birlikte kullanılmasıyla çözülen uygulamalar bu tezde yer verilmiştir.

Bu tez diğer kısmı Mellin Dönüşümünün teori ve uygulamaları ile ilgilidir. Biz kompleks Fourier Dönüşümünden Mellin Dönüşümü ve onun tersini türeteceğiz. Mellin Dönüşümünün temel işlemsel özellikleri ve birkaç örnek vereceğiz. Ayrıca sonsuz serilerin toplamı ve sınır değer problemlerine Mellin dönüşümlerinin birkaç uygulamasını verdik.

Anahtar kelimeler: Hankel Dönüşümü, Mellin Dönüşümü, Bessel Fonksiyonu, Fourier Dönüşümü, Gamma Fonksiyonu.

ABSTRACT

Many linear boundary value and initial value problems in applied mathematics, mathematical physics, and engineering science can be effectively solved by the use of the Fourier transform. These transform ise very useful for solving differential or integral equations . In addition, Hankel and Mellin transforms are derived from the complex Fourier transform.

The Hankel transforms involving Bessel function as the kernel arises naturally in the discussion of axisymmetric problems formulated in cylindrical polar coordinates.This Thesis deals with the definition and basic operational properties of the Hankel transform. A large number of axisymmetric problems in cylindrical polar coordinates are solved with the aid of the Hankel transform. The use of the joint Laplace and Hankel transforms is illustrated by several examples of applications to partial differantial equations.

Another part in this thesis is concerned with the theory and applications of the Mellin transform. We derive the Mellin transform and its inverse from the complex Fourier transform. This is followed by several examples and the basic operational properties of Mellin transforms. We discuss several applications of Mellin transforms to boundary value problems and to summation of infinite series.

Keywords: Hankel transform, Mellin transform, Bessel function, Fourier transform, Gamma function.

1. GİRİŞ

İntegral Dönüşümleri, lineer diferansiyel ve integral denklemleri için başlangıç değer problemleri ve başlangıç sınır değer problemlerini çözmek için güçlü bir işlem metodu sağlar. Gerçekten, İntegral Dönüşümlerinin işlemsel hesaplamalarının gelişmesini sağlayan temel etken, hiç şüphesiz ki mühendislik biliminde, matematiksel fizikte, uygulamalı matematikte meydana gelen diferansiyel ve integral denklemlerin zorluğudur. İleri düzeydeki araştırma ve çalışmalarda integral dönüşümleri daha çok uygulamaları vardır.(Depnath,1995) İntegral Dönüşümlerinin en önemlisi Fourier Dönüşümleridir. Fourier Dönüşümleri kullanılarak diğer birçok dönüşüm elde edilmiştir.

$$F(k,l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(\kappa.r)\} f(x,y) dx dy, \quad (1.1)$$

Yukarıdaki Fourier İntegral formülü kullanarak ve Bessel fonksiyonların yardımıyla

$$H\{f(r)\} = \tilde{f}_n(\kappa) = \int_0^{\infty} r J_n(\kappa.r) f(r) dr, \quad (1.2)$$

Hankel Dönüşümlerini elde ederiz. Kernel olarak Bessel fonksiyonlarını içeren Hankel Dönüşümü, silindirik polar koordinatlarda olarak ortaya çıkan asimetric problemlerin çözümünde kullanılır.(Depnath,1995) Sonlu Hankel Dönüşümleride

$$\tilde{f}_n(\kappa_i) = \int_0^a r f(r) J_n(r\kappa_i) dr, \quad (1.3)$$

uygulamalarda sık görülmektedir.

Ayrıca Mellin Dönüşümleride Fourier Dönüşümlerinden elde edilir

$$M\{f(x)\} = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} . f(x) . dx, \quad (1.4)$$

Genelleştirilmiş Mellin dönüşümü küresel ve silindirik koordinat sistemlerinin doğal koordinat yüzeyleri tarafından sınırlanan alanlarda sınır değer problemlerin çözümünün

kullanmasında kullanışlıdır.(Paris ve Kaminski,2001) Sonlu ve sonsuz alanlardaki sınır değer problemlerini çözmek için de kullanılır.

$a < r < \infty$ tanımlanan $f(r)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Mellin dönüşümü aşağıdaki integralle gösterilmiştir;

$$M_{-}\{f(r)\} = F_{-}(p) = \int_a^{\infty} \left(r^{p-1} - \frac{a^{2p}}{r^{p+1}} \right) \cdot f(r) \cdot dr, \quad (1.5)$$

Mellin Dönüşümleri aynı zamanda serilerin toplamına da uygulanır

$$M\{f(x)\} = \tilde{f}(p), \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) \cdot \xi(p,a) dp, \quad (1.6)$$

burada $\xi(p,a)$ Hurwitz Zeta fonksiyonu denir. $\xi(p,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$, $0 \leq a \leq 1$, $\text{Re}(p) > 1$

Bu tezde yukarıda ifade ettiğimiz Dönüşümler geniş şekilde ele alınıp, birkaç uygulamaları yapılmıştır.

2. FOURIER SERİSİ VE İNTEGRALI

2.1 Fourier Serisi

$f(x)$, $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlı ve periyodik bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon,

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

biçiminde trigonometrik bir seriye açılabilir. Bu açılımlara “Fourier serisi” adı verilir.

Fourier serisi, aşağıdaki hipotezler altında düzgün yakınsaktır (Dirichlet koşulları):

- I) $f(x)$ sınırlıdır,
- II) $f(x)$ 'in ekstremumları sonlu sayıdadır.
- III) $f(x)$ 'in sonlu sayıda noktalarda “birinci tür” süreksizliği vardır ve bu noktalarda

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad (2.1.1)$$

dir. Bu gibi noktalarda serinin toplamı $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ 'dır. $\lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_1-0} f(x)$

olduğu zaman x_1 noktası “birinci tür süreksizlik” noktasıdır. Sağdan ve soldan limitlerin en az biri belirli değilse, x_1 “ikinci tür süreksizlik” noktasıdır. [James, 1993]

Şimdi Fourier katsayılarını hesaplayalım

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.1.2)$$

İki yanın $-\pi$ den π ye kadar integrali alınırsa,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (2.1.3)$$

olur.

İki yan $\cos nx$ ile çarpılarak integre edilirse, p indisli terimde $n \neq p$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos px dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+p)x + \cos(n-p)x] dx = 0, \quad (2.1.4)$$

ve $n \neq p$ veya $n = p$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin px dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+p)x - \sin(n-p)x] dx = 0, \quad (2.1.5)$$

ilk halde $n = p$ için

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx, \quad (2.1.6)$$

elde edilir.

İki yan $\sin nx$ ile çarpılarak integre edilirse, p indisli terimde $n \neq p$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin px dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+p)x - \cos(n-p)x] dx = 0, \quad (2.1.7)$$

ve $n \neq p$ veya $n = p$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos px dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+p)x + \sin(n-p)x] dx = 0, \quad (2.1.8)$$

olup,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx \text{ 'dır} \quad (2.1.9)$$

Bu formüllerden Fourier katsayıları bulunarak Fourier serisi yazılır. Fourier katsayılarının hesabında çok kez aşağıdaki pratik yöntem uygulanır.

a) Eğer $f(x)$ tek fonksiyon ise,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(-x) \cdot \cos n(-x) d(-x)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = -a_n, \text{ ve dolayısıyla her } n \text{ için } a_n=0 \text{ olup,}$$

Fourier serisi yalnız sinüslü terimleri içerir. Bu halde

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(-x) \sin n(-x) d(-x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \text{ olur.}$$

b) Eğer $f(x)$ çift fonksiyon ise,

aynı biçimde $b_n=0$ olduğu gösterilir ki Fourier serisi yalnız kosinüslü terimleri içine alır ve

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \text{ bulunur. (Kraniauskas, 1992)}$$

2.2 Kompleks methodlar:

(2.1.2) ifadede

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad i^2 = -1, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Yukarıdaki ifadeleri yerine koyarsak

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) - ib_n (e^{inx} - e^{-inx})$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (a_n - ib_n) e^{inx} + (a_n + ib_n) e^{-inx}, \quad (2.2.1)$$

Düzenlenleme yaparsak

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n=1,2,3,\dots \text{ şeklinde tanımlayalım}$$

$f(x)$ fonksiyonunda yerine koyarsak, yeni katsayılar şöyle olur.

$$f(x) = c_0 + \sum_1^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (2.2.2)$$

n tamsayılar için elde ederiz.(Reed,1995)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (2.2.3)$$

2.3 Fourier İntegrali

- $a < x < a$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun kompleks fourier serisi aşağıdaki gibi gösterilir:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\pi x / a) \quad (2.3.1)$$

$$a_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(\xi) \exp(-in\pi\xi / a) d\xi \quad (2.3.2)$$

bu gösterimde aralık $2a$ periyodundadır. $a \rightarrow \infty$ giderken $f(x)$ 'in $(-\infty, \infty)$ aralığında periyodik

olmayan integral gösterimini bulalım:

$a \rightarrow \infty$ giderken $k_n = (n\pi/a)$ birlikte yaklaşır ve yoğun bir küme oluşturur.

Eğer $\delta k = (k_{n+1} - k_n) = \pi/a$ olursa a_n 'yi $f(x)$ 'de yerine yazarsak şunu elde ederiz;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta k) \left[\int_{-a}^a f(\xi) \exp(-i\xi k_n) d\xi \right] \exp(ik_n x), \quad (2.3.3)$$

limitde $a \rightarrow \infty$ olduğunda k_n sürekli değişken k ve δk 'de dk olur.

Toplam limitteki ifade ile yer değiştirilirse fourier integral formülü oluşur(Depnath,1995);

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk, \quad (2.3.4)$$

$f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ integrallenebilir olduğunu söylememiz için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (2.3.5)$$

olması gerekir.

3. HANKEL DÖNÜŞÜMLERİ

3.1 Giriş

Kernel olarak Bessel fonksiyonlarını içeren Hankel Dönüşümü, silindirik polar koordinatlarda açık olarak ortaya çıkan asimetric problemlerin çözümünde kullanılır. Bu bölümde Hankel Dönüşümünün temel özelliklerini ve tanımını vereceğiz.

