

15447

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SESQUİLİNEER FORMLAR
ve
BAZI UYGULAMALARI

Matematikçi Ergün YAŞAR

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU

Prof. Dr. Akın Taşdiren
Yazar

Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu
Danışman

Prof. Dr. Elmhacen MAHMUDU

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
2. SINIRLI SESQUİLİNEER FORMLAR	3
3. SESQUİLİNEER ve KUADRATİK FORMLAR	6
4. YARI SINIRLILIK	9
5. KAPALI FORMLAR	13
6. KAPANABİLİR FORMLAR.....	16
7. SEKTÖREL OPERATÖRLERLE OLUŞTURULAN FORMLAR	20
8. FORMLARIN TOPLAMLARI	22
9. BİRİNCİ GÖSTERİM TEOREMİ	26
10. BİRİNCİ GÖSTERİM TEOREMİNİN İSPATI	28
11. FRIEDRICHS GENİŞLETMESİ	32
12. FRIEDRICHS GENİŞLETMESİNİN UYGULAMASI	34
13. SONUÇLAR.....	38
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	40

SİMGE LİSTESİ

H	Hilbert uzayı
$B(H, H')$	H uzayını H' uzayına dönüştüren tüm sınırlı lineer operatörler uzayı
$B(H)$	H uzayını H uzayına dönüştüren tüm sınırlı lineer operatörler uzayı
T^*	T operatörünün eşleniği
$\ T\ $	T operatörünün normu
t^*	t formunun eşleniği
$\ t\ $	t formunun normu
$\tilde{t}$	t formunun kapanışı
(u, v)	u ile v elemanlarının iç çarpımı
$\overline{t[u, v]}$	t formunun kapanışı
$t[u]$	t formunun kuadratik formu
$t' \supset t$	t formunun t' genişlemesi
Ret	t formunun reel kısmı
Imt	t formunun sanal kısmı
$\theta(t)$	t formunun sayısal görüntüsü
$u_n \longrightarrow u$	$\{u_n\}$ dizisinin u elemanına yakınsaması
$u_n \xrightarrow{t} u$	$\{u_n\}$ dizisinin u elemanına t -yakınsaması
H_t	$(,)_t$ iç çarpımıyla tanımlanmış Ön-Hilbert uzayı
$P(T)$	T operatörünün rezolvent kümesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamamda bana yardımcı olan Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu, Prof. Dr. Akın Taşdizen, Arş. Gör. Pınar Kanar ve her konuda yardımlarını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.



ÖZET

Yarı sınırlı simetrik operatörün kendine eş genişletilmesi ilk olarak bu operatörün sesquilineer formu ile bağlantısına dayalı olarak elde edilmiştir. Bu tür kendine eş operatörün genişletilmesi Friedrichs Genişletmesi olarak anılır. Friedrichs Genişletmeleri eliptik denklemler teorisinde çok sayıda uygulamalara sahiptir. Sonradan bu teori farklı sesquilineer formlar için genişletilmiş ve operatörlerle ilişkileri gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında sesquilineer formların özellikleri incelenmiş ve diferansiyel denklemler teorisinin uygulama esasına bağlı olarak bir örnek çözülmüştür.

Anahtar kelimeler: Sesquilineer ve kuadratik formlar, kapalı ve kapanabilir formlar, Friedrichs genişletmesi.



ABSTRACT

The first investigation of the selfadjoint extension of a semibounded symmetric operator was obtained by the sesquilinear form of this operator. The extension of this operator is known Friedrichs Extension. Friedrichs Extensions have lots of applications in the elliptic equations theory. Afterwards, this theory was generalized to different sesquilinear forms and showed relations with the operators.

In this survey, we investigate the sesquilinear forms and solve an example which depends on applications of the differential equations theory.

Keywords: Sesquilinear and quadratic forms, closed and closable forms, Friedrichs extension.



1. GİRİŞ

Tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. Çalışmalarımız Hilbert uzaylarında tanımlanan form ve operatörler üzerinde gerçekleştirilecektir. D, H Hilbert uzayının bir alt kümesi olmak üzere keyfi $u, v, h \in D$ elemanları ve keyfi α, β sayıları için;

$$t[\alpha u + \beta v, h] = \alpha t[u, h] + \beta t[v, h] \quad (1.1)$$

$$t[h, \alpha u + \beta v] = \bar{\alpha} t[h, u] + \bar{\beta} t[h, v] \quad (1.2)$$

eşitliklerini sağlayan t formuna sesquilineer form denir.

$t[u] = t[u, u]$ ifadesi $t[u, v]$ ile oluşturulmuş kuadratik form olarak adlandırılır. $t[u]$ kuadratik formu $t[u, v]$ sesquilineer formunu,

$$t[u, v] = \frac{1}{4} (t[u + v] - t[u - v] + i t[u + i v] - i t[u - i v]) \quad (1.3)$$

ifadesi ile teklikle belirtir.

Bir t formu; her $u, v \in D(t)$ için

$$t[u, v] = \overline{t[v, u]} \quad (1.4)$$

ise simetriktir denir.

$\|u\|=1$ için $h[u]$ değerlerinin kümesi alttan sınırlı ise h simetrik formu alttan sınırlıdır denir ve bu ifade

$$h[u] \geq \gamma \|u\|^2, \quad u \in D(h) \quad (1.5)$$

ile gösterilebilir.

Eğer $\{u_n\}$ dizisinin t -yakınsaması $u \in D(t)$ ve $t[u_n - u] \rightarrow 0$ olmasını ifade ediyor ise t sektörel formu kapalıdır denir

Bir sektörel form eğer kapalı bir uzantıya sahip ise kapanabilirdir.

Her yarı sınırlı, kapalı simetrik bir sesquilineer formun bir yarı sınırlı kendine eş bir operatör oluşturduğu ve tersine her yarı sınırlı kapalı bir kendine eş operatörün yarı sınırlı simetrik kapalı bir sesquilineer form oluşturduğu bilinmektedir. Sözü geçen bu özellikler ilk olarak 1934 yılında Friedrich tarafından ortaya atılmıştır.



2. SINIRLI SESQUİLİNEER FORMLAR

H ve H' Hilbert uzayları olmak üzere $T: H \rightarrow H'$ lineer operatörü Banach uzaylarında olduğu gibi tanımlanır. Bununla birlikte Hilbert uzaylarında tanımlı operatörlere özgü bazı özellikler de vardır. Burada sınırlı operatörleri göz önüne alalım. $B(H, H')$ ile H uzayını H' uzayına dönüştüren bütün sınırlı lineer operatörler uzayını göstereyim.

Önce $T \in B(H, H')$ iken $T^{**} = T$ olduğunu belirtelim.

$T \in B(H, H')$ operatörü ile $H \times H'$ uzayında tanımlı, sınırlı bir t sesquilineer formu arasında;

$$t[u, u'] = (Tu, u') = (u, T^* u') \quad (2.1)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Bu ifadede $H^* = H$, $H'^* = H'$ olduğundan $T^* \in B(H', H)$ dir.

(2.1) ile $H \times H'$ uzayındaki tüm sınırlı t sesquilineer formlarının kümesi, tüm $T \in B(H, H')$ operatörlerinin kümesi ve tüm $T^* \in B(H', H)$ operatörlerinin kümesi arasında birebir ilişki vardır.

Bu ilişkiyi ispatlamak için bir H üniter uzayından başka bir H' üniter uzayına tanımlı bir T lineer operatörünü göz önüne alalım. T operatörünün normu;

$$\|T\| = \sup \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup \frac{|(Tu, u')|}{\|u\| \|u'\|} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır.

$t[u, u'] = (Tu, u')$ fonksiyonu $H \times H'$ uzayında sesquilineer bir formdur. Tersine, $H \times H'$ uzayında tanımlı keyfi sınırlı bir $t[u, u']$ sesquilineer formu, H uzayından H' uzayına uygun bir T operatörünün seçimi ile ifade edilebilir. $t[u, u']$ formu sabit bir u elemanı için H' uzayında yarı lineer bir form olduğundan, tüm $u' \in H'$ için $t[u, u'] = (w', u')$ olacak şekilde teklikle belirli bir $w' \in H'$ elemanı vardır. w' elemanı u ile üretildiğinden, $w' = Tu$ kümesini üretecek bir T fonksiyonu tanımlayabiliriz.

Buradan kolayca görülebileceği gibi T fonksiyonu H uzayından H' uzayına bir lineer operatördür. Özel olarak t formu H ($H = H'$) uzayında sesquilineer bir form ise, o zaman T operatörü, H' 'den H' 'ye lineer bir operatördür. Aynı yolla, $t[u, u']$ formu, T^* operatörü H' uzayından H uzayına bir lineer operatör olmak üzere $t[u, u'] = (u, T^* u')$ şeklinde ifade edilebilir. Buradaki T^* ifadesi T operatörünün eşlenik operatörü olarak tanımlanır.

Bu ilişkiyi açıkladıktan sonra (Tu, u') ifadesinin sınırlı bir form olduğu

$$|(Tu, u')| \leq \|Tu\| \|u'\| \leq \|T\| \|u\| \|u'\| \quad (2.3)$$

bağıntısıyla açıktır. Tersine, bir sınırlı $t[u, u']$ sesquilineer formu, sabit u elemanı için u' elemanına göre sınırlı yarı lineer bir form olduğundan $(v', u'), v' \in H'$ formunda yazılabilir. $v' = Tu$ ifadesi, H uzayından H' uzayına bir T lineer operatörü tanımlar ve T operatörünün sınırlılığı

$$\|T\| = \sup \frac{|(Tu, u')|}{\|u\| \|u'\|} = \sup \frac{|t[u, u']|}{\|u\| \|u'\|} = \|t\| \quad (2.4)$$

ifadesinden görülür.