3.2 Hankel Dönüşümü ve Örnekleri

Hankel Dönüşümünün tanımını iki boyutlu Fourier Dönüşümünden elde edilir. Fourier Dönüşümü ve onun tersi aşağıdaki şekildedir

$$F(k,l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(\kappa.r)\} f(x,y) dx dy, \quad (3.2.1)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(\kappa.r)\} F(k,l) dk dl, \quad (3.2.2)$$

bu ifadede $r=(x,y)$ ve $\kappa=(k,l)$ 'dir. $(x,y)=r(\cos\theta,\sin\theta)$ ve $(k,l)=\kappa(\cos\phi,\sin\phi)$ polar koordinat tanımından, $\kappa.r=\kappa r \cos(\theta-\phi)$ ifadesini buluruz. Daha sonra denklemde yerine yazarak

$$F(\kappa,\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} \exp[-i\kappa.r \cos(\theta-\phi)] f(r,\theta) d\theta, \quad (3.2.3)$$

elde ederiz. $f(r,\theta)=\exp(in\theta)f(r)$ varsayıp ve $\theta-\phi=\alpha-(\pi/2)$ değişken dönüşümü yaparak (3.2.3) formunu azaltarak aşağıdaki formu elde ederiz

$$F(\kappa,\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r) dr \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} \exp\left[in\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right) + i(n\alpha - \kappa.r \sin \alpha)\right] d\alpha, \quad (3.2.4)$$

$\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \phi$ olduğu kabul edilmiştir.

n mertebeden Bessel fonksiyonunun integral gösterimi

$$J_n(\kappa.r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} \exp[i(n\alpha - \kappa.r \sin \alpha)] d\alpha \quad (3.2.5)$$

(Koçer,1974) (3.2.4) ifadesinde yerine yazarsak

$$F(\kappa, \phi) = \exp\left[in\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \int_0^{\infty} r J_n(\kappa.r) f(r) dr \quad (3.2.6)$$

$$= \exp\left[in\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \tilde{f}_n(\kappa), \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede $\tilde{f}_n(\kappa)$, $f(r)$ 'nin Hankel Dönüşümü olarak adlandırılır. Formal olarak

$$H\{f(r)\} = \tilde{f}_n(\kappa) = \int_0^{\infty} r J_n(\kappa.r) f(r) dr, \quad (3.2.8)$$

şeklinde tanımlanır. (Depnath, 1995)

Benzer şekilde, (3.2.7)'li $f(x,y)=f(r,\theta)=e^{in\theta}f(r)$ varsayımlı polar değişken tanımından ters Fourier dönüşümü (3.2.2)

$$\begin{aligned} e^{in\theta} f(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \kappa.d\kappa \int_0^{\infty} \exp[i\kappa.r \cos(\theta - \phi)] F(\kappa, \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \kappa.\tilde{f}_n(\kappa) d\kappa \int_0^{2\pi} \exp\left[in\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + i\kappa.r \cos(\theta - \phi)\right] d\phi, \end{aligned}$$

olur. $\theta_0 = -(\theta + \frac{\pi}{2})$ ve $\theta - \phi = -(\alpha + \frac{\pi}{2})$ değişken dönüşümleri ile

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \kappa.\tilde{f}_n(\kappa) d\kappa \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \exp[in(\theta + \alpha) - i\kappa.r \sin \alpha] d\alpha \\ &= e^{in\theta} \int_0^{\infty} \kappa.J_n(\kappa.r) \tilde{f}_n(\kappa) d\kappa, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

(3.2.5) kullanarak yukarıdaki ifadeyi bulduk. Bu yüzden Ters Hankel Dönüşümü

$$H_n^{-1}[\tilde{f}_n(\kappa)] = f(r) = \int_0^{\infty} \kappa.J_n(\kappa.r) \tilde{f}_n(\kappa) d\kappa, \quad (3.2.10)$$

şeklinde ifade edilir.

$\tilde{f}_n(\kappa)$ 'nın yerine , mertebeyi belirten Hankel Dönüşümleri için $\tilde{f}(\kappa)$ kolaylık için yazılır.(3.2.8) ve (3.2.10) integralleri, fiziksel uygulamalarda meydana gelen büyük dereceli fonksiyonlarda da vardır.

Alternatif olarak, ünlü Hankel İntegral Formülü

$$f(r) = \int_0^\infty \kappa J_n(\kappa r) d\kappa \int_0^\infty p J_n(\kappa p) f(p) dp, \quad (3.2.11)$$

Hankel Dönüşümü(3.2.8) ve onun tersi (3.2.10) tanımlamak için kullanılır.

Özellikle , sıfır(n=0) ve bir(n=1) mertebeli Hankel Dönüşümleri asimetrik silindirik geometride laplace denklemleri içeren problemlerin çözümü için kullanışlıdır.

3.2.1 Örnek

Aşağıdaki ifadelerin sıfır sıralı Hankel Dönüşümlerini bulalım:

(a) $r^{-1} \exp(-ar)$, (b) $\frac{\delta(r)}{r}$, (c) $H(a-r)$, (H(r) Heaviside unit step function)

$$(a) \quad \tilde{f}(\kappa) = H_0 \left\{ \frac{1}{r} \exp(-ar) \right\} = \int_0^\infty \exp(-ar) J_0(\kappa r) dr = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + a^2}}$$

$$(b) \quad \tilde{f}(\kappa) = H_0 \left\{ \frac{\delta(r)}{r} \right\} = \int_0^\infty \delta(r) J_0(\kappa r) dr = 1$$

$$(c) \quad \tilde{f}(\kappa) = H_0 \{ H(a-r) \} = \int_0^a r J_0(\kappa r) dr = \frac{1}{\kappa^2} \int_0^{a\kappa} p J_0(p) dp$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} [p J_1(p)]_0^{a\kappa} = \frac{a}{\kappa} J_1(a\kappa).$$

3.2.2 Örnek

Aşağıdaki ifadelerin birinci sıralı Hankel Dönüşümlerini bulunuz?

(a) $f(r) = e^{-ar}$, (b) $f(r) = \frac{1}{r} e^{-ar}$.

$$(a) \quad \tilde{f}(\kappa) = H_1 \{ e^{-ar} \} = \int_0^\infty r e^{-ar} J_1(\kappa r) dr = \frac{\kappa}{(a^2 + \kappa^2)},$$

$$(b) \quad \tilde{f}(\kappa) = H_1 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} = \int_0^\infty e^{-ar} J_1(\kappa r) dr = \frac{1}{\kappa} \left[1 - a(\kappa^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

3.2.3 Örnek

Aşağıdaki ifadelerin n sıralı Hankel Dönüşümleri bulunuz?

(a) $f(r)=r^n H(a-r)$, (b) $f(r)=r^n \exp(-ar^2)$.

(a) $\tilde{f}(\kappa) = H_n \left[r^n H(a-r) \right] = \int_0^a r^{n+1} J_n(\kappa r) dr = \frac{a^{n+1}}{\kappa} J_{n+1}$

(b) $\tilde{f}(\kappa) = H_n \left[r^n \exp(-ar^2) \right]$

$$= \int_0^\infty r^{n+1} J_n(\kappa r) \exp(-ar^2) dr = \frac{\kappa^n}{(2a)^{n+1}} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{4a}\right).$$

3.3 Hankel Dönüşümünün İşlemsel Özellikleri

3.3.1 Teorem (Scaling). $H_n \{f(r)\} = \tilde{f}_n(\kappa)$ ise

$$H_n \{f(ar)\} = \frac{1}{a^2} \tilde{f}_n\left(\frac{\kappa}{a}\right), \quad a>0 \quad (3.3.1)$$

İspat. Tanım ifadesinden

$$\begin{aligned} H_n \{f(ar)\} &= \int_0^\infty r J_n(\kappa r) f(ar) dr \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^\infty s J_n\left(\frac{\kappa}{a} s\right) f(s) ds = \frac{1}{a^2} \tilde{f}_n\left(\frac{\kappa}{a}\right) \text{ kanıtlamış oluruz.} \end{aligned}$$

3.3.2 Teorem (Parseval ilişkisi). $\tilde{f}(\kappa) = H_n \{f(r)\}$ ve $\tilde{g}(\kappa) = H_n \{g(r)\}$ ise,

$$\int_0^\infty r f(r) g(r) dr = \int_0^\infty \kappa \tilde{f}(\kappa) \tilde{g}(\kappa) d\kappa, \quad \text{ilişkisi vardır.} \quad (3.3.2)$$

İspat. Tanım ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \kappa \tilde{f}(\kappa) \tilde{g}(\kappa) d\kappa &= \int_0^\infty \kappa \tilde{f}(\kappa) d\kappa \int_0^\infty r J_n(\kappa r) g(r) dr \text{ integralde sırayı değiştirirsek} \\ &= \int_0^\infty r g(r) dr \int_0^\infty \kappa J_n(\kappa r) \tilde{f}(\kappa) d\kappa \\ &= \int_0^\infty r g(r) f(r) dr \end{aligned}$$

3.3.3 Teorem (Türevlerin Hankel Dönüşümü). $\tilde{f}_n(\kappa) = H_n\{f(r)\}$ ise

$$H_n\{f'(r)\} = \frac{\kappa}{2n}[(n-1)\tilde{f}_{n+1}(\kappa) - (n+1)\tilde{f}_{n-1}(\kappa)], \quad n \geq 1, \quad (3.3.3)$$

$$H_1\{f'(r)\} = -\kappa \cdot \tilde{f}_0(\kappa), \quad (3.3.4)$$

yukarıdaki ifade $r \rightarrow 0$ ve $r \rightarrow \infty$ giderken $[rf(r)]$ yok olursa geçerlidir.

İspat. Hankel Dönüşümünün tanım ifadesinde $f^*(r)$ yazarsak

$$\begin{aligned} H_n\{f'(r)\} &= \int_0^\infty r J_n(\kappa r) f'(r) dr \text{ integralini alırsak} \\ &= [rf(r)J_n(\kappa r)]_0^\infty - \int_0^\infty f(r) \frac{d}{dr} [rJ_n(\kappa r)] dr \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

şimdi Bessel fonksiyonunun aşağıdaki özelliğini kullanacağız

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [rJ_n(\kappa r)] &= J_n(\kappa r) + r\kappa J_n'(\kappa r) = J_n(\kappa r) + r\kappa J_{n-1}(\kappa r) - nJ_n(\kappa r) \\ &= (1-n)J_n(\kappa r) + r\kappa J_{n-1}(\kappa r). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

verilen koşullar ışığında (3.3.5) ilk terimi, $r \rightarrow 0$ ve $r \rightarrow \infty$ giderken yok olur ve (3.3.5) deki integralin içindeki türev, (3.3.6) ile yer değiştirebilir. O zaman (3.3.5) aşağıdaki gibi olur.

$$H_n\{f'(r)\} = (n-1) \int_0^\infty f(r) J_n(\kappa r) dr - \kappa \cdot \tilde{f}_{n-1}(\kappa) \quad (3.3.7)$$

Bessel fonksiyonları için standard recurrence ilişkisini

$$J_n(\kappa r) = \frac{\kappa r}{2n} [J_{n-1}(\kappa r) + J_{n+1}(\kappa r)], \quad (3.3.8)$$

(3.3.7) 'deki denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} H_n[f'(r)] &= -\kappa \cdot \tilde{f}_{n-1}(\kappa) + \kappa \cdot \left(\frac{n-1}{2n}\right) \left[\int_0^\infty rf(r) \{J_{n-1}(\kappa r) + J_{n+1}(\kappa r)\} dr \right] \\ &= -\kappa \cdot \tilde{f}_{n-1}(\kappa) + \kappa \cdot \left(\frac{n-1}{2n}\right) [\tilde{f}_{n-1}(\kappa) + \tilde{f}_{n+1}(\kappa)] \\ &= \left(\frac{\kappa}{2n}\right) [(n-1) \cdot \tilde{f}_{n+1}(\kappa) - (n+1) \cdot \tilde{f}_{n-1}(\kappa)] \quad n=1 \text{ olduğu zaman (3.3.4) elde edilir.} \end{aligned}$$

Benzer şekilde (3.3.3) tekrarlanması ile aşağıdaki sonucu elde ederiz

$$\begin{aligned} H_n \{f''(r)\} &= \frac{\kappa}{2n} [(n-1)H_{n+1}\{f'(r)\} - (n+1)H_{n-1}\{f'(r)\}] \\ &= \frac{\kappa^2}{4} \left[\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \tilde{f}_{n-2}(\kappa) - 2\left(\frac{n^2-3}{n^2-1}\right) \tilde{f}_n(\kappa) + \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \tilde{f}_{n+2}(\kappa) \right] \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

3.3.4 Teorem $H_n\{f(r)\} = \tilde{f}_n(\kappa)$ ise

$$H_n \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) \right\} = H_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} = -\kappa^2 \tilde{f}_n(\kappa), \quad (3.3.10)$$

$r \rightarrow 0$ ve $r \rightarrow \infty$ giderken $rf(r)$ ve $rf'(r)$ yok olursa yukarıdaki ifade sağlanır.

İspat. (3.2.8) tanımını ile

$$\begin{aligned} H_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} &= \int_0^\infty J_n(\kappa r) \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) \right] dr - \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} [r J_n(\kappa r)] f(r) dr \\ &= \left[\left(r \frac{df}{dr} \right) J_n(\kappa r) \right]_0^\infty - \kappa \int_0^\infty r \frac{df}{dr} J'_n(\kappa r) dr - \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} [r J_n(\kappa r)] f(r) dr, \end{aligned}$$

verilen varsayımdan dolayı ilk terim sıfır olur. Diğer kısımların integrallerini alırsak

$$= -[\kappa r f(r) J'_n(\kappa r)]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d}{dr} [\kappa r J'_n(\kappa r)] f(r) dr - \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} [r J_n(\kappa r)] f(r) dr \text{ elde ederiz.}$$

verilen varsayımı ve Bessel Differansiyel Denklemi

$$\frac{d}{dr} [\kappa r J'_n(\kappa r)] + r \left(\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n(\kappa r) = 0, \quad (3.3.11)$$

kullanarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz [Koçer, 1974]

$$\begin{aligned} H_n \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) \right\} &= - \int_0^\infty \left(\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) r f(r) J_n(\kappa r) dr - \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} [r f(r)] J_n(\kappa r) dr \\ &= -\kappa^2 \int_0^\infty r J_n(\kappa r) f(r) dr = -\kappa^2 H_n[f(r)] = -\kappa^2 \tilde{f}_n(\kappa) \end{aligned}$$

Bu da teoremi kanıtlar.

Özellikle $n=0$ ve $n=1$ olduğu zaman

$$H_0\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right\}=-\kappa^2\tilde{f}_0(\kappa), \quad (3.3.12)$$

$$H_1\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{1}{r^2}f(r)\right\}=-\kappa^2\tilde{f}_1(\kappa). \quad (3.3.13)$$

Sonuç (3.3.10), (3.3.12) ve (3.3.13) asimetric silindirik biçimlerde kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için genişçe kullanılır.

3.4 Kısmi Diferansiyel Denklemlere Hankel Dönüşümlerinin Uygulamaları

Hankel Dönüşümleri silindirik polar koordinatlarda kısmi diferansiyel denklemlerin bir değişkenli çözümünde son derece kullanışlıdır.(Depnath,1995) Aşağıdaki uygulamalarda Hankel Dönüşümünün bu özelliği kullanılmıştır.

3.4.1 Uygulama (Büyük Dairesel Zarın Serbest Titreşimi)

Başlangıç değer problemi

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0, \quad (3.4.1)$$

$$u(r,0)=f(r), \quad u_t(r,0)=g(r), \quad 0 \leq r < \infty, \quad (3.4.2ab)$$

($c^2 = (T / \rho) = \text{sabit}$, T zarın gerilimi ve ρ zarın yüzey yoğunluğudur) olan büyük dairese zarın serbest titreşimini çözünüz?(Sagan,1989)

r bağılı sıfır mertebeli Hankel Dönüşümünün

$$\tilde{u}(\kappa, t) = \int_0^\infty r J_0(\kappa r) u(r, t) dr, \quad (3.4.3)$$

(3.4.1)-(3.4.2ab) uygulamasına uygularsak

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + c^2 \kappa^2 \tilde{u} = 0, \quad (3.4.4)$$

$$\tilde{u}(\kappa, 0) = \tilde{f}(\kappa), \quad \tilde{u}_t(\kappa, 0) = \tilde{g}(\kappa). \quad (3.4.5ab)$$

bu dönüşüm sisteminin genel çözümü

$$\tilde{u}(\kappa, t) = \tilde{f}(\kappa) \cos(c\kappa t) + \tilde{g}(\kappa) \sin(c\kappa t), \quad (3.4.6)$$

Ters Hankel Dönüşümü çözümü verir

$$u(r,t) = \int_0^\infty \kappa \tilde{f}(\kappa) \cos(c\kappa t) J_0(\kappa r) d\kappa + \int_0^\infty \kappa \tilde{g}(\kappa) \sin(c\kappa t) J_0(\kappa r) d\kappa. \quad (3.4.7)$$

$$\text{özellikle } u(r,0) = f(r) = Aa(r^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad u_t(r,0) = g(r) = 0, \quad (3.4.8ab)$$

$$\tilde{g}(\kappa) \equiv 0 \text{ ve}$$

$$\tilde{f}(\kappa) = Aa \int_0^\infty r(a^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(\kappa r) dr = \frac{Aa}{\kappa} e^{-a\kappa}, \text{ (örnek 3.2.1(a) yardımıyla)}$$

bu yüzden (3.4.7) formal çözümü

$$\begin{aligned} u(r,t) &= Aa \int_0^\infty e^{-a\kappa} J_0(\kappa r) \cos(c\kappa t) d\kappa = Aa \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp[-\kappa(a + ict)] J_0(\kappa r) d\kappa \\ &= Aa \operatorname{Re} \{r^2 + (a + ict)^2\}^{-\frac{1}{2}}, \text{ (örnek 3.2.1(a) yardımıyla)} \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

3.4.2 Uygulama (Sabit Isı Kaynaklı Yarı Sonsuz Katıda Sabit Sıcaklık Dağılımı)

Değişmeyen ve simetrik ısı dağılımı $Q_0 q(r)$ 'lı sıcaklık dağılımı $u(r,z)$ için Laplace denkleminin çözümünü bulunuz?

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = -Q_0 q(r), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < z < \infty, \quad (3.4.10)$$

$$u(r,0)=0, \quad 0 < r < \infty, \quad (3.4.11)$$

burad Q_0 bir sabittir. Bu sınır koşulu, $z=0$ sınırında sıfır sıcaklığı temsil eder.(Powers,1972)

(3.4.10) ve (3.4.11) nolu ifadelere sıfır sıralı Hankel Dönüşümleri uygularsak

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} - \kappa^2 \tilde{u} = -Q_0 \tilde{q}(\kappa), \quad \tilde{u}(\kappa,0) = 0. \text{ elde ederiz.}$$

Bu sistemin sınırlandırılmış genel çözümü

$$\tilde{u}(\kappa, z) = A \exp(-\kappa z) + \frac{Q_0}{\kappa^2} \tilde{q}(\kappa), \quad A \text{ dönüştürülmüş sınır koşullarından elde edilen bir sabittir.}$$

Bu durumda $A = -\frac{Q_0}{\kappa^2} \tilde{q}(\kappa)$ 'dır. Bu yüzden formal çözüm

$$\tilde{u}(\kappa, z) = \frac{Q_0 \tilde{q}(\kappa)}{\kappa^2} (1 - e^{-\kappa z}). \quad (3.4.12)$$

Ters Hankel Dönüşümü tam integral çözümü verir.

$$u(r, z) = Q_o \int_0^{\infty} \frac{\tilde{q}(\kappa)}{\kappa} (1 - e^{-\kappa z}) J_o(\kappa r) d\kappa. \quad (3.4.13)$$

3.4.3 Uygulama (Asimetrik Difüzyon Denklemi)

$$u_t = \kappa \cdot (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r), \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0, \quad (3.4.14)$$

burada $\kappa(>0)$ difüzyon(yayınım) sabiti ve

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 < r < \infty, \quad (3.4.15)$$

asimetrik difüzyon denkleminin çözümünü bulunuz?(Sagan, 1989)

(3.4.3) tanımlanan sıfır sıralı Hankel Dönüşümünü uygularsak

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + k^2 \kappa \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}(k, 0) = \tilde{f}(k), \quad k, \quad \text{Hankel Dönüşüm değişkenidir. Bu dönüşüm sisteminin çözümü}$$

$$\tilde{u}(k, t) = \tilde{f}(k) \exp(-\kappa k^2 t). \quad (3.4.16)$$

Ters Hankel Dönüşümü uygularsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \int_0^{\infty} k \tilde{f}(k) J_o(kr) e^{-\kappa k^2 t} dk = \int_0^{\infty} k \left[\int_0^{\infty} l J_o(kl) f(l) dl \right] e^{-\kappa k^2 t} J_o(kr) dk \\ &= \int_0^{\infty} l f(l) dl \int_0^{\infty} k J_o(kl) J_o(kr) \exp(-\kappa k^2 t) dk. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Bessel denklemlerini içeren standart tabloyu kullanarak

$$\int_0^{\infty} k J_o(kl) J_o(kr) \exp(-k^2 \kappa t) dk = \frac{1}{2\kappa t} \exp\left[-\frac{(r^2 + l^2)}{4\kappa t}\right] I_o\left(\frac{rl}{2\kappa t}\right), \quad (3.4.18)$$

$I_o(x)$, modified Bessel fonksiyonu ve $I_o(0)=1$ dir. Özellikle, $l=0$, $J_o(0)=1$ ve (3.4.18)

$$\int_0^{\infty} k J_o(kr) \exp(-k^2 \kappa t) dk = \frac{1}{2\kappa t} \exp\left[-\frac{r^2}{4\kappa t}\right], \quad (3.4.19)$$

olur. (3.4.17) tekrar yazmak için (3.4.18) kullanarak

$$u(r,t) = \frac{1}{2.\kappa.t} \int_0^{\infty} l f(l) I_0\left(\frac{rl}{2.\kappa.t}\right) \exp\left[-\frac{(r^2 + l^2)}{4.\kappa.t}\right] dl. \quad (3.4.20)$$

$f(r)$, yarıçapı a olan bir dairede toplanmış bir ısı kaynağını ifade etsin ve $a \rightarrow 0$ giderse ısı kaynağı $r=0$ 'da toplansın ve

$$\lim_{a \rightarrow 0} 2\pi \int_0^a r f(r) dr = 1 \text{ oluşur. Veya eşit olarak}$$

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r}, \quad (\delta(r) \text{ Dirac delta fonksiyonudur}).$$

$r=0$ 'da ısı kaynağında toplandığından dolayı sonuç çözüm şudur:

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \frac{1}{4.\pi.\kappa.t} \int_0^{\infty} \delta(l) I_0\left(\frac{rl}{2.\kappa.t}\right) \exp\left[-\frac{r^2 + l^2}{4.\kappa.t}\right] dl \\ &= \frac{1}{4.\pi.\kappa.t} \exp\left(-\frac{r^2}{4.\kappa.t}\right). \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

3.5 Sonlu Hankel Dönüşümleri

Teorem 3.5.1. $f(r)$, $0 \leq r \leq a$ aralığında tanımlanırsa ve

$$\tilde{f}_n(\kappa_i) = \int_0^a r f(r) J_n(r\kappa_i) dr, \quad (3.5.1.1)$$

olursa $f(r)$ 'yi fourier-Bessel serisi olarak ifade edilirse

$$f(r) = \frac{2}{a^2} \cdot \sum_0^{\infty} \tilde{f}_n(\kappa_i) \cdot \frac{J_n(r\kappa_i)}{J_{n+1}^2(a\kappa_i)}, \quad (3.5.1.2)$$