H ve H' ayrılabilir uzaylar iken bir $T \in B(H, H')$ operatörü için, matris gösterimi sonlu boyutlu uzaylarda olduğu gibidir. H ve H' uzaylarının ayrılabilir ve $\{x_k\}, \{x_j\}$ dizilerinin H ve H' uzaylarında tam ortonormal sistemler olduğunu kabul edelim. Bu tabanlar için T operatörünün matris elemanları

$$\tau_{jk} = (Tx_k, x_j) = (x_k, T^* x_j) \quad (2.5)$$

olur. Buradan,

$$Tx_k = \sum_j (Tx_k, x_j) x_j \quad (2.6)$$

yazılabilir.

$H=H'$ olsun. Bir $t[u, v]$ simetrik sesquilinear formu $t[v, u] = \overline{t[u, v]}$ ifadesi ile tanımlanır.

Sınırlı simetrik bir t sesquilinear formuyla (2.1) eşitliği tarafından oluşturulan $T \in B(H)$

Operatörü, $T^* = T$ özelliğine sahiptir. Bu durumda T simetrik operatör olarak adlandırılır.

3. SESQUİLİNEER ve KUADRATİK FORMLAR

Önceki bölümde $H \times H$ çarpım uzayında tanımlı, sınırlı sesquilineer formlarla ilgilendik. Şimdi bu bölümde sınırsız $t[u, v]$ formlarıyla ilgileneceğiz; fakat kendimizi her iki u, v elemanı da bir H Hilbert Uzayının bir D lineer manifolduna ait olmak üzere kısıtlayacağız. Böylece $t[u, v]$ kompleks değerlidir ve her $v \in D$ sabit elemanı için t formu, u elemanı ile D kümesinde lineer ve her $u \in D$ sabit elemanı için v elemanı ile yarı lineer bir formdur. D, t formunun tanım kümesi ismini alır ve $D(t)$ ile gösterilir. Eğer $D(t), H$ uzayında yoğun ise t formu yoğun olarak tanımlıdır.

Keyfi $u, v, h \in D$ elemanları ve keyfi α, β sayıları için;

$$t[\alpha u + \beta v, h] = \alpha t[u, h] + \beta t[v, h] \quad (3.1)$$

$$t[h, \alpha u + \beta v] = \bar{\alpha} t[h, u] + \bar{\beta} t[h, v] \quad (3.2)$$

eşitliklerini sağlayan t formuna sesquilineer form denir (Weinberger, 1974; Kato, 1980; Weidman, 1980; Akhiezer vd., 1993; Zeidler, 1995).

$t[u] = t[u, u]$ ifadesi, $t[u, v]$ ile oluşturulmuş kuadratik form olarak adlandırılır. $t[u]$ kuadratik formu $t[u, v]$ sesquilineer formunu,

$$t[u, v] = \frac{1}{4} (t[u + v] - t[u - v] + it[u + iv] - it[u - iv]) \quad (3.3)$$

ifadesi ile teklikle belirtir.

(3.3) eşitliğinin sadece kompleks Hilbert uzayında doğru olduğunu belirtmek gerekir. Karışıklığa yol açmadığı takdirde $t[u, v]$ veya $t[u]$ ifadesini kısaca bir form olarak kullanacağız.

Alınan t ve t' formlarının eşit ($t = t'$) olması için gerek ve yeter koşul her ikisinin de aynı D tanım kümesine sahip olmaları ve D kümesindeki tüm u, v çiftleri için $t[u, v] = t'[u, v]$ olmasıdır.

Formların genişlemeleri ve kısıtlamaları da ($t' \supset t$ veya $t \subset t'$), operatörlerde olduğu gibi tanımlanır. Yani A ve B herhangi iki operatör olmak üzere eğer $D(A) = D(B)$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = Bx$ ise A operatörü B operatörüne eşittir denir. $A=B$ şeklinde gösterilir. Eğer $D(A) \subset D(B)$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = Bx$ ise B operatörü A operatörünün bir genişlemesidir denir.

t_1, t_2 formlarının $t = t_1 + t_2$ toplamı:

$$t[u, v] = t_1[u, v] + t_2[u, v] \quad , \quad D(t) = D(t_1) \cup D(t_2) \quad (3.4)$$

ile tanımlanır.

Bir t formunun bir α skaleri ile αt çarpımı:

$$(\alpha t)[u, v] = \alpha t[u, v] \quad , \quad D(\alpha t) = D(t) \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilir.

$1[u, v]$ birim formu, (u, v) iç çarpımına eşit olarak tanımlanır ve $0[u, v]$ sıfır formu, tüm u, v değerlerini "0" değerine götürür. Bu iki form da aynı H tanım kümesine sahiptir. Böylece her t formu için $0t \subset 0$ ifadesine sahip oluruz. Ayrıca $t + \alpha = t + \alpha 1$ ifadesi her t formu için:

$$(t + \alpha)[u, v] = t[u, v] + \alpha(u, v) \quad , \quad D(t + \alpha) = D(t) \quad (3.6)$$

ile tanımlıdır.

Bir t formu; her $u, v \in D(t)$ için

$$t[u, v] = \overline{t[v, u]} \quad (3.7)$$

ise simetriktir denir.

(3.3) eşitliğinden görüldüğü gibi t formunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul $t[u]$ formunun reel değerli olmasıdır.

Ayrıca her t formu ile başka bir t^* formu

$$t^*[u, v] = \overline{t[v, u]}, \quad D(t^*) = D(t) \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Buradaki t^* ifadesine t formunun eşlenik formu denir. t formunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul $t^* = t$ olmasıdır.

Bu bilgiler ışığı altında;

$$(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)^* = \overline{\alpha_1} t_1^* + \overline{\alpha_2} t_2^* \quad (3.9)$$

ifadesini yazabiliriz.

Her t formu için $\text{Re } t = \frac{1}{2}(t + t^*)$, $\text{Im } t = \frac{1}{2i}(t - t^*)$ ifadeleri ile $\text{Re } t$ ve $\text{Im } t$ formları tanımlanır.

Bu formlar simetriktir ve $t = \text{Re } t + i \text{Im } t$ dir.

$\text{Re } t$ ve $\text{Im } t$ ifadeleri t formunun reel ve sanal kısımları olarak adlandırılırlar.

4. YARI SINIRLILIK

$\|u\|=1$ için $h[u]$ değerlerinin kümesi alttan sınırlı ise h simetrik formu alttan sınırlıdır denir ve bu ifade

$$h[u] \geq \gamma \|u\|^2, u \in D(h) \quad (4.1)$$

ile gösterilebilir. Daha basit olarak $h \geq \gamma$ olarak yazılabilir. Bu özelliğe sahip en büyük sayı, h formunun alt sınırı olarak adlandırılır ve γ_h ile gösterilir. Eğer $h \geq 0$ ise, h formuna negatif olmayan form denir. Benzer şekilde üstten sınırlılığın, üst sınırın ve pozitif olmayan formların tanımlarını da yapabiliriz. Daha çok alttan sınırlı formlarla ilgilendiğimizden dolayı, γ_h sembolünü sık sık kullanacağız.

Eğer t negatif olmayan bir simetrik form ise,

$$\begin{aligned} |t[u, v]| &\leq t[u]^{1/2} t[v]^{1/2} \leq \frac{1}{2}(t[u] + t[v]) \\ t[u + v]^{1/2} &\leq t[u]^{1/2} + t[v]^{1/2} \\ t[u + v] &\leq 2 t[u] + 2 t[v] \end{aligned} \quad (4.2)$$

eşitsizliklerini sağlar.

Eğer bir h simetrik formu alttan sınırlı olduğu gibi üstten de sınırlı ise o zaman h formu üst ve alt sınırların mutlak değerlerinin büyüğüne eşit olan bir sınırla sınırlıdır. Diğer bir ifadeyle, h formu her $u \in D(h)$ için

$$|h[u]| \leq M \|u\|^2 \quad (4.3)$$

ifadesi ile her $u, v \in D(h)$ elemanları için

$$|h[u, v]| \leq M \|u\| \|v\| \quad (4.4)$$

ifadesini tanımlar. Bunun ispatını daha iyi anlamak için sonlu boyutlu uzaylarda yapılan ispatı inceleyelim.

Bir H üniter uzayında tanımlanan bir $t[u, v]$ sesquilineer formu simetrik ise $t[u]$ kuadratik formu reel değerlidir. Ayrıca bunun tersi de doğrudur. Simetrik bir t sesquilineer formu için Schwarz ve üçgen eşitsizlikleri iç çarpım uzaylarında olduğu gibi tüm negatif olmayan formlar için doğrudur. Buradan (4.1) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Simetrik bir t formunun γ alt sınırı, $t[u] \geq \gamma \|u\|^2$ olacak şekilde en büyük reel sayı olarak tanımlanır. γ' üst sınırı da benzer şekilde tanımlanır.

Bu iki tanımdan

$$|t[u, v]| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \|M\| = \max\{|\gamma|, |\gamma'|\} \quad (4.5)$$

ifadesini elde ederiz. Bunu ispatlamak için, $t[u, v]$ değerinin reel değerli olduğunu farz edebiliriz. $t[u]$ değeri reel değerli olduğundan, (3.3)'den

$$|t[u, v]| \leq 4^{-1} (t[u + v] - t[u - v]) \quad (4.6)$$

ifadesi elde edilir. Tüm u elemanları için $|t[u]| \leq M \|u\|^2$ olduğundan,

$$|t[u, v]| \leq 4^{-1} M (\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2) = 2^{-1} M (\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (4.7)$$

ifadesi elde edilir. Sırasıyla u ve v elemanlarını $\alpha^2 = \|v\|/\|u\|$ olmak üzere $\alpha u, v/\alpha$ elemanları ile yer değiştirirsek (4.5) eşitsizliğinin sağlandığı ortaya çıkar.

Dikkat edilmeli ki daha genel olarak; h, k simetrik formlar ve h negatif olmayan bir form olmak üzere, tüm $u \in D = D(h) = D(k)$ için

$$|k[u]| \leq M h[u] \quad (4.8)$$

ifadesi tüm $u, v \in D$ için

$$|k[u, v]| \leq M h[u]^{1/2} h[v]^{1/2} \quad (4.9)$$

ifadesini tanımlar.

Şimdi simetrik olmayan bir t formuyla ilgilenelim. $\|u\|=1$ ile $u \in D(t)$ elemanları için $t[u]$ formunun değerleri kümesi, t formunun sayısal görüntüsü olarak adlandırılır ve $\theta(t)$ ile gösterilir. Operatörler kısmında olduğu gibi $\theta(t)$ kompleks düzlemde kompleks bir kümedir. Bir h simetrik formu ancak ve ancak $\theta(h)$ sayısal görüntüsü sonlu bir aralık veya soldan sınırlı reel eksenin yarı sonsuz bir aralığı ise alttan sınırlıdır. Bunu genellersek; eğer $\theta(t)$ sayısal görüntüsü, $\operatorname{Re} \tau \geq \gamma$ formunun yarı düzleminin bir alt kümesi ise t formu alttan sınırlıdır. Daha özel olarak; eğer $\theta(t)$ sayısal görüntüsü, formun bir sektörünün bir alt kümesi olarak

$$|\arg(\tau - \gamma)| \leq \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

koşullarını sağlıyorsa t formuna soldan sektörel olarak sınırlı denir.

Bunun anlamı

$$h \geq \gamma \quad \text{ve} \quad |\operatorname{Im} t[u]| \leq (\tan \theta)(\operatorname{Re} t - \gamma)[u], \quad u \in D(t) \quad (4.11)$$

demektir.

γ ve θ sayıları, t formu tarafından teklikle belirlenmezler. γ sayısına t formunun bir köşesi ve θ sayısına da t formunun yarım açısı denir.

Buradan,

$$\begin{aligned} |(\operatorname{Re} t - \gamma)[u, v]| &\leq (\operatorname{Re} t - \gamma)[u]^{1/2} (\operatorname{Re} t - \gamma)[v]^{1/2} \\ |\operatorname{Im} t[u, v]| &\leq (\tan \theta)(\operatorname{Re} t - \gamma)[u]^{1/2} (\operatorname{Re} t - \gamma)[v]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$|(t - \gamma)[u, v]| \leq (1 + \tan \theta)(\operatorname{Re} t - \gamma)[u]^{1/2} (\operatorname{Re} t - \gamma)[v]^{1/2}$$

bağıntıları elde edilir.

Ayrıca bu bağıntıları kullanarak

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{Re} t - \gamma)[u] &\leq (t - \gamma)[u] \leq (\sec \theta)(\operatorname{Re} t - \gamma)[u] \\
 |(t - \gamma)[u + v]|^{1/2} &\leq (\sec \theta)^{1/2} \left\{ |(t - \gamma)[u]|^{1/2} + |(t - \gamma)[v]|^{1/2} \right\} \\
 |(t - \gamma)[u + v]| &\leq 2(\sec \theta) \left\{ |(t - \gamma)[u]| + |(t - \gamma)[v]| \right\}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

bağıntılarını da elde edebiliriz.

5. KAPALI FORMLAR

t bir sektörel form, $\{u_n\} \in D(t)$ dizisi de $D(t)$ kümesine ait olması gerekmeyen bir u elamanına yakınsayan bir dizi olsun. Bu durumda $\{u_n\}$ dizisi $n, m \rightarrow \infty$ için $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$ koşulunu sağlıyor ise t -yakınsak olarak adlandırılır ve $u_n \xrightarrow{t} u$, $n \rightarrow \infty$ ile gösterilir. Tanımdan açıkça görüldüğü gibi, t -yakınsaması her α skaleri için $t + \alpha$ -yakınsamasına denktir. Ayrıca t -yakınsaması Ret -yakınsamasına denktir. Bunun doğruluğunu görebilmek için, (4.13) eşitsizliklerinden yararlanalım. Buradan görüldüğü gibi $(Ret - \gamma)[u_n - u_m] \rightarrow 0$ ifadesinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $(t - \gamma)[u_n - u_m] \rightarrow 0$ ifadesinin sağlanmasıdır. Ayrıca $u_n \xrightarrow{t} u$ ve $v_n \xrightarrow{t} v$ yakınsamaları $\alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow{t} \alpha u + \beta v$ olmasını ifade eder. Bu ifadenin doğruluğunu göstermek için t formunun simetrik ve negatif olmayan bir form olduğunu kabul etmek yeterlidir. O takdirde (4.2) eşitsizliklerinden $\alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow{t} \alpha u + \beta v$ olduğu görülür.

Eğer $\{u_n\}$ dizisinin t -yakınsaması $u \in D(t)$ ve $t[u_n - u] \rightarrow 0$ olmasını ifade ediyor ise t sektörel formu kapalıdır denir. Ayrıca t -yakınsaması Ret -yakınsamasına denk olduğundan, t formunun kapalı olması için gerek ve yeter koşul Ret formunun kapalı olması sonucuna ulaşırız. Benzer şekilde t formunun kapalı olması için gerek ve yeter koşul $t + \alpha$ formunun kapalı olmasıdır.

h simetrik ve negatif olmayan bir form olmak üzere

$$(u, v)_h = (h + 1)[u, v] = h[u, v] + (u, v), \quad u, v \in D(h) \quad (5.1)$$

olsun.

$(u, v)_h$ ifadesini $D(h)$ kümesinde bir iç çarpım olarak ele alabiliriz. Bu iç çarpım simetrik ve tam olarak pozitif olduğundan

$$\|u\|_h^2 = (u, u)_h = (h + 1)[u] = h[u] + \|u\|^2 \geq \|u\|^2 \quad (5.2)$$

ifadesini sağlar.

$D(h)$ kümesini $(\cdot, \cdot)_h$ iç çarpımıyla bir Ön-Hilbert uzayı olarak ele alırsak, bu kümeyi H_h notasyonu ile gösterebiliriz.

Bir t sektörel formu verildiği zaman; γ, t formunun bir köşesi olmak üzere $h' = \operatorname{Re} t - \gamma \geq 0$ ile $H_{h'}$ uzayına denk olan bir H_t Ön-Hilbert uzayı tanımlayabiliriz. H_t, t ile oluşturulmuş bir Ön-Hilbert uzayı olarak adlandırılır. H_t bir vektör uzayı olarak $D(t)$ kümesi ile özdeşdir, fakat H_t uzayının $(\cdot, \cdot)_t = (\cdot, \cdot)_{h'}$ iç çarpımı γ elemanının seçimine bağlıdır, bundan dolayı H_t uzayı t formu ile teklikle üretilmez.

Bir $u_n \in D(t)$ dizisinin t -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin H_t uzayında bir Cauchy dizisi olmasıdır. Burada $u \in D(t)$ olduğu zaman, $u_n \xrightarrow{t} u$ yakınsaması $\|u_n - u\|_t \rightarrow 0$ yakınsamasına denktir.

(4.13) ve (5.2)'den

$$\begin{aligned} |t[u, v]| &\leq |\gamma| |(u, v)| + (1 + \tan \theta) h'[u]^{1/2} h'[v]^{1/2} \leq |\gamma| \|u\| \|v\| + (1 + \tan \theta) \|u\|_t \|v\|_t \\ &\leq (|\gamma| + 1 + \tan \theta) \|u\|_t \|v\|_t \end{aligned} \quad (5.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $t[u, v]$ formunun H_t uzayında sınırlı bir sesquilineer form olduğunu gösterir.

Teorem 5.1: H uzayında tanımlı bir t sektörel formunun kapalı olması için gerek ve yeter koşul H_t Ön-Hilbert uzayının tam olmasıdır.

İspat: t formunun kapalı olması için gerek ve yeter koşul $h' = \operatorname{Re} t - \gamma$ formunun kapalı olmasıdır. Bundan dolayı $t = h$ formunun simetrik, negatif olmayan bir form olduğunu ve $H_t = H_h$ uzaylarının iç çarpımının (5.1) eşitliği ile verilebileceğini farz edebiliriz.

h formunun kapalı olduğunu farz edelim ve $\{u_n\}$ dizisi H_h uzayında bir Cauchy dizisi olsun, yani $\|u_n - u_m\|_h \rightarrow 0$ olsun. O takdirde $\{u_n\}$ dizisi (5.2)'den dolayı H uzayında bir Cauchy dizisidir. Bundan dolayı $u_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in H$ elemanı vardır.

(5.2) gereği $h[u_n - u_m] \rightarrow 0$ olduğundan, $\{u_n\}$ h -yakınsamasıdır ve h formunun kapalılığı, $u \in D(h) = H_h$ ve $h[u_n - u] \rightarrow 0$ olmasını ifade eder. Böylece $\|u_n - u\|_h \rightarrow 0$ olması H_h uzayının tam olduğunu gösterir.