$\kappa_i (0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots)$ $J_n(a\kappa_i) = 0$ kökleridir. (Depnath, 1995) $J'_n(a\kappa_i)$, $J_{n-1}(x)$ ve $J_{n+1}(x)$ arasındaki ilişki şöyledir:

$$J'_n(a\kappa_i) = J_{n-1}(a\kappa_i) = -J_{n+1}(a\kappa_i). \quad (3.5.1.3)$$

İspat. $f(r)$ 'nin bessel serisi uzantısı

$$f(r) = \sum_1^{\infty} c_i \cdot J_n(r.\kappa_i), \quad (3.5.1.4)$$

şeklindedir. Bessel fonksiyonu $J_n(a\kappa_i)$ 'nın pozitif sıfırları $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ toplamda yer alır. Yukarıdaki ifadede her iki tarafı 0'dan a'ya kadar $r.J_n(r\kappa_i)$ tarafının integralini alırsak

$$\int_0^a r f(r) J_n(r \kappa_i) dr = c_i \int_0^a r J_n^2(r \kappa_i) dr, \quad (3.5.1.5)$$

$$\tilde{f}_n(\kappa_i) = \frac{2c_i}{a^2} J_{n+1}^2(a\kappa_i), \quad c_i = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{f_n(\kappa_i)}{J_{n+1}^2(a\kappa_i)}, \quad (3.5.1.6)$$

Tanım. Bir $f(r)$ fonksiyonun n dereceden, sonlu Hankel dönüşümü

$$H_n\{f(r)\} = \tilde{f}_n(\kappa_i) = \int_0^a r f(r) J_n(r \kappa_i) dr, \quad (3.5.1.7)$$

şeklinde ifade edilir. Ters sonlu Hankel dönüşümü ise

$$H^{-1}\{\tilde{f}_n(\kappa_i)\} = f(r) = \frac{2}{a^2} \sum_1^\infty \tilde{f}_n(\kappa_i) \cdot \frac{J_n(r \kappa_i)}{J_{n+1}^2(a\kappa_i)}, \quad (3.5.1.8)$$

$J_n(a\kappa)=0$ tüm pozitif köklerdir.

Sıfır mertebede sonlu Hankel dönüşümü

$$H_o\{f(r)\} = \tilde{f}_o(\kappa_i) = \int_0^a r f(r) J_o(r \kappa_i) dr, \quad (3.5.1.9)$$

ve sonlu Hankel Dönüşümü tersi

$$H_o^{-1}\{\tilde{f}_o(\kappa_i)\} = f(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^\infty \tilde{f}_o(\kappa_i) \frac{J_o(r \kappa_i)}{J_1^2(a\kappa_i)}, \quad (3.5.1.10)$$

olur. $J_o(a\kappa)=0$ pozitif kökleri alınır. (Depnath, 1995)

Benzer şekilde birinci dereceden sonlu Hankel dönüşümü ve onun tersi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$H_1\{f(r)\} = \tilde{f}_1(\kappa_i) = \int_0^a r f(r) J_1(r \kappa_i) dr, \quad (3.5.1.11)$$

$$H_1^{-1}\{\tilde{f}(\kappa_i)\} = f(r) = \frac{2}{a^2} \sum_1^\infty \tilde{f}_1(\kappa_i) \frac{J_1(r \kappa_i)}{J_2^2(a \kappa_i)}, \quad (3.5.1.12)$$

$J_1(a\kappa)=0$ pozitif olarak seçilir. Sonlu Hankel dönüşümüne örnekler verelim:

Örnek. $f(r)=r^n$ ise

$$H_n\{r^n\} = \int_0^a r^{n+1} J_n(r \kappa_i) dr = \frac{a^{n+1}}{\kappa_i} J_{n+1}(a \kappa_i)$$

$n=0$ olduğu zaman $H_0\{1\}=(a/\kappa_i).J_1(a\kappa_i)$

Örnek. $f(r)=(a^2-r^2)$ ise

$$H_o\{(a^2-r^2)\} = \int_0^a r(a^2-r^2) J_o(a \kappa_i) dr = \frac{4a}{\kappa_i^3} J_1(a \kappa_i) - \frac{2a^2}{\kappa_i} J_o(a \kappa_i)$$

$J_o(a\kappa)=0$ kökleridir. $H_o\{(a^2-r^2)\}=(4a/\kappa_i^3).J_1(a\kappa_i)$ olur.

3.5.2 Sonlu Hankel Dönüşümünün Temel Özellikleri

$$H_n\{f'(r)\} = \frac{\kappa_i}{2n} [(n-1)H_{n+1}\{f(r)\} - (n+1)H_{n-1}\{f(r)\}], n \geq 1, \quad (3.5.2.1)$$

$r=0$ 'da $f(r)$ sonludur.

$n=1$ olduğu zaman,

$$H_1\{f'(r)\} = -\kappa_i H_o\{f(r)\} = -\kappa_i \tilde{f}_o(\kappa_i), \quad (3.5.2.2)$$

$$H_n \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{r f'(r)\} - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] = -k_i^2 \tilde{f}_n(k_i) - a f(a) k_i J_n'(a k_i), \quad (3.5.2.3)$$

$n=0$ olduğu zaman

$$H_o \left[f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] = -k_i^2 f_o^2(k_i) + af(a)k_i J_1'(ak_i), \quad (3.5.2.4)$$

n=1 olduğu zaman

$$H_1 \left[f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{1}{r^2} f(r) \right] = -k_i^2 \tilde{f}_1(k_i) - af(a)k_i J_1'(ak_i), \quad (3.5.2.5)$$

Bu son iki ifade silindirik polar koordinatlarda problemler çözmek için kullanılışlıdır.(Depnath,1995)

3.6 Sonlu Hankel Dönüşümünün uygulaması

3.6.1 Uygulama (Uzun dairesel silindirlerde sıcaklık dağılımı)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (3.6.1.1)$$

$0 \leq r \leq a$, $t > 0$ asimetrik ısı iletim denkleminin sınır ve başlangıç koşulları şöyledir:

$$u(r,t) = f(t), \quad r=a, t > 0$$

$$u(r,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a$$

sonlu Hankel dönüşümünün uygulayarak çözünüz?(James,1993)

$$\tilde{U}(k_i, t) = H_o \{u(r, t)\} = \int_0^a r J_o(rk_i) u(r, t) dr$$

denkleme yerine konursa

$$\tilde{U}_t + \kappa k_i^2 \tilde{U} = \kappa a k_i J_1(ak_i) f(t)$$

$$\tilde{U}(k_i, 0) = 0$$

Birinci mertebeden çözüm şöyledir:

$$\tilde{U}(\kappa_i, t) = \kappa_i a_i J_1(a_i \kappa_i) \cdot \int_0^t f(\tau) \cdot \exp\{-\kappa_i^2 \cdot (t - \tau)\} d\tau$$

Ters dönüşümü:

$$u(r, t) = \frac{2\kappa_i}{a} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i J_0(r k_i)}{J_1(a k_i)} \cdot \int_0^t f(\tau) \cdot \exp\{-\kappa_i^2 \cdot (t - \tau)\} d\tau$$

f(t)=T₀=sabit ise

$$u(r, t) = \frac{2T_0}{a} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(r k_i)}{\kappa_i J_1(a k_i)} \cdot [1 - \exp\{-\kappa_i^2 t\}]$$

$$u(r, t) = T_0 - 2 \cdot \frac{T_0}{a} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(r k_i)}{k_i J_1(a k_i)} \cdot \exp\{-\kappa_i^2 t\}$$



4. MELLİN DÖNÜŞÜMLERİ

4.1 Mellin Dönüşümü Tanımı ve Örnekleri:

Kompleks Fourier Dönüşümü ve onun tersinden Mellin Dönüşümü ve Tersini türeteceğiz. Hatırlanacağı gibi Fourier Dönüşümü ve Tersini şöyledir;

$$F\{g(\xi)\} = G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} g(\xi) d\xi, \quad (4.1.1)$$

$$F^{-1}\{G(k)\} = g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} G(k) dk, \quad (4.1.2)$$

$\exp\{\xi\}$ ve $ik=c-p$ değişken dönüşümü yapalım. Burada c sabittir.

$$G(ip - ic) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{p-c-1} g(\log x) dx, \quad (4.1.3)$$

$$g(\log x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{c-p} G(ip - ic) dp, \quad (4.1.4)$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-c} \cdot g(\log x) \equiv f(x)$, ve $G(ip - ic) \equiv \tilde{f}(p)$ tanımlayalım.

$$M\{f(x)\} = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot f(x) \cdot dx, \quad (4.1.5)$$

$$M^{-1}\{\tilde{f}(p)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} \cdot \tilde{f}(p) \cdot dp. \quad (4.1.6)$$

$f(x)$, $(0, \infty)$ aralığında tanımlanmış reel değerli fonksiyondur ve Mellin Dönüşümü değişkeni p ise kompleks sayıdır. Bazen Mellin dönüşümü $f(x)$ fonksiyonu için $\tilde{f}(p) = M\{f(x), p\}$, şeklinde de gösterilebilir. M ve M^{-1} lineer integral operatörlerdir. (Depnath, 1995)

4.1.1 Örnek:

$f(x)=e^{-nx}$, $n>0$ ise

$$M\{e^{-nx}\} = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-nx} \cdot dx,$$

$nx=t$ koyarsak

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{n^p} \int_0^{\infty} t^{p-1} \cdot e^{-t} \cdot dt = \frac{\Gamma(p)}{n^p}, \text{ dir.} \quad (4.1.7)$$

4.1.2 Örnek:

$f(x)=(e^x-1)^{-1}$ ise

$$M\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\} = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \frac{1}{e^x-1} \cdot dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \text{ ve bu yüzden } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x-1} \text{ olur.}$$

$$\tilde{f}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-nx} \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p)}{n^p} = \Gamma(p) \cdot \zeta(p) \quad (4.1.8)$$

Burada $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $(\text{Re } p > 1)$ ünlü Riemann Zeta Fonksiyonudur.

4.1.3 Örnek:

$f(x) = \frac{1}{x+1}$ ise

$$M\left\{\frac{1}{x+1}\right\} = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \frac{dx}{x+1}$$

$x = \frac{t}{1-t}$ değişken dönüşümü yaparsak

$$\tilde{f}(p) = \int_0^1 t^{p-1} \cdot (1-t)^{(1-p)-1} \cdot dt = B(p, 1-p) = \Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p)$$

burada B, beta fonksiyonudur.