Tersine, H_h uzayının tam olduğunu farz edelim. $u_n \xrightarrow{h} u$ olsun. Böylece (5.2)'den görüldüğü gibi $\|u_n - u_m\|_h \rightarrow 0$ olması için $h[u_n - u_m] \rightarrow 0$ ve $\|u_n - u_m\| \rightarrow 0$ ifadelerinin varolması gereklidir. H_h uzayının tamlığından $\|u_n - u_0\|_h \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $u_0 \in H_h = D(h)$ vardır. (5.2) eşitsizliği $h[u_n - u_0] \rightarrow 0$ ve $\|u_n - u_0\| \rightarrow 0$ olduğunu gösterir. Böylece $u = u_0 \in D(h)$ ve $h[u_n - u] \rightarrow 0$ sonucu ortaya çıkar. Bu sonuç h formunun kapalı olduğunu ispatlar.

Teorem 5.2: t bir sektörel form olsun. Eğer $u_n \xrightarrow{t} u$ ve $v_n \xrightarrow{t} v$ yakınsamaları varsa, o takdirde $\lim t[u_n, v_n]$ limiti vardır. Eğer t formu kapalı ise bu limit $t[u, v]$ değerine eşittir.

İspat: (4.13) eşitsizliklerinden genelliği bozmayacak şekilde $\gamma = 0$ kabul ederek yararlanırsak,

$$\begin{aligned} |t[u_n, v_n] - t[u_m, v_m]| &\leq |t[u_n - u_m, v_n]| + |t[u_m, v_n - v_m]| \\ &\leq (1 + \tan \theta) \left\{ \text{Ret}[u_n - u_m]^{1/2} \text{Ret}[v_n]^{1/2} + \text{Ret}[u_m]^{1/2} \text{Ret}[v_n - v_m]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. $u_n \xrightarrow{t} u$ yakınsaması $\text{Ret}[u_n - u_m] \rightarrow 0$ ifadesini gerektirdiğinden, $\text{Ret}[u_n]$ sınırlı olduğundan ve v_n için de geçerli olduğundan, $\lim t[u_n, v_n]$ limiti vardır. Teoremin ikinci kısmı $t[u_n, v_n] - t[u, v]$ bağıntısını göz önüne alarak aynı yolla ispatlanır.

6. KAPANABİLİR FORMLAR

Bir sektörel form eğer kapalı bir uzantıya sahip ise kapanabilirdir.

Teorem 6.1: Bir t sektörel formunun kapanabilir olması için gerek ve yeter koşul $u_n \xrightarrow{t} 0$ yakınsamasının $t[u_n] \rightarrow 0$ yakınsamasını sağlamasıdır. Bu koşul sağlandığı zaman, t formu $\tilde{t}$ kapanışı formuna sahiptir. $D(\tilde{t})$ kümesi tüm $u \in H$ elemanlarının kümesidir ki burada $u_n \xrightarrow{t} u$ olmak üzere bir $\{u_n\}$ dizisi vardır ve tüm $u_n \xrightarrow{t} u$ ve $v_n \xrightarrow{t} v$ dizileri için

$$\tilde{t}[u, v] = \lim t[u_n, v_n] \quad (6.1)$$

ifadesi elde edilir.

Ayrıca t formunun her kapalı uzantısı $\tilde{t}$ formunun da uzantısıdır.

İspat: t_1 , t formunun kapalı bir uzantısı olsun. $u_n \xrightarrow{t} 0$ yakınsaması, t_1 formu kapalı olduğundan, $t[u_n] = t_1[u_n] = t_1[u_n - 0] \rightarrow 0$ olması için $u_n \xrightarrow{t_1} 0$ yakınsaması gereklidir. Bu sonuç teoremin gereklilik kısmını ispatlar.

Yeterlilik kısmını ispatlamak için, $D(\tilde{t})$ kümesini teoremde verildiği gibi tanımlayalım. O takdirde (6.1)'in sağındaki limit, Teorem 5.2'den dolayı vardır. Şimdi bu limitin sadece u ve v elemanlarına bağlı olduğunu, $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerine bağlı olmadığını gösterelim. $\{u'_n\}$ ve $\{v'_n\}$ dizileri, $u'_n \xrightarrow{t} u$ ve $v'_n \xrightarrow{t} v$ olacak şekilde iki dizi olsun. O takdirde kabulümüz gereğince $u'_n - u_n \xrightarrow{t} 0$ ve $v'_n - v_n \xrightarrow{t} 0$ olduğundan $t[u'_n - u_n] \rightarrow 0$ ve $t[v'_n - v_n] \rightarrow 0$ olmalıdır.

Böylece Teorem 5.2'de yapılan ispata benzer şekilde

$$t[u'_n, v'_n] - t[u_n, v_n] = t[u'_n - u_n, v'_n] + t[u_n, v'_n - v_n] \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

sonucu elde edilir.

Eğer $u_n \xrightarrow{t} u$ ise $\tilde{t}[u_n - u] \rightarrow 0$ olduğunu belirtelim. Gerçekten, (6.1) eşitliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{t}[u_n - u] = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} t[u_n - u_m] \quad (6.3)$$

sonucuna ulaşırız ve $u_n \xrightarrow{t} u$ olduğundan bu limitin değeri sıfırdır.

Burada $D(\tilde{t})$ tanım kümesi ile bir $\tilde{t}$ formu tanımladık. Açık ki, $\tilde{t}$ formu sektörel ve $\tilde{t} \supset t$ dir.

Şimdi $\tilde{t}$ formunun kapalı olduğunu gösterelim. $\tilde{t}$ formu ile oluşturulan $H_{\tilde{t}}$ Ön-Hilbert uzayını göz önüne alalım. Teorem 5.1 gereğince $\tilde{t}$ formunun kapalı olduğunu göstermek için $H_{\tilde{t}}$ uzayının tam olduğunu göstermek yeterlidir.

$\tilde{t} \supset t$ olduğundan, H_t uzayı $H_{\tilde{t}}$ uzayının bir lineer manifoldudur. Yukarıda verilen t formunun ifadesi gösterir ki H_t uzayı, $H_{\tilde{t}}$ uzayında yoğundur ve (6.3) eşitliğinden, H_t uzayındaki her Cauchy dizisi $H_{\tilde{t}}$ uzayında bir limite sahiptir. Bu sonuç $H_{\tilde{t}}$ uzayının tam olduğunu ifade eder.

$\tilde{t}$ formu, çizimi izleyen t formunun en küçük kapalı uzantısıdır. Eğer $t_1 \supset t$ ifadesi kapalı ve $u_n \xrightarrow{t} u$ ise, o takdirde $u_n \xrightarrow{t_1} u$ olur ve bundan dolayı $u \in D(t_1)$ dir. Böylece (6.1) ve Teorem 5.2'den $D(\tilde{t}) \subset D(t_1)$ ve $\tilde{t}[u, v] = t_1[u, v]$ ifadesi elde edilir.

Teorem 6.2: t ve $\tilde{t}$ formları yukarıda olduğu gibi tanımlansın. t formunun $\theta(t)$ sayısal görüntüsü, $\tilde{t}$ formunun $\theta(\tilde{t})$ sayısal görüntüsünün yoğun bir alt kümesidir.

İspat: $\|u\| = 1$ olan her $u \in D(\tilde{t})$ elemanı için, $u_n \xrightarrow{t} u$ olacak şekilde bir $\{u_n\} \in D(t)$ dizisi vardır. $\|u_n\| = 1$ olduğunu farz edebiliriz; aksi takdirde u_n ile $\frac{u_n}{\|u_n\|}$ ifadelerinin yerini değiştirmemiz gerekir. $t[u_n] \rightarrow \tilde{t}[u_n]$ olduğundan t formunun $\theta(t)$ sayısal görüntüsü, $\tilde{t}$ formunun $\theta(\tilde{t})$ sayısal görüntüsünün yoğun bir alt kümesidir.

Sonuç 6.3: $\tilde{t}$ için verilen γ köşesi ve θ yarım açısı, t formu için verilen niteliklere eşit olacak şekilde seçilebilir. Eğer h alttan sınırlı kapanabilir bir simetrik form ise h ve $\tilde{h}$ formları aynı alt sınıra sahiptir.

Teorem 6.4: H tanım kümesiyle verilmiş t kapanabilir sektörel formu sınırlıdır.

İspat: t ve $\tilde{t}$ formları aynı H tanım kümesine sahip olduklarından, t formu kapalı bir form olmak zorundadır. Böylece $t = \tilde{t}$ dir. t formunun 0 köşesine sahip olduğunu farz edebiliriz. t ile oluşturulan tam H_t Hilbert uzayı $\|u\|_t \geq \|u\|$ ile bir vektör uzayı olarak H ile çakışır.

Kapalı graf teoremine göre , bu iki norm denktir yani $\|u\|_t \leq M\|u\|$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Böylece (5.1) eşitliğinden

$$0 \leq h[u] \leq M^2 \|u\|^2 \quad \text{ve} \quad |t[u, v]| \leq (1 + \tan \theta) M^2 \|u\| \|v\| \quad (6.4)$$

elde edilir.

Kapalı bir t sektörel formu göz önüne alalım. D' kümesi de $D(t)$ kümesinin bir lineer manifoldu olsun. Eğer t formunun D' tanım kümesiyle verilen t' kısıtlaması, t kapanışına sahip ise t formunun merkezi adını alır; yani $\tilde{t}' = t$ dir.