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \pi \cdot \operatorname{cosec}(\pi \cdot p) \text{ 'dir.} \quad (4.1.9)$$

4.1.4 Örnek:

$$f(x) = \frac{2}{e^{2x} - 1}, \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} M\left\{\frac{2}{e^{2x}-1}\right\} &= \tilde{f}(p) = 2 \cdot \int_0^\infty x^{p-1} \cdot \frac{dx}{e^{2x} - 1} = 2 \cdot \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-2nx} \cdot dx \\ &= 2 \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(p)}{(2n)^p} = 2^{1-p} \cdot \Gamma(p) \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = 2^{1-p} \cdot \Gamma(p) \cdot \zeta(p), \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

4.1.5 Örnek:

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \text{ ise}$$

$$M\left\{\frac{1}{e^x + 1}\right\} = (1 - 2^{1-p}) \cdot \Gamma(p) \cdot \zeta(p) \quad (4.1.11)$$

Bu sonucu örnek 4.1.2 ve örnek 4.1.4'den elde ettik.

$$\left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 1} \right] = \frac{2}{e^{2x} - 1} \text{ açılımını kullandık.}$$

4.1.6 Örnek:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^n} \text{ ise}$$

$$M\left\{\frac{1}{(1+x)^n}\right\} = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot (1+x)^{-n} \cdot dx,$$

$x = \frac{t}{1-t}$ değişken dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} t^{p-1} \cdot (1-t)^{n-p-1} \cdot dt \\ &= B(p, n-p) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(n-p)}{\Gamma(n)} \end{aligned}$$

$B(p, q)$ standart Beta fonksiyonudur. Bu yüzden $M^{-1}\{\Gamma(p) \cdot \Gamma(n-p)\} = \frac{\Gamma(n)}{(1+x)^n}$ olur.

4.1.7 Örnek:

$\cos kx$ ve $\sin kx$ ' in Mellin dönüşümünü bulalım:

$$M[e^{-ikx}] = \frac{\Gamma(p)}{(ik)^p} \text{ olduğunu birinci örnekte bulmuştuk.}$$

$$\frac{\Gamma(p)}{(ik)^p} = \frac{\Gamma(p)}{k^p} \cdot \left(\cos \frac{p\pi}{2} - i \sin \frac{p\pi}{2} \right) \text{ reel ve imajiner kısımlara ayıralım;}$$

$$M(\cos kx) = k^{-p} \cdot \Gamma(p) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right), \quad (4.1.12)$$

$$M(\sin kx) = k^{-p} \cdot \Gamma(p) \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right), \quad (4.1.13)$$

bu sonuçları x^{p-1} ' in fourier sine ve cosine hesaplamak için kullanabiliriz:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \cos kx \cdot dx = \frac{\Gamma(p)}{k^p} \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \text{ veya}$$

$$F_c\{x^{p-1} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}\} = \frac{\Gamma(p)}{k^p} \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right),$$

$$F_c\{x^{p-1}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(p)}{k^p} \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right), \quad (4.1.14)$$

[Depnath,1995] Benzer şekilde

$$F_s\{x^{p-1}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(p)}{k^p} \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \quad (4.1.15)$$

4.2 Mellin Dönüşümünün İşlemsel Özellikleri

4.2.1 Scalling Özelliği.

$$M\{f(ax)\} = a^{-p} \cdot \tilde{f}(p), \quad a > 0 \quad (4.2.1)$$

İspat. Tanım ifadesini kullanarak

$$M\{f(ax)\} = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot f(ax) \cdot dx, \quad ax=t \text{ koyarsak}$$

$$M\{f(ax)\} = \frac{1}{a^p} \cdot \int_0^{\infty} t^{p-1} \cdot f(t) \cdot dt = \frac{\tilde{f}(p)}{a^p}$$

4.2.2 Shifting Özelliği.

$$M[x^a \cdot f(x)] = \tilde{f}(p+a) \text{ tanımdan buluruz.} \quad (4.2.2)$$

$$4.2.3 \quad M\{f(x^a)\} = \frac{1}{a} \cdot \tilde{f}\left(\frac{p}{a}\right), \quad (\text{I}) \quad (4.2.3)$$

$$M\left\{\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = \tilde{f}(1-p), \quad (\text{II}) \quad (4.2.4)$$

$$M\{\log x \cdot f(x)\} = \frac{d}{dp} \tilde{f}(p), \quad (\text{III}) \quad (4.2.5)$$

İspat.

Sadece (III) ispatını göstereceğiz:

$$\frac{d}{dp} x^{p-1} = (\log x) \cdot x^{p-1} \Rightarrow M\{\log x \cdot f(x)\} = \int_0^{\infty} \log x \cdot f(x) \cdot x^{p-1} \cdot dx$$

$$M\{\log x \cdot f(x)\} = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} x^{p-1} \cdot f(x) \cdot dx = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot f(x) \cdot dx = \frac{d}{dp} \tilde{f}(p) \text{ 'olur.}$$

4.2.4 Mellin Dönüşümünün Türevleri:

$$M[f'(x)] = -(p-1) \cdot \tilde{f}(p-1) \quad (4.2.6)$$

$x^{p-1} \cdot f(x)$, $x \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow \infty$ ortadan kalkarak yukarıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$M[f''(x)] = (p-1) \cdot (p-2) \cdot \tilde{f}(p-2), \quad (4.2.7)$$

Genel olarak;

$$M[f^{(n)}(x)] = (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)} \cdot M[f(x), p-n] \quad (4.2.8)$$

$r=0,1,2,\dots,(n-1)$ için $x \rightarrow 0$ olduğunda $x^{p-r-1} \cdot f^{(r)}(x) = 0$ dır.

İspat. Tanım bağıntısından

$$M[f'(x)] = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot f'(x) \cdot dx \text{ integralini alırsak;}$$

$$M[f'(x)] = [x^{p-1} \cdot f(x)]_0^{\infty} - (p-1) \cdot \int_0^{\infty} x^{p-2} \cdot f(x) \cdot dx = -(p-1) \cdot \tilde{f}(p-1)$$

4.2.5 $M\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$ ise

$$M\{x \cdot f'(x)\} = -p \cdot \tilde{f}(p), \quad (4.2.9)$$

$x^p.f(x)$, $x \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow \infty$ ortadan kalkar, bu şekilde bu bağıntıyı elde ederiz.[Paris ve Kaminski,2001]

$$M\{x^2.f''(x)\} = (-1)^2.p.(p+1).\tilde{f}(p), \quad (4.2.10)$$

olur. En genel şekli ise

$$M\{x^n.f^{(n)}(x)\} = (-1)^n.\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}.\tilde{f}(p) \text{ 'dir.} \quad (4.2.11)$$

İspat.

$$\begin{aligned} M\{x.f'(x)\} &= \int_0^\infty x^p.f'(x).dx \\ &= [x^p.f(x)]_0^\infty - p.\int_0^\infty x^{p-1}.f(x).dx = -p.\tilde{f}(p) \end{aligned}$$

4.2.6 Diferansiyel işlemlerde Mellin Dönüşümleri:

$$M\{f(x)\} = \tilde{f}(p) \text{ ise}$$

$$M\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^2.f(x)\right] = M[x^2.f''(x) + x.f'(x)] = (-1)^2.p^2.\tilde{f}(p), \quad (4.2.12)$$

Genel olarak;

$$M\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^n.f(x)\right] = (-1)^n.p^n.\tilde{f}(p), \quad (4.2.13)$$

olur.

İspat.

$$\begin{aligned} M\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^2.f(x)\right] &= M[x^2.f''(x) + x.f'(x)] \\ &= M[x^2.f''(x)] + M[x.f'(x)] = -p.\tilde{f}(p) + p(p+1).\tilde{f}(p) = (-1)^2.p^2.\tilde{f}(p) \end{aligned}$$

4.2.7 İntegralin Mellin Dönüşümü:

$$M\left\{\int_0^x f(t).dt\right\} = -\frac{1}{p}.\tilde{f}(p+1), \quad (4.2.14)$$

Genel olarak;

$$M\{I_n.f(x)\} = M\left\{\int_0^x I_{n-1}.f(t).dt\right\} = (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)} \cdot \tilde{f}(p+n), \quad (4.2.15)$$

$I_n.f(x)$, $f(x)$ 'in integralinin n.kez tekrarıdır,

$$I_n.f(x) = \int_0^x I_{n-1}.f(t).dt, \quad (4.2.16)$$

İspat.

$$F(x) = \int_0^x f(t).dt, \quad F'(x)=f(x), \quad F(0)=0$$

$$M\{f(x) = F'(x), p\} = -(p-1).M\left\{\int_0^x f(t).dt, p-1\right\}, \quad p-1 \text{ ile } p \text{ yerdeğiştirelim;}$$

$$M\left\{\int_0^x f(t).dt, p\right\} = -\frac{1}{p}.M\{f(x), p+1\} = -\frac{1}{p} \tilde{f}(p+1)$$

4.2.8 Convolution Tipi Teoremler:

$M\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$ ve $M\{g(x)\} = \tilde{g}(p)$ olmak üzere

$$M[f(x) * g(x)] = M\left[\int_0^\infty f(\xi).g\left(\frac{x}{\xi}\right). \frac{d\xi}{\xi}\right] = \tilde{f}(p).\tilde{g}(p), \quad (4.2.17)$$

$$M[f(x)og(x)] = M\left[\int_0^\infty f(x\xi).g(\xi).d\xi\right] = \tilde{f}(p).\tilde{g}(1-p) \quad (4.2.18)$$

olur.

İspat.

$$M\{f(x) * g(x)\} = M\left[\int_0^\infty f(\xi) \cdot g\left(\frac{x}{\xi}\right) \cdot \frac{d\xi}{\xi}\right] = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot dx \int_0^\infty f(\xi) \cdot g\left(\frac{x}{\xi}\right) \cdot \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^\infty f(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\infty x^{p-1} \cdot g\left(\frac{x}{\xi}\right) dx$$

($x=\xi \cdot \eta$)

$$= \int_0^\infty f(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\infty (\xi \eta)^{p-1} \cdot g(\eta) \cdot \xi \cdot d\eta = \int_0^\infty \xi^{p-1} \cdot f(\xi) \cdot d\xi \int_0^\infty \eta^{p-1} \cdot g(\eta) \cdot d\eta = \tilde{f}(p) \cdot \tilde{g}(p)$$

Benzer şekilde ;

$$M[f(x)og(x)] = M\left[\int_0^\infty f(x\xi)g(\xi)d\xi\right] = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot dx \int_0^\infty f(x\xi) \cdot g(\xi) d\xi, (x \cdot \xi = \eta)$$

$$= \int_0^\infty g(\xi) \cdot d\xi \int_0^\infty \eta^{p-1} \cdot \xi^{1-p} \cdot f(\eta) \cdot \frac{d\eta}{\xi} = \int_0^\infty \xi^{1-p-1} \cdot g(\xi) \cdot d\xi \cdot \int_0^\infty \eta^{p-1} \cdot f(\eta) \cdot d\eta = \tilde{g}(1-p) \cdot \tilde{f}(p)$$

bu işlem için operation o commutative değildir.(Depnath,1995)

4.2.9 Parseval Tip Özelliği:

$M\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$ ise ve $M\{g(x)\} = \tilde{g}(p)$,

$$M[f(x) \cdot g(x)] = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(p-s) \cdot ds, \quad (4.2.19)$$

veya eşit olarak $\int_0^\infty x^{p-1} \cdot f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(p-s) \cdot ds$, $p=1$ olduğu zaman

Mellin dönüşümü için Parseval formülü elde ederiz.

$$\int_0^\infty f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^\infty x^{p-1} \cdot f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^\infty x^{p-1} \cdot g(x) \cdot dx \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \cdot \tilde{f}(s) \cdot ds, \quad (4.2.20)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) \cdot ds \cdot \int_0^{\infty} x^{p-s-1} \cdot g(x) \cdot dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(p-s) \cdot ds
\end{aligned}$$

4.3 Mellin Dönüşümlerinin Uygulamaları

4.3.1 Uygulama

$$x^2 \cdot u_{xx} + x \cdot u_x + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x < \infty, 0 < y < 1, \quad (4.3.1)$$

$$u(x,0)=0, u(x,1)=\begin{cases} A, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}, A \text{ sabit'tir.} \quad (4.3.2)$$

x 'e bağlı olarak $u(x,y)$ 'nin Mellin dönüşümünü yazalım; $\tilde{U}(p, y) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot u(x, y) \cdot dx$

verilen denklemede yerine yazalım;

$$\tilde{U}_{yy} + p^2 \cdot \tilde{U} = 0, \quad 0 < y < 1$$

$$\tilde{U}(p,0) = 0, \quad \tilde{U}(p,1) = A \cdot \int_0^1 x^{p-1} \cdot dx = \frac{A}{p}$$

Dönüşüm probleminin çözümü

$$\tilde{U}(p, y) = \frac{A \cdot \sin py}{p \cdot \sin p}, \quad 0 < \text{Re } p < 1$$

Ters Mellin Dönüşümü;

$$u(x, y) = \frac{A}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-p}}{p} \cdot \frac{\sin py}{\sin p} \cdot dp \quad (4.3.3)$$

olur.