Açıktır ki D' kümesinin t formunun bir merkezi olması için gerek ve yeter koşul bu kümenin her α skaleri için $t + \alpha$ formunun da bir merkezi olmasıdır. Eğer t formu sınırlı ise, D' kümesinin t formunun merkezi olması için gerek ve yeter koşul D' kümesinin $D(t)$ kümesinde yoğun olmasıdır.

Teorem 6.5: t kapalı sektörel bir form olsun. $D(t)$ kümesinin bir D' lineer manifoldunun t formunun bir merkezi olması için gerek ve yeter koşul D' kümesinin t ile oluşturulan H_t Hilbert uzayında yoğun olmasıdır.

Teorem 6.6: t' ve t'' , $t' \subset t''$ olacak şekilde iki sektörel form, $H_{t'}$ ve $H_{t''}$ uzayları da bu iki form ile oluşturulmuş Hilbert uzayları olsunlar. Eğer t'' kapalı ise, t' formunun kapalı olması için gerek ve yeter koşul $H_{t'}$ uzayının $H_{t''}$ uzayının kapalı bir alt uzayı olmasıdır.

t'' kapanabilir bir form olduğu zaman, $\tilde{t}' = \tilde{t}''$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $H_{t'}$ uzayının $H_{t''}$ uzayında yoğun olmasıdır.

7. SEKTÖREL OPERATÖRLERLE OLUŞTURULAN FORMLAR

Eğer H uzayında tanımlı bir T operatörünün sayısal görüntüsü, bir sektörel formun sektörünün alt kümesi ise T operatörü sektörel dir denir. T sektörel bir operatör olsun ve

$D(t) = D(T)$ ile $t[u, v] = (Tu, v)$ kümesini oluşturalım.

Bu şartlarda T operatörü ve t formunun aynı sayısal görüntülere sahip oldukları bilinmektedir. Yine özel olarak eğer T operatörü simetrikse t formunun simetrik, eğer T alttan sınırlı ise t formunun alttan sınırlı ve T sektörel ise t formunun sektörel olduğu bilinmektedir.

Başlangıçta T operatörünün sektörel olduğunu belirttiğimizden açıktır ki t formu, γ köşesi ve θ yarım açısı ile sektörel dir.

Teorem 7.1: Bir T sektörel operatörü form-kapanışıdır, yani yukarıda tanımladığımız t formu kapanabilir dir.

İspat: Genelliği bozmamak koşulu ile T operatörünün $\operatorname{Re} t \geq 0$ olacak şekilde “0” köşesine sahip olduğunu farzedebiliriz.

$u_n \in D(t) = D(T)$ dizisi 0’a t -yakınsak olsun: yani $u_n \xrightarrow{t} 0$ ve $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$ olsun.

Teoremi ispatlamak için $t[u_n] \rightarrow 0$ olduğunu göstermeliyiz.

(4.12)’den

$$\begin{aligned} |t[u_n]| &\leq |t[u_n, u_n - u_m]| + |t[u_n, u_m]| \\ &\leq (1 + \tan \theta) \operatorname{Re} t[u_n]^{1/2} \operatorname{Re} t[u_n - u_m]^{1/2} + |(Tu_n, u_m)| \end{aligned} \quad (7.1)$$

yazabiliriz.

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $n, m \geq N$ için $\operatorname{Re} t[u_n - u_m] \leq \varepsilon^2$ olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır.

Çünkü $\text{Re } t[u_n - u_m] \rightarrow 0$ dir. $\text{Re } t[u_n]$ sınırlı olduğundan (7.1) eşitsizliği ile birlikte M sabit bir sayı olmak üzere

$$|t[u_n]| \leq M\varepsilon + |(Tu_n, u_m)|, \quad n, m \geq N \quad (7.2)$$

ifadesi elde edilir. $m \rightarrow \infty$ ve $n \geq N$ için $|t[u_n]| \leq M\varepsilon$ ifadesini elde ederiz. Böylece $t[u_n] \rightarrow 0$ ifadesine ulaşmış oluruz ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 7.2: Alttan sınırlı simetrik bir operatör form-kapanıdır.

8. FORMLARIN TOPLAMLARI

Teorem 8.1: $t_1, t_2, \dots, t_s$ H uzayındaki sektörel formlar, $D(t) = D(t_1) \cap D(t_2) \cap \dots \cap D(t_s)$ olmak üzere $t = t_1 + t_2 + \dots + t_s$ olsun. O takdirde t formu da sektörel formdur. Eğer t_j ($j = 1, 2, \dots, s$) formlarının tümü kapalı ise t formu da kapalıdır. Benzer şekilde eğer t_j ($j = 1, 2, \dots, s$) formlarının tümü kapanabilir ise t formu da kapanabilirdir ve

$$\tilde{t} \subset \tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 + \dots + \tilde{t}_s \quad (8.1)$$

ifadesi mevcuttur.

İspat: Genelliği bozmayacak şekilde tüm t_j ($j = 1, 2, \dots, s$) formlarının “0” köşesine sahip olduklarını farz edebiliriz. θ_j açısal değerleri “0” köşesi için t_j formlarının yarım açıları olsun. t_j formunun sayısal görüntüsü $|\arg \tau| \leq \theta_j < \frac{\pi}{2}$ sektörünün bir alt kümesi olduğundan, t formunun sayısal görüntüsü $|\arg \tau| \leq \theta = \max \theta_j < \frac{\pi}{2}$ sektörünün bir alt kümesidir. Bu yüzden t formu, θ yarım açısı ve “0” köşesi ile sektörel bir formdur.

Şimdi tüm t_j formlarının kapalı olduğunu farz edelim ve $u_n \xrightarrow{t} u$ olsun. O takdirde $\text{Ret} = \text{Ret}_1 + \text{Ret}_2 + \dots + \text{Ret}_s$ olduğundan $u_n \xrightarrow{\text{Ret}} u$ bağıntısı elde edilebilir ve bu bağıntı $n, m \rightarrow \infty$ için $\text{Ret}[u_n - u_m] \rightarrow 0$ olmasını ifade eder. $\text{Ret}_j \geq 0$ olduğundan her j için $\text{Ret}_j[u_n - u_m] \rightarrow 0$ ifadesi elde edilir. Bundan dolayı $u_n \xrightarrow{\text{Ret}_j} u$ yakınsaması bulunur ve böylece $u_n \xrightarrow{t_j} u$ elde edilir. t_j formlarını ispatın başında kapalı kabul ettiğimizden, her j için $u \in D(t_j)$ ve $t_j[u_n - u] \rightarrow 0$ bulunur. Böylece $u \in D(t)$ ve $t[u_n - u] \rightarrow 0$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuç da t formunun kapalı olduğunu ispatlar.

Şimdi de tüm t_j formlarının kapanabilir olduklarını kabul edelim. O takdirde $\tilde{t}_1 + \dots + \tilde{t}_s$ ifadesi üstte ispatladığımız üzere kapalıdır ve t formunun bir uzantısıdır. Bu durumda t formu kapanabilirdir ve (8.1) sağlanır.

t formu H uzayında sektörel bir form olsun. t' , H uzayında sektörel olması gerekmeyen bir form, a ve b negatif olmayan sabitler olmak üzere; t' formu

$$D(t') \supset D(t) \text{ ve } |t'[u]| \leq a\|u\|^2 + b|t[u]|, \quad u \in D(t) \quad (8.2)$$

koşulunu sağlıyorsa t formu ile göreceli olarak sınırlı ya da t -sınırlı olarak adlandırılır. b sayısının mümkün olan tüm değerleri için en büyük alt sınırı, t' formunun t -sınırı olarak adlandırılır.

Açık bir şekilde görüldüğü üzere t -sınırlılığı her α skaleri için $(t+\alpha)$ -sınırlılığına denktir. Ayrıca t -sınırlılığı $\text{Re}t$ -sınırlılığına da denktir. Çünkü (8.2) eşitsizliği bu bağıntıdaki a ve b değerlerine eşit olması gerekmeyen, negatif olmayan a ve b değerleri için

$$|t'[u]| \leq a\|u\|^2 + b \text{Re}t[u], \quad u \in D(t) = D(\text{Re}t) \quad (8.3)$$

ifadesine denktir.

Eğer t ve t' formlarının her ikisi de sektörel ve kapanabilir ise, (8.2) eşitsizliği sırasıyla t ve t' formları, $\tilde{t}$ ve $\tilde{t}'$ formlarıyla yer değiştirerek ve aynı a ve b sabitleriyle birlikte tüm $u \in D(\tilde{t})$ elemanlarına genişletilebilir.

Bunun doğruluğunu görmek için, her $u \in D(\tilde{t})$ elemanı için $u_n \xrightarrow{t} u$ olacak şekilde bir $\{u_n\}$ dizisi ve uygun bir limit seçimini düşünmek yeterlidir.

Simetrik formlar için göreceli yarı sınırlılığı tanımlayabiliriz. h formu alttan sınırlı simetrik bir form olsun.

Yarı sınırlı olması gerekmeyen bir h' simetrik formu; a' ve b' negatif olmayan sabitler olmak üzere

$$D(h') \supset D(h) \text{ ve } h'[u] \geq -a'\|u\|^2 - b'h[u], \quad u \in D(h) \quad (8.4)$$

koşulunu sağlıyorsa h formu ile göreceli olarak alttan yarı sınırlı bir form olarak adlandırılır. Ya da kısaca alttan h -yarı sınırlı form denir.

Benzer şekilde

$$D(h') \supset D(h) \text{ ve } h'[u] \leq a'' \|u\|^2 + b'' h[u], \quad u \in D(h) \quad (8.5)$$

ifadesi mevcut ise h' formu üstten h -yarı sınırlıdır denir.

Eğer h' formu hem alttan hem üstten h -yarı sınırlılığına sahip ise h' formuna h -sınırlı denir.

Teorem 8.2: t sektörel bir form ve t' formu da (8.3) eşitsizliğinde, $b < 1$ sabitiyle t -sınırlı bir form olsun. O takdirde $t + t'$ formu sektörelidir. $t + t'$ formunun kapalı olması için gerek ve yeter koşul t formunun kapalı olmasıdır. $t + t'$ formunun kapanabilir olması için gerek ve yeter koşul t formunun kapanabilir olmasıdır ve bu durumda $D(t + t')^\sim = D(\tilde{t})$ dir.

İspat: $D(t') \supset D(t)$ olduğundan $D(t + t') = D(t)$ eşitliği kolayca görülebilir. Genelliği bozmayacak şekilde $\text{Re } t \geq 0$ olması için t formunun “0” köşesine sahip olduğunu farz edebiliriz. Burada $\text{Re } t$ formu ile $\text{Re } t - \gamma$ formunun yer değiştirmesi (8.3) eşitsizliğinde ki a sabitini değiştirebilmesine karşın b sabitini değiştirmez. t formunun yarım açısını θ ile gösterirsek,

$$|(\text{Im } t + \text{Im } t')[u]| \leq |\text{Im } t[u]| + |\text{Im } t'[u]| \leq |\text{Im } t[u]| + |t'[u]| \leq (\tan \theta + b) \text{Re } t[u] + a \|u\|^2 \quad (8.6)$$

ve

$$(\text{Re } t + \text{Re } t')[u] \geq \text{Re } t[u] - |\text{Re } t'[u]| \geq (1 - b) \text{Re } t[u] - a \|u\|^2 \quad (8.7)$$

ifadeleri elde edilir.

Böylece $\|u\| = 1$ için

$$|(\text{Im } t + \text{Im } t')[u]| \leq (1 - b)^{-1} (\tan \theta + b) ((\text{Re } t + \text{Re } t')[u] + a) + a \quad (8.8)$$

ifadesi elde edilir. Bu bağıntı $t + t'$ formunun sayısal görüntüsünün, yeteri kadar büyük R sayısı ve $\theta' < \pi/2$ açısı ile $|\arg(\zeta + R)| \leq \theta'$ sektörünün bir alt kümesi olduğunu, yani $t + t'$ formunun sektörel olduğunu gösterir.

(8.2) eşitsizliğinden, $u_n \xrightarrow{t} u$ ifadesi $u_n \xrightarrow{t'} u$ ifadesini belirtir ve böylece $u_n \xrightarrow{t+t'} u$ ifadesi oluşur. Tersine (8.7)'den $u_n \xrightarrow{Ret+Ret'} u$ ifadesi $u_n \xrightarrow{Ret} u$ ifadesini belirtir. Benzer şekilde $t[u_n - u] \rightarrow 0$ ve $(t + t')[u_n - u] \rightarrow 0$ ifadelerinin denklikleri de görülebilir.



9. BİRİNCİ GÖSTERİM TEOREMİ

Eğer $t[u, v]$ formu H uzayında her yerde yoğun, sınırlı bir form ise, $t[u, v] = (Tu, v)$ olacak şekilde bir $T \in B(H)$ sınırlı operatörü vardır. Şimdi bu teoremi, yoğun, sektörel ve kapalı olarak farz edeceğimiz sınırsız bir t formu için inceleyelim. Ortaya çıkan T operatörü t formunun sektörel sınırlılığından umulduğu gibi sektörel olacaktır. Gerçekten T operatörü m -sektörel bir operatördür. Bu da T operatörünün kapalı olduğunu ve $P(T)$ rezolvent kümesinin, T operatörünün sayısal görüntüsünün dışını oluşturduğunu ifade eder. Özel olarak t formu simetrik ise T operatörü kendine eş ve alttan sınırlıdır.

Teorem 9.1: $t[u, v]$ formu, H uzayında yoğun olarak tanımlı, sektörel ve kapalı bir sesquilineer form olsun. Bu durumda aşağıda verilecek olan üç şartı sağlayacak şekilde bir m -sektörel T operatörü vardır:

i) Her $u \in D(T)$ ve $v \in D(t)$ için

$$D(T) \subset D(t) \text{ ve } t[u, v] = (Tu, v) \quad (9.1)$$

ii) $D(T)$ kümesi t formunun merkezidir.

iii) Eğer $u \in D(T)$, $w \in H$ ve

$$t[u, v] = (w, v) \quad (9.2)$$

eşitliği t formunun bir merkezine ait her v elemanı için sağlanıyorsa o takdirde $u \in D(T)$ ve $Tu = w$ elde edilir.

m -sektörel T operatörü i) koşuluyla teklikle belirlidir.

Sonuç 9.2: Eğer bir t_0 formu, $D(t_0) = D(T)$ ile $t_0[u, v] = (Tu, v)$ tarafından

Teorem 9.1'deki T operatörüyle tanımlıysa o takdirde $t = \tilde{t}_0$ dır.

Sonuç 9.3: T operatörünün $\theta(T)$ sayısal görüntüsü, t formunun $\theta(t)$ sayısal görüntüsünün yoğun bir alt kümesidir.

Sonuç 9.4: Eğer S , $D(S) \subset D(t)$ olacak şekilde bir operatör olmak üzere, her $u \in D(S)$ elemanı ve t formunun bir merkezine ait her v elemanı için $t[u, v] = (Su, v)$ eşitliği sağlanıyor ise o takdirde $S \subset T$ dir.

T operatörü, t formuyla oluşturulmuş m -sektörel operatör olarak adlandırılır. Bu ilişkiyi ifade etmek için $T = T_t$ ifadesini kullanacağız.

Teorem 9.5: Eğer $T = T_t$ ise o takdirde $T^* = T_t^*$ dir. Diğer bir ifadeyle, eğer T , yoğun olarak tanımlanmış, kapalı, sektörel bir t formuyla oluşturulmuş bir operatör ise o takdirde, T^* operatörü t formunun eşleniği olan t^* formuyla aynı yolla oluşturulmuş bir operatördür (Burada t^* eşlenik formu da yoğun olarak tanımlı, kapalı ve sektörel bir formdur) .

Teorem 9.6: Eğer h formu yoğun olarak tanımlı, alttan sınırlı simetrik kapalı bir form ise o takdirde h ile oluşturulmuş $T = T_h$ operatörü kendine eştir ve alttan sınırlıdır. T operatörü ve h formu aynı alt sınıra sahiptirler.

Teorem 9.7: $t \rightarrow T = T_t$ ifadesi ile tüm yoğun olarak tanımlı, kapalı sektörel formlar kümesi ve tüm m -sektörel operatörler kümesi arasında bire bir ilişki vardır. t formunun sınırlı olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün sınırlı olmasıdır. t formunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün kendine eş olmasıdır.

10. BİRİNCİ GÖSTERİM TEOREMİNİN İSPATI

Teorem 9.1 ve Teorem 9.5'in ispatlarında genelliği bozmayacak şekilde $h = \operatorname{Re} t \geq 0$ olması için t formunun "0" köşesine sahip olduğunu farz edebiliriz. H_t uzayı $(u, v)_t = (u, v)_h$ iç çarpımı tanımlanarak $D(t)$ kümesi ile dönüştürülmüş Hilbert uzayı olsun.

$t_1 = t + 1$ formunu göz önüne alalım. t_1 formu da t formu gibi H_t uzayında sınırlı bir formdur. Böylece

$$t_1[u, v] = (Bu, v)_t, \quad u, v \in H_t = D(t) \quad (10.1)$$

olacak şekilde bir $B \in B(H_t)$ operatörü vardır.

$\|u\|_t^2 = (\operatorname{Re} t + 1)[u] = \operatorname{Re} t_1[u] = \operatorname{Re}(Bu, u)_t \leq \|Bu\|_t \|u\|_t$ olduğundan, $\|u\|_t \leq \|Bu\|_t$ ifadesini elde ederiz. Böylece B operatörünün H_t uzayında kapalı tanım kümesiyle B^{-1} sınırlı tersine sahip olduğu ortaya çıkar. Bu tanım kümesi H_t uzayının tümünü içerir. Bundan dolayı $\|B^{-1}\|_t \leq 1$ ile $B^{-1} \in B(H_t)$ elde edilir. Bunu görmek için H_t uzayında $D(B^{-1}) = R(B)$ kümesine dik olan sadece sıfır elemanının olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $\|u\|_t^2 = \operatorname{Re}(Bu, u)_t = 0$ ifadesinden sonuç açıkça görülür.

Her sabit $u \in H$ elemanı için, $v \in H_t$ ile tanımlı $v \rightarrow l_u[v] = (u, v)$ yarı lineer formunu göz önüne alalım. $|l_u[v]| \leq \|u\| \|v\| \leq \|u\| \|v\|_t$ olduğundan, l_u formu H_t uzayında $\|u\|$ sınırı ile sınırlı bir formdur. Riesz teoreminden yararlanarak

$$(u, v) = l_u[v] = (u', v)_t, \quad \|u'\|_t \leq \|u\| \quad (10.2)$$

olacak şekilde tek bir $u' \in H_t$ elemanı vardır (Kreyszig, 1978).

Şimdi de $Au = B^{-1}u'$ ifadesini kullanarak bir A operatörü tanımlayalım. A operatörü H tanım kümesi ve H_t görüntü kümesi ile lineer bir operatördür.