$\tilde{U}(p, y)$, $0 < \text{Re}(p) < \pi$ analitikdir ve yüzden $0 < c < \pi$ 'dir. $u(x, y)$ integrali basit kutuplara $p = n\pi$, $n=1, 2, 3$ sahiptir. Sağ yarım düzlemde yarı dairesel şekildedir. Rezidü teoremi ile yorumlanırsa çözüm aşağıdaki gibi olur;

$$u(x, y) = \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^n \cdot x^{-n\pi} \cdot \sin n\pi \cdot y. \quad (4.3.4)$$

4.3.2 Uygulama (Sonsuz takozda potansiyel)

$$r^2 \phi_{rr} + r \phi_r + \phi_{\theta\theta} = 0, \quad (4.3.5)$$

$0 < r < \infty$, $-\alpha < \theta < \alpha$ sınır koşullu

$$\phi(r, \alpha) = f(r), \quad \phi(r, -\alpha) = g(r), \quad 0 \leq r < \infty, \quad (4.3.6)$$

$-\alpha < \theta < \alpha$ aralığında tüm θ için $\phi(r, \theta) \rightarrow 0$ olsun. Laplace denklemini sağlayan $\phi(r, \theta)$ potansiyeli bulalım:

$$M[\phi(r, \theta)] = \tilde{\phi}(p, \theta) = \int_0^{\infty} r^{p-1} \cdot \phi(r, \theta) dr \text{ tanımlanan } \phi(r, \theta) \text{ potansiyeline Mellin dönüşümünü}$$

uygulayalım:

Differansiyel denklem sistemi

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{d\theta^2} + p^2 \cdot \tilde{\phi} = 0, \quad (4.3.7)$$

$$\tilde{\phi}(p, \alpha) = \tilde{f}(p), \quad \tilde{\phi}(p, -\alpha) = \tilde{g}(p) \quad (4.3.8)$$

Dönüştürülmüş olan denklemin genel çözümü

$$\tilde{\phi}(p, \theta) = A \cdot \cos p\theta + B \cdot \sin p\theta, \quad (4.3.9)$$

dir. Burada A ve B, p ve α 'nin fonksiyonlarıdır. Sınır koşulları A ve B bulmamızı sağlar.

$$A.\cos p\alpha + B.\sin p\alpha = \tilde{f}(p)$$

$$A.\cos p\alpha - B.\sin p\alpha = \tilde{g}(p)$$

Buradan

$$A = \frac{\tilde{f}(p) + \tilde{g}(p)}{2.\cos p\alpha}, \quad B = \frac{\tilde{f}(p) - \tilde{g}(p)}{2.\sin p\alpha},$$

olur.

$$\tilde{\phi}(p, \theta) = \tilde{f}(p) \cdot \frac{\sin p(\alpha + \theta)}{\sin(2p\alpha)} + \tilde{g}(p) \cdot \frac{\sin p(\alpha - \theta)}{\sin(2p\alpha)} = \tilde{f}(p) \cdot \tilde{h}(p, \alpha + \theta) + \tilde{g}(p) \cdot \tilde{h}(p, \alpha - \theta),$$

$$\tilde{h}(p, \theta) = \frac{\sin p\theta}{\sin(2p\alpha)} \Rightarrow h(r, \theta) = M^{-1}\left\{\frac{\sin p\theta}{\sin 2p\alpha}\right\} = \left(\frac{1}{2\alpha}\right) \cdot \frac{r^n \cdot \sin n\theta}{(1 + 2.r^n \cdot \cos n\theta + r^{2n})}, n = \frac{\pi}{2\alpha} (2\alpha = \frac{\pi}{n})$$

Ters Mellin dönüşümünü $\tilde{\phi}(p, \theta)$ uygulayalım:

$\phi(r, \theta) = M^{-1}\{\tilde{f}(p) \cdot \tilde{h}(p, \alpha + \theta)\} + M^{-1}\{\tilde{g}(p) \cdot \tilde{h}(p, \alpha - \theta)\}$ convolution özelliğini kullanalım,

$$\phi(r, \theta) = \frac{r^n \cdot \cos n\theta}{2\alpha} \left[\int_0^\infty \frac{\xi^{n-1} \cdot f(\xi) \cdot d\xi}{\xi^{2n} - 2(r \cdot \xi)^n \cdot \sin n\theta + r^{2n}} + \int_0^\infty \frac{\xi^{-1} \cdot g(\xi) \cdot d\xi}{\xi^{2n} + 2(r \cdot \xi)^n \cdot \sin n\theta + r^{2n}} \right], |\alpha| < \frac{\pi}{2n},$$

bu problemin formal çözümüdür.

$f(r)=g(r)$ olduğu zaman

$$\tilde{\phi}(p, \theta) = \tilde{f}(p) \cdot \frac{\cos p\theta}{\cos p\alpha} = \tilde{f}(p) \cdot \tilde{h}(p, \theta), \quad (4.3.10)$$

$$\tilde{h}(p, \theta) = \frac{\cos p\theta}{\cos p\alpha} = M\{h(r, \theta)\}$$

Ters Mellin dönüşümü, convolution özelliğini kullanarak çözüm şöyle olur;

$$\phi(r, \theta) = \int_0^{\infty} f(\xi) \cdot h\left(\frac{r}{\xi}, \theta\right) \cdot \frac{d\xi}{\xi}, \quad (4.3.11)$$

$$h(r, \theta) = M^{-1} \left\{ \frac{\cos p\theta}{\cos p\alpha} \right\} = \left(\frac{r^n}{\alpha} \right) \cdot \frac{(1 + r^{2n}) \cdot \cos(n\theta)}{(1 + 2 \cdot r^{2n} \cdot \cos 2n\theta + r^{2n})}, n = \frac{\pi}{2\alpha} \quad (4.3.12)$$

4.3.3 Uygulama

$$\int_0^{\infty} f(\xi) \cdot k(x\xi) d\xi, \quad x > 0 \quad (4.3.13)$$

integralini çözünüz?

$$M \left[\int_0^{\infty} f(x\xi) \cdot g(\xi) d\xi \right] = \tilde{f}(p) \cdot \tilde{g}(1-p) \text{ özelliğini kullanalım;}$$

$\tilde{f}(1-p) \cdot \tilde{k}(p) = \tilde{g}(p)$, $1-p$ ile p yer değiştirelim. $\tilde{f}(p) = \tilde{g}(1-p) \cdot \tilde{h}(p)$, burada

$$\tilde{h}(p) = \frac{1}{\tilde{k}(1-p)} \text{ şeklindedir.}$$

Ters Mellin dönüşümü uygulayarak

$$f(x) = M^{-1} \{ \tilde{g}(1-p) \cdot \tilde{h}(p) \} = \int_0^{\infty} g(\xi) \cdot h(x\xi) d\xi, \quad (4.3.14)$$

$h(x) = M^{-1} \{ \tilde{h}(p) \}$ bu yüzden problem çözülür.

$\tilde{k}(p) \cdot \tilde{k}(1-p) = 1$, o zaman $\tilde{h}(p) = \tilde{k}(p)$ 'dir.

4.3.4 Uygulama

$$\int_0^{\infty} f(\xi) \cdot g\left(\frac{x}{\xi}\right) \cdot \frac{d\xi}{\xi} = h(x), \quad (4.3.15)$$

integral denklemini çözünüz?

$f(x)$ bilinmeyen, $g(x)$ ve $h(x)$ verilen fonksiyonlardır. $\tilde{f}(p) = \tilde{h}(p).k(p)$, $\tilde{k}(p) = \frac{1}{\tilde{g}(p)}$

tersi olarak, convolution özelliğini kullanarak

$$f(x) = M^{-1}\{\tilde{h}(p).\tilde{k}(p)\} = \int_0^{\infty} h(\xi)k\left(\frac{x}{\xi}\right). \frac{d\xi}{\xi}, \quad (4.3.16)$$

elde ederiz.

4.4 Serilerin Toplamına Mellin Dönüşümünün Uygulanması:

4.4.1 Teorem. $M\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p).\xi(p,a)dp, \quad (4.4.1)$$

burada $\xi(p,a)$ Hurwitz Zeta fonksiyonu denir.

$$\xi(p,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad \text{Re}(p) > 1 \quad (4.4.2)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. Mellin dönüşümünün tersi için

$$f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p).(n+a)^{-p} dp \quad (4.4.3)$$

tüm n 'ler için toplarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p).\xi(p,a)dp$$

bu ispatı sağlar. Benzer şekilde;

$$f(nx) = M^{-1}\{n^{-p} \cdot \tilde{f}(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} \cdot n^{-p} \cdot \tilde{f}(p) dp,$$

bu yüzden

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} \cdot \tilde{f}(p) \cdot \xi(p) dp = M^{-1}\{\tilde{f}(p) \cdot \xi(p)\}, \quad (4.4.4)$$

$$\xi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \text{ Riemann zeta fonksiyonudur.}$$

x=1 olduğu zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) \cdot \xi(p) dp, \quad (4.4.5)$$

a=0 aldık.

4.4.1 Örnek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^{-p} = (1 - 2^{1-p}) \cdot \xi(p) \quad (4.4.6)$$

olduğunu gösteriniz?

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^{-p} \cdot t^n &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot t^n \cdot \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-nx} \cdot dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot dx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot t^n \cdot e^{-nx} = \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \frac{t \cdot e^{-x}}{1 + t \cdot e^{-x}} \cdot dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \frac{t}{e^x + 1} \cdot dx \end{aligned}$$

limitde $t \rightarrow 1$ gittiği zaman, sonuç aşağıdaki gibi olur;

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \frac{1}{e^x + 1} \cdot dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot M\left\{\frac{1}{e^x + 1}\right\} = (1 - 2^{1-p}) \cdot \xi(p), \text{ burada}$$

$$M\left\{\frac{1}{e^x + 1}\right\} = (1 - 2^{1-p}) \cdot \Gamma(p) \cdot \xi(p) \text{ eşitliğini kullandık.}$$

4.4.1.2 Örnek:

$$0 < a < 2\pi, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n} = \frac{1}{2}(\pi - a) \quad (4.4.7)$$

olduğunu gösteriniz?

$f(x) = \left(\frac{\sin ax}{x}\right)$ Mellin dönüşümü

$$M\left\{\frac{\sin ax}{x}\right\} = \int_0^{\infty} x^{p-2} \cdot \sin ax \cdot dx$$

$$= F_s\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot x^{p-2}\right\} = -\frac{\Gamma(p-1)}{a^{p-1}} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot p}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) \cdot \xi(p) \cdot dp \text{ kullanarak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(p-1)}{a^{p-1}} \cdot \xi(p) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \cdot dp \quad (4.4.8)$$

$$(2\pi)^p \cdot \xi(1-p) = 2 \cdot \Gamma(p) \cdot \xi(p) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \quad (4.4.9)$$

zeta fonksiyonu yerine yazarsak;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n} = -\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^p \cdot \frac{\xi(1-p)}{p-1} \cdot dp$$

integral iki basit kutba $p=0$ ve $p=1$ sahiptir. Rezidüleri 1 ve $-\pi/a$ 'dır. Rezidülerin hesaplanmasıyla kompleks integralin sonucu bulunur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n} = \frac{1}{2}(\pi - a) \text{ olur.}$$

4.5 Genelleştirilmiş Mellin Dönüşümü:

Genelleştirilmiş Mellin dönüşümü, küresel ve silindirik koordinat sistemlerinin doğal koordinat yüzeyleri tarafından sınırlanan alanlarında sınır değer problemlerin çözümünde kullanılır. Sonlu ve sonsuz alanlardaki sınır değer problemlerini çözmek için de kullanılır.

$a < r < \infty$ tanımlanan $f(r)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Mellin dönüşümü aşağıdaki integrallerle gösterilmiştir;

$$M_{-}\{f(r)\} = F_{-}(p) = \int_a^{\infty} \left(r^{p-1} - \frac{a^{2p}}{r^{p+1}} \right) \cdot f(r) \cdot dr \quad (4.5.1)$$

Ters dönüşüm

$$M_{-}^{-1}\{F_{-}(p)\} = f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L r^{-p} \cdot F_{-}(p) \cdot dp, \quad r > a, \quad (4.5.2)$$

burada L , $\text{Re}\{p\} = c$ hattı'dır. $F(p)$, $c < \gamma$ olmak üzere $|\text{Re}(p)| < \gamma$ şeritinde analitik'dir.

$f(r)$ 'nin sonsuzda uygun bir şekilde davrandığı sağlandığında

$$M_{-}\left\{ r^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right\} = p^2 \cdot F_{-}(p) + 2p \cdot a^p \cdot f(a) \quad (4.5.3)$$

gösterilebilir. Tam olarak;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[(r^p - a^{2p} \cdot r^{-p}) \cdot r \cdot f_r - p \cdot (r^p + a^{2p} \cdot r^{-p}) \cdot f \right] = 0 \quad (4.5.4)$$

olur. Açık şekilde görüldüğü gibi $r=a$ iç sınırda $f(r)$ 'nin sınır değer problemini çözmede çok kullanışlıdır.

Diğer yandan, $f(r)$ 'nin türevi $r=a$ 'da tanımlanırsa, bağlantılı integral dönüşümünü

$$M_{+}[f(r)] = F_{+}(p) = \int_a^{\infty} \left(r^{p-1} + \frac{a^{2p}}{r^{p+1}} \right) \cdot f(r) \cdot dr, \quad |\text{Re}(p)| < r \quad (4.5.5)$$

olarak tanımlamak kolaydır. Ve onun tersi

$$M_+^{-1}[f(p)] = f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L r^{-p} \cdot F_+(p) \cdot dp, \quad r > a, \quad (4.5.6)$$

olur. Bu durumda, kısmi integrasyonlarla gösterilebilir

$$M_+ \left\{ r^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right\} = p^2 \cdot F_+(p) - 2a^{p+1} f'(a), \quad (4.5.7)$$

‘dir. Burada $f'(r)$, $r=a$ noktasında var’dır.

4.5.1 Teorem(Convolution).

$M_+ \{f(r)\} = F_+(p)$, ve $M_+ \{g(r)\} = G_+(p)$ ise

$$M_+ \{f(r)g(r)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_L F_+(\xi) \cdot G_+(p-\xi) d\xi, \quad (4.5.8)$$

veya eşit olarak

$$f(r)g(r) = M_+^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_L F_+(\xi) \cdot G_+(p-\xi) d\xi. \quad (4.5.9)$$

İspat: Varsayalım ki $F_+(p)$ ve $G_+(p)$, $|\operatorname{Re}(p)| < \gamma$ bazı şeritlerde analitik olsun. O zaman

$$\begin{aligned} M_+ \{f(r) \cdot g(r)\} &= \int_a^\infty \left(r^{p-1} + \frac{a^{2p}}{r^{p+1}} \right) f(r)g(r) dr \\ &= \int_a^\infty r^{p-1} f(r)g(r) dr + \int_a^\infty \frac{a^{2p}}{r^{p+1}} f(r)g(r) dr, \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L F_+(\xi) d\xi \cdot \int_a^\infty r^{p-\xi-1} g(r) dr + \frac{1}{2\pi i} \int_a^\infty \frac{a^{2p}}{r^{p+1}} g(r) dr \cdot \int_L r^{-\xi} F_+(\xi) d\xi \quad (4.5.11)$$

ilk integral teriminde $-\xi$ ile ξ değiştirirsek ve $F_+(\xi) = a^{2\xi} F_+(-\xi)$ ve (4.5.5) kullanırsak aşağıdaki terimi elde ederiz:

$$\int_L r^{-\xi} F_+(\xi) d\xi = \int_L r^\xi a^{-2\xi} F_+(\xi) d\xi. \quad (4.5.12)$$

İntegral yolu L, $\text{Re}(\xi)=c$ $\text{Re}(\xi)=-c$ olur. $F(\xi)$, büyük $\text{Im}(\xi)$ için sıfıra giderse, bu yol uygun olabilir.

(4.5.11) kullanarak tekrar yazılabilir;

$$\int_a^\infty \frac{a^{2r}}{r^{p+1}} f(r)g(r)dr = \frac{1}{2\pi.i} \int_L F_+(\xi).d\xi \cdot \int_a^\infty \frac{a^{2p-2\xi}}{r^{p-\xi+1}} g(r).dr, \quad (4.5.13)$$

Bu sonuç (4.5.10) tekrar yazılırsa;

$$\begin{aligned} M_+ \{f(r)g(r)\} &= \int_0^\infty (r^{p-1} + \frac{a^{2p}}{r^{p+1}}) f(r)g(r)dr \\ &= \int_a^\infty r^{p-1} f(r)g(r) + \int_a^\infty \frac{a^{2p}}{r^{p+1}} f(r)g(r)dr \\ &= \frac{1}{2\pi.i} \int_L F_+(\xi)d\xi \cdot \int_a^\infty r^{p-\xi-1} g(r)dr + \frac{1}{2\pi.i} \int_L F_+(\xi)d\xi \cdot \int_a^\infty \frac{a^{2p-2\xi}}{r^{p-\xi+1}} g(r)dr \\ &= \frac{1}{2\pi.i} \int_L F_+(\xi)G_+(p-\xi)d\xi \end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

İntegral sınırı sonlu ise genelleştirilmiş sonlu mellin dönüşümü denir.

$$M_-^a \{f(r)\} = F_-^a(p) = \int_0^a (r^{p-1} - \frac{a^{2p}}{r^{p+1}}) f(r)dr, \quad \text{Re } p < \gamma \quad (4.5.14)$$

şeklindedir. Bu ifadenin ters dönüşümü ise

$$f(r) = -\frac{1}{2\pi.i} \int_L \left(\frac{r}{a^2}\right)^p F_-^a(p)dp, \quad 0 < r < a \text{ olur.}$$

$$p, -p \text{ ile } \text{ yerdeğiştirirse ve } F_-^a(-p) = -a^{-2p} F_-^a(p),$$

$$= \frac{1}{2\pi.i} \int_L r^{-p} F_-^a(p).dp, \quad 0 < r < a. \quad (4.5.15)$$

Burada L yolu, $|c| < \gamma$ 'lı $\text{Re } p = -c$ 'dır.

$$M_-^a \{r^2 \cdot f_{rr} + r \cdot f_r\} = \int_0^a \left(r^{p-1} - \frac{a^{2p}}{r^{p+1}}\right) \cdot (r^2 \cdot f_{rr} + r \cdot f_r) \cdot dr = p^2 \cdot F_-^a(p) - 2 \cdot p \cdot a^p \cdot f(a) \quad (4.5.16)$$

sonucunu kanıtlamak kolaydır. Bu uygulamalar için kullanışlı bir sonuçtur.

Benzer şekilde sonlu dönüşüm çiftinide tanımlayabiliriz;

$$M_+^a \{f(r)\} = F_+^a(p) = \int_0^a \left(r^{p-1} + \frac{a^{2p}}{r^{p+1}}\right) f(r) dr, \quad |\operatorname{Re} p| < \gamma \text{ değerindedir.}$$

$$f(r) = (M_+^a)^{-1} [F_+^a(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L r^{-p} \cdot F_+^a \cdot dp,$$

Sonlu dönüşümler için aynı zamanda ispatlayabiliriz:

$$M_+^a [r^2 \cdot f_{rr} + r \cdot f_r] = \int_0^a \left(r^{p-1} + \frac{a^{2p}}{r^{p+1}}\right) (r^2 \cdot f_{rr} + r \cdot f_r) \cdot dr, \quad (4.5.17)$$

$$= p^2 \cdot F_+^a(p) + 2a^{p-1} \cdot f'(a) \quad (4.5.18)$$

Bu sonuç uygulamalar için çok kullanışlıdır. (Depnath, 1995)

5. SONUÇLAR

Hankel dönüşümleri ve Mellin dönüşümleri özellikle Elektrik-Elektronik Müh. geniş kullanım alanlarına sahip olmaya başladı. Kompleks mühendislik hesaplarını indirgemedi, yeni araştırmalara öncülük etmede büyük aracılık görevini sürdürüyor. İlerideki çalışmalarımızda geniş farklı mühendislik uygulamalarında ele alacağız.



KAYNAKLAR

Depnath, Lokenath, (1995), "Integral Transforms and Their Applications", CRC Press, New York.

Koçer, Mücella,(1974),"Bessel Fonksiyonları ve Fourier-Bessel açılımı", İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi, İstanbul.

Kraniauskas, Peter, (1992), "Transforms in Signals and Systems", Addison-Wesley Publishing Company, London.

James, Glyn, (1993), "Advanced Modern Engineering Mathematics", Addison-Wesley Publishing Company, London.

Paris, R.B and Kaminski, D., (2001), "Asymptotics and Mellin-Barners Integrals",Cambridge University.

Powers,David L.,(1972), "Boundary Value Problems",Academic Press, London.

Reed, Myril B. And Reed, Georgia B.(1951), "Mathematical Methods in Electrical Engineering", Harper&Brothers, New York.

Sagan, Hans,(1989),"Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics", Dover Publications, New York

EKLER

Ek 1 Bessel Denklemi ve Çözümü

Ek 2 Gamma Fonksiyonu

Ek 3 Beta Fonksiyonu



Ek 1**Bessel Denklemi ve Çözümü**

p'inci mertebeden Bessel differansiyel denklemi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

ile verilir. Bu denklemin çözümünü Frobenius yöntemi ile çözümünü bulalım.