H uzayında bir operatör olarak dikkate alındığında A operatörü, $\|A\| \leq 1$ ile $B(H)$ uzayına aittir, çünkü

$$\|Au\| = \|B^{-1}u'\| \leq \|B^{-1}u'\|_t \leq \|u'\|_t \leq \|u\| \quad (10.3)$$

ifadesi mevcuttur.

Buradan A operatörünün tanımı yardımıyla

$$(u, v) = (u', v)_t = (BAu, v)_t = t_1[Au, v] = (t+1)[Au, v] \quad (10.4)$$

ifadesi elde edilir.

Böylece;

$$t[Au, v] = (u - Au, v) \quad , \quad u \in H, v \in H_t = D(t) \quad (10.5)$$

ifadesine ulaşılır.

A terslenebilir bir operatördür, çünkü $Au = 0$ olması, tüm $v \in D(t)$ elemanları için $(u, v) = 0$ olması anlamına gelir ve $D(t)$ kümesinin H uzayında yoğun olduğu anlaşılır. (10.5)'te $w = Au$, $u = A^{-1}w$ yazarak, her $w \in D(T) = R(A) \subset D(t)$ ve $v \in D(t)$ için $T = A^{-1} - 1$ olmak üzere

$$t[w, v] = ((A^{-1} - 1)w, v) = (Tw, v)$$

ifadesini elde ederiz. Bu sonuç Teorem 9.1'in i) şikkının ispatıdır.

$A \in B(H)$ olduğundan, T operatörü H uzayında kapalı bir operatördür. T sektörel bir operatördür, çünkü Teorem 9.1 tarafından $(Tu, u) = t[u]$ olduğundan $\theta(T) \subset \theta(t)$ dir. T m -sektörel bir operatördür, çünkü $R(T+1) = R(A^{-1}) = D(A) = H$ dir.

Teorem 9.1'in ii) şikkının ispatı için, $D(T) = R(A)$ kümesinin H_t uzayında yoğun olduğunu göstermeliyiz.

B operatörü tersi de sürekli olarak H_t uzayından H_t uzayına bir tasvir olduğundan, $BR(A) = R(BA)$ kümesinin H_t uzayında yoğun olduğunu göstermek yeterlidir. $v \in H_t$ elemanı H_t uzayında $R(BA)$ kümesine dik olan bir eleman olsun. O takdirde (10.4)'e göre tüm $u \in H$ elemanları için $(u, v) = 0$ olduğu görülür ve bundan dolayı $v = 0$ dır. Böylece $R(BA)$ kümesi H_t uzayında yoğundur.

Sonuç (9.2) üstte ispatlanan ii) şıkkının başka bir ifadesidir. Sonuç (9.3) ise Sonuç (9.2) ve Teorem 5.2'den yararlanarak elde edilir.

Teoremlerin diğer sonuçlarını ispatlamak için t formunun eşlenik formu olarak t^* formunu göz önüne almak uygun olacaktır. t^* formu da yoğun olarak tanımlı, "0" köşesiyle sektörel ve kapalı olduğundan, t formu yardımıyla T operatörü oluşturduğumuz gibi aynı yolla t^* formuyla bir T' m-sektörel operatörü oluşturabiliriz. Böylece her $u \in D(t^*) = D(t)$ ve $v \in D(T')$ için,

$$t^*[v, u] = (T'v, u) \text{ veya } t[u, v] = (u, T'v) \quad (10.7)$$

ifadelerine sahip oluruz.

Özel olarak $u \in D(T) \subset D(t)$ ve $v \in D(T') \subset D(t)$ olsun. (9.1) ve (10.7) eşitlikleri

$$(Tu, v) = (u, T'v) \quad (10.8)$$

eşitliğini ortaya çıkarır. Bu ifade $T' \subset T^*$ olduğunu ifade eder. Fakat T' ve T^* operatörlerinin her ikisi de m-sektörel olduklarından $T' = T^*$ ifadesine sahip oluruz ve böylece $T^* = T$ olduğu da görülür.

Bu sonuçlar Teorem 9.1'in iii) şıkkının ispatı için bize yol gösterir. Eğer (9.2) eşitliği t formunun bir merkezinin tüm v elemanları için sağlanırsa, bu bağıntı süreklilikten tüm $v \in D(t)$ elemanlarına genişletilebilir.

Özel olarak v elemanını $D(T')$ kümesinin bir elemanı olarak seçersek,

$$(u, T'v) = t[u, v] = (w, v) \quad (10.9)$$

ifadesini elde ederiz. Böylece T'^* operatörünün tanımı gereği

$$u \in D(T'^*) = D(T) \text{ ve } w = T'^*u = Tu \text{ dur.}$$

Sonuç 9.4 iii) şikkının direkt sonucudur ve i) şikkını sağlayan m-sektörel T operatörünün tekliğı bu sonuçtan anlaşılır.



11. FRIEDRICHS GENİŞLETMESİ

Bu kısımda S ile yoğun olarak tanımlı, sektörel bir operatör ve $D(s) = D(S)$ ile $s[u, v] = (Su, v)$ olacak şekilde s formunu tanımlayalım. Bu taktirde, Teorem 7.1'den s formunun kapanabilir form olduğu görülür. $t = \tilde{s}$ ve $T = T_t$ bir m -sektörel operatör olsun. Sonuç 9.4'ten $T \supset S$ olduğu ortaya çıkar, çünkü $D(s) = D(S)$ kümesi t formunun bir merkezidir. T operatörü S operatörünün Friedrichs genişletmesi olarak adlandırılır. (Kato, 1980; Birman vd., 1987). Başlangıçta Friedrichs genişletmesi yarı sınırlı, simetrik bir S operatörü için tanımlandı, bu durumda Teorem 9.6'dan T operatörü kendine eş bir operatördür.

Teorem 11.1: Eğer S operatörü m -sektörel bir operatör ise S operatörünün Friedrichs genişletmesi kendisidir. Özel olarak yoğun tanımlı, sektörel bir T operatörünün Friedrichs genişletmesinin Friedrichs genişletmesi, T operatörünün kendisidir.

Bu sonuç m -sektörel bir operatör, düzgün sektörel bir uzantıya sahip olmadığından açık bir şekilde görülür.

Aşağıda tanımlayacağımız Teorem 11.2 ve Teorem 11.3 Friedrichs genişletmesini karakterize eder. Burada S , s , t , T ifadeleri başlangıçta tanımlanan ifadelerdir.

Teorem 11.2: S operatörünün tüm m -sektörel T' uzantılarının içinde, T Friedrichs genişletmesi en küçük form-tanım kümesine sahiptir.

İspat: $D(t') = D(T')$ olmak üzere $t'[u, v] = (T'u, v)$ ifadesi ile t' formunu tanımlayalım. O taktirde T' operatörü $\tilde{t}'$ formuyla oluşturulmuş bir operatördür. Fakat $T' \supset S$ olduğundan $t' \supset s$ dir ve buradan da $\tilde{t}' \supset \tilde{s} = t$ olur. Bu sonuç $D(\tilde{t}') \supset D(t)$ olmasını ifade eder.

Teorem 11.3: S operatörünün Friedrichs genişletmesi, tanım kümesi $D(t)$ 'nin alt kümesi olan S operatörünün tek m -sektörel uzantısıdır.

İspat: T' operatörü $D(T') \subset D(t)$ ile S operatörünün herhangi bir m -sektörel uzantısı olsun ve t' formu yukarıdaki gibi tanımlansın.

Bu durumda her $u \in D(T')$ ve $v \in D(t)$ için, $T' = T_{\tilde{t}}$, $\tilde{t} \supset t$ olduğundan

$$(T'u, v) = \tilde{t}[u, v] = t[u, v]$$

ifadesine sahip oluruz ve ayrıca $u \in D(T') \subset D(t)$ dir.

Sonuç 9.4'ten $T' \subset T$ olduğu görülür. Fakat T' ve T operatörlerinin her ikisi de m -sektörel olduğundan, $T' = T$ eşitliğine sahip oluruz.

12. FRIEDRICH'S GENİŞLETMESİNİN UYGULAMASI

(a, b) sonlu bir aralık olmak üzere $H = L_2(a, b)$ olsun. $p(x), q(x), r(x), s(x)$ kompleks değerli fonksiyonlar ve h_a, h_b sabit sayılar olmak üzere,

$$t[u, v] = \int_a^b \{ p(x) u'(x) \overline{v'(x)} + q(x) u(x) \overline{v(x)} + r(x) u'(x) \overline{v(x)} + s(x) u(x) \overline{v'(x)} \} dx + h_a u(a) \overline{v(a)} + h_b u(b) \overline{v(b)} \quad (12.1)$$

formunu oluşturalım. p, q, r, s fonksiyonlarının $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarını farz edelim ve $D(t)$ kümesi; $u(x)$ fonksiyonu, $u'(x) \in H$ olmak üzere $[a, b]$ kapalı aralığında mutlak sürekli fonksiyon olacak şekilde tüm $u \in H$ elemanlarının kümesi olsun. t formu yoğun olarak tanımlıdır. Eğer p, q fonksiyonları reel değerli ise t formu simetriktir, $\overline{r(x)} = s(x)$ dir ve h_a, h_b reel değerlidir. Eğer $D(t)$ kümesini, $u(a) = u(b) = 0$ olmak üzere tüm $u(x)$ fonksiyonlarının kümesi olarak kısıtlarsak, t formunun bir t_0 kısıtlamasını elde ederiz. t_0 formu yoğun olarak tanımlıdır. Ayrıca $D(t) = C_0^\infty(a, b)$ ile t_0 formunun ayrı bir i kısıtlamasını da tanımlayabiliriz. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığında $p(x) > 0$ ise t formu sektörelidir. Bunu görmek için $p(x) > \delta$, $|q(x)| \leq M$, $|r(x)| \leq M$, $|s(x)| \leq M$ olacak şekilde δ ve M pozitif sabitlerini göz önüne alalım. Böylece,

$$\text{Ret}[u] \geq \int \left\{ \delta |u'|^2 - M(|u|^2 + 2|u u'|) \right\} dx - |h_a| |u(a)|^2 - |h_b| |u(b)|^2 \quad (12.2)$$

ifadesi elde edilir.

$$2|u u'| \leq \varepsilon |u'|^2 + \varepsilon^{-1} |u|^2 \quad (12.3)$$

olduğundan,

$$h[u] = \text{Ret}[u] \geq \delta \|u'\|^2 - M \|u\|^2 \quad (12.4)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikteki δ ve M pozitif sabitleri yukarıda verilen δ ve M sabitleri ile aynı olmak zorunda değildir.