Önce kısaca **Frobenius yöntemini** açıklayalım;

$P_0(x).y'' + P_1(x).y' + P_2(x).y = 0$, yapısında ikinci mertebeden homojen bir diferansiyel denklemi ele alalım. $x=a$ noktası, $P_0(a) \neq 0$ ise adi nokta, aksi takdirde $P_0(a) = 0$ ise tekil nokta denir.

$x=a$ noktası adi nokta ise

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (E-1.1)$$

formunda bir çözüm aranır. Bu yöntem kuvvet serisi yöntemide denir.

$x=a$ noktası bir tekil nokta olsun; diferansiyel denklemimiz şu şekli alır

$$y'' + \frac{R_1(x)}{x-a} y' + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} y = 0, \quad (E-1.2)$$

formunda yazalım. $R_1(x)$ ve $R_2(x)$ fonksiyonları $x=a$ noktası civarında seriye açarsak , $x=a$ noktasına düzgün tekil nokta , $R_1(x)$ ve $R_2(x)$ fonksiyonlarına ise $x=a$ noktası civarında analitik denir.

$$y = x^c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{c+n} = a_0 \cdot x^c + a_1 \cdot x^{c+1} + a_2 \cdot x^{c+2} + \dots + a_n \cdot x^{c+n} + \dots \quad (E-1.3)$$

formunda bir çözüm aranır. Bu yöntem Frobenius yöntemi olarak bilinir.

Bessel diferansiyel denlemindeki ifadede $R_1(x)=1, R_2(x)=((x^2-1)/x^2)$ olup her ikisinde $x=0$ noktası civarında seriye açılabilirler, yani analitiktir. Dolayısıyla $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır ve denklemin aşağıdaki formda bir çözümü vardır.

Buradan hareketle oluşturulan y' ve y'' değerlerini denklemde yerine koyduktan sonra gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{c+n}, \quad (E-1.4)$$

$x^c (c^2 - p^2) a_0 + x^{c+1} [(c+1)^2 - p^2] a_1 + x^{c+2} \{[(c+2)^2 - p^2] a_2 + a_0\} + \dots + x^{c+n} \{[(c+n)^2 - p^2] a_n + a_{n-2}\} + \dots$
Ve buradan da

$$[(c+n)^2 - p^2] a_n + a_{n-2} = 0, \quad (c^2 - p^2) a_0 = 0, \quad [(c+1)^2 - p^2] a_1 = 0$$

buluruz.

a_n ile a_{n-2} arasında oluşan rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$a_n = -\frac{1}{(c+n)^2 - p^2} a_{n-2}, \quad (E-1.5)$$

İndis denklemi $c^2 - p^2 = 0$ ve kökleri, p negatif olmamak üzere p ve $-p$ 'dir. $c=p$ olgusunu denklemde yerine koyup ve rekürans bağıntısında kullanırsak $a_1=0$ ve

$$a_n = -\frac{1}{n(2p+n)} a_{n-2}, n \geq 2, \quad (E-1.6)$$

Ve dolayısıyla $a_1=a_2=a_3=\dots$ ve

$$a_2 = -\frac{1}{2^2 1!(p+1)} a_0,$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2 2(p+3)} a_4 = -\frac{1}{2^6 3!(p+3)(p+2)(p+1)} a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2 2(p+2)} a_2 = -\frac{1}{2^4 2!(p+2)(p+1)} a_0,$$

.....

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(p+k)(p+k-1)\dots(p+2)(p+1)} a_0, (k \geq 1).$$

bulunur. (Koçer,1974)Aradığımız çözüm

$$y_1(x) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^p [a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k}] = a_0 x^p [1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} k! (p+k)(p+k-1) \dots (p+2)(p+1)}]$$

olacaktır. a_0 büyüklüğü genel olarak $a_0 = (1/(2^p \Gamma(p+1)))$ olarak seçilir. Bu seçimi yerine yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$y_1(x) = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} x^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k! \Gamma(p+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k! \Gamma(p+k+1)} = J_p(x) \quad (E-1.7)$$

Bessel fonsiyonu $y=J_p(x)$ Bessel denklemi olan $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ sağlar. p pozitif ve sıfır olmadığı zaman, $J_p(x)$ ve $J_{-p}(x)$ gibi lineer bağımsız çözümleri vardır.

$y=A \cdot J_p(x)+B \cdot J_{-p}(x)$ genel çözümü vardır. A ve B keyfi sabitlerdir. $p=n$ olduğu zaman $J_p(x)$ ve $J_{-p}(x)$ artık bağımsız değildir. $J_{-p}(x)=(-1)^p \cdot J_p(x)$ ilişkisi vardır.

P pozitif tamsayı ve sıfır olduğu zaman Bessel denklemi sadece bir çözüme sahiptir. Bu çözüm aşağıdaki gibidir.

$$J_p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! (p+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2r} \quad (E-1.8)$$

İkinci çözümde Neumann ve Weber çözüm olarak bilinir.

$$Y_p(x) = \lim_{v \rightarrow p} Y_v(x), \quad Y_v(x) = \frac{(\cos v\pi) J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}, \quad (E-1.9)$$

Genel çözümde $y(x)=A J_p(x)+B Y_n(x)$ şeklinde olur.

$$J_o(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}, \quad (E-1.10)$$

$$J_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(1+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2r} \quad (\text{E-1.11})$$

Yukarıdaki iki denklemden şu sonuç çıkar: $J'_0(x) = -J_1(x)$ elde ederiz.

Bessel denkleminin recurrence ilişkisi şöyledir;

$$J_{p+1}(x) = \left(\frac{p}{x}\right)J_p(x) - J'_p(x), \quad (\text{E-1.12})$$

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x), \quad (\text{E-1.13})$$

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \left(\frac{2p}{x}\right)J_p(x), \quad (\text{E-1.14})$$

$$J_{p-1}(x) = \left(\frac{p}{x}\right)J_p(x) + J'_p(x), \quad (\text{E-1.15})$$

elde ederiz.

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^{-(n+2r+1)}}{r!(n+r-1)!} x^{2n+2r-1} = x^n J_{n-1}(x) \quad (\text{E-1.16})$$

Benzer şekilde gösterebiliriz;

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (\text{E-1.17})$$

Bessel çözümün integral çözümü;

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(p\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (\text{E-1.18})$$

Hankel dönüşümlerinde çok kullanılan bessel fonksiyonlarının integral sonuçları şöyledir:

$$\int_0^{\infty} \exp(-at) J_p(bt) t^{p+1} dt = \frac{(2a)(2b)^p \Gamma(p + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}(a^2 + b^2)^{p+\frac{3}{2}}}, p > -1 \quad (\text{E-1.19})$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-at) J_p(bt) t^p dt = \frac{(2b)^p \Gamma(p + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(a^2 + b^2)^{p+\frac{1}{2}}}, p > -\frac{1}{2} \quad (\text{E-1.20})$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 t^2) J_p(bt) t^{p+1} dt = \frac{b^p}{(2a^2)^{p+1}} \exp(-\frac{b^2}{4a^2}), p > -1 \quad (\text{E-1.21})$$

$$\int_0^{\infty} J_p(bt) t^{2\mu-p-1} dt = \frac{2^{2\mu-p-1} \Gamma(\mu)}{\Gamma(p - \mu + 1)}, 0 < \mu < \frac{1}{2}, p > -\frac{1}{2} \quad (\text{E-1.22})$$

Birçok uygulamada kullanılmaktadır. [Depnath, 1995]

Ek 2**Gamma Fonksiyonu**

Gamma fonksiyonuna faktoriyel fonksiyonda denir , aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0, \quad (E-2.1)$$

$0 < a \leq b < \infty$, aralığında olan $[a, b]$ de her x için yukarıdaki integral yakınsaktır. Ayrıca $\Gamma(x)$, $x > 0$ için sürekli fonksiyondur.

$\Gamma(x)$ 'in temel özelliğini integrali açarak elde ederiz:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \left[-e^{-t} t^{x-1} \right]_0^{\infty} + (x-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-2} dt \\ &= (x-1) \Gamma(x-1), (x-1) > 0 \end{aligned}$$

$x+1$ ile x yerlerini değiştirirsek

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad (E-2.2)$$

$x=n$ pozitif tamsayı olmak üzere, (E-2.2) tekrarlırsak

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1. \Gamma(1) = n!, \quad (E-2.3)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$t=u^2$ (E-2.1) yerine koyarsak değişken dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} \exp(-u^2) u^{2x-1} du, x > 0 \quad (E-2.4)$$

$x=(1/2)$ yerine koyarsak

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \exp(-u^2) du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}, \quad (\text{E-2.5})$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (\text{E-2.6})$$

Benzer şekilde olarak $\Gamma(5/2)$, $\Gamma(7/2)$,.... $\Gamma((2n+1)/2)$ değerlerini elde ederiz. Gamma fonksiyonunun x 'in negatif değerleride tanımlanabilir. **{Koçer,1974}**

$$\Gamma(-x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, x \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{E-2.7})$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \quad (\text{E-2.8})$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \quad (\text{E-2.9})$$

Şimdide Gamma fonksiyonunun türevini bulalım:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Gamma(x) &= \Gamma'(x) = \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} (t^x) \frac{e^{-t}}{t} dt, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} [\exp(x \log t)] \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{x-1} (\log t) e^{-t} dt, \end{aligned} \quad (\text{E-2.10})$$

$x=1$ yerine yazarsak $\Gamma'(1) = -\gamma$, γ euler katsayısı denir ve değeri 0.5772'dir.

Ek 3**Beta Fonksiyonu**

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x>0, y>0 \quad (E-3.1)$$

olarak tanımlanır. Beta fonksiyonu x ve y argumanlarına göre simetriktir. $B(x,y)=B(y,x)$ şeklindedir. $u=1-t$ değişken dönüşümü yaparak bu özelliği görebiliriz.

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{y-1} (1-u)^{x-1} du = B(y, x)$$

(E-3.1) ' de $t=u/(u+1)$ değişken dönüşümü yaparak beta fonksiyonunun diğer gösterimini elde ederiz;

$$B(x, y) = \int_0^\infty u^{x-1} (1+u)^{-(x+y)} du = \int_0^\infty u^{y-1} (1+u)^{-(x+y)} du, \quad (E-3.2)$$

$t=\cos^2\theta$ 'yi (E-3.1) beta fonksiyonunda yerine yazarsak;

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \cdot \sin^{2y-1} \theta \cdot d\theta, \quad (E-3.3)$$

elde ederiz. Beta fonksiyonun birkaç önemli sonucu şunlardır;

$$B(1,1)=1, \quad B(1/2,1/2)=\pi \quad (E-3.4)$$

$$B(x, y) = \left(\frac{x-1}{x+y-1} \right) B(x-1, y), \quad (E-3.5)$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (E-3.6)$$

$$B\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \pi \cdot \sec\left(\frac{x\pi}{2}\right), \quad 0 < x < 1 \quad (E-3.7)$$

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	09-03-1979	
Doğum yeri	Ağrı	
Lise	1993-1996	Ağrı Naci Gökçe Lisesi
Lisans	1996-2000	İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik- Elektronik Fak. Elektrik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2001-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği
Çalıştığı Kurumlar	1998-2000	Tekdal San Tic. Ltd.Şti