Benzer şekilde $p(x)$ fonksiyonun reel olduğunu göz önünde bulundurursak, $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük bir pozitif sayı olmak üzere,

$$|\operatorname{Im} t[u]| \leq \varepsilon \|u'\|^2 + M_\varepsilon \|u\|^2 \quad (12.5)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece uygun γ ve θ sabitlerinin seçimleriyle (4.11) eşitsizliğine sahip olduğumuzu kolayca görebiliriz. Eğer $-\gamma$ sabiti yeterince büyük alınırsa, θ sabiti istenildiği kadar küçük seçilebilir.

Başlangıçta tanımladığımız t formu,

$$t_1[u, v] = \int_a^b p(x) u' \overline{v'} \, dx \quad (12.6)$$

$$t_2[u, v] = \int_a^b \{ q(x) u \bar{v} + r(x) u' \bar{v} + s(x) u \overline{v'} \} \, dx \quad (12.7)$$

$$t_3[u, v] = h_a u(a) \overline{v(a)} + h_b u(b) \overline{v(b)} \quad (12.8)$$

ve $D(t_1) = D(t_2) = D(t_3) = D(t)$ olmak üzere $t = t_1 + t_2 + t_3$ şeklinde ifade edilebilir. Eğer önceki gibi $p(x) > 0$ olduğunu farz edersek, t_1 formu; S operatörü $D(S) = D(t)$ ile $Su(x) = p(x)^{1/2} u'(x)$ ile tanımlı lineer bir operatör olmak üzere $t_1[u, v] = (Su, Sv)$ olarak yazılabilir. $D(t)$ kümesini üstte olduğu gibi tanımlarsak, S operatörü H uzayında kapalı bir operatördür. Böylece t_1 negatif olmayan ve kapalı formdur. Kapalı olduğunu görmek için; S , H uzayından başka bir H' uzayına (H uzayının kendisi de olabilir) bir operatör olsun, ve

$$h[u, v] = (Su, Sv) \quad , \quad D(h) = D(S) \quad (12.9)$$

formunu oluşturalım. h formu negatif olmayan simetrik bir formdur.

Diğer taraftan t_2 ve t_3 formları t_1 - sınırı 0 olmak üzere t_1 - sınırlıdır. Bunu üstte ispatladık. Böylece Teorem 8.2'den t formunun kapalı olduğunu elde ederiz.

t formunu başlangıçta tanımlamıştık. Şimdi de $T = T_t$ ve $u \in D(T)$, $Tu = w$ olsun.

$$(w, v) = (Tu, v) = t[u, v] \quad , \quad v \in D(t) \quad (12.10)$$

$$\int_a^b w \bar{v} dx = \int_a^b \{ p u' \bar{v}' + q u \bar{v} + r u' \bar{v} + s u \bar{v}' \} dx + h_a u(a) \bar{v}(a) + h_b u(b) \bar{v}(b) \quad (12.11)$$

anlamına gelir.

z , $w - qu - ru'$ nün belirsiz bir integrali olsun: $z' = w - qu - ru'$

O takdirde

$$\int_a^b (w - qu - ru') \bar{v} dx = \int_a^b z' \bar{v} dx = z(b) \bar{v}(b) - z(a) \bar{v}(a) - \int_a^b z \bar{v}' dx \quad \text{ve (12.11) eşitliği}$$

$$\int_a^b (pu' + z + su) \bar{v}' dx + [h_a u(a) + z(a)] \bar{v}(a) + [h_b u(b) - z(b)] \bar{v}(b) = 0 \quad (12.12)$$

ifadesini verir.

(12.12) eşitliği her $v \in D(t)$ için doğrudur, yani $v(x)$ mutlak-süreklı fonksiyon ve $v' \in L_2(a, b)$ olacak şekilde her v için doğrudur.

$$\int_a^b v' dx = 0 \quad , \quad v(x) = \int_a^x v'(x) dx \quad \text{olacak şekilde } v' \in L_2 \quad \text{için } v \in D(t) \text{ ve } v(a) = v(b) = 0 \text{ şartları}$$

sağlanır, bundan dolayı $pu' + z + su$ ifadesi (12.12) eşitliğinden v' fonksiyonuna ortogondur. Böylece $pu' + z + su$ ifadesi bir c sabitine eşit olmalıdır.

(12.12) eşitliğini tekrar düzenlersek

$$[-c + h_a u(a) + z(a)] \bar{v}(a) + [c + h_b u(b) - z(b)] \bar{v}(b) = 0 \quad (12.13)$$

elde ederiz.

$v, D(t)$ kümesi üzerinde değiştiği zaman, $v(a)$ ve $v(b)$ değerleri tüm kompleks sayılar üzerinde değiştiğinden, (12.13) eşitliğindeki sabitler yok olur.

$$c = p(a)u'(a) + z(a) + s(a)u(a) = p(b)u'(b) + z(b) + s(b)u(b) \quad (12.14)$$

olduğunu dikkate alırsak,

$$p(a)u'(a) + (s(a) - h_a)u(a) = 0 \quad (12.15)$$

$$p(b)u'(b) + (s(b) + h_b)u(b) = 0 \quad (12.16)$$

ifadelerini elde ederiz.

$c = pu' + z + su$ ifadesinden pu' fonksiyonunun mutlak sürekli olduğu ve

$$(pu')' = -z' - (su)' = -w + qu + ru' - (su)' \quad \text{veya}$$

$$w = -(pu')' + qu + ru' - (su)' \quad \text{eşitliklerinin sağlandığı görülür.}$$

Bu şekilde her $u \in D(T)$ elemanının aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu ispatlamış olduk:

i) $u(x)$ ve $u'(x)$ fonksiyonları mutlak süreklidir ve $u'' \in L_2(a, b)$

ii) $u(x)$ fonksiyonu (12.15) ve (12.16) sınır şartlarını sağlar.

Tersine i) ve ii) koşullarını sağlayan her $u \in L_2$ elemanı $D(T)$ kümesine aittir ve

$$Tu = w = -(pu')' + qu + ru' - (su)' \quad (12.17)$$

ifadesi mevcuttur.

$T = T_t$ operatörü, (12.15) ve (12.16) sınır şartlarıyla ikinci mertebeden diferansiyel operatördür. Özel olarak q reel değerli, $\overline{r(x)} = s(x)$ ve h_a, h_b reel değerli ise T operetörü kendine eştir (Kato, 1980; Zeidler, 1995).

13. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Hilbert uzaylarında tanımlı sesquilineer formlar ele alınmış ve bu formların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Simetrik form, eşlenik form, yarı sınırlı form, kapalı form ve kapanabilir formların tanımları verilmiş, bunlarla ilgili temel teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Her sınırlı sesquilineer forma sınırlı bir operatör karşılık geldiği ve tersine her sınırlı operatöre bir sınırlı sesquilineer form karşılık geldiği gösterilmiştir. Sınırsız formlar için de benzer bir çalışma Friedrichs tarafından yapılmış, her yarı sınırlı, kapalı bir simetrik forma yarı sınırlı, kapalı bir kendine eş operatörün karşılık geldiği gösterilmiştir. Bu teori, çalışmanın sonunda bir diferansiyel denkleme uygulanmış ve uygun bir kendine eş operatör meydana geldiği gösterilmiştir (Kato, 1980).

Sonraki çalışmalarda da bu teorinin Kalf (1978) ve Niessen (1992)'deki farklı sınır değer problemlerine benzer uygulamaları ile uğraşılacaktır.

KAYNAKLAR

Akhiezer, N.I. ve Glazman, I.M., (1993), Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications Inc., New York.

Birman, M.S. ve Solomyak, M.Z., (1987), Spectral Theory of Self Adjoint Operators, D. Reidrel Publications Inc., Dordrech.

Kalf, H., (1978), "A characterization of the Friedrichs Extension of Sturm-Liouville operators", J. London Math. Soc. (2), 511-521.

Kato, T., (1980), Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York.

Kreyszig, E., (1978), Introductory Funtional Analysis with Applications , J. Wiley and Sons Inc., New York.

Niessen H.D ve Zettl A. , (1992), "Singular Sturm Liouville Problems: The Friedrichs Extensions and Comparsion of Eigenvalues", London Math. Soc. (3), 545-576.

Weidman, J., (1980), Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, New York.

Weinberger, H.F., (1974), Variational Methods for Eigenvalue Approximazion, Printed for the Soc., New York.

Zeidler, E., (1995), Applied Functional Analysis, Springer, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	03.05.1979	
Doğum yeri	Uşak	
Lise	1994-1997	Manisa Lisesi
Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Çalıştığı kurumlar	2002-Devam ediyor	YTÜ Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi

