

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

139852

GRUP TEMSİLLERİ ve FG-MODÜLLERİ

-139852-

Matematikçi Hülya ACUN

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Y. Doç. Dr. Fügen Torunbalcı AYDIN

DOÇ. DR. NAZMIYE YAHNIOĞLU

yahnioğlu

Doç. Dr. Cevdet CERİT

c. cerit

Y. Doç. Dr. Fügen Torunbalcı
AYDIN

Fügen Torunbalcı

İSTANBUL, 2003

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KÜTÜPHANE MÜDÜRLÜĞÜ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	viii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT.....	xi
1 GİRİŞ.....	1
1.1 Gruplar.....	1
1.1.1 Örnekler.....	1
1.2 Alt Gruplar.....	5
1.2.1 Örnekler.....	5
1.3 Direkt Çarpım.....	7
1.3.1 Örnek.....	7
1.4 Fonksiyonlar.....	7
1.5 Gruplarda Homomorfizm.....	8
1.5.1 Örnekler.....	8
1.6 Kosetler.....	9
1.7 Lagrange teoremi.....	10
1.8 Normal Alt Gruplar.....	11
1.8.1 Teorem.....	11
1.8.2 Örnekler.....	11
1.9 Basit Gruplar.....	12
1.10 Çekirdek ve Görüntü.....	12
1.11 Teorem.....	13
1.11.1 Örnek.....	13
2. VEKTÖR UZAYLARI ve LİNEER TRANSFORMASYONLAR.....	14
2.1 Vektör Uzayları.....	14
2.1.1 Örnekler.....	14
2.2 Baz ve Boyut.....	16
2.2.1 Örnek.....	16
2.2.2 Sonuç.....	17
2.3 Alt Uzaylar.....	17
2.3.1 Örnekler.....	17
2.3.2 Not.....	18
2.4 Alt Uzayların Direkt Toplamı.....	18
2.4.1 Tanım.....	18
2.4.2 Örnekler.....	19

2.5	Lineer Dönüşümler.....	20
2.6	Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntüsü.....	20
2.6.1	Örnekler.....	21
2.7	Tersinir Lineer Dönüşümler.....	22
2.8	Endomorfizm.....	22
2.8.1	Örnekler.....	23
2.9	Matrisler.....	23
2.9.1	Örnekler.....	24
2.9.2	Örnek.....	25
2.9.3	Örnek.....	25
2.10	Ters Çevrilebilir Matrisler.....	26
2.11	Tanım.....	26
2.12	Sonuç.....	26
2.12.1	Örnek.....	27
2.13	Özdeğerler ve Özvektörler.....	27
2.13.1	Örnekler.....	27
2.13.2	Örnek.....	28
2.14	Yansımalar.....	28
2.14.1	Önerme.....	29
2.14.2	Tanım.....	29
2.14.3	Örnek.....	29
2.14.4	Önerme.....	30
2.14.5	Örnek.....	30
3.	GRUP TEMSİLLERİ.....	31
3.1	Tanım.....	31
3.1.1	Örnekler.....	31
3.2	Denk Temsiller.....	33
3.2.1	Tanım.....	33
3.2.2	Örnekler.....	34
3.3	Temsillerin Çekirdeği.....	35
3.3.1	Tanım.....	35
3.3.2	Tanım.....	35
3.3.3	Önerme.....	35
3.4	Örnekler.....	36
4.	FG-MODÜLLERİ.....	38
4.1	Örnek.....	38
4.2	Tanım.....	39
4.3	Tanım.....	39
4.4	Teorem.....	40
4.5	Örnekler.....	41
4.6	Önerme.....	42
4.7	Tanımlar.....	43
4.8	Permütasyon Modülleri.....	43
4.8.1	Örnek.....	44
4.9	Tanım.....	44
4.9.1	Örnek.....	44
4.10	FG Modülleri ve Denk Temsiller.....	45
4.10.1	Teorem.....	45

4.10.2	Örnek.....	45
4.10.3	Örnekler.....	46
5.	FG-ALTMODÜLLERİ ve İNDİRGENEBİLİRLİK.....	49
5.1	Tanım.....	49
5.1.1	Örnekler.....	49
5.2	İndirgenemez FG-Modülleri.....	49
5.2.1	Örnekler.....	50
6.	GRUP CEBİRLERİ.....	52
6.1	G Grubunun Grup Cebri.....	52
6.1.1	Örnek.....	52
6.1.2	Örnek.....	53
6.2	Tanım.....	53
6.3	Önerme.....	54
6.4	Düzenli FG-Modülü.....	54
6.5	Tanım.....	55
6.6	Önerme.....	55
6.7	Örnek.....	55
6.8	FG-Modülü Üzerinde FG Hareketleri.....	56
6.8.1	Tanım.....	56
6.8.2	Örnek.....	56
6.9	Önerme.....	56
6.9.1	Örnek.....	57
7.	FG-HOMOMORFİZM.....	59
7.1	Tanım.....	59
7.2	Önerme.....	59
7.3	Örnekler.....	60
7.4	İzomorfik FG-Modülleri.....	61
7.5	Önerme.....	61
7.6	Özellikler.....	62
7.7	Önerme.....	62
7.8	Teorem.....	63
7.9	Örnek.....	63
7.10	Örnek.....	64
7.11	Örnekler.....	65
7.12	Direkt Toplamlar.....	66
7.13	Önerme.....	67
7.14	Maschke's Teoremi.....	67
7.14.1	Örnek.....	69
7.14.2	Maschke's Teoreminin Sonucu.....	70
7.14.3	Örnekler.....	70
7.15	Schur's Lemma.....	71
7.16	Önerme.....	72
7.17	Önerme.....	72
7.17.1	Örnekler.....	73
8.	İNDİRGENEMEZ MODÜLLER ve GRUP CEBRİ.....	74
8.1	Önerme.....	74

8.2	Önerme.....	75
8.3	Örnek.....	75
8.4	Teorem.....	76
8.5	Örnek.....	76
9.	SONUÇ.....	78
KAYNAKLAR.....		80
ÖZGEÇMİŞ.....		81



SİMGE LİSTESİ

$\langle a \rangle$	a tarafından doğurulan devresel grup
A_n	n. mertebeden alterne grup
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
C_n	n. mertebeden devresel grup
$\dim V$	V vektör uzayının boyutu
D_{2n}	2n. mertebeden dihedral grup
$g \in G$	g elemanı G 'ye aittir
$ G $	G grubunun mertebesi
$GL(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $n \times n$ lik ters çevrilebilir matrislerin grubu
G/H	G grubunun H normal alt grubuna göre bölüm grubu
$ G:H $	H alt grubunun G grubu içindeki indeksi
$H \leq G$	H, G nin alt grubudur
$\forall$	Her
$\text{Im } \varphi$	φ homomorfizminin görüntü kümesi
$\Rightarrow$	ise
I_n	$n \times n$ lik birim matris
$\text{Ker } \varphi$	φ homomorfizminin çekirdeği
$N \triangleleft G$	N, G nin Normal Alt Grubudur
$\ni$	Öyle ki
Q_8	8. mertebeden quaternion grup
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
S_n	n. mertebeden simetrik grup
$U \oplus W$	U ile W nin direkt toplamı
$[\vartheta]_B$	B bazına göre ϑ nin matris gösterimi
$\exists$	Vardır
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

	sayfa
Şekil 1.1 Düzgün n-gen.....	2
Şekil 1.2 Eşkenar Üçgen.....	3
Şekil 1.3 O etrafında $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ lük dönmeler.....	4
Şekil 1.4 d_1, d_2, d_3 doğrularına göre simetriler.....	4



ÇİZELGE LİSTESİ

	sayfa
Çizelge 3.1 $g \in D_8$ için $g \rho$ matrisleri.....	32
Çizelge 4.1 $[g]_{B_1}$ ve $[g]_{B_2}$ matrisleri.....	47



ÖNSÖZ

Temsil teorisi bir grubun matrisler grubu şeklinde ifade edilmesiyle ilgilenir. Bir grubun temsilini oluşturmak için bu gruptan ters çevrilebilir matrisler grubuna lineer bir dönüşüm tanımlanır. Temsiller sonlu grupların özelliklerinin anlaşılması için anahtar görevi görür. Temsil teorisi bir özel grubun somut tanımını elde etmek için önemlidir. Bu, grubun bir temsilini matrisler grubu şeklinde bularak elde edilir. Üstelik grubun farklı temsilleriyle çalışarak , temsil teorisinin dışında kalan sonuçları kanıtlamak mümkündür. Ayrıca fizik ve kimya gibi birçok bilim dalında uygulamalar temsil teorisine dayanır.

Temsil teorisinin ilgi çekici bir özelliği de grup teorisi ve lineer cebri birleştirmesidir. Sonuçlar vektör uzaylarını, lineer transformasyonlarını ve matrisleri kapsayan lineer cebirden elde edilir.

Bu çalışmada temsil teorisi vektör uzaylarının bir genelleştirilmesi olan modüller ile genişletildi. Modüller ile temsiller arasındaki yakın bağlantı araştırıldı. Temsiller kullanılarak modüller oluşturuldu. Özel bir vektör uzayı olan grup cebri araştırıldı. Grup cebirleri düzenli temsilleri ve düzenli modülleri kurmak için kullanıldı.

Tezimi hazırlarken bana yardımcı olan ve yönlendiren hocam , Sayın Y. Doç. Dr. Fügen Torunbalcı Aydın'a , benim her zaman yanımda olan ve beni destekleyen aileme, çalışmamda bana yardımcı olan arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

ÖZET

Bu çalışmada sonlu gruplar için temsil teorisi ele alınmış ve teori modüllerle genişletilmiştir. Cebirsel olarak simetrik gruplar ve devresel gruplar ele alınıp , dihedral gruplar ise geometrik açıdan simetrilerle incelenmiştir. Bu özel grupların temsilleri örneklerle açıklanmıştır. Her bölüm tanımların , kuralların ve teoremlerin tam ifadeleri ile başlar. Bunu çözümlü problemler izler. Çözölmüş problemler sadece teoriyi genişletmek için değil , aynı zamanda problemlerin kurulması ve çözölmesinde pratik edinmeyi sağlayacak şekilde seçilmiştir.

Temsil teorisine geçmeden ilk iki bölümde bazı hatırlatmalara yer verilmiştir. Birinci bölümde , gruplarla ilgili temel bilgiler anlatılarak , bazı özel gruplar örneklerle açıklanmıştır.

İkinci bölümde , modöl teorisi için gerekli olan vektör uzayları , bunların baz ve boyutları , alt vektör uzayları , lineer dönüşömler , öz değler ve öz vektörler bulunmaktadır.

Üçüncü bölüm , temsil teorisine ayrılmış ve sonlu grupların temsilleri , dürüst temsiller , denk temsiller , temsillerin çekirdeğı ile ilgili konular yer almaktadır.

Dördüncü bölümde , FG-modöller ile bunların grup temsilleri arasındaki yakın bağlantı bulunmaktadır.

Beşinci bölümde FG-altmodöller , indirgenebilir FG-modöller , indirgenebilir temsiller anlatılmıştır.

Altıncı bölümde özel bir vektör uzayı olan grup cebri ele alınmış, grup cebrinden yararlanılarak düzenli temsiller ve düzenli modöller kurulmuştur.

Yedinci bölümde modöller genişletilerek FG-homomorfizm, izomorfik FG-modöller ve temsil teorisinin önemli sonuçlarından olan Maschke's teoremi ve Schur's lemma sı incelenmiştir.

Sekizinci bölümde indirgenemez FG-modöllerine yer verilmiştir.

Son bölümde ise temsil teorisinin özellikleri özetlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Vektör Uzayı , Baz , Temsil , Modöl , İndirgenebilirlik

ABSTRACT

In this study , representation theory of finite groups has been handled and further studied with module concepts. Symmmetric groups and cyclic groups were studied and dihedral groups were studied together with geometrical symmetrics. The representation of these special groups were explained by a variety of examples. Every chapter starts with complete expressions of definitions , rules and theorems. This is followed by problems with solutions. The problems with solutions not only further explain the theory , but also chosen as to practice setting up problems and finding their solutions.

In the first two chapters , before representation theory , there are some revisions. In the first chapter , basic knowledge about groups are given and some special groups are explained with examples.

In the second chapter , vector spaces which are necessary for module theory , their bases and dimensions , subspaces , lineer transformations , eigenvalues and eigenvectors can be found.

Third chapter is reserved for representation theory and in this chapter there are representation of finite groups , faithful representations , equivalent representations , kernels of representations.

In the fourth chapter , FG-modules and their close connection with group representations are explained.

In the fifth chapter , FG-submodules , reducible FG-modules and reducible representations are explained.

In the sixth chapter, group algebra which is a special vector space was analyzed and it was used to form regular representations and regular modules.

In the seventh chapter , modules were explained in more detail and FG-homomorphism , isomorphic FG-modules and major results in representatio theory namely Masche's Theorem and Schur's lemma were discussed.

In the eighth chapter irreducible FG-modules were given.

In the last part , the characteristics of representation theory were summarizred.

Keywords: Vector Space , Basis , Representation , Module , reducibility

1. GİRİŞ

Temsil teorisi matematik dalında önemli bir yere sahiptir. Çünkü matematiğin esasını teşkil eden cebir konularının matrisler yardımıyla temsil edilmesini anlatır. Aynı zamanda fizik ve kimya gibi birçok bilim dalında da uygulamalar temsil teorisine dayanır.

Bu çalışmada öncelikle temsil teorisinde gerekli olan gruplar, vektör uzayları ve matrisler ile ilgili temel bilgiler üzerinde duruldu. Daha sonra temsil teorisi modüllerle genişletildi. Modüllerle temsiller arasındaki ilişki araştırıldı. Grup cebri konularına yer verildi. Grup cebirleri düzenli temsilleri kurmak için kullanıldı.

1.1 Gruplar

G boş olmayan bir küme olsun ve G de çarpma işlemi tanımlansın. G kümesine, tanımlanan çarpma işlemine göre aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

- 1) Her $g, h \in G$ için $gh \in G$
- 2) Her $g, h, k \in G$ için $(gh)k = g(hk)$
- 3) Her $g \in G$ için $eg = ge = g$ olacak şekilde bir $e \in G$ birim elemanı mevcuttur.
- 4) Her $g \in G$ için $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ olacak şekilde g nin tersi olarak adlandırılan bir $g^{-1} \in G$ mevcuttur.

Temel olarak bilinmesi gereken, G nin sadece bir tane birim elemanı olduğu ve G deki her elemanın sadece bir tane tersi olduğudur. Genellikle G nin birim elemanı için 1 yazılır.

Eğer G deki elemanların sayısı sonlu ise G grubuna sonlu bir grup denir. Bu kümenin eleman sayısına da grubun mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir.

1.1.1 Örnekler

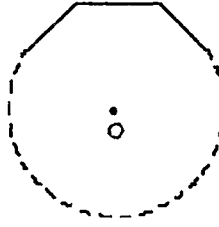
1) n bir pozitif tamsayı olsun ve C , tüm kompleks sayılar kümesini göstere. C nin n . köke kadar olan elemanlarının çarpımlarından oluşan küme n . mertebeden bir grup oluşturur ve C_n ile gösterilir. C_n grubuna n . mertebeden devresel grup adı verilir

$$a = e^{\frac{2\pi i}{n}} \text{ ve } a^n = 1 \text{ olmak üzere } C_n = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \quad (1.1)$$

dir.

2) $\mathbb{Z}$, tamsayılar kümesi toplama işlemine göre bir gruptur.

3) n , ($n \geq 3$ olmak üzere) bir tamsayı olsun. Düzgün bir n -geni kendi üzerine dönüştüren bütün dönme ve yansıma simetrileri , tasvirlerdeki bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba dihedral grup denir ve D_{2n} ile gösterilir. Bu grubun elemanları şu şekilde bulunur.



Şekil 1.1 Düzgün n -gen

Düzgün n -geni kendi üzerine dönüştüren bütün dönme ve yansıma simetrileri şunlardır:

n tane dönme simetrisi vardır. Bunları $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ ile gösterelim. Burada p_k , O merkezi etrafında $\frac{2\pi k}{n}$ açısı ile saat yönündeki dönüştür.

n tane yansıma simetrisi vardır. Bunlar ise O noktası ile çokgenin köşelerinden geçen veya O noktası ile çokgenin kenar orta noktalarından geçen n tane doğruya göre simetrilerdir.

A , çokgenin bir köşesi olsun. O ve A noktalarından geçen doğruya göre yansıma simetrisi için b , p_1 dönüşü için a yazalım.

Bütün dönüşler $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ dir. 1 , O etrafında 0° lik dönüştür. Birimi belirtir ve çokgeni sabit hale getirir.

Bütün yansımalar da $b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b$ olur.

Böylece D_{2n} in tüm elemanları a nın kuvvetleri ile b nin çarpımlarından oluşur. Yani D_{2n} a ve b tarafından üretilen iki üreteçli bir gruptur.

Burada $a^n = 1$, $b^2 = 1$ ve $b^{-1}ab = a^{-1}$ kabul edilir. Bu ilişkiler gruptaki herhangi iki elemanın çarpımını belirler. Örneğin $ba = a^{-1}b$ ilişkisi kullanılarak

$$ba^j = a^{-j}b \quad (1.2)$$

elde edilir.

Buradan,

$$(a^i b)(a^j b) = a^i b a^j b = a^i a^{-j} b b = a^{i-j} \quad (1.3)$$

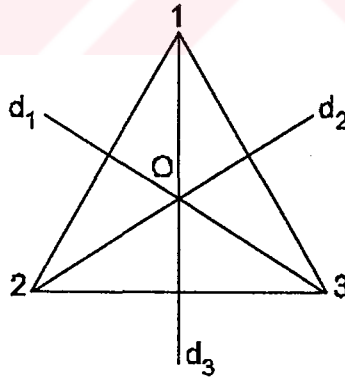
olur. Bunların hepsi

$$D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \quad (1.4)$$

sunumunda özetlenir.

Örneğin eşkenar üçgenin dihedral grubunu bulalım. Bu grup 6 elemanlı olup, eşkenar üçgenin merkezi etrafında $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ derecelik dönmeleri ile kenar orta dikmelerine göre simetrilerden oluşur (Şenkon, 1993).

Eşkenar üçgenin köşelerini 1, 2, 3 sayıları ile numaralandıralım.

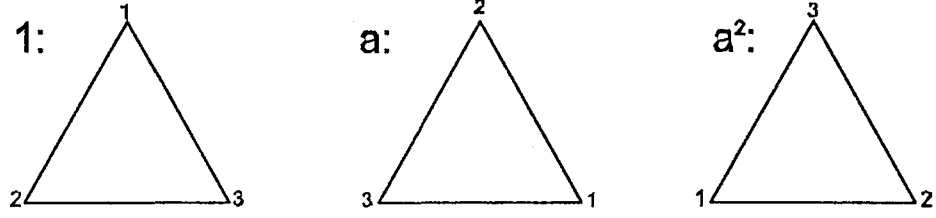


Şekil 1.2 Eşkenar Üçgen

1 : O etrafında 0 derecelik dönme

a : O etrafında $\frac{2\pi}{3}$ lük dönme

a^2 : O etrafında $\frac{4\pi}{3}$ lük dönme

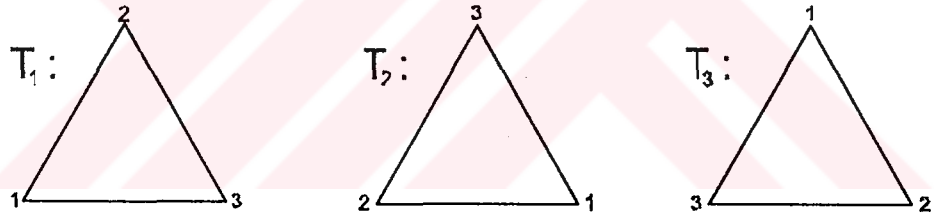


Şekil 1.3 O etrafında $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ lük dönmeler

T_1 : d_1 doğrusuna göre simetri

T_2 : d_2 doğrusuna göre simetri

T_3 : d_3 doğrusuna göre simetri



Şekil 1.4 d_1, d_2, d_3 doğrularına göre simetriler

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

T_1 simetrisi için b yazalım.

$a T_1 = T_2$, $a^2 T_1 = T_3$ olduğu göz önüne alınırsa $ab = T_2$, $a^2 b = T_3$ yazılabilir. O halde üçgenin grubu $D_6 = \{ 1, a, a^2, ab, a^2 b, b \}$ olur.

4) n bir pozitif tamsayı olmak üzere $\{1, 2, \dots, n\}$ nin tüm permütasyonlarının kümesi

tasvirlerdeki bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba n. dereceden simetrik grup

adı verilir ve S_n ile gösterilir. S_n , $n!$ elemanlı bir gruptur (Coxeter ve Moser, 1980).

5) F kümesi, R (gerçek sayılar kümesi) veya C (kompleks sayılar kümesi) olsun.

F de tanımlı tüm $n \times n$ ters çevrilebilir matrisler, matrislerdeki çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba F de tanımlı n . dereceden genel lineer grup adı verilir ve $GL(n, F)$ ile gösterilir. Bu sonsuz bir gruptur. $GL(n, F)$ grubunun birimi birim matristir ve I_n ile ya da sadece I ile gösterilir.

Her $g, h \in G$ için $gh=hg$ oluyorsa G grubuna abel grubu adı verilir. C_n ve Z birer abel grubu iken yukarıda verilen diğer örneklerin çoğu abel grubu değildir.

1.2 Alt gruplar

G bir grup ve H , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H , G deki çarpma işlemine göre kendi başına bir grup ise H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

G bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. H nin bir alt grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$1) 1 \in H \text{ ve}$$

$$2) \text{ Her } h, k \in H \text{ için } hk^{-1} \in H$$

olmasıdır.

1.2.1 Örnekler

1) Her G grubu için, $\{1\}$ ve G , G nin alt gruplarıdır.

2) G bir grup ve $g \in G$ olsun.

$$\langle g \rangle = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\} \quad (1.5)$$

alt kümesi G nin bir alt grubudur. Buna g tarafından üretilen devirli alt grup denir. Bazı $n \geq 1$ için $g^n = 1$ ise $\langle g \rangle$ sonludur. Bu durumda $g^r = 1$ olacak şekilde en küçük bir r pozitif tamsayısı vardır. Öyleyse r , $\langle g \rangle$ deki elemanların sayısına eşittir. Gerçekten de

$$\langle g \rangle = \{1, g, g^2, \dots, g^{r-1}\} \quad (1.6)$$

olur. r sayısına g elemanının mertebesi denir.

$g \in G$ için eğer $G = \langle g \rangle$ ise G ye devresel bir grup denir. C_n ve Z grupları devreseldir. Z , 1 ile üretilmiş sonsuz bir devresel gruptur.

3) G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. H , G nin a ve b nin kuvvetlerinin çarpımları olan tüm elemanlarını kapsayan bir alt kümesi olarak tanımlansın. Yani bazı n ler için tüm elemanların formu $a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \dots a^{i_n} b^{j_n}$ ($i_k, j_k \in Z, 1 \leq k \leq n$) şeklindedir.

Öyleyse H , G nin bir alt grubudur. H , a ve b tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır ve $H = \langle a, b \rangle$ yazılır.

G nin elemanlarının herhangi bir sonlu S kümesi verildiğinde $\langle S \rangle$ yani G nin S tarafından üretilen alt grubu benzer şekilde tanımlanabilir.

4) $G = GL(2, C)$ (C üzerinde tanımlanan 2×2 ters çevrilebilir matrislerin grubu) olsun.

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{alalım.}$$

$H = \langle A, B \rangle$, A ve B tarafından üretilen G nin bir alt grubu olsun.

$$A^4 = I, \quad A^2 = B^2, \quad B^{-1}AB = A^{-1} \quad \text{olduğu kolayca görülebilir.}$$

Üçüncü bağıntı kullanılarak H nin her elemanının bazı i, j tamsayıları için $A^i B^j$ formuna sahip olduğu görülür ve ilk iki bağıntı kullanılarak $0 \leq i \leq 3$ ve $0 \leq j \leq 1$ alınır. Böylece H nin en çok 8 elemanı bulunur.

$A^i B^j$ ($0 \leq i \leq 3$ ve $0 \leq j \leq 1$) matrisleri farklı olduğuna göre gerçekten de $|H| = 8$ dir. H grubu 8.mertebeden quaternion grup olarak adlandırılır ve Q_8 ile gösterilir. Yukarıdaki üç bağıntı Q_8 in herhangi iki elemanının çarpımını belirler ve böylece

$$Q_8 = \langle A, B: A^4 = I, A^2 = B^2, B^{-1}AB = A^{-1} \rangle \quad (1.7)$$

sunumu elde edilir.

5) S_n deki her g permütasyonu bir takım transpozisyonların (2 li permütasyonların) çarpımı olarak gösterilebilir. (örneğin $g = (1234) \in S_4$ için $g = (14)(13)(12)$ yazılabilir.) Bir permütasyon ne şekilde transpozisyonlara ayrılırsa ayrılsın bütün ayrılışlardaki transpozisyonların sayısı ya

daima tek ya da daima çifttir. Tek ya da çift sayıda tranpozisyonların çarpımı olarak gösterilebilen g permütasyonuna tek ya da çift permütasyon denir (Rotman, 1984).

$$A_n = \{g \in S_n : g \text{ bir çift permütasyon}\} \quad (1.8)$$

alt kümesi S_n nin bir alt grubudur ve bu gruba n . dereceden alterne grup adı verilir.

1.3 Direkt çarpım

G ve H iki grup olsun. Her $(g,h), (g',h') \in G \times H$ için

$$(g,h)(g',h') = (gg',hh') \quad (1.9)$$

ile tanımlanan “.” işlemine göre, $G \times H$ bir gruptur. Bu gruba G ile H nin direkt çarpımı denir.

$$G \times H = \{(g,h) : g \in G \text{ ve } h \in H\} \quad (1.10)$$

şeklinde gösterilir.

Daha genel olarak, $G_1, \dots, G_r$ gruplarının direkt çarpımı

$$G_1 \times \dots \times G_r = \{(g_1, \dots, g_r) : g_i \in G_i, 1 \leq i \leq r\} \quad (1.11)$$

$$(g_1, \dots, g_r)(g'_1, \dots, g'_r) = (g_1 g'_1, \dots, g_r g'_r) \quad (1.12)$$

şeklindedir.

Eğer tüm G_i ($1 \leq i \leq r$) grupları sonlu ise $G_1 \times \dots \times G_r$ direkt çarpımı da sonludur ve eleman sayısı $|G_1| \dots |G_r|$ dir.

1.3.1 Örnek: $C_2 \times \dots \times C_2$ (r tane) grubu 2^r tane elemana sahiptir. C_2 nin eleman sayısı 2 olduğundan $C_2 \times \dots \times C_2$ (r tane) grubunun eleman sayısı $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{r \text{ tane}} = 2^r$ dir.

1.4 Fonksiyonlar

Bir G kümesinden başka bir H kümesine bir fonksiyon, G nin herbir elemanına bir ve yalnız bir H elemanı tayin eden bir kuraldır. Bu çalışmada fonksiyon sağda uygulandı. Yani bir ϑ fonksiyonu altında g nin görüntüsü $g\vartheta$ olarak yazıldı. $\vartheta : G \rightarrow H$ notasyonu ile ϑ nin G den H ye bir fonksiyon olduğu belirtilir.

$$\vartheta:G \rightarrow H \quad (g \in G, h \in H) \text{ ile } h = g\vartheta \quad (1.12)$$

olduğu ifade edilir.

Bir $\vartheta:G \rightarrow H$ fonksiyonu, eğer her $g \in G, h \in H$ için

$$\phi:H \rightarrow G \quad (g\vartheta)\phi = g \text{ ve } (h\phi)\vartheta = h \quad (1.13)$$

olacak şekilde bir ϕ fonksiyonu varsa ters çevrilebilirdir. Öyleyse, ϕ fonksiyonuna ϑ nin ters fonksiyonu denir ve ϑ^{-1} ile gösterilir.

Bir $\vartheta:G \rightarrow H$ fonksiyonu hem bire bir (Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1\vartheta = g_2\vartheta$ ise $g_1 = g_2$ dir.) hem de üzerine (Her $h \in H$ için $g\vartheta = h$ olacak şekilde $g \in G$ vardır.) ise ters çevrilebilirdir. Bir ters çevrilebilir fonksiyon aynı zamanda bijeksiyon olarak da adlandırılır.

1.5 Gruplarda Homomorfizm

Bu bölümde, bir gruptan diğerine grupların cebirsel yapısını koruyan fonksiyonlar üzerinde durulacaktır.

G ve H iki grup ve $\vartheta:G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun.

$$\text{Her } g_1, g_2 \in G \text{ için } (g_1 g_2)\vartheta = (g_1\vartheta)(g_2\vartheta) \quad (1.14)$$

oluyorsa G grubu ϑ fonksiyonu ile H üzerine homomorf olarak resmedilmiştir denir. Bu durumda ϑ ye G yi H içine resmeden bir homomorfizm adı verilir. Ters çevrilebilir bir homomorfizme izomorfizm adı verilir. G den H ye bir ϑ izomorfizmi varsa G ve H nin izomorfik olduğu söylenir ve $G \cong H$ yazılır. ϑ , G den H ye bir izomorfizm ise ϑ^{-1} de H den G ye bir izomorfizmdir. O halde, $H \cong G$ yazılır.

1.5.1 Örnekler

1) $G = D_{2n} = \langle a, b: a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun. G nin elemanları $a^i b^j$ ($0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq 1$)

formundadır.

H , herhangi bir grup olsun ve H nin x ve y elemanları

$$x^n = y^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{-1}$$

bağıntılarını sağlasın.

$\vartheta: a^i b^j \rightarrow x^i y^j$ ($0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq 1$) ile tanımlanan $\vartheta: G \rightarrow H$ fonksiyonu bir homomorfizmdir. Şöyle ki ;

$0 \leq r \leq n-1$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq n-1$, $0 \leq u \leq 1$ olsun.

$a^r b^s a^t b^u = a^i b^j$ ($0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq 1$) olacak şekilde i, j tamsayıları vardır. Üstelik i ve j , $a^n = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ bağıntılarının tekrar tekrar kullanılması ile belirlenir. $x^n = y^2 = 1$, $y^{-1}xy = x^{-1}$ den

$x^r y^s x^t y^u = x^i y^j$ olduğu sonucu çıkartılır. Öyleyse

$$(a^r b^s a^t b^u) \vartheta = (a^i b^j) \vartheta = x^i y^j = x^r y^s x^t y^u = (a^r b^s) \vartheta . (a^t b^u) \vartheta$$

dir. O halde ϑ bir homomorfizmdir.

$$2) G = S_5, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad \text{ve} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in G \quad \text{olsun.}$$

$x^5 = y^2 = 1$, $y^{-1}xy = x^{-1}$ koşulları sağlanır. H , G nin x, y tarafından doğurulan alt grubu olsun.

Yukarıdaki bağıntıları kullanarak $H = \{x^i y^j : 0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 1\}$ nin 10 elemanlı bir grup olduğu görülür.

$$D_{10} = \langle a, b : a^5 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \text{ grubu alınır}$$

$\vartheta: a^i b^j \rightarrow x^i y^j$ ($0 \leq i \leq 4$, $0 \leq j \leq 1$) ile tanımlanan $\vartheta: D_{10} \rightarrow H$ fonksiyonu bir önceki örnekte de görüldüğü gibi bir homomorfizmdir. ϑ ters çevrilebilir olduğundan bir izomorfizmdir.

O halde $H = \langle x, y \rangle \cong D_{10}$ yazılabilir.

1.6 Kosetler

G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olsun. $x \in G$ için G nin

$$Hx = \{hx : h \in H\} \tag{1.15}$$

alt kümesine H nin G içindeki bir sağ koseti adı verilir. Benzer şekilde sol koset de tanımlanabilir.

H nin G içindeki farklı sağ (ya da sol) kosetleri G nin bölümlendirilmesini şekillendirir. Yani

G sonlu bir grup ve $Hx_1, \dots, Hx_r$ H nin G içindeki farklı sağ kosetleri ise

$G = Hx_1 \cup \dots \cup Hx_r$ yazılabilir. Burada $i \neq j$ için $Hx_i \cap Hx_j = \emptyset$ tur.

Bu, G nin her bir elemanının kosetlerin yalnız birinde olması anlamına gelir. Yani herhangi iki koset ya tamamen birbirinin aynıdır ya da tamamen birbirinden farklıdır (Rotman, 1984).

Tüm i ler için $(0 \leq i \leq r)$ $\varphi: H \rightarrow Hx_i$, $h \rightarrow hx_i$ ($h \in H$)

fonksiyonunu tanımlayalım. φ fonksiyonu H den Hx_i ye bir bijeksiyondur. Çünkü

$b \in Hx_i$ için $b = hx_i$ olacak şekilde bir $h \in H$ bulunduğundan üzerinedir. Öte yandan φ , bire bir dir. $h_1, h_2 \in H$ için $h_1 x_i = h_2 x_i$ ise G grup olduğundan kısaltma özelliği kullanılırsa

$h_1 = h_2$ olur. Dolayısıyla φ bire birdir.

Şu halde φ bir bijeksiyondur. Bu durumda H ile Hx_i aynı kuvvettedir yani $|Hx_i| = |H|$ dir.

Şimdi G grubunun mertebesini belirleyelim.

$G = Hx_1 \cup \dots \cup Hx_r$ ($i \neq j$ için $Hx_i \cap Hx_j = \emptyset$)

$$|G| = |Hx_1| + \dots + |Hx_r|$$

$$|G| = |H| + \dots + |H| \quad (r \text{ tane})$$

O halde $|G| = r|H|$ bulunur.

1.7 Teorem (Lagrange teoremi)

G sonlu bir grup ve H , G nin bir alt grubu ise $|H|$, $|G|$ yi böler (Şenkon, 1993).

G sonlu bir grup ve H , G nin bir alt grubu ise H nin G içindeki birbirinden farklı sağ (ya da sol) kosetlerinin sayısına H nin G içindeki indeksi denir ve $|G:H|$ ile gösterilir.

$$|G:H| = \frac{|G|}{|H|} \tag{1.16}$$

dir.

1.8 Normal alt gruplar

Bir G grubunun bir N alt grubuna, $\forall g \in G$ için $g^{-1}Ng = N$ ise (burada $g^{-1}Ng = \{g^{-1}ng : n \in N\}$) G nin bir normal alt grubu denir. Diğer bir ifade ile her $g \in G$ için $gN = Ng$ ise N ye G nin bir normal alt grubu denir ve $N \triangleleft G$ yazılır. Şu halde $N \triangleleft G$ ise N ye göre tanımlanan sağ ve sol kosetler aynıdır.

$N \triangleleft G$ olsun. G nin N ye göre sağ kosetleri kümesi G/N ile gösterilir.

$g^{-1}Ng = N$ (Her $g \in G$ için) koşulunun önemi her $g, h \in G$ için

$$\{xy : x \in Ng \text{ ve } y \in Nh\} = Ngh \quad (1.17)$$

olduğunu göstermek içindir.

G/N de çarpma işlemi her $Ng, Nh \in G/N$ için (Her $g, h \in G$ için)

$$(Ng)(Nh) = Ngh \quad (1.18)$$

ile tanımlanır.

G/N kümesi tanımlanan çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. $N \triangleleft G$ ise G/N grubuna

G nin N ye göre bölüm grubu denir.

1.8.1 Teorem

Bir G grubunda indeksi 2 olan her alt grup normaldir (Şenkon, 1993).

İspat: G bir grup, $H \leq G$ ve $|G:H| = 2$ olsun. Bu taktirde iki tane sağ ve sol kosetler vardır. H , hem sağ hem de sol koset olarak düşünülebilir. $a \notin H$ için sol kosetler H, aH ve sağ kosetlerde H, Ha olur.

$$G = H \cup aH \quad (a \notin H) \text{ ise } aH = G - H$$

$$G = H \cup Ha \quad \text{ise } Ha = G - H$$

dır. Dolayısıyla $aH = Ha$ olur. Şu halde $H \triangleleft G$ dir.

1.8.2 Örnekler

1) G bir grup olmak üzere $\{1_G\}$ ve G , G nin normal alt gruplarıdır. Çünkü ;

$$\text{Her } a \in G \text{ için } a\{1_G\} = \{1_G\}a = \{a\} \text{ olduğundan } \{1_G\} \triangleleft G$$

Her $a \in G$ için $aG = Ga = G$ olduğundan $G \triangleleft G$ dir.

2) $A_n = \{g \in S_n : g \text{ çift permütasyon}\}$ alterne grubu S_n simetrik grubunun normal alt grubudur.

Çünkü ;

$$|S_n : A_n| = \frac{|S_n|}{|A_n|} = \frac{n!}{\frac{n!}{2}} = 2 \text{ olduğundan } A_n \triangleleft S_n \text{ dir. Dolayısıyla } S_n / A_n \text{ vardır.}$$

A_n in S_n içinde iki tane sol koseti vardır.

$S_n = A_n \cup s A_n$ ($s \in S_n - A_n$) yazılabilir.

O halde $S_n / A_n = \{A_n, s A_n\}$ dir. Ayrıca $S_n / A_n \cong C_2$ olur.

3) $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ ve $N = \langle a^2 \rangle = \{1, a^2\}$ olsun.

$$N = \{1, a^2\}, \quad Na = \{a, a^3\} = aN, \quad Nb = \{b, a^2b\} = bN$$

$$Nab = \{ab, a^3b\} = abN$$

Dolayısıyla her $g \in G$ için $Ng = gN$ olduğundan $N \triangleleft G$ dir ve G/N vardır.

$G/N = \{N, Na, Nb, Nab\}$ yazılabilir.

$$(Na)^2 = (Nb)^2 = (Nab)^2 = N \text{ olduğuna göre } G/N \cong C_2 \times C_2$$

1.9 Basit Gruplar

Bir G grubuna G ve $\{1\}$ den başka hiçbir normal alt grubu yoksa basit grup denir. Örneğin mertebesi asal olan grup basittir. $|G| = p$ (p asal sayı) ve H , G nin bir alt grubu olsun.

Lagrange teoremine göre $|H| / p$ olduğundan $|H| = 1$ veya p olabilir. Buradan $H = \{1\}$ ya da $H = G$ sonucu çıkar. Şu halde G nin G ve $\{1\}$ den başka hiçbir alt grubu yoktur. Dolayısıyla G ve $\{1\}$ den başka hiçbir normal alt grubu olamaz.

1.10 Çekirdek ve Görüntü

G ve H herhangi iki grup olsun. $\vartheta : G \rightarrow H$ bir homomorfizm ise

$$\text{Ker } \vartheta = \{g \in G : g\vartheta = 1\} \quad (1.17)$$

kümesine ϑ homomorfizminin çekirdeği denir.

$\text{Ker } \vartheta$, G nin bir normal alt grubudur.

Aynı zamanda ϑ nin görüntü kümesi

$$\text{İm } \vartheta = \{g\vartheta : g \in G\} \quad (1.18)$$

dır. $\text{İm } \vartheta$, H nin bir alt grubudur. Aşağıdaki teorem ϑ nin çekirdeği ile görüntüsü arasındaki ilişkiyi verir.

1.11 Teorem:

G ve H herhangi iki grup olsun. $\vartheta : G \rightarrow H$ fonksiyonu bir homomorfizm ise

$$G/\text{Ker } \vartheta \cong \text{İm } \vartheta$$

dir (Fraleigh, 1982).

1.11.1 Örnek

$$\vartheta : S_n \rightarrow C_2$$

$$\vartheta : g \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{eğer } g \text{ çift permütasyon ise} \\ -1, & \text{eğer } g \text{ tek permütasyon ise} \end{cases}$$

fonksiyonu bir homomorfizmdir.

$$\text{Ker } \vartheta = \{g \in S_n : g\vartheta = 1\} = \{g \in S_n : g \text{ çift permütasyon}\} = A_n \text{ ve}$$

$$n \geq 2 \text{ için } \text{İm } \vartheta = \{g\vartheta : g \in S_n\} = \{1, -1\} = C_2$$

Örnek 1.8.2 (2) ' de $S_n / A_n \cong C_2$ olduğu gösterildi. Bu teorem 1.11'e örnektir.

2. VEKTÖR UZAYLARI ve LİNEER TRANSFORMASYONLAR

Temsil teorisinin ilgi çekici bir özelliği de ana akım matematiğinin (adlandırmak gerekirse grup teorisi ve lineer cebir) iki kolunu birleştirmesidir. Referans amaçları için sonuçlar vektör uzaylarını , lineer transformasyonlarını ve daha sonra kullanacağımız matrisleri kapsayan lineer cebirden elde edilir. Bu nedenle lineer cebri kapsayan vektör uzayları, lineer transformasyonlar ve matrisler bu bölümde ele alındı.

2.1 Vektör Uzayları

F kümesi , R (gerçek sayılar kümesi) veya C (kompleks sayılar kümesi) olsun. V toplama ve skalerle çarpma kuralları ile boş olmayan bir küme olsun. Bu durumda herhangi bir $u, v \in V$ ye bir $u+v \in V$ toplamı ve herhangi bir $v \in V$ ve $\lambda \in F$ ye bir $\lambda v \in V$ çarpımı tekabül eder. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyor ise V ye F üzerinde tanımlı bir vektör uzayı denir.

a) V , toplama işlemine göre bir abel grubu ,

b) Her $u, v \in V$ ve $\lambda, \mu \in F$ için,

$$1) \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v,$$

$$2) (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v,$$

$$3) (\lambda \mu)v = \lambda(\mu v),$$

$$4) 1v = v. \quad (1 \in F \text{ birim skaleri}) \quad (2.1)$$

V nin elemanlarına vektörler, F nin elemanlarına skalerler denir. V abel grubunun toplama altında birim elemanı için 0 yazılır (Lipschutz, 1968).

2.1.1 Örnekler

1) R^2 , x ve y reel sayılar olmak üzere (x, y) çiftlerinin kümesini belirtsin.

R^2 , Her $(x, y), (x', y') \in R^2$ için

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

a) i) Her $(x, y), (x', y') \in R^2$ için $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \in R^2$

ii) Her $(x,y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x,y) + [(x', y') + (x'', y'')] = (x,y) + (x' + x'', y' + y'') = (x + (x' + x''), y + (y' + y'')) = ((x + x') + x'', (y + y') + y'') = (x + x', y + y') + (x'', y'') = [(x,y) + (x', y')] + (x'', y'')$$

($\mathbb{R}$ deki toplama işleminin birleşme özelliğinden)

iii) Her $(x,y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ için $(x,y) + (x', y') = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = (x', y') + (x,y)$

($\mathbb{R}$ deki toplama işleminin değişme özelliğinden)

iv) Her $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $\exists (0,0) \in \mathbb{R}^2 \ni (x,y) + (0,0) = (x,y)$ dir. O halde $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ birim elemandır.

v) Her $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $\exists (x,y)^{-1} \ni (x,y) + (x,y)^{-1} = (0,0) \Rightarrow (x,y)^{-1} = (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$

Şu halde $\mathbb{R}^2$, bir abel grubudur.

b) Her $(x,y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda((x,y) + (x', y')) = \lambda(x + x', y + y') = (\lambda(x + x'), \lambda(y + y')) = (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y') = (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y') = \lambda(x,y) + \lambda(x', y')$$

($\mathbb{R}$ deki çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliğinden)

$$\begin{aligned} \text{ii) } (\lambda + \mu)(x,y) &= ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y) = (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y) \\ &= \lambda(x,y) + \mu(x,y) \end{aligned}$$

($\mathbb{R}$ deki çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğinden)

$$\text{iii) } (\lambda \mu)(x,y) = ((\lambda \mu)x, (\lambda \mu)y) = (\lambda(\mu x), \lambda(\mu y)) = \lambda(\mu x, \mu y) = \lambda(\mu(x,y))$$

($\mathbb{R}$ deki çarpma işleminin birleşme özelliğinden)

$$\text{iv) Her } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } 1(x,y) = (1.x, 1.y) = (x,y)$$

O halde $\mathbb{R}^2$, bir vektör uzayıdır.

2) Daha genel olarak, her bir n pozitif tamsayısı için $(x_1, \dots, x_n)$ satır vektörlerini düşünelim.

$(x_1, \dots, x_n \in F^n$ e aittir.) Buna benzer tüm satır vektörlerinin kümesi F^n ile ifade edilir ve F^n

üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri şu şekilde tanımlanır.

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$$

$$\lambda (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

F^n , F üzerinde bir vektör uzayıdır (Zeren, 1997).

2.2 Baz ve Boyut

V , F üzerinde tanımlı bir vektör uzayı ve $v_1, \dots, v_n \in V$ vektör uzayında vektörler olsun.

V içinde herhangi bir v vektörü

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad (2.2)$$

şeklinde $v_1, \dots, v_n$ nin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Burada $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ dir.

Eğer V deki her vektör, $v_1, \dots, v_n$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilirse

$v_1, \dots, v_n$ vektörlerine $\text{Span}V$ adı verilir.

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ skalerleri bulunabiliyorsa $v_1, \dots, v_n \in V$ vektörlerine lineer bağımlı aksi takdirde bu vektörlere lineer bağımsızdır denir. $v_1, \dots, v_n \in V$ vektörleri lineer bağımsızsa ve $\text{Span}V$ ise V nin bir bazını oluşturur (Right ve Axler, 1996).

Bu çalışmada sadece sonlu boyutlu olan V vektör uzayları ele alındı. Bunun anlamı yukarıda da söylendiği gibi V sonlu birçok vektörden oluşan bir baza sahiptir. V nin herhangi iki bazı aynı sayıda vektörlere sahiptir. V nin bir bazındaki vektör sayısı V nin boyutu olarak adlandırılır ve $\dim V$ olarak yazılır. Eğer $V = \{0\}$ ise $\dim V = 0$ dır.

$v_1, \dots, v_n$ vektörleri V nin bir bazı ise V ye n -boyutlu bir vektör uzayı denir ve $\dim V = n$ yazılır.

2.2.1 Örnek

$V = F^n$ vektör uzayını düşünelim. $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, 0, \dots, 1)$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Çünkü $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ olmak üzere $\lambda_1 (1, 0, 0, \dots, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_n (0, 0, 0, \dots, 1) = 0$

toplamında $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bulunur. Ayrıca F^n deki her vektör $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $\dots, (0,0,0,\dots,1)$ in lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. O halde $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $(0,0,0,\dots,1)$ vektörleri V nin bir bazını oluşturur. Dolayısıyla $\dim V = n$ olur. Diğer bir baz ise $(1,0,\dots,0)$, $(1,1,\dots,0)$, $\dots$, $(1,1,\dots,1)$ dir.

Bir V vektör uzayının $v_1, \dots, v_n$ bazı verildiğinde V deki her bir v vektörü $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F)$ olacak şekilde tek türlü yazılır. Böylece v vektörü $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalerlerini belirler. $V = \{0\}$ olduğu durum dışında, V nin birçok bazı vardır. Gerçekten de, bir sonraki sonuç herhangi lineer bağımsız vektörlerin bir baza yayılabilir olduğunu belirtir.

2.2.2 Sonuç

Eğer $v_1, \dots, v_k$ vektörleri V de lineer bağımsız ise $v_1, \dots, v_n$ V nin bir bazını oluşturacak şekilde $v_{k+1}, \dots, v_n$ vektörleri bulunur.

2.3 Alt Uzaylar

U , F üzerinde tanımlı bir V vektör uzayının alt kümesi olsun. Eğer U nun kendisi, V deki skalerle çarpım ve vektör toplamı işlemlerine göre, F üzerinde bir vektör uzayı ise U , V nin bir alt uzayı olarak adlandırılır. Alt uzayları belirlemek için basit kriterler aşağıdaki şekildedir.

U , V nin ancak ve ancak aşağıdaki koşullar sağlanırsa bir alt uzayıdır:

- 1) $0 \in U$
 - 2) $u, v \in U$ için $u+v \in U$
 - 3) $\lambda \in F$ ve $u \in U$ için $\lambda u \in U$
- (2.3)

2.3.1 Örnekler

1) V herhangi bir vektör uzayı olsun. Sadece $\{0\}$ sıfır vektörden meydana gelen küme ve V uzayının tümü V nin alt uzaylarıdır.

2) $u_1, \dots, u_r$ V de vektörler olsun. $\text{sp}(u_1, \dots, u_r)$ $u_1, \dots, u_r$ nin tüm lineer kombinasyonları kümesi olarak tanımlanır. Yani

$$\text{sp}(u_1, \dots, u_r) = \{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in F \} \quad (2.4)$$

dir (Right ve Axler, 1996) .

(2.3)'den $\text{sp}(u_1, \dots, u_r)$ V nin bir alt uzayıdır. Buna $u_1, \dots, u_r$ nin gerdiği alt uzay adı verilir.

3) $V = \mathbb{R}^3$ olsun. V bir vektör uzayıdır. $W = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ alt kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayıdır. Şöyle ki :

i) $0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ dür. W nin verilişinden $0 = (0, 0, 0) \in W$ olur.

ii) $u = (a, b, 0) \in W$, $v = (c, d, 0) \in W$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) için,

$$u + v = (a, b, 0) + (c, d, 0) = (a + c, b + d, 0)$$

$a + c \in \mathbb{R}$, $b + d \in \mathbb{R}$ olduğundan $u + v \in W$

iii) $\lambda \in F$ ve $u = (a, b, 0) \in W$ için,

$$\lambda u = \lambda (a, b, 0) = (\lambda a, \lambda b, 0)$$

$\lambda a \in \mathbb{R}$, $\lambda b \in \mathbb{R}$ olduğundan $\lambda u \in W$ dir.

O halde W , V nin bir alt uzayıdır (Zeren, 1997).

2.3.2 Not

U , V vektör uzayının bir alt uzayı ise $\dim U \leq \dim V$ dir.

Ancak ve ancak $U = V$ olduğunda $\dim U = \dim V$ olur.

2.4 Alt Uzayların Direkt Toplamı

Bir V vektör uzayının alt uzayları $U_1, \dots, U_r$ olsun.

$$U_1 + \dots + U_r = \{u_1 + \dots + u_r : u_i \in U_i, 1 \leq i \leq r\} \quad (2.5)$$

kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

$U_1 + \dots + U_r$ toplamına , eğer toplamdaki her eleman $u_1 + \dots + u_r$ ($1 \leq i \leq r$, $u_i \in U_i$) gibi tek türlü olarak yazılabilirse direkt toplam denir ve

$$U_1 \oplus \dots \oplus U_r \quad (2.6)$$

şeklinde gösterilir.

2.4.1 Tanım

$u \in U$ ve $w \in W$ için bir $v \in V$ vektörü sade ve sadece $v = u + w$ şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa

V vektör uzayına U ve W alt uzaylarının direkt toplamı denir ve $V = U \oplus W$ şeklinde gösterilir.

2.4.2 Örnekler

1) $v_1, \dots, v_n$ V nin bazı ve $1 \leq i \leq n$ için U_i, v_i tarafından gerilen alt uzay olsun.

O halde $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ dir.

2) U, V nin bir alt uzayı ve $v_1, \dots, v_k$ U nun bir bazı olsun. $v_1, \dots, v_k$ yı V nin $v_1, \dots, v_n$ bazına yayalım. $W = \text{sp}(v_{k+1}, \dots, v_n)$ olduğunu farzedelim. Buradan $V = U \oplus W$ olur.

Dolayısıyla $V = U \oplus W$ olacak şekilde sonuz sayıda W alt uzayı vardır.

3) $V = U + W$, $u_1, \dots, u_r$ U nun bir bazı, $w_1, \dots, w_s$ W nin bir bazı ise aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir.

(1) $V = U \oplus W$

(2) $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$ V nin bir bazıdır.

(3) $U \cap W = \{0\}$

4) U ve W, V nin alt uzayları olsun. $V = U \oplus W$ yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul $V = U + W$ ve $U \cap W = \{0\}$ olmasıdır.

İspat: İlk olarak $V = U \oplus W$ olsun. Herhangi bir $v \in V$ vektörü, $u \in U$ ve $w \in W$ için $v = u + w$ şeklinde tek türlü yazılabildiğinden $V = U + W$ olur.

Şimdi $v_1 \in U \cap W$ olsun.

$v_1 \in U$ ve $v_1 \in W$ dir. Öte yandan U ve W, V nin alt uzayları olduğundan $0 \in U, 0 \in W$ dir.

$v_1 = 0 + v_1, v_1 = v_1 + 0$ yazılabilir. v_1 in yazılışı tek türlü olacağından bir çelişkiden ancak $v_1 = 0$ almakla çıkılabilir. Dolayısıyla $U \cap W = \{0\}$ olur.

Diğer yandan, $V = U + W$ ve $U \cap W = \{0\}$ olsun. Herhangi bir $v \in V$ vektörü $V = U + W$ olduğundan $v = u + w$ ($u \in U, w \in W$) şeklinde yazılabilir. Şimdi bu yazılışın tek türlü olduğunu göstermeliyiz. $v \in V$ vektörünün ikinci bir yazılışı yani $v = u' + w'$; $u' \in U, w' \in W$ var olsun.

$u+w = u' + w'$ olduğundan $u - u' = w' - w$ olur . O halde $u - u' = w' - w \in U \cap W$ dir. $U \cap W = \{0\}$ olduğundan $u - u' = w' - w = 0$ dır.

$$u - u' = 0 \Rightarrow u = u' \quad , \quad w' - w = 0 \Rightarrow w' = w$$

Dolayısıyla yazılış tek türdür ve $V = U \oplus W$ dir.

5) R^3 uzayının U ve W alt uzayları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$U = \{(a, b, c) : a=b=c\} \text{ ve } W = \{(0, b, c)\}$$

$R^3 = U \oplus W$ dir . Şöyle ki :

$U \cap W = \{0\}$ dır. Çünkü $v = (a, b, c) \in U \cap W$ ise $a = b = c$ ve $a = 0$ dan $a = b = c = 0$ olur. Yani $v = (0, 0, 0)$ bulunur.

Aynı zamanda $R^3 = U + W$ dir. $v = (a, b, c) \in R^3$ vektörü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$v = (a, a, a) + (0, b-a, c-a)$$

Bu toplamda $(a, a, a) \in U$ ve $(0, b-a, c-a) \in W$ dir.

Bütün koşullar sağlandığına göre $R^3 = U \oplus W$ olur.

2.5 Lineer Dönüşümler

F kümesinde tanımlı iki vektör uzayı V ve W olsun. $\vartheta : V \rightarrow W$ fonksiyonuna aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa lineer dönüşüm (lineer transformasyon) adı verilir.

$$1) (u+v) \vartheta = u \vartheta + v \vartheta \quad (\text{Her } u, v \in V \text{ için})$$

$$2) (\lambda v) \vartheta = \lambda (v \vartheta) \quad (\text{Her } \lambda \in F \text{ ve } v \in V \text{ için})$$

Diğer bir ifade ile $\vartheta : V \rightarrow W$ fonksiyonu , bir vektör uzayının iki esas işlemi olan vektör toplamı ile skalerle çarpım işlemlerini koruyorsa lineerdir.

$\vartheta : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm , $v_1, \dots, v_n$ V nin bir bazı ise $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ için

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \vartheta = \lambda_1 (v_1 \vartheta) + \dots + \lambda_n (v_n \vartheta) \text{ dir.}$$

V nin herhangi bir $v_1, \dots, v_n$ bazı ve W de herhangi $w_1, \dots, w_n$ vektörleri verildiğinde tüm i ler için $v_i \vartheta = w_i$ olacak şekilde tek türlü belirli bir $\phi : V \rightarrow W$ lineer dönüşümü vardır ve ϕ

lineer dönüşümü

$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)\phi = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ ile verilir.

2.6 Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntüsü

$\vartheta: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. $\text{Im } \vartheta$ şeklinde yazılan ϑ nin görüntüsü W içindeki görüntü noktalarının kümesidir.

$$\text{Im } \vartheta = \{v\vartheta : v \in V\} \quad (2.7)$$

$\text{Ker } \vartheta$ şeklinde yazılan ϑ nin çekirdeği, görüntüsü $0 \in W$ olan V deki elemanların kümesi olarak tanımlanır.

$$\text{Ker } \vartheta = \{v \in V : v\vartheta = 0\} \quad (2.8)$$

(2.3) kullanılarak $\text{Ker } \vartheta$ nin V nin bir alt uzayı olduğu kolaylıkla anlaşılabılır. Şöyle ki

$0\vartheta = 0$ olduğundan $0 \in \text{Ker } \vartheta$ dir. $u, w \in \text{Ker } \vartheta$ olsun. Bu durumda $u\vartheta = 0$, $w\vartheta = 0$ dır.

$$(u+w)\vartheta = u\vartheta + w\vartheta = 0+0=0 \Rightarrow u+w \in \text{Ker } \vartheta$$

$$\lambda \in F \text{ ve } v \in \text{Ker } \vartheta \text{ için } (\lambda v)\vartheta = \lambda(v\vartheta) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in \text{Ker } \vartheta$$

Bütün alt uzay olma koşulları sağlandığına göre $\text{Ker } \vartheta$, V nin bir alt uzayı olur.

$\text{Im } \vartheta$, W nin bir alt uzayıdır. İspatı benzer şekildedir.

Bunların boyutları Rank-Nullity Teoremi olarak bilinen aşağıdaki denklem ile verilir.

$$\dim V = \dim(\text{Ker } \vartheta) + \dim(\text{Im } \vartheta) \quad (2.9)$$

2.6.1 Örnekler

1) $\vartheta: V \rightarrow W$ fonksiyonu her $v \in V$ ler için $v\vartheta = 0$ ile tanımlansın. ϑ bir lineer dönüşümdür

Çünkü $u, v \in V$, $\lambda \in F$ için

$$(u+v)\vartheta = 0 = 0+0 = u\vartheta + v\vartheta$$

$$(\lambda v)\vartheta = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda(v\vartheta)$$

$$\text{Ker } \vartheta = \{v \in V : v\vartheta = 0\} = V, \quad \text{Im } \vartheta = \{0\} \text{ olur.}$$

2) $\vartheta: V \rightarrow V$ fonksiyonu her $v \in V$ ler için $v\vartheta = 3v$ ile tanımlansın. ϑ bir lineer dönüşümdür ve

$$\text{Ker } \vartheta = \{0\}, \quad \text{İm } \vartheta = V \text{ dir.}$$

$$3) \quad \vartheta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \vartheta = (x+2y+z, -y+3z) \quad (\text{Her } x, y, z \in \mathbb{R})$$

fonksiyonu verilsin. ϑ bir lineer dönüşümdür.

$$\begin{aligned} \text{Ker } \vartheta &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \vartheta = (0, 0)\} \\ &= \{(x+2y+z, -y+3z) = (0, 0)\} \\ &= \{x = -7z, y = 3z, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-7z, 3z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{Sp}((-7, 3, 1)) \end{aligned}$$

$$\text{İm } \vartheta = \mathbb{R}^2$$

$$\dim(\text{Ker } \vartheta) = 1, \quad \dim(\text{İm } \vartheta) = 2 \text{ dir.}$$

2.7 Tersinir Lineer Dönüşümler

F de tanımlı iki vektör uzayı V ve W olsun. $\vartheta: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü $\text{Ker } \vartheta = \{0\}$ ise injektif (bire-bir) dir. ϑ kesinlikle surjektif (üzerine) ve $\text{Ker } \vartheta = \{0\}$ olduğunda tersinirdir. Bir lineer dönüşümün tersi de bir lineer dönüşümdür. Eğer V den W ye bir tersinir dönüşüm varsa V ve W ye izomorfik vektör uzayları denir.

$\vartheta: V \rightarrow V$ lineer dönüşümü için aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir.

1) ϑ , ters çevrilebilirdir

$$2) \quad \text{Ker } \vartheta = \{0\}$$

$$3) \quad \text{İm } \vartheta = V \quad (2.10)$$

2.8 Endomorfizm

Bir V vektör uzayından kendisine bir lineer dönüşüm V nin bir endomorfizmi olarak adlandırılır.

ϑ ve ϕ V nin endomorfizmleri ve $\lambda \in F$ olsun. V den V ye $\vartheta + \phi$, $\vartheta \phi$ ve $\lambda \vartheta$ fonksiyonları şu şekilde tanımlanır. (Her $v \in V$ ler için)

$$v(\vartheta + \phi) = v\vartheta + v\phi$$

$$v(\vartheta \phi) = (v\vartheta)\phi$$

$$v(\lambda \vartheta) = \lambda (v\vartheta)$$

$\vartheta + \phi$, $\vartheta \phi$ ve $\lambda \vartheta$ fonksiyonları da V nin endomorfizmleridir.

$\vartheta \vartheta$ için ϑ^2 yazılır.

2.8.1 Örnekler

1) $1_V: v \rightarrow v$ ($\forall v \in V$) birim fonksiyonu V nin bir endomorfizmidir. Eğer ϑ V nin bir endomorfizmi ise tüm $\lambda \in F$ ler için $\vartheta - \lambda 1_V$ de V nin endomorfizmidir.

$\text{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) = \{v \in V: v\vartheta = \lambda v\}$ dir. Şöyle ki:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) &= \{v \in V: v(\vartheta - \lambda 1_V) = 0\} = \{v \in V: v\vartheta - v(\lambda 1_V) = 0\} = \{v \in V: v\vartheta - \lambda(v 1_V) = 0\} = \\ &= \{v \in V: v\vartheta - \lambda v = 0\} = \{v \in V: v\vartheta = \lambda v\} \end{aligned}$$

2) $V = \mathbb{R}^2$, $\vartheta: V \rightarrow V$ ve $\phi: V \rightarrow V$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(x, y) \vartheta = (x + y, x - 2y)$$

$$(x, y) \phi = (x - 2y, -2x + 4y)$$

ϑ ve ϕ , V nin endomorfizmleridir. $\vartheta + \phi$, $\vartheta \phi$, 3ϑ ve ϑ^2 fonksiyonları aşağıdaki şekildedir.

$$(x, y)(\vartheta + \phi) = (2x - y, -x + 2y)$$

$$(x, y)(\vartheta \phi) = (-x + 5y, 2x - 10y)$$

$$(x, y)(3\vartheta) = (3x + 3y, 3x - 6y)$$

$$(x, y)\vartheta^2 = (2x - y, -x + 5y)$$

2.9 Matrisler

V , F üzerinde bir vektör uzayı ve ϑ , V nin bir endomorfizmi olsun. V vektör uzayının $\{v_1, \dots, v_n\}$ bazı B ile gösterilir. $v_1 \vartheta, \dots, v_n \vartheta$ ler V içinde vektörlerdir ve her biri $\{v_1, \dots, v_n\}$

bazının elemanlarının bir lineer kombinasyonudur.

$$v_i \vartheta = a_{i1} v_1 + \dots + a_{in} v_n \text{ olacak şekilde } a_{ij} \in F (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$$

skalerleri vardır. n -kare (a_{ij}) matrisine B bazına göre ϑ nin matris gösterimi veya daha basit olarak B bazı içinde ϑ nin matrisi denir ve $[\vartheta]_B$ ile gösterilir.

2.9.1 Örnekler

1) $\vartheta = 1_V$ (yani $\forall v \in V$ için $v\vartheta = v$) ise V nin bütün B bazları için $[\vartheta]_B = I_n$ dir. I_n $n \times n$ lik birim matristir.

2) $V = \mathbb{R}^2$ olsun. $\vartheta, (x, y) \rightarrow (x+y, x-2y)$ şeklinde tanımlanan V nin bir endomorfizmi olsun.

B, V nin $(1,0), (0,1)$ bazı ve B' de V nin $(1,0), (1,1)$ bazı olsun.

B bazına göre ϑ nin matris gösterimini bulalım.

$$(1,0) \vartheta = a_{11}(1,0) + a_{12}(0,1)$$

$$(1,1) = (a_{11}, a_{12}) \Rightarrow a_{11} = a_{12} = 1$$

$$(0,1) \vartheta = a_{21}(1,0) + a_{22}(0,1)$$

$$(1,-2) = (a_{21}, a_{22}) \Rightarrow a_{21} = 1, a_{22} = -2$$

$$[\vartheta]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Benzer şekilde $[\vartheta]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ bulunur.

Eğer A matrisinin elemanları F kümesine aitse A ya F de tanımlı matris adı verilir.

A nın i . satır j . sütunundaki a_{ij} elemanına A matrisinin genel elemanı denir ve $A = (a_{ij})$ ile gösterilir.

F üzerinde iki $m \times n$ lik matrisler $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ olsun. $A+B$ tüm i, j ler için ij . elemanı $a_{ij} + b_{ij}$ olan F üzerinde $m \times n$ lik matristir. A matrisinin bir $\lambda \in F$ skaleriyle çarpımı olan λA matrisi A nın her elemanının λ ile çarpılmasından elde edilen matristir. Bir $m \times n$ lik $A = (a_{ij})$

matrisi ve $n \times p$ lik $B=(b_{ij})$ matrisi verildiğinde $m \times p$ lik AB çarpım matrisinin ij . elemanı

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \text{ şeklindedir.}$$

2.9.2 Örnek

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ matrisleri veriliyor.}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3A=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad AB=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -13 \end{pmatrix}, \quad BA=\begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

B , V vektör uzayının bir bazı, V nin endomorfizmleri ϑ ve ϕ olsun. $\vartheta + \phi$ ve $\vartheta \phi$ nin B bazına göre matrisleri şu şekildedir :

$$[\vartheta + \phi]_B = [\vartheta]_B + [\phi]_B$$

$$[\vartheta \phi]_B = [\vartheta]_B [\phi]_B$$

Tüm λ skalerleri için

$$[\lambda \vartheta]_B = \lambda [\vartheta]_B \quad (2.12)$$

V vektör uzayının bir bazı verildiğinde V nin bir endomorfizminden nasıl bir matris elde edildiği gösterildi . Şimdi ise matris kullanarak bir endomorfizm tanımlayalım .

A , F üzerinde bir $n \times n$ lik matris olsun. V vektör uzayı $V=F^n$ şeklinde tanımlansın. Yani V vektör uzayı $x_i \in F$ ($i=1, \dots, n$) olmak üzere $(x_1, \dots, x_n)$ vektörlerinden oluşsun.

Her $v \in V$ ler için vA matris çarpımı da V vektör uzayına aittir. Böylece V den V ye

$$v \rightarrow vA \quad (v \in F^n) \quad (2.13)$$

fonksiyonu tanımlanabilir.

Bu fonksiyon F^n nin bir endomorfizmdir.

2.9.3 Örnek

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

A matrisi kullanılarak F^2 nin yukarıdaki gibi bir endomorfizmi bulunabilir.

$$(x,y) \vartheta = (x,y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (x+3y, -x+2y)$$

2.10 Ters Çevrilebilir Matrisler

Eğer $AB=BA=I_n$ eşitliğini sağlayan bir B , $n \times n$ lik matrisi bulunabiliyorsa A $n \times n$ matrisine ters çevrilebilir matris denir veya A nın tersi vardır denir. Böyle bir B matrisi varsa tek türlü belirlidir. Buna A matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir.

A matrisinin determinantı $\det A$ şeklinde yazılır. Bir A matrisinin tersinin olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\det A \neq 0$ olmasıdır.

Ters çevrilebilir endomorfizmler ve ters çevrilebilir matrisler arasındaki bağlantı apaçıktır. Şöyle ki:

V nin bir B bazı verildiğinde, V nin bir ϑ endomorfizmi ancak ve ancak $[\vartheta]_B$ matrisi ters çevrilebilirse ters çevrilebilirdir.

Ters çevrilebilir matrisler iki vektör uzayının bazlarını ilişkilendirdiğimizde ortaya çıkar. Ters çevrilebilir bir matris bir bazı diğerine dönüştürür ve bu aynı matris bir endomorfizma matrisinin baza bağlı olma yöntemini tanımlamak için kullanılır. Bu yorumların kesin anlamı aşağıdaki tanımda ve sonuçta verilmiştir.

2.11 Tanım

$v_1, \dots, v_n$ V vektör uzayının bir B bazı, $v'_1, \dots, v'_n$ ise B' bazı olsun. t_{ij} skalerleri için $(1 \leq i \leq n)$

$$v'_i = t_{i1} v_1 + \dots + t_{in} v_n \quad (2.14)$$

ise $T = (t_{ij})$ $n \times n$ katsayılar matrisi ters çevrilebilirdir ve bu matrise B bazından B' bazına geçiş matrisi denir (Lipschutz , 1968).

2.12 Sonuç

Eğer B ve B' V nin bazları ve ϑ , V nin bir endomorfizmi ise

$$[\vartheta]_{B'} = T^{-1} [\vartheta]_B T \quad (2.15)$$

olur. Burada T , B bazından B' ye geçiş matrisidir.

2.12.1 Örnek

$V = \mathbb{R}^2$ alınsın. B , V nin $(1,0)$, $(0,1)$ bazı ve B' V nin $(1,0)$, $(1,1)$ bazı olsun. B bazından B' bazına geçiş matrisi şu şekilde elde edilir :

$$(1,0) = t_{11}(1,0) + t_{12}(0,1) \Rightarrow t_{11}=1, t_{12}=0$$

$$(1,1) = t_{21}(1,0) + t_{22}(0,1) \Rightarrow t_{21}=1, t_{22}=1$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$\vartheta : (x,y) \rightarrow (x+y, x-2y)$ V nin bir endomorfizmi ise

$$[\vartheta]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1} [\vartheta]_{B'} T$$

olur.

2.13 Öz değerler ve Öz vektörler

V , F üzerinde bir n -boyutlu vektör uzayı ve ϑ lineer dönüşümü V nin bir endomorfizmi olsun. Eğer $\vartheta v = \lambda v$ olacak şekilde sıfırdan farklı, $v \in V$ vektörü varsa λ skalerine ϑ operatörünün öz değeri denir. Böyle bir v vektörüne ϑ nin öz vektörü adı verilir. λ , sadece $\vartheta - \lambda 1_V$ ters çevrilebilir olmadığında ($\text{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) \neq \{0\}$ durumunda) ϑ nin bir öz değeri dir. Bundan dolayı eğer B , V nin bir bazı ise ϑ tasvirinin öz değerleri

$$\det([\vartheta]_B - \lambda I_n) = 0 \quad (2.16)$$

denklemini sağlayan F ye ait λ skalerleridir. Bu problemin çözümünde n . dereceden polinomların köklerinin bulunması da rol oynar. Katsayıları C de olan her sabit olmayan polinom, C de bir köke sahiptir ve aşağıdaki sonuç çıkar.

V , C üzerinde sıfırdan farklı bir vektör uzayı ve ϑ V nin bir endomorfizmi olsun. Öyleyse ϑ bir öz değere sahiptir. (2.17)

2.13.1 Örnekler

1) $V = C^2$ olsun. ϑ tasviri V nin bir endomorfizmi olsun ve aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(x,y) \vartheta = (-y,x)$$

$$B, V \text{ nin } (1,0), (0,1) \text{ bazı ise } [\vartheta]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

$$\text{Det}([\vartheta]_B - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$$

$\lambda^2 + 1 = 0$ dan $-i$ ve i ϑ nin öz değeri olur. Bunlara karşılık gelen öz vektörleri bulalım. $(x,y) \vartheta = i(x,y)$ den $(-y,x) = (ix, iy)$ dir. Buradan $y = -ix$, $x = iy$ olur. $x=1$ alırsa $y = -i$ olur. $(1, -i)$, i nin öz vektörüdür.

$(x,y) \vartheta = -i(x,y)$ den $(-y,x) = (-ix, -iy)$ dir. Buradan $y = ix$, $x = -iy$ olur. $x=1$ alırsa $y = i$ olur. $(1, i)$, $-i$ nin öz vektörüdür.

2) $V = \mathbb{R}^2$ olsun. ϑ endomorfizmi $(x,y) \vartheta = (-y,x)$ şeklinde verilsin. $V, \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır ve $\vartheta, \mathbb{R}$ de hiç öz değere sahip değildir. Çünkü $\lambda^2 + 1$ denkleminin $\mathbb{R}$ de çözümü yoktur.

A, F de tanımlı bir n -kare matris ise A nın öz değeri sıfırdan farklı $v \in F^n$ vektörü için $vA = \lambda v$ koşulunu sağlayan λ değeridir. Bu durumda v, A nın λ ya karşı gelen öz vektörüdür. A matrisinin öz değeri $\det(A - \lambda I_n) = 0$ denklemini sağlayan $\lambda \in F$ değerleridir.

2.13.2 Örnek

Bir $A = (a_{ij})$ kare matrisine, tüm $i \neq j$ koşulunu sağlayan i, j ler için $a_{ij} = 0$ ise köşegen matris denir. Köşegen matris şu şekilde belirtilir.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Burada $1 \leq i \leq n$ için $a_{ii} = \lambda_i$ dir. Bu A köşegen matrisinin öz değeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalerleridir.

2.14 Yansımalar

V vektör uzayı U ve W alt uzaylarının direkt toplamı olsun. $V = U \oplus W$ vektör uzayının yansımalarını tanımlamadan önce V nin özel bir endomorfizmi tanımlanmalıdır. Bu endomorfizm bir önerme ile şu şekilde tanımlanır.

2.14.1 Önerme

$V=U \oplus W$ olsun. Her $u \in U$, $w \in W$ için

$$\pi: V \rightarrow V$$

$$(u+w)\pi = u$$

fonksiyonu tanımlansın.

π , V nin bir endomorfizmidir. Üstelik $\text{Im } \pi = U$, $\text{Ker } \pi = W$ ve $\pi^2 = \pi$ dir.

İspat : V deki her bir vektör $u \in U$, $w \in W$ için $u+w$ formunda tek bir ifadeye sahiptir. Bunu π nin V de bir fonksiyon olduğu gerçeği takip eder.

v ve v' V ye ait olsun. Bazı $u, u' \in U$, $w, w' \in W$ için $v = u+w$ ve $v' = u' + w'$ olur.

$$(v + v')\pi = (u + u' + w + w')\pi = u + u'$$

$$= (u+w)\pi + (u' + w')\pi$$

$$= v\pi + v'\pi$$

$$\lambda \in F \text{ için } (\lambda v)\pi = (\lambda u + \lambda w)\pi = \lambda u = \lambda(v\pi)$$

O halde , π V nin bir endomorfizmidir.

$\text{Im } \pi \subseteq U$ olduğu açıktır. Ters kapsama için ; $\forall u \in U$ için $u\pi = u$ olduğundan $U \subseteq \text{Im } \pi$ dir. Dolayısıyla $\text{Im } \pi = U$ olur.

$(u+w)\pi = 0 \Leftrightarrow u=0 \Leftrightarrow u+w \in W$ dir. Buradan $\text{Ker } \pi = W$ bulunur.

Son olarak $(u+w)\pi^2 = u\pi = u = (u+w)\pi$ ve $\pi^2 = \pi$ olur.

2.14.2 Tanım

$\pi^2 = \pi$ yi sağlayan V vektör uzayının π endomorfizmine V nin yansıması denir.

2.14.3 Örnek

R^2 nin $(x,y) \rightarrow (2x+2y, -x-y)$ endomorfizmi bir yansımadır. Çünkü ;

$$(x,y)\pi^2 = (2x+2y, -x-y)\pi = (2(2x+2y)+2(-x-y), -2x-2y+x+y) = (2x+2y, -x-y) = (x,y)\pi$$

dir.

2.14.4 Önerme

π , V vektör uzayının bir yansıması olsun. Öyleyse $V = \text{İm } \pi \oplus \text{Ker } \pi$ dir.

İspat : $v \in V$ için $v = v\pi + (v - v\pi)$ yazılabilir. $v\pi$ terimi $\text{İm } \pi$ ye aittir.

$(v - v\pi)\pi = v\pi - v\pi^2 = v\pi - v\pi = 0$ olduğundan $v - v\pi$, $\text{Ker } \pi$ ye aittir.

Bu $V = \text{İm } \pi + \text{Ker } \pi$ yi kurar.

Şimdi $v \in \text{İm } \pi \cap \text{Ker } \pi$ olsun.

$v \in \text{İm } \pi$ olduğundan $v = u\pi$ olacak şekilde $u \in V$ vardır. Buradan $v\pi = u\pi^2 = u\pi = v$ bulunur.

$v \in \text{Ker } \pi$ olduğundan $v\pi = v = 0$ dır. Böylece $\text{İm } \pi \cap \text{Ker } \pi = \{0\}$ olur. Bu ise

$V = \text{İm } \pi \oplus \text{Ker } \pi$ olduğunu gösterir.

2.14.5 Örnek

$\pi : (x, y) \rightarrow (2x + 2y, -x - y)$ endomorfizminin $\mathbb{R}^2$ nin bir yansıması olduğu örnek 2.14.3'te gösterildi.

$\text{İm } \pi = \{(2x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, $\text{Ker } \pi = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ dir.

$$\begin{aligned} \text{Ker } \pi &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\pi = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x + 2y, -x - y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 2y = 0, -x - y = 0\} = \{y = -x : x \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

3. GRUP TEMSİLLERİ

Bir G grubunun temsili G yi bir matrisler grubu olarak görmemize yol açar. Bir temsil , G den bir ters çevrilebilir matrisler grubuna bir homomorfizmdir. Bu bölümde temsillere örnekler verilerek temsillerin denkliği ve bir temsilin çekirdeği kavramları anlatıldı.

G bir grup ve F kümesi R veya C olsun. Birinci bölümde bahsedildiği gibi $GL(n,F)$, elemanları F kümesinden alınan $n \times n$ ters çevrilebilir matrisleri ifade eder.

3.1 Tanım

F de tanımlı G grubunun bir temsili , bazı n ler için G den $GL(n,F)$ ye bir ρ homomorfizmdir. ρ nin derecesi n tamsayıdır (James ve Liebeck, 1993).

G den $GL(n,F)$ ye tanımlı ρ fonksiyonu ancak ve ancak her $g,h \in G$ için $(gh)\rho = (g\rho)(h\rho)$ eşitliğini sağladığında bir temsil olur. Bir temsil aynı zamanda homomorfizm olduğundan Her $\rho : G \rightarrow GL(n,F)$ temsili için $1\rho = I_n$ ve $g^{-1}\rho = (g\rho)^{-1}$ (Her $g \in G$ için)

dir.

Burada I_n $n \times n$ birim matristir.

3.1.1 Örnekler

1) $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun.

A ve B matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^4 = B^2 = I$, $B^{-1}AB = A^{-1}$ sağlanır.

$\rho : G \rightarrow GL(2,F)$ fonksiyonu

$$a^i b^j \rightarrow A^i B^j \quad (0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1)$$

şeklinde tanımlansın. Her $g \in G$ için $g\rho$ matrisleri çizelge 3.1’de verilmiştir.

ρ nin derecesi 2 dir.

Çizelge3.1 $g \in D_8$ için $g\rho$ matrisleri

g	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Örneğin $a, b \in D_8$ için

$$(ab)\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (a\rho)(b\rho)$$

D_8 in bütün elemanları için ρ fonksiyonu işlemi korur. Şu halde ρ fonksiyonu D_8 in bir temsili olur.

2) G bir grup olsun. $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ fonksiyonu $g\rho = I_n$ (Her $g \in G$ için) (I_n , $n \times n$ birim matris) ile tanımlansın.

$$\text{Her } g, h \in G \text{ için } (gh)\rho = I_n = I_n \cdot I_n = (g\rho)(h\rho)$$

olduğundan ρ , G nin bir temsidir.

3) G m. mertebeden bir devresel grup olsun. $G = \langle a : a^m = 1 \rangle$. $A \in GL(n, C)$ için

$$\rho : a^r \rightarrow A^r \quad (0 \leq r \leq m-1) \text{ ile } \rho : G \rightarrow GL(n, C) \text{ fonksiyonu tanımlansın.}$$

Ancak ve ancak $A^m = I$ olduğunda ρ fonksiyonu G nin bir temsidir. Şöyle ki :

İlk olarak ; ρ , G nin bir temsili olsun. Bu durumda

$$I = 1_\rho = (a^m)\rho = (a\rho)^m = A^m \text{ olur.}$$

Tersine, $A^m = I$ olsun. O halde $(a^i)\rho = A^i$ ($0 \leq i \leq m-1$) dir.

Her i, j tamsayıları için $(a^i a^j)\rho = (a^{i+j})\rho = A^{i+j} = A^i A^j = (a^i \rho)(a^j \rho)$ olur.

O halde ρ bir temsidir.

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve } G = \langle a : a^3 = 1 \rangle \cong C_3 \quad \text{olsun.}$$

$$\rho_1 : a^r \rightarrow A^r, \quad \rho_2 : a^r \rightarrow B^r, \quad \rho_3 : a^r \rightarrow C^r \quad (0 \leq r \leq 2)$$

fonksiyonlarını ele alalım.

$A^3 = B^3 = C^3 = I$ koşulları sağlanır. Bir önceki örnekten ρ_j ($1 \leq j \leq 3$) G nin temsili olur.

3.2 Denk Temsiller

Bir temsilden başka bir temsil şu şekilde üretilebilir.

$\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ bir temsil olsun.

T, F üzerinde bir $n \times n$ ters çevrilebilir matris ise tüm $n \times n$ A ve B matrisleri için

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T \quad (3.1)$$

eşitliği söz konusudur. Bu eşitlik kullanılarak ρ den yeni bir σ temsili üretilebilir.

Bunun için

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T \quad (\text{Her } g \in G \text{ için}) \text{ tanımlanır.}$$

$$\text{Her } g, h \in G \text{ için } (gh)\sigma = T^{-1}((gh)\rho)T = T^{-1}((g\rho)(h\rho))T = T^{-1}(g\rho)T \cdot T^{-1}(h\rho)T = (g\sigma)(h\sigma)$$

σ işlemi koruduğundan bir temsildir.

3.2.1 Tanım

$\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ ve $\sigma : G \rightarrow GL(m, F)$ fonksiyonları F de tanımlı G grubunun temsilleri olsun.

Eğer $n=m$ ve her $g \in G$ için $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$ olacak şekilde bir T $n \times n$ ters çevrilebilir matrisi varsa ρ, σ ya denktir denir.

F üzerinde tanımlı G grubunun ρ, σ ve τ temsilleri için aşağıdaki koşullar sağlanır.

1) ρ, ρ ye denktir.

2) ρ, σ ye denk ise σ da ρ ye denktir.

3) ρ , σ ye denk ve σ da τ ya denk ise ρ , τ ya denktir.

Diğer bir ifade ile temsillerin denkliği bir denklik bağıntısıdır.

İspat: 1) Her $g \in G$ için , $I^{-1}(g\rho)I = g\rho$ olduğundan ρ , ρ ye denktir.

2) ρ , σ ye denk ise her $g \in G$ için $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$ olacak şekilde bir T ters çevrilebilir matrisi vardır. Buradan $g\rho = (T^{-1})^{-1} g\sigma T^{-1}$ yazılabilir. Şu halde σ , ρ ye denktir.

3) ρ , σ ye ve σ da τ ya denk olsun. O halde

$g\sigma = S^{-1}(g\rho)S$ ve $g\tau = T^{-1}(g\sigma)T$ (Her $g \in G$ için) olacak şekilde S ve T ters çevrilebilir matrisleri mevcuttur . Buradan

$g\tau = T^{-1}(S^{-1}(g\rho)S)T$ den $g\tau = (ST)^{-1}(g\rho)(ST)$ yazılabilir. Dolayısıyla ρ , τ ya denk olur.

3.2.2 Örnekler

1) $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun. Örnek 3.1.1 (1)'de görülen G nin ρ temsilini

alalım. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $a\rho = A$ ve $b\rho = B$ idi.

$F = \mathbb{C}$ olsun ve $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ matrisi tanımlanırsa $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ olur. Gerçekten T ,

$T^{-1}AT$ köşegen matris olacak şekilde kurulur ve $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elde

edilir.

Böylece $a\sigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $b\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde D_8 in bir σ temsili elde edilmiş olur.

Şu halde ρ ve σ temsilleri denktir.

2) $G = C_2 = \langle a : a^2 = 1 \rangle$ ve $A = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ olsun. $A^2 = I$ dir. $\rho : 1 \rightarrow I$, $a \rightarrow A$ şeklinde

tanımlanan $\rho : G \rightarrow GL(2, F)$ fonksiyonu G nin bir temsidir.

Eğer $T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ seçilirse $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ elde edilir. ρ temsilinden $1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$a\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde G nin bir σ temsili elde edilir.

O halde ρ ve σ temsilleri denk olur.

Kolaylıkla farkına varılabilecek iki durum vardır :

ρ nin derecesi 1 olduğunda ve her $g \in G$ için $g\rho = I_n$ olduğunda ρ nin kendisine denk olan tek temsil ρ nin kendisidir. Fakat genellikle ρ ye denk olan birçok temsil vardır.

3.3 Temsillerin Çekirdeği

Bu bölümde bir $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ temsiliinin çekirdeğinden bahsedilecektir.

Bir $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ temsiliinin çekirdeği $g\rho$ nin birim matrise eşit olduğu $g \in G$ lardan oluşur. Yani

$$\text{Ker } \rho = \{g \in G : g\rho = I_n\} \quad (3.2)$$

dir. $\text{Ker } \rho$, G nin bir normal alt grubudur.

3.3.1 Tanım

Her $g \in G$ için $g\rho = (1)$ ile tanımlanan $\rho : G \rightarrow GL(1, F)$ temsiline G nin trivial temsili denir. Diğer bir deyişle G nin trivial temsili tüm grup elemanlarını 1×1 birim matrisine gönderen temsildir.

Şimdi çekirdeği sadece birim alt grup olan temsilleri inceleyelim.

3.3.2 Tanım

Bir $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ temsili eğer $\text{Ker } \rho = \{1\}$ ise dürüst temsil olarak adlandırılır. Yani ρ bir dürüst temsil ise $g\rho = I_n$ koşulunu sağlayan tek g elemanı G nin birimidir.

3.3.3 Önerme

Sonlu bir G grubunun ρ temsili ancak ve ancak $\text{Im } \rho$, G ye izomorf olduğunda dürüst temsildir (James ve Liebeck, 1993).

İspat:Öncelikle ρ , G nin bir dürüst temsili olsun. O halde $|\text{Ker } \rho| = 1$ dir.

$\text{Ker } \rho \triangleleft G$ olduğunu biliyoruz ve Teorem 1.11 ile $G/\text{Ker } \rho$ grubunun $\text{Im } \rho$ e izomorf olduğu

gösterildi. $G/\text{Ker } \rho \cong \text{Im } \rho$ olduğu için $|G/\text{Ker } \rho| = |\text{Im } \rho|$ dir. Dolayısıyla $\frac{|G|}{|\text{Ker } \rho|} = |\text{Im } \rho|$ olur. $|\text{Ker } \rho| = 1$ olduğundan $|G| = |\text{Im } \rho|$ dir. Bu ise $\text{Im } \rho$ nin G ye izomorf olduğunu gösterir.

Tersine $G \cong \text{Im } \rho$ olsun. O halde $|G| = |\text{Im } \rho|$ dir. Bu $\frac{|G|}{|\text{Ker } \rho|} = |\text{Im } \rho|$ eşitliğinde koyulursa $|\text{Ker } \rho| = 1$ bulunur. Bu ise ρ nin dürüst temsil olduğunu gösterir.

3.4 Örnekler

1) ρ , D_8 in bir temsili olsun ve aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(a^i b^j) \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^j \quad (\text{Örnek 3.1.1 (1)'de olduğu gibi})$$

ρ dürüst bir temsildir. Çünkü çizelge 3.1' e bakılırsa $g \rho = I$ koşulunu sağlayan tek g elemanı D_8 in birim elemanıdır. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tarafından üretilen grup D_8 ' e izomorf olur.

2) $G = D_{12} = \langle a, b : a^6 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun.

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{3}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisleri tanımlansın.

$$\rho_k : G \rightarrow GL(2, \mathbb{C}) \quad (k=1,2,3,4) \text{ için}$$

$$\rho_1 : a^r b^s \rightarrow A^r B^s$$

$$\rho_2 : a^r b^s \rightarrow A^{3r} (-B)^s$$

$$\rho_3 : a^r b^s \rightarrow (-A)^r B^s$$

$$\rho_4 : a^r b^s \rightarrow C^r D^s \quad (0 \leq r \leq 5, 0 \leq s \leq 1)$$

fonksiyonlarının G nin birer temsili olduğunu gösterelim.

Çözüm: 1) $S=A$, $T=B$, 2) $S=A^3$, $T=-B$, 3) $S=-A$, $T=B$, 4) $S=C$, $T=D$ durumları için

$$S^6=T^2=I \quad , \quad T^{-1}ST=S^{-1} \quad \text{dir.}$$

O halde ρ_k bir temsildir.

$A^r B^s$ ($0 \leq r \leq 5$, $0 \leq s \leq 1$) matrisleri farklıdır. Bu yüzden ρ_1 dürüst temsildir. Benzer şekilde

ρ_4 temsili de dürüştür. Fakat ρ_2 ve ρ_3 temsilleri dürüst değildir. Çünkü $a^2 \rho_2 = I$ ve $a^3 \rho_3 = I$ dir.

ρ_1 ve ρ_4 temsilleri denktir. Bunun için $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ matrisini tanımlayalım.

$T^{-1}(g \rho_4)T = g \rho_1$ (Her $g \in G$ için) (T yi bulmak için C nin öz vektörleri alındı.)

$j \neq 2$ için $a^2 \rho_j \neq I$ olduğundan ρ_2 , diğerlerine denk değildir.

$j \neq 3$ için $a^3 \rho_j \neq I$ olduğundan ρ_3 , diğerlerine denk değildir.

3) Bir G grubunun trivial temsili ancak ve ancak $G = \{1\}$ olduğunda dürüst temsil olur.

4. FG-MODÜLLERİ

Bu bölümde FG-modül kavramı tanıtıldı ve FG-modülleri ile F üzerinde tanımlı G grubunun temsilleri arasında yakın bir bağlantı olduğu gösterildi.

G bir grup, F kümesi R ya da C olsun.

G nin bir temsili $\rho: G \rightarrow GL(n, F)$ olsun. $V = F^n$ alalım. $\lambda_i \in F$ olmak üzere $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V$ dir.

Her $v \in V$ ve her $g \in G$ için

$$v(g\rho) \quad (4.1)$$

$g\rho$ $n \times n$ matrisi ile v satır vektörünün matris çarpımıdır.

Tanımlanan matris çarpımı V de bir satır vektörüdür. ($1 \times n$ matrisi ile $n \times n$ matrisinin çarpımı $1 \times n$ matris olduğundan)

$v(g\rho)$ çarpımının bazı temel özellikleri şunlardır :

1) ρ bir homomorfizm olduğundan her $v \in V$ ve her $g, h \in G$ için

$$v((gh)\rho) = v(g\rho)(h\rho)$$

2) 1ρ birim matrisi için her $v \in V$ için $v(1\rho) = v$

3) Her $u, v \in V$, $\lambda \in F$ ve $g \in G$ için

$$(\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho))$$

$$(u+v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho)$$

4.1 Örnek

$G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun. Örnek 3.1.1(1)'de tanımlanan G nin

$\rho: G \rightarrow GL(2, F)$ temsili

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^3\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$v=(\lambda_1, \lambda_2) \in F^2 \text{ için}$$

$$v(a \rho) = (-\lambda_2, \lambda_1)$$

$$v(b \rho) = (\lambda_1, -\lambda_2)$$

$$v(a^3 \rho) = (\lambda_2, -\lambda_1)$$

4.2 Tanım

V , F üzerinde bir vektör uzayı ve G bir grup olsun. Her $u, v \in V$, $\lambda \in F$ ve $g, h \in G$ için aşağıdaki koşulları sağlayan vg çarpımı tanımlanmışsa V vektör uzayına bir FG -modülü denir.

$$1) \quad vg \in V$$

$$2) \quad v(gh) = (vg)h$$

$$3) \quad v1 = v$$

$$4) \quad (\lambda v)g = \lambda(vg)$$

$$5) \quad (u+v)g = ug + vg$$

FG -modülü isminde V nin F üzerinde bir vektör uzayı ve G nin de vg ($v \in V$) çarpımını oluşturmak için g elemanlarının alındığı grup olduğunu belirtmek için F ve G harfleri kullanılır.

1), 4) ve 5) koşullarından her $g \in G$ için $v \rightarrow vg$ ($v \in V$) fonksiyonu V nin bir endomorfizmidir.

4.3 Tanım

V bir FG -modülü ve B , V nin bir bazı olsun. Her $g \in G$ için

$$[g]_B \tag{4.2}$$

matrisine V nin B bazına bağlı $v \rightarrow vg$ endomorfizminin matrisi denir.

FG -modülleri ve G nin temsilleri arasındaki bağlantı aşağıdaki temel sonucu ortaya çıkarır.

4.4 Teorem

1) $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ F de tanımlı G nin bir temsili ve $V = F^n$ olsun. vg çarpımı $vg = v(g\rho)$

($v \in V, g \in G$) şeklinde tanımlanırsa V , bir FG -modülü olur. Üstelik $g\rho = [g]_B$ (Her $g \in G$ için)

olacak şekilde V nin bir B bazı vardır.

2) V bir FG - modülü ve B , V nin bir bazı olsun. O halde $g \rightarrow [g]_B$ ($g \in G$ için) fonksiyonu

F de tanımlı G nin bir temsilidir (James ve Liebeck, 1993).

İspat : 1) Her $u, v \in F^n$, $\lambda \in F$ ve $g, h \in G$ için $vg = v(g\rho) \in F^n$ (vg çarpımı $1 \times n$ matris olduğundan F^n uzayına aittir.)

$$v(gh) = v[(gh)\rho] = v[(g\rho)(h\rho)] = [v(g\rho)](h\rho) = (vg)(h\rho) = (vg)h$$

$$v1 = v(1\rho) = vI_n = v$$

$$(\lambda v)g = (\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho)) = \lambda(vg)$$

$$(u+v)g = (u+v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho) = ug + vg$$

Bütün koşullar sağlandığına göre V bir FG - modülüdür.

B bazı için, F^n in $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ bazı alınırsa her $g \in G$ için $g\rho = [g]_B$ olur.

2) V , B bazlı bir FG - modülü olsun. Her $g, h \in G$ ve V nin B bazındaki tüm v ler için $v(gh) = (vg)h$ olduğundan $[gh]_B = [g]_B [h]_B$ dir.

Özellikle, her $g \in G$ için $[1]_B = [g]_B [g^{-1}]_B$ olur.

Her $v \in V$ için $v1 = v$ dir. Bu yüzden $[1]_B$, birim matristir. O halde her bir $[g]_B$ matrisi ters çevrilebilirdir ve tersi $[g^{-1}]_B$ dir.

$g \rightarrow [g]_B$ fonksiyonu G den $GL(n, F)$ e ($n = \dim V$) bir homomorfizmdir ve F de tanımlı G grubunun bir temsilidir.

Şimdi Teorem 4.4 (1) için aşağıdaki örneği inceleyelim.

4.5 Örnekler

1) $G=D_8=\langle a,b:a^4=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1} \rangle$ ve G nin bir ρ temsili

$$a\rho=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ şeklinde verilsin.}$$

$V=F^2$ alalım. $vg=v(g\rho)$ ($v \in V, g \in G$) tanımlanırsa Teorem 4.4 (1)'den V bir

FG -modülü olur. Örneğin $(1,0)a=(1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=(0,1)$ dir.

v_1, v_2 V nin $(1,0), (0,1)$ bazı olsun. O halde

$$v_1a=v_2, \quad v_2a=-v_1, \quad v_1b=v_1, \quad v_2b=-v_2 \text{ elde edilir.}$$

B, v_1, v_2 bazını temsil ediyorsa $g \rightarrow [g]_B$ ($g \in G$) temsiliinin sadece ρ temsili olduğu görülür.

2) $G=Q_8=\langle a,b:a^4=1, a^2=b^2, b^{-1}ab=a^{-1} \rangle$ olsun. Örnek 1.2.1(4)'te Q_8 $A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ve

$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ile üretilen $GL(2,C)$ nin alt grubu olarak tanımlandı. Böylece C üzerinde G nin

bir temsiline sahip oluruz. $F=C$ olursa $v_1a=iv_1, v_1b=v_2, v_2a=-iv_2, v_2b=-v_1$

olacak şekilde v_1, v_2 bazlı bir CG -modülü elde edilir.

Yukarıdaki örneklerden dikkat edileceği gibi, v_1a, v_2a, v_1b ve v_2b vektörleri vg

(tüm $v \in V, g \in G$) yi belirler. Örneğin, örnek 4.5.(1)'de

$$(v_1+2v_2)ab=v_1ab+2v_2ab=v_2b-2v_1b=-v_2-2v_1 \text{ olur.}$$

Benzer bir yorum tüm V FG -modülleri için geçerlidir. Eğer $v_1, \dots, v_n$ V nin bir bazı ise ve $g_1, \dots, g_r$ G yi üretirse $v_i g_j$ vektörleri ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r$), tüm $v \in V, g \in G$ için vg yi belirler.

Bir FG -modülü temsil kullanmadan da kurulabilir. Bunun için F de tanımlı bir V vektör uzayı V nin $v_1, \dots, v_n$ bazı üzerinde grup elemanlarının hareketini belirleyerek ve daha sonra bu

hareketi tüm V de lineer olacak şekilde yayarak bir FG-modülüne dönüştürülecektir.

İlk olarak her i ve her $g \in G$ için $v_i g$ çarpımı tanımlanır. Daha sonra

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g \quad (\lambda_i \in F)$$

$$(\lambda_1 (v_1 g) + \dots + \lambda_n (v_n g)) \text{ olarak tanımlanır.}$$

$v_i g$ vektörlerinin nasıl tanımlanacağı konusunda kısıtlamalar vardır. Bir sonraki önerme seçilmiş çarpımımızın V yi FG-modülüne dönüştürmesinde sık sık kullanılır.

4.6 Önerme

F de tanımlı bir V vektör uzayının bazı $v_1, \dots, v_n$ olsun. Her $v \in V$, $g \in G$ olmak üzere vg çarpımı aşağıdaki koşulları sağlarsa V bir FG-modülü olur.

$1 \leq i \leq n$, her $g, h \in G$ ve her $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ için

$$1) \quad v_i g \in V$$

$$2) \quad v_i (gh) = (v_i g)h$$

$$3) \quad v_i 1 = v_i$$

$$4) \quad (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1 (v_1 g) + \dots + \lambda_n (v_n g)$$

İspat: 3) ve 4) den açık olduğu gibi her $v \in V$ için $v1 = v$ dir. 1) ve 4) koşulları her $g \in G$ için

$v \rightarrow vg$ ($v \in V$) fonksiyonunun V nin bir endomorfizmi olduğunu sağlar. Yani

$$\forall u, v \in V, \lambda \in F \text{ ve } g \in G \text{ için } vg \in V, (\lambda v)g = \lambda(vg), (u+v)g = ug + vg \text{ dir.}$$

Buradan her $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$, $u_1, \dots, u_n \in V$, $h \in G$ için

$$(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n)h = \lambda_1 (u_1 h) + \dots + \lambda_n (u_n h) \quad (4.3)$$

olur. Şimdi $v \in V$ ve $g, h \in G$ olsun. Bazı $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ için $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ ve

$$v(gh) = \lambda_1 (v_1 (gh)) + \dots + \lambda_n (v_n (gh)) \quad (4. \text{koşuldan})$$

$$= \lambda_1 ((v_1 g)h) + \dots + \lambda_n ((v_n g)h) \quad (2. \text{koşuldan})$$

$$=(\lambda_1 (v_1 g) + \dots + \lambda_n (v_n g))h \quad (4.3) \text{ 'den}$$

$$=(vg)h \quad (4.\text{koşuldan})$$

dir.

Bütün koşullar sağlandığına göre V bir FG- modüldür.

Aşağıda trivial FG- modülü ve dürüst FG- modülü kavramları verilmiştir.

4.7 Tanımlar

1) Her $v \in V$, $g \in G$ için $vg=v$ olan F de tanımlı 1-boyutlu V vektör uzayına , trivial FG- modülü denir.

2) Her $v \in V$ için $vg=v$ koşulunu sağlayan tek g elemanı G nin birimi ise V FG - modülü dürüştür.

Örneğin 4.5(1) 'de verilen FD_g - modülü dürüştür.

Bir sonraki amacımız önerme 4.6 'yı kullanarak simetrik grupların tüm alt grupları için dürüst FG- modülleri inşa etmektir.

4.8 Permütasyon Modülleri

$\{1, \dots, n\}$ nin bir permütasyon grubu olan S_n in bir alt grubu G olsun. V , $v_1, \dots, v_n$ bazlı F de tanımlı n - boyutlu vektör uzayı olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere G deki her g permütasyonu için

$$v_i g = v_{ig} \quad (4.4)$$

tanımlansın.

$v_i g \in V$ ve $v_i 1 = v_i$ olur.

Her $g, h \in G$ için $v_i (gh) = v_{i(gh)} = v_{(ig)h} = (v_i g)h$ dir.

g nin hareketini tüm V ye lineer olarak yayalım. Her $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ için ve $g \in G$ için

$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1 (v_1 g) + \dots + \lambda_n (v_n g)$ tanımlanırsa Önerme 4.6'dan V bir FG –modülü olur.

4.8.1 Örnek

$G=S_4$ olsun ve B , V nin v_1, v_2, v_3, v_4 bazını ifade etsin. $g=(12)$ ise $v_1g=v_2$, $v_2g=v_1$, $v_3g=v_3$, $v_4g=v_4$ olur.

Eğer $h=(134)$ ise $v_1h=v_3$, $v_2h=v_2$, $v_3h=v_4$, $v_4h=v_1$ dir.

$$[g]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad [h]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

4.9 Tanım

G , S_n in bir alt grubu olsun. $1 \leq i \leq n$ ve her $g \in G$ için

$v_i g = v_{ig}$ koşulunu sağlayan $v_1, \dots, v_n$ bazlı V FG -modülüne F de tanımlı G nin permütasyon modülü denir. $v_1, \dots, v_n$ V nin doğal bazı olarak adlandırılır. Permütasyon modülünün $v_1, \dots, v_n$ bazı için B yazılırsa , her $g \in G$ için $[g]_B$ matrisi her satır ve sütunda sadece bir tane sıfırdan farklı elemana sahiptir ve bu eleman 1 dir. Bu matrise permütasyon matrisi denir. v_i yi sabitleyen G nin tek elemanı birimi olduğundan permütasyon modülü bir dürüst FG -modülüdür. n . mertebeden her G grubunu S_n in bir alt grubuna izomorf olduğu gerçeğiyle G nin n . mertebeden bir dürüst FG -modülüne sahip olduğunu görebiliriz (Passman, 1968).

4.9.1 Örnek

$G=C_3=\langle a : a^3=1 \rangle$ olsun. G , (123) permütasyonu ile üretilen S_3 ün bir devresel alt grubuna izomorftur. Bu bizim , eğer V, F üzerinde bir 3 boyutlu vektör uzayı ise $(v_1, v_2, v_3$ bazlı) V yi aşağıdaki gibi FG modülüne çevirebileceğimiz gerçeğini görmemizi sağlar.

$$v_1 1 = v_1 \quad , \quad v_2 1 = v_2 \quad , \quad v_3 1 = v_3$$

$$v_1 a = v_2 \quad , \quad v_2 a = v_3 \quad , \quad v_3 a = v_1$$

$$v_1 a^2 = v_3 \quad , \quad v_2 a^2 = v_1 \quad , \quad v_3 a^2 = v_2$$

Tabii ki , V deki keyfi bir v vektörü ve $g=1, a, a^2$ için vg yi

$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)g = \lambda_1 (v_1 g) + \lambda_2 (v_2 g) + \lambda_3 (v_3 g)$ ile tanımlarız.

4.10 FG- Modülleri ve Denk Temsiller

Bu bölümde FG-modülleri ve G nin denk temsilleri arasındaki ilişki araştırılacaktır. Bir FG-modül , bize tümü $g \rightarrow [g]_B$ ($g \in G$, V nin bazı bazları için) formunda birçok temsil verir. Bir sonraki teorem bu temsillerin çoğunun birbirine denk olduğunu ve üstelik G nin herhangi iki denk temsilinin bu yolla bir FG-modülünden meydana geldiğini gösterir.

4.10.1 Teorem

V , B bazlı bir FG-modül olsun ve $\rho : g \rightarrow [g]_B$ ($g \in G$) fonksiyonu F de tanımlı bir G grubunun temsili olsun.

1) B' V nin bir bazı ise $\phi : g \rightarrow [g]_{B'}$ ($g \in G$) temsili ρ ye denktir.

2) Eğer σ , ρ ye denk olan G nin bir temsili ise $\sigma : g \rightarrow [g]_{B'}$ ($g \in G$) olacak şekilde V nin bir B'' bazı vardır (James ve Liebeck, 1993).

İspat : 1) T , B den B' ye baz değişim matrisi olsun. Şu halde (2.15)' den bütün $g \in G$ ler için

$[g]_{B'} = T^{-1} [g]_B T$ dir. Öyleyse ϕ , ρ ye denk olur.

2) ρ ve σ G nin denk temsilleri olsun. $g \rho = T^{-1}(g \sigma) T$ (Her $g \in G$ için) olacak şekilde bir T ters çevrilebilir matrisi vardır. B'' , V nin bir bazı olsun . B den B'' ye baz değişim matrisi olarak T alınırsa her $g \in G$ için

$[g]_{B''} = T^{-1} [g]_{B'} T$ yazılabilir. Buradan $g \sigma = [g]_{B''}$ olur.

4.10.2 Örnek

$G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ olsun. G nin bir ρ temsili

$$1 \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad a \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} , \quad a^2 \rho = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. $(a \rho)^2 = a^2 \rho$ ve $(a \rho)^3 = 1$ dir.

BU YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANI
09.04.2022

V , C de tanımlı 2-boyutlu bir vektör uzayı ve V nin bir B bazı v_1, v_2 olsun.

Teorem 4.4.(1)' den $[1]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[a]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $[a^2]_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alınırsa $v_i g$

($1 \leq i \leq 2$, $g \in G$) çarpımları şu şekilde tanımlanır.

$$v_1 1 = v_1, \quad v_1 a = v_2, \quad v_1 a^2 = -v_1 - v_2$$

$$v_2 1 = v_2, \quad v_2 a = -v_1 - v_2, \quad v_2 a^2 = v_1$$

$$v_1 a = t_{11} v_1 + t_{12} v_2$$

$$v_1 a = 0. v_1 + 1. v_2 \text{ ise } v_1 a = v_2$$

$$v_2 a = t_{21} v_1 + t_{22} v_2$$

$$v_2 a = (-1) v_1 + (-1) v_2 \text{ ise } v_2 a = -v_1 - v_2$$

Diğerleri de benzer şekilde bulunur.

Dolayısıyla V , bir CG -modülüdür.

Şimdi $u_1 = v_1$ ve $u_2 = v_1 + v_2$ olsun. u_1, u_2 V nin diğer bir bazıdır.

$$u_1 1 = u_1, \quad u_1 a = -u_1 + u_2, \quad u_1 a^2 = -u_2$$

$$u_2 1 = u_2, \quad u_2 a = -u_1, \quad u_2 a^2 = u_1 - u_2 \text{ olur. } u_1, u_2 \text{ bazı } B' \text{ ile adlandırılırsa}$$

$\phi : g \rightarrow [g]_{B'}$ temsili elde edilir. Burada

$$[1]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [a]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [a^2]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ için } [g]_{B'} = T^{-1} [g]_B T \text{ elde edilir. O halde } \rho \text{ ve } \phi \text{ denktir.}$$

4.10.3 Örnekler

1) $G = S_3$ ve $V = \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$, C üzerinde G nin bir permütasyon modülü olsun. (tanım 4.9 gibi) B_1 V nin v_1, v_2, v_3 bazı ve B_2 bazı $v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_2, v_1 - v_3$ olsun. $[g]_{B_1}$

ve $[g]_{B_2}$ ($\forall g \in S_3$) 3×3 matrisleri aşağıda hesaplanmıştır.

Çizelge 4.1 $[g]_{B_1}$ ve $[g]_{B_2}$ matrisleri

g	1	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
$[g]_{B_1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$[g]_{B_2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Bütün $[g]_{B_2}$ matrisleri $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$ formundadır.

2) $G=S_n$ ve V, F de tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$\forall v \in V$, $vg = \begin{cases} v, & g \text{ çift permütasyon} \\ -v, & g \text{ tek permütasyon} \end{cases}$ için V bir FG modülü olur.

Çözüm: $g \in S_n$ olsun. $\forall u, v \in V$ ve $\lambda \in F$ için

$vg \in V$, $v1=v$, $(\lambda v)g = \lambda(vg)$, $(u+v)g = ug+vg$ olduğu açıktır.

$v \in V$ ve $g, h \in S_n$ için $v(gh) = (vg)h$ koşulunun sağlandığını göstermek yeterlidir

Önce $gh \in A_n$ olsun. Bu halde iki durum vardır.

Eğer $g, h \in A_n$ ise $vg = v = vh$ dir.

Eğer $g, h \notin A_n$ ise $vg = -v = vh$ dir.

Dolayısıyla her iki durumda da $v(gh) = v$, $(vg)h = v$ olur.

Şimdi $gh \notin A_n$ olsun. Bu durumda ise g ve h dan sadece biri A_n e ait olacağından

$v(gh) = -v$, $(vg)h = -v$ olur.

Tanım 4.2 'deki bütün koşullar sağlandığına göre V bir FG- modülüdür.

$$3) Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \text{ olsun.}$$

$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = -v_1, \quad v_3 a = -v_4, \quad v_4 a = v_3$$

$$v_1 b = v_3, \quad v_2 b = v_4, \quad v_3 b = -v_1, \quad v_4 b = -v_2$$

şeklinde tanımlanan v_1, v_2, v_3, v_4 bazlı 4- boyutlu RQ_8 modülü vardır.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrislerini alalım.}$$

$$A^4 = I, \quad B^2 = A^2, \quad B^{-1}AB = A^{-1} \text{ olduğundan}$$

$\rho : a^i b^j \rightarrow A^i B^j$ ($0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1$) fonksiyonu R üzerinde Q_8 in bir temsilidir. $V = R^4$ olsun. vg çarpımı Teorem 4.4 (1) 'den her $v \in V, g \in Q_8$ için $vg = v(g\rho)$ şeklinde tanımlanırsa V, RQ_8 modülü olur. Eğer $v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)$

ise her i için $v_i a$ ve $v_i b$ vektörleri soruda verildiği şekildedir.

5. FG-ALTMODÜLLERİ ve İNDİRGENEBİLİRLİK

G bir grup ve F kümesi R ya da C olsun.

5.1 Tanım

V bir FG-modülü olsun. Eğer W bir alt uzay ve her $w \in W$, $g \in G$ için $wg \in W$ ise V nin bir W alt kümesi V nin bir FG-altmodülü olarak adlandırılır. O halde V nin bir FG-altmodülü aynı zamanda bir FG-modül olan bir alt uzaydır.

5.1.1 Örnekler

1) Bir V FG-modülü için $\{0\}$ alt uzayı ve V nin kendisi V nin FG-altmodülleridir.

2) $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ olsun ve V , örnek 4.9.1' de tanımlanan 3-boyutlu FG-modülü olsun.

V , v_1, v_2, v_3 bazına sahiptir ve

$$v_1 1 = v_1, \quad v_2 1 = v_2, \quad v_3 1 = v_3$$

$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = v_3, \quad v_3 a = v_1$$

$$v_1 a^2 = v_3, \quad v_2 a^2 = v_1, \quad v_3 a^2 = v_2$$

dir. $w = v_1 + v_2 + v_3$ ve $W = \text{sp}(w)$ (w tarafından gerilen 1-boyutlu alt uzay) olsun.

$w1 = wa = wa^2 = w$ olduğu için W , V nin bir FG-altmodülüdür. Fakat $\text{sp}(v_1 + v_2)$ bir FG-altmodülü değildir. Çünkü $(v_1 + v_2)a = v_2 + v_3 \notin \text{sp}(v_1 + v_2)$ dir.

5.2 İndirgenemez FG-Modülleri

Sıfırdan farklı bir V FG-modülüne $\{0\}$ ve V den başka hiçbir FG-altmodülü yoksa indirgenemez FG-modülü denir.

V FG-modülüne $\{0\}$ ya da V den farklı FG-altmodüllere sahipse indirgenebilir denir.

Benzer şekilde, bir $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ temsili eğer buna karşılık gelen $vg = v(g\rho)$ ($v \in F^n$, $g \in G$) çarpımı ile tanımlı F^n FG-modülü indirgenemez ise indirgenemezdir.

F^n indirgenebilir ise ρ indirgenesimlidir (James ve Liebeck, 1993).

V bir indirgenebilir FG-modülü olsun. O halde $0 < \dim W < \dim V$ olacak şekilde bir W

FG-altmodülü vardır. W nin bir B_1 bazını alalım ve bunu V nin B bazına yayalım. Her $g \in G$ olmak üzere X_g, Y_g, Z_g matrisleri için (burada $X_g, k \times k$ matristir, $k = \dim W, 0 < k < n$) $[g]_B$ matrisi

$$\left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array} \right) \quad (5.1)$$

formundadır.

n dereceli bir temsil ancak ve ancak (5.1) formundaki bir temsile denk ise indirgenebilirdir.

$g \rightarrow X_g$ ve $g \rightarrow Z_g$ fonksiyonları G nin temsilleridir. Bunu görmek için $g, h \in G$ için (5.1) formunda verilen $[g]_B$ ve $[h]_B$ matrisleri çarpılır. V , indirgenebilirse $\dim V \geq 2$ olur.

5.2.1 Örnekler

1) $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ ve V , 3-boyutlu FG- modülü olsun.

$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = v_3, \quad v_3 a = v_1$$

şeklinde tanımlı v_1, v_2, v_3 V nin bir bazı olsun. Örnek 5.1.1 (2) 'de görüldüğü gibi V indirgenebilir FG- modüldür ve $W = \text{sp}(v_1 + v_2 + v_3)$ FG- altmodülüne sahiptir.

B, V nin $v_1 + v_2 + v_3, v_1, v_2$ bazı olsun.

$$[1]_B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad [a]_B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right), \quad [a^2]_B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

olur. Bu indirgenebilir temsil bize iki farklı temsil verir:

Üst solda trivial temsil ve alt sağda

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ile verilen temsil vardır.}$$

2) $G = D_8$ ve $V = F^2$ örnek 4.5.(1)'de tanımlanan 2-boyutlu FG-modülü olsun. Böylece

$G = \langle a, b \rangle$ ve $\forall (\lambda, \mu) \in V$ için $(\lambda, \mu)a = (-\mu, \lambda)$, $(\lambda, \mu)b = (\lambda, -\mu)$ elde ederiz. V bir indirgenemez FG-modülüdür. Bunu görmek için, V ye eşit olmayan bir U FG-alt modülü olduğunu farzedelim. O halde $\dim U \leq 1$ dir. Bu yüzden bazı $\alpha, \beta \in F$ için $U = \text{sp}((\alpha, \beta))$ olur. U bir FG- modülü olduğuna göre $(\alpha, \beta)b$, (α, β) nin bir skaler katıdır ve buradan ya $\alpha = 0$ ya da $\beta = 0$ olur. $(\alpha, \beta)a$ da (α, β) nin skaler katı olduğuna göre $\alpha = \beta = 0$ dır ve $U = \{0\}$ elde edilir. Sonuç olarak V bir indirgenemez FG-modülüdür.

3) $G = C_2 = \langle a : a^2 = 1 \rangle$ ve $V = F^2$ olsun. $(\alpha, \beta) \in V$ için $(\alpha, \beta)1 = (\alpha, \beta)$ ve $(\alpha, \beta)a = (\beta, \alpha)$ tanımlansın.

V nin tanım 4.2' deki koşulları sağladığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla V bir FG-modülüdür. V nin tüm alt FG-modüllerini bulalım.

U , V nin sıfırdan farklı bir FG-altmodülü ve $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ olmak üzere $(\alpha, \beta) \in U$ olsun.

$$(\alpha, \beta) + (\alpha, \beta)a = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \in U \text{ ve}$$

$$(\alpha, \beta) - (\alpha, \beta)a = (\alpha - \beta, \beta - \alpha) \in U \text{ dur.}$$

$\alpha + \beta$ ve $\alpha - \beta$ den en az biri sıfırdan farklıdır. Buradan $(1, 1)$ ve $(1, -1)$ in U ya ait oldukları sonucunu çıkarırız. Buradan V nin FG-altmodülleri $\{0\}$, $\text{sp}((1, 1))$, $\text{sp}((1, -1))$ ve V dir.

4) ρ ve σ F de tanımlı G grubunun denk temsilleri olsun.

ρ indirgenebilir ise σ indirgenebilirdir.

ρ indirgenebilir ve mertebesi n olsun. O halde ρ temsili

$$\tau : g \rightarrow \begin{pmatrix} X_g & 0 \\ Y_g & Z_g \end{pmatrix} \quad (g \in G) \quad (\text{Burada } X_g \text{ bir } k \times k \text{ matris ve } 0 < k < n \text{ dir})$$

formunda verilen bir τ temsiline denktir.

ρ ile σ denk temsiller olduğundan σ , τ temsiline de denktir. Dolayısıyla σ indirgenebilirdir.

6. GRUP CEBİRLERİ

Sonlu bir G grubunun grup cebri, G deki çarpma işlemini içeren ekstra bir yapı taşıyan, $|G|$ boyutlu bir vektör uzayıdır. Bir bakıma, grup cebirleri temsil teorisi üzerine bilmeniz gereken herşeyin kaynağıdır. Özel olarak, temsil teorisinin amacına yani sonlu grupların tüm temsillerinin anlaşılması amacına ancak grup cebirleri tam olarak analiz edilirse ulaşılabilir. Bu nedenle grup cebirlerinin önemi büyüktür.

6.1 G Grubunun Grup Cebri

G , elemanları $g_1, \dots, g_n$ olan sonlu bir grup ve F kümesi R ya da C olsun.

F de $g_1, \dots, g_n$ bazlı bir vektör uzayı tanımlanır ve bu FG -vektör uzayı olarak adlandırılır.

FG nin tüm elemanları

$$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \quad (\forall \lambda_i \in F) \quad (6.1)$$

formundadır.

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \quad \text{ve} \quad v = \sum_{i=1}^n \mu_i g_i$$

FG nin elemanları olsun.

FG -vektör uzayında toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u+v = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) g_i \quad \text{ve} \quad \lambda u = \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i) g_i \quad (\lambda \in F) \quad (6.2)$$

Bu kurallarla FG , F de tanımlı n -boyutlu $g_1, \dots, g_n$ bazlı bir vektör uzayıdır. $g_1, \dots, g_n$ bazına FG -vektör uzayının doğal bazı adı verilir.

6.1.1 Örnek

$G = C_3 = \langle a : a^3 = e \rangle$ (F nin birim elemanı ile karışmasını önlemek için, bu örnekte G nin birim elemanı için e yazıldı)

F kümesi olarak C alınırsa C üzerinde e, a, a^2 bazlı CG -vektör uzayı tanımlanabilir. CG nin elemanları

$\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2$ formundadır. ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$)

$u = e - a + 2a^2$ ve $v = \frac{1}{2}e + 5a$ elemanları CG-vektör uzayına aittir. Bu iki elemanın toplamı

$$u+v = \frac{3}{2}e + 4a + 2a^2 \quad \text{dir.}$$

u nun $\frac{1}{3}$ ile skaler çarpımı ise

$$\frac{1}{3}u = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a^2 \quad \text{dir.}$$

FG-vektör uzayının elemanları bazen

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \quad (\lambda_g \in F) \quad (6.3)$$

formunda da yazılabilir.

FG de çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h \right) = \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h (gh) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} (\lambda_g \mu_{h^{-1}g}) g \quad (6.4)$$

(Burada $\lambda_g, \mu_h \in F$)

6.1.2 Örnek

Örnek 6.1.1' de tanımlanan CG nin u, v elmanlarını alırsak

$$uv = (e - a + 2a^2) \left(\frac{1}{2}e + 5a \right) = \frac{1}{2}e + 5a - \frac{1}{2}a - 5a^2 + a^2 + 10a^3 = \frac{21}{2}e + \frac{9}{2}a - 4a^2$$

olur.

6.2 Tanım

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h \right) = \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h (gh) \quad (\lambda_g, \mu_h \in F)$$

çarpma işlemi ile tanımlanan FG vektör uzayına F de tanımlı G nin grup cebri adı verilir.

FG-grup cebrinin çarpma işlemine göre birim elemanı 1_e dir. Burada 1 , F nin birim elemanı e ise G nin birim elemanıdır. Bu eleman basitçe 1 ile gösterilir.

6.3 Önerme

FG deki çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar

Her $r,s,t \in FG$ ve $\lambda \in F$ için

- 1) $rs \in FG$;
- 2) $r(st) = (rs)t$;
- 3) $r1 = 1r = r$;
- 4) $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$;
- 5) $(r+s)t = rt + st$;
- 6) $r(s+t) = rs+rt$;
- 7) $r0 = 0r = 0$.

İspat : 1) rs nin tanımından $rs \in FG$ olduğu açıktır.

$$2) r = \sum_{g \in G} \lambda_g g, \quad s = \sum_{h \in G} \mu_h h, \quad t = \sum_{k \in G} v_k k \quad (\lambda_g, \mu_h, v_k \in F) \text{ olsun.}$$

$$(rs)t = \sum_{g,h,k \in G} \lambda_g \mu_h v_k (gh)k = \sum_{g,h,k \in G} \lambda_g \mu_h v_k g(hk) = r(st)$$

Diğer eşitliklerin ispatları kolay olduğu için gösterilmeyecektir.

Önerme 6.3'ün 1) – 7) koşullarını sağlayan çarpma işlemi ile tanımlı herhangi bir vektör uzayına cebir denir. Bu çalışmada sadece grup cebirleri ele alınacaktır.

6.4 Düzenli FG – Modülü

Grup cebri önemli bir FG – modülünü tanımlamak için kullanılacaktır.

$V=FG$ olsun. V , F de tanımlı n- boyutlu bir vektör uzayı ve $n=|G|$ dir.

Her $u, v \in V$, $\lambda \in F$ ve $g,h \in G$ için önerme 6.3' ün 1) ,2) ,3) ,4) ve 5) koşullarını kullanarak

$$vg \in V$$

$$v(gh) = (vg)h$$

$$v1 = v$$

$$(\lambda v)g = \lambda (vg)$$

$$(u+v)g = ug+vg$$

elde edilir. Bu nedenle V bir FG -modülüdür.

6.5 Tanım

G sonlu bir grup , F kümesi R ya da C olsun. Doğal vg ($v \in FG$, $g \in G$) çarpımı ile tanımlı FG -vektör uzayına , düzenli FG –modülü adı verilir.

FG nin B doğal bazı alınarak elde edilen $g \rightarrow [g]_B$ temsiline F de tanımlı G grubunun düzenli temsili denir.

Düzenli FG -modülünün boyutu $|G|$ ye eşittir.

6.6 Önerme

Düzenli bir FG - modülü dürtüsttür (James ve Liebeck, 1993).

İspat : $g \in G$ ve her $v \in FG$ için $vg = v$ olsun. O halde $1g=1$ dir. Böylece $g=1$ olur.

6.7 Örnek

$G = C_3 = \langle a : a^3 = e \rangle$ olsun. FG nin elemanları

$$\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 \quad (\lambda_i \in F)$$

formuna sahiptir.

$$(\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)e = \lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2$$

$$(\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)a = \lambda_3 e + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2$$

$$(\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)a^2 = \lambda_2 e + \lambda_3 a + \lambda_1 a^2$$

elde edilir.

FG nin e, a, a^2 bazı ile ilgili olan matrisleri alarak G nin düzenli temsili elde edilir.

$$e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.8 FG- Modülü Üzerinde FG Hareketleri

Bir FG-modülünün $v \in V$ ve $g \in G$ için vg çarpımı ile F de tanımlı bir vektör uzayı olduğu gösterildi. Bu çarpma tanımını, FG grup cebirindeki tüm r elemanları için V nin vr elemanına sahip olacak şekilde genişletilmesi bazen faydalı olur. Bu aşağıdaki doğal yöntemle yapılır.

6.8.1 Tanım

V bir FG modülü, $v \in V$ ve $r \in FG$ olsun.

$$r = \sum_{g \in G} \mu_g g \quad (\mu_g \in F)$$

vr aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$vr = \sum_{g \in G} \mu_g (vg) \tag{6.5}$$

6.8.2 Örnek

1) V , S_4 ün bir permütasyon modülü olsun. (Örnek 4.8.1’de tanımlandığı gibi)

$$r = \lambda (12) + \mu (134) \quad (\lambda, \mu \in F) \text{ ise}$$

$$v_1 r = \lambda v_1 (12) + \mu v_1 (134) = \lambda v_2 + \mu v_3$$

$$v_2 r = \lambda v_1 + \mu v_2$$

$$(2v_1 + v_2)r = \lambda v_1 + (2\lambda + \mu)v_2 + 2\mu v_3$$

dür.

6.9 Önerme

V bir FG – modülü olsun. Her $u, v \in V$, her $\lambda \in F$, her $r, s \in FG$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

$$1) \quad vr \in V$$

$$2) \quad v(rs) = (vr)s$$

$$3) \quad v1 = v$$

$$2) \quad (\lambda v)r = \lambda(vr) = v(\lambda r)$$

$$3) \quad (u+v)r = ur + vr$$

$$4) \quad v(r+s) = vr + vs$$

$$5) \quad v0 = 0r = 0$$

İspat : 2) dışındaki aksiyomlar açıktır. 2. aksiyomun ispatı şu şekildedir.

$v \in V$, $r, s \in FG$ olsun ve r, s aşağıdaki gibidir.

$$r = \sum_{g \in G} \lambda_g g, \quad s = \sum_{h \in G} \mu_h h$$

$$\begin{aligned} v(rs) &= v\left(\sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (gh)\right) \\ &= \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (v(gh)) = \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h ((vg)h) \\ &= \left(\sum_g \lambda_g (vg)\right) \left(\sum_h \mu_h h\right) \\ &= (vr)s \end{aligned}$$

6.9.1 Örnek

F de tanımlı $C_2 \times C_2$ grubunun düzenli temsili bulalım.

$$G = C_2 \times C_2 = \langle a, b : a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$$

$F(C_2 \times C_2)$ -modülünün bir bazı $1, a, b, ab$ dir.

Bu baz B ile gösterilirse $\rho : g \rightarrow [g]_B$ düzenli temsili şu şekildedir.

$${}_1\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}_b\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (ab)\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



7. FG- HOMOMORFİZM

Gruplar ve vektör uzayları için yapıyı koruyan fonksiyonlar , sırasıyla grup homomorfizmleri ve lineer dönüşümlerdir. FG-modülleri için ise yapıyı koruyan fonksiyonlar FG-homomorfizmlerdir.

7.1 Tanım

V ve W birer FG-modülü olsun.

$$\vartheta : V \rightarrow W$$

lineer dönüşümüne her $v \in V$, $g \in G$ için

$$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g \quad (7.1)$$

eşitliğini sağlıyorsa bir FG-homomorfizm denir.

Diğer bir deyişle , ϑ lineer dönüşümü altında v nin görüntüsü w ise vg nin görüntüsü de wg olur.

G sonlu bir grup ve $\vartheta : V \rightarrow W$ bir FG-homomorfizm ise

Her $v \in V$ ve $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in FG$ için

$$(vr)\vartheta = (v\vartheta)r \quad (7.2)$$

elde edilir. Çünkü ;

$$(vr)\vartheta = \sum_{g \in G} \lambda_g (vg)\vartheta = \sum_{g \in G} \lambda_g (v\vartheta)g = (v\vartheta)r \text{ dir.}$$

Bir sonraki sonuç FG- homomorfizmlerin doğal olarak FG-altmodüllerini doğurduğunu gösterir.

7.2 Önerme

V ve W birer FG-modülü ve $\vartheta : V \rightarrow W$ bir FG-homomorfizm olsun. Bu durumda $\text{Ker } \vartheta$, V nin bir FG -altmodülü , $\text{İm } \vartheta$ ise W nin bir FG-altmodülü olur.

İspat: ϑ bir lineer dönüşüm olduğundan $\text{Ker } \vartheta$, V nin bir alt uzayı , $\text{İm } \vartheta$ de W nin bir alt uzayıdır.

$v \in \text{Ker } \vartheta$ ve $g \in G$ için

$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g = 0g = 0$ olduğundan $vg \in \text{Ker } \vartheta$ olur. Dolayısıyla $\text{Ker } \vartheta$ V nin bir FG-altmodülüdür.

Şimdi $w \in \text{İm } \vartheta$ olsun. $w = v\vartheta$ olacak şekilde $v \in V$ vardır. Her $g \in G$ için

$wg = (v\vartheta)g = (vg)\vartheta \in \text{İm } \vartheta$ olur ve böylece $\text{İm } \vartheta$, W nin bir FG-altmodülü olur.

7.3 Örnekler

1) Her $v \in V$ için $v\vartheta = 0$ ile tanımlanan $\vartheta : V \rightarrow W$ fonksiyonu bir FG-homomorfizmdir. Çünkü ϑ bir lineer dönüşümdür ve her $v \in V$, $g \in G$ için $(vg)\vartheta = 0 = 0.g = (v\vartheta)g$ dir.

$\text{Ker } \vartheta = V$, $\text{İm } \vartheta = \{0\}$ dir.

2) $\lambda \in F$ olsun ve her $v \in V$ için $v\vartheta = \lambda v$ ile $\vartheta : V \rightarrow V$ fonksiyonu tanımlansın.

ϑ bir lineer dönüşümdür. Çünkü her $u, v \in V$ ve $\mu \in F$ için

$$(u+v)\vartheta = \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v = u\vartheta + v\vartheta$$

$$(\mu v)\vartheta = \lambda(\mu v) = (\lambda \mu)v = (\mu \lambda)v = \mu(\lambda v) = \mu(v\vartheta)$$

dir.

Ayrıca her $v \in V$, $g \in G$ için $(vg)\vartheta = \lambda(vg) = (\lambda v)g = (v\vartheta)g$

olduğundan ϑ bir FG-homomorfizmdir.

$\lambda \neq 0$ için $\text{Ker } \vartheta = \{0\}$, $\text{İm } \vartheta = V$ bulunur.

3) G , S_n in bir alt grubu, $V = \text{sp}(v_1, \dots, v_n)$, G nin F de tanımlı bir permütasyon modülü ve $W = \text{sp}(w)$ trivial FG-modülü olsun.

$\vartheta : V \rightarrow W$

$$\vartheta : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) w \quad (\lambda_i \in F)$$

funksiyonu bir FG-homomorfizmdir.

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V, \quad u = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i \in V \quad \mu \in F \text{ için}$$

$$(v+u) \vartheta = \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) v_i \right) \vartheta = \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) \right) w = \sum_{i=1}^n \lambda_i w + \sum_{i=1}^n \mu_i w = v \vartheta + u \vartheta$$

$$(\mu v) \vartheta = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu w = \sum_{i=1}^n \mu \lambda_i w = \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i w = \mu (v \vartheta)$$

Öyleyse ϑ bir lineer dönüşümdür.

Her $v = \sum \lambda_i v_i \in V$ ve her $g \in G$ için

$$(vg) \vartheta = \left(\sum \lambda_i v_{ig} \right) \vartheta = \left(\sum \lambda_i \right) w \quad \text{ve}$$

$$(v \vartheta)g = \left(\sum \lambda_i \right) wg = \left(\sum \lambda_i \right) w$$

elde edilir.

Bu nedenle ϑ bir FG-homomorfizmdir.

$$\text{Ker } \vartheta = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \right\}$$

$$\text{Im } \vartheta = W$$

Önerme 7.2' den $\text{Ker } \vartheta$, V permütasyon modülünün bir FG-altmodülüdür.

7.4 İzomorfik FG - Modülleri

V ve W birer FG- modülü olsun. $\vartheta : V \rightarrow W$ FG-homomorfizmine eğer ters çevrilebilir ise FG- izomorfizmi denir. Bu durumda V ve W FG- modülleri izomorfik olur ve $V \cong W$ yazılır.

Bir sonraki önerme $V \cong W$ ise $W \cong V$ olduğunu göstermektedir.

7.5 Önerme

$\vartheta : V \rightarrow W$ bir FG-izomorfizm ise $\vartheta^{-1} : W \rightarrow V$ de bir FG-izomorfizmdir.

İspat: ϑ^{-1} in ters çevrilebilir bir lineer dönüşüm olduğu açıktır. O halde sadece ϑ^{-1} in bir

FG-homomorfizm olduğunu göstermek yeterlidir. $w \in W$ ve $g \in G$ için

$$((w \vartheta^{-1})g) \vartheta = ((w \vartheta^{-1}) \vartheta)g \quad (\vartheta \text{ bir FG-homomorfizm olduğundan})$$

$$= wg = ((wg) \vartheta^{-1}) \vartheta$$

Şu halde $(w\vartheta^{-1})g = (wg)\vartheta^{-1}$ dir. Dolayısıyla ϑ^{-1} bir FG –homomorfizmdir.

7.6 Özellikler

$\vartheta : V \rightarrow W$ bir FG-izomorfizmi olsun. O halde aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1) $\dim V = \dim W$ dir.

Çünkü , ancak ve ancak $v_1\vartheta, \dots, v_n\vartheta$ W nin bir bazı olduğunda $v_1, \dots, v_n$, V nin bir bazıdır.

2) Ancak ve ancak W indirgenemez ise V indirgenemezdir.

Çünkü , ancak ve ancak $X\vartheta$, W nin bir FG-altmodülü olduğunda X , V nin bir FG-altmodülüdür.

3) Ancak ve ancak W bir trivial FG –altmodüle sahipse V de bir trivial FG-altmodüle sahiptir.

Çünkü , ancak ve ancak $X\vartheta$, W nin bir trivial FG –altmodülü ise X , V nin bir trivial FG-altmodülüdür.

İzomorfik FG-modülleri arasındaki benzerlikleri vurgulamaya devam edeceğiz. Bir sonraki teoremden izomorfik FG-modüllerinin denk temsillere karşılık geldiği gösterilecektir.

7.7 Önerme

V ve W FG-modülleri ancak ve ancak $[g]_{B_1} = [g]_{B_2}$ (Her $g \in G$ için) olacak şekilde W nin bir B_2 bazı ve V nin de bir B_1 bazı varsa izomorfiktir (James ve Liebeck, 1993).

İspat: Önce $\vartheta : V \rightarrow W$ bir izomorfizm olsun. $v_1, \dots, v_n$ V nin bir bazı ise $v_1\vartheta, \dots, v_n\vartheta$ de W nin bir bazı olur. V nin bazını B_1 ile , W nin bazını B_2 ile gösterelim.

$g \in G$ olsun.

$(v_i g)\vartheta = (v_i\vartheta)g$ (her i için) olduğundan $[g]_{B_1} = [g]_{B_2}$ olur.

Şimdi $v_1, \dots, v_n$ V nin bir B_1 bazı , $w_1, \dots, w_n$ W nin bir B_2 ve $[g]_{B_1} = [g]_{B_2}$ olduğunu farzedelim.

$\vartheta : V \rightarrow W$ $v_i\vartheta = w_i$ (her i için) olacak şekilde ters çevrilebilir bir lineer dönüşüm

olsun.

$g \in G$ alalım. $[g]_{B_1} = [g]_{B_2}$ olduğundan $(v_i g) \vartheta = (v_i \vartheta) g$ (her i için) olur.

Öyleyse ϑ bir FG – izomorfizmdir.

7.8 Teorem

V , B bazlı bir FG – modül ve W , B' bazlı bir FG – modül olsun. V ve W FG – modülleri ancak ve ancak $\rho : g \rightarrow [g]_{B_1}$ ve $\sigma : g \rightarrow [g]_{B_2}$ temsilleri denk olduğunda izomorfiktir

(James ve Liebeck, 1993).

İspat: V ve W FG – modülleri izomorfik olsun. Önerme 7.7’den her $g \in G$ için $[g]_{B_1} = [g]_{B_2}$ olacak şekilde W nin bir B_2 bazı ve V nin de bir B_1 bazı vardır.

$\phi : g \rightarrow [g]_{B_1}$ ile G nin bir ϕ temsili tanımlanırsa teorem 4.10.1.(1) ’den ϕ , ρ ve σ ya denk olur. Buradan ρ ve σ nun denk olduğu sonucuna varılır. Diğer yandan ρ ve σ temsilleri denk olsun. O halde teorem 4.10.1. (2) ’den her $g \in G$ için $g\sigma = [g]_{B_2}$ olacak şekilde V nin bir B' bazı vardır. Yani $[g]_{B'} = [g]_{B_2}$ (Her $g \in G$) dir. O halde Önerme 7.7’ den V ve W FG – modülleri izomorfik olur.

7.9 Örnek

$G = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ olsun. W düzenli FG – modülünü temsil etsin .

Şu halde $1, a, a^2$ W nin bir bazıdır. Bu B' ile gösterilirse

$$[1]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [a]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [a^2]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 4.9.1’de v_1, v_2, v_3 bazı

$$v_1 1 = v_1, \quad v_2 1 = v_2, \quad v_3 1 = v_3$$

$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = v_3, \quad v_3 a = v_1$$

$$v_1 a^2 = v_3, \quad v_2 a^2 = v_1, \quad v_3 a^2 = v_2$$

şeklinde verilen V FG-modülü tanımlandı. V nin v_1, v_2, v_3 bazı için B yazılırsa

$$[g]_B = [g]_{B'} \quad (\forall g \in G)$$

olduğu görülür. Önerme 7.7 'den V ve W FG-modülleri izomorfik olur.

Gerçekten ;

$\vartheta : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \rightarrow \lambda_1 1 + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 \quad (\lambda_i \in F)$ fonksiyonu V den W ye bir FG – izomorfizmdir.

7.10 Örnek

$G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun. G nin aşağıdaki gibi tanımlanan ρ ve σ temsilleri denktir.

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a\sigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V vektör uzayı v_1, v_2 bazlı CG-modülü olsun ve v_1, v_2 bazı şu şekilde tanımlansın:

$$v_1 a = v_2, \quad v_1 b = v_1$$

$$v_2 a = -v_1, \quad v_2 b = -v_2$$

Aynı şekilde W vektör uzayı w_1, w_2 bazlı CG- modülü olsun ve w_1, w_2 bazı şu şekilde tanımlansın:

$$w_1 a = i w_1, \quad w_1 b = w_2$$

$$w_2 a = -i w_2, \quad w_2 b = w_1$$

v_1, v_2 bazı B ile, w_1, w_2 bazı ise B' ile gösterilirse her $g \in G$ için

$$\rho : g \rightarrow [g]_B \quad \text{ve} \quad \sigma : g \rightarrow [g]_{B'} \quad \text{temsilleri tanımlanabilir.}$$

Teorem 7.8' e göre V ve W CG-modülleri izomorfik olur.

Bunu doğrudan ispatlamak için

$$\vartheta : V \rightarrow W$$

$$v_1 \rightarrow w_1 + w_2$$

$$v_2 \rightarrow i w_1 - i w_2$$

ters çevrilebilir lineer dönüşümü tanımlanır.

$j=1,2$ için $(v_j a)\vartheta = (v_j \vartheta)a$ ve $(v_j b)\vartheta = (v_j \vartheta)b$ olduğundan ϑ , V den W ye bir CG-izomorfizm olur.

7.11 Örnekler

1) S_5 in (12345) tarafından üretilen alt grubu G olsun. F de tanımlı G nin permütasyon modülü düzenli FG-modülüne izomorftur.

$a=(12345)$ ve $v_1, \dots, v_5$ G nin permütasyon modülünün doğal bazı olsun.

$$\vartheta : \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_5 v_5 \rightarrow \lambda_1 1 + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 + \lambda_4 a^3 + \lambda_5 a^4$$

istenilen FG-izomorfizmidir. Çünkü

$$v_i \vartheta = a^i, \quad (v_i a) \vartheta = v_{i+1} \vartheta = a^{i+1} = (v_i \vartheta)a \text{ dır.}$$

2) V bir FG-modülü olsun.

$V_0 = \{v \in V : vg = v, \text{ her } g \in G \text{ için}\}$ alt kümesi V nin bir FG-altmodülüdür.

$$\vartheta : v \rightarrow \sum_{g \in G} vg \quad (v \in V)$$

fonksiyonu V den V_0 a bir FG-homomorfizmidir.

V_0 ın V nin bir FG-altmodülü olduğunu göstermek kolaydır.

$u, v \in V$ için

$$(u+v) \vartheta = \sum_{g \in G} (u+v)g = \sum_{g \in G} (ug+vg) = \sum_{g \in G} ug + \sum_{g \in G} vg = u \vartheta + v \vartheta$$

$$(\lambda v) \vartheta = \sum_{g \in G} (\lambda v)g = \lambda \sum_{g \in G} vg = \lambda (v \vartheta)$$

olduğundan ϑ bir lineer dönüşümdür.

$$\text{Ayrıca } x \in G \text{ olsun. } (vx) \vartheta = \sum_{g \in G} vxg = \sum_{g \in G} vg = \sum_{g \in G} vgx = (v \vartheta)x$$

$$(vx) \vartheta = v \vartheta = (v \vartheta)x$$

Şu halde ϑ , V den V_0 a bir FG-homomorfizmidir.

Dikkat edilirse $V \vartheta \subseteq V_0$ dır.

7.12 Direkt Toplamlar

Şimdi FG-modüllerinin direkt toplamı ele alınarak bunların FG-homomorfizmleri meydana getirdiği gösterilecektir.

V , bir FG-modülü olsun. U, W V nin FG-altmodülleri olmak üzere

$$V = U \oplus W$$

olduğunu farzedelim.

$u_1, \dots, u_m$ U nun B_1 bazı ve $w_1, \dots, w_n$ W nin B_2 bazı olsun. O halde $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ V nin bazıdır. Bunu B ile gösterirsek $g \in G$ için

$$[g]_B = \left(\begin{array}{c|c} [g]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{B_2} \end{array} \right)$$

olur. Genelleştirirsek

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, U_i ($1 \leq i \leq r$) FG-altmodüllerinin direkt toplamı ve B_i, U_i ($1 \leq i \leq r$)

nin bir bazı ise $B_1, \dots, B_r$ bazlarını birleştirerek V nin bir B bazı oluşturulur ve $g \in G$ için

$$[g]_B = \left(\begin{array}{cc} [g]_{B_1} & 0 \\ \dots & \\ 0 & [g]_{B_r} \end{array} \right)$$

elde edilir.

Aşağıdaki önerme direkt toplamlardan FG-homomorfizmlerin meydana geldiğini gösterir.

7.13 Önerme

V bir FG-modülü ve $V=U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ olsun. Burada U_i ($1 \leq i \leq r$) V nin FG-altmodülüdür.

Bir $v \in V$ $v = u_1 + \dots + u_r$ ($u_i \in U_i$) şeklinde tek türlü yazılabilir.

$\pi_i: V \rightarrow V$ ($1 \leq i \leq r$) fonksiyonu $v\pi_i = u_i$ şeklinde tanımlansın.

π_i bir FG-homomorfizmdir ve V nin bir yansımasıdır.

İspat: π_i nin lineer bir dönüşüm olduğu ve bir FG-homomorfizm olduğu açıktır.

$v = u_1 + \dots + u_r$ ($u_i \in U_i$) ve $g \in G$ için

$(vg)\pi_i = (u_1g + \dots + u_rg)\pi_i = u_ig = (v\pi_i)g$ elde edilir.

Üstelik, $v\pi_i^2 = u_i$, $\pi_i = u_i = v\pi_i$ dir. Yani $\pi_i^2 = \pi_i$

Buradan π_i bir yansıma olur.

Temsil teorisinin önemli sonuçlarından biri Maschke's teoremidir. Bu teoreme göre her FG-modülü indirgenemez FG-altmodüllerinin direkt toplamı şeklinde yazılabilir.

7.14 Maschke's Teoremi

G sonlu bir grup, $F=R$ veya C olsun. V bir FG-modülü ve U , V nin bir FG-altmodülü ise

$$V=U \oplus W \quad (7.4)$$

olacak şekilde V nin bir W FG-altmodülü vardır (James ve Liebeck, 1993).

Teoremin ispatına geçmeden önce aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek: $G=S_3$ ve $V=\text{sp}(v_1, v_2, v_3)$, G nin permütasyon modülü olsun.

$u = v_1 + v_2 + v_3$ ve $U=\text{sp}(u)$ yazalım.

$ug=u$ (Her $g \in G$ için) olduğu için U , V nin FG-altmodülüdür. $V=U \oplus W$ olacak şekilde

V nin birçok W alt uzayı vardır. Örneğin $\text{sp}(v_2, v_3)$, $\text{sp}(v_1, v_2 - v_3)$ gibi. Fakat bu koşulu

sağlayan W alt uzaylarından yalnızca biri V nin FG-altmodülüdür. İşte Maschke's teoremi bu koşulu sağlayan W FG-altmodülünü bulmamızı sağlar.

İspat : U , V nin bir FG-altmodülü olsun.

$$V=U \oplus W_0$$

olacak şekilde V nin herhangi bir W_0 alt uzayı seçilsin.

(W_0 için bir çok seçim vardır. Basit olarak U nun $v_1, \dots, v_m$ bazı alınır ve V nin bir $v_1, \dots, v_n$ bazına yayılır. $W_0 = \text{sp}(v_{m+1}, \dots, v_n)$ alınır)

$v \in V$ için $v=u+w$ olacak şekilde tek $u \in U$ ve $w \in W_0$ vektörleri vardır.

$\phi : V \rightarrow V$ fonksiyonu $v\phi = u$ olacak şekilde tanımlansın. Önerme 2.14.1 'den ϕ , V nin bir yansımasıdır. $\text{Ker } \phi = W_0$ ve $\text{İm } \phi = U$ dur.

V den V ye görüntüsü U olan bir FG-homomorfizmi yaratmak için ϕ yansımasını kullanacağız.

$$v\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} vg\phi g^{-1} \quad (v \in V) \quad (7.5)$$

şeklinde $\vartheta : V \rightarrow V$ fonksiyonu tanımlanır. ϑ , V nin bir endomorfizmidir ve $\text{im } \vartheta \subseteq U$ dur.

ϑ nin bir FG –homomorfizm olduğunu gösterelim.

Her $v \in V$ ve $x \in G$ için

$$(vx)\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (vx)g\phi g^{-1}$$

$h=xg$ olacak şekilde $h \in G$ vardır.

$$(vx)\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} vh\phi h^{-1}x = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} vh\phi h^{-1} \right) x = (v\vartheta)x$$

$u \in U$, $g \in G$ için $ug \in U$ olur ve $(ug)\phi = ug$ dir.

Bunu kullanarak,

$$u\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} ug\phi g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ug) g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u = u \quad (7.6)$$

elde edilir.

$v \in V$ olsun. $v\vartheta \in U$ dur. Böylece (7.6) 'dan $(v\vartheta)\vartheta = v\vartheta$ elde edilir. Böylece $\vartheta^2 = \vartheta$ olur.

Şu halde $\vartheta : V \rightarrow V$ fonksiyonu hem bir FG-homomorfizm hem de bir yansımadır. Üstelik (7.6) , $\text{Im } \vartheta = U$ olduğunu gösterir. $W = \text{Ker } \vartheta$ olsun. W , V nin bir FG-altmodülüdür ve önerme 2.14.4' den $V = U \oplus W$ yazılabilir. Bu teoremin ispatını tamamlar.

7.14.1 Örnek

$G = S_3$ ve $V = \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$, G nin permütasyon modülü olsun.

V nin $U = \text{sp}(v_1 + v_2 + v_3)$ alt modülünü alalım. Maschke's teoreminin ispatını kullanarak $V = U \oplus W$ olacak şekilde V nin W FG-altmodülünü bulalım.

İlk olarak $W_0 = \text{sp}(v_1, v_2)$ olsun.

$V = U \oplus W_0$ (W_0 FG-altmodül değil)

U üzerinde tanımlı ϕ yansıması

$\phi : v_1 \rightarrow 0, v_2 \rightarrow 0, v_3 \rightarrow v_1 + v_2 + v_3$ şeklinde tanımlanır. (7.5) 'den ϑ FG-homomorfizmi

$\vartheta : v_i \rightarrow \frac{1}{3} (v_1 + v_2 + v_3)$ ($i = 1, 2, 3$) şeklinde bulunur. Buradan W FG-altmodülü $\text{ker } \vartheta$ ye

eşit olur. Yani $W = \text{sp}(v_1 - v_2, v_2 - v_3)$ dir.

Gerçekten $W = \left\{ \sum \lambda_i v_i : \sum \lambda_i = 0 \right\}$ dir.

Eğer B , V nin $v_1 + v_2 + v_3, v_1, v_2$ bazı ise her $g \in G$ için $[g]_B = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$ formundadır.

Sıfırlar U nun V nin bir FG-altmodülü olduğu gerçeğini yansıtır.

$v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_2, v_2 - v_3$ bazını kullanırsak ve bu bazı B' ile gösterirsek

$$[g]_B = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \text{ elde ederiz. Çünkü } \text{sp}(v_1 - v_2, v_2 - v_3) \text{ de } V \text{ nin bir FG-alt modülüdür.}$$

Bu örnek Maschke's teoreminin matris versiyonunu resimlendirir. Bir sonlu G grubu için ,

$$[g]_B = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array} \right) \text{ (her } g \in G \text{ için) (bakınız 5.1)}$$

formunda olacak şekilde bir V FG-modülünün B bazını seçersek $[g]_B$ (her $g \in G$ için)

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \text{ formunda olacak şekilde bir } B' \text{ bazı bulabiliriz.}$$

Bu sonucu indirgenebilir temsillerde kullanabiliriz. ρ , n . mertebeden bir G sonlu grubunun bir indirgenebilir temsili olsun. ρ nin

$$g \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array} \right) \text{ (} g \in G \text{) (} X_g \text{ } k \times k \text{ matris } 0 < k < n \text{) formunda bir temsile denk olduğunu biliyoruz.}$$

Maschke's teoremi ρ nin $g \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A_g & 0 \\ \hline 0 & B_g \end{array} \right) \text{ (} A_g \text{ bir } k \times k \text{ matris) formunda bir temsile denk olduğunu ileri sürer.}$

7.14.2 Not: (Maschke's Teoreminin Sonucu)

G sonlu bir grup olmak üzere her sıfırdan farklı V FG-modülü

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

şeklinde $U_1, \dots, U_r$ indirgenemez FG-modüllerinin direkt toplamıdır.

7.14.3 Örnekler

1) G sonlu bir grup ve $\rho : G \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$, G nin bir temsili olsun. $(g\rho)(h\rho) \neq (h\rho)(g\rho)$ olacak şekilde $g, h \in G$ olduğunu farzedelim. O halde ρ indirgenemezdir.

Çözüm: ρ nin indirgenebilir olduğunu farzedelim. Maschke's Teoreminden ρ temsili

$g\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_g & 0 \\ 0 & \mu_g \end{pmatrix}$ ($\lambda_g, \mu_g \in \mathbb{C}$) formunda bir σ temsiline denktir.

Diagonal matrisler çarpma işlemine göre değişmeli olduğundan

$(g\sigma)(h\sigma) = (h\sigma)(g\sigma)$ (tüm $g, h \in G$ ler için) dir.

Buradan ρ ve σ denk olduklarından $(g\rho)(h\rho) = (h\rho)(g\rho)$ (tüm $g, h \in G$ ler için) olur.

Bu bir çelişkidir. O halde ρ indirgenemezdir.

2) Her sonlu basit G grubu için , bir dürüst indirgenemez CG -modülü vardır.

Çözüm: Düzenli bir CG CG -modülünün dürüst olduğunu biliyoruz.

$U_1, \dots, U_r$ CG nin indirgenemez CG -altmodülleri olmak üzere $CG = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ yazalım.

Bazı $u \in U_i$ ler için $ug \neq u$ olacak şekilde $i \in \{1, \dots, r\}$ ve $g \in G$ vardır. (Aksi takdirde her $v \in CG$ için $vg = v$ dir.)

$K = \{x \in G : vx = v, \text{ tüm } v \in U_i \text{ ler için} \}$ kümesini tanımlayalım.

K , G nin bir normal alt grubudur.

$g \notin K$ olduğundan $K \neq G$ dir.

G basit bir grup olduğundan $K = \{1\}$ olmak zorundadır. Bunun anlamı U_i bir dürüst indirgenemez CG -modülüdür.

7.15 Schur's Lemma

Schur's lemma indirgenemez modüllerle ilgilidir. Schur's lemması RG -modüllerinden çok CG -modüllerini içerir.

G sonlu bir grup , V ve W indirgenemez CG -modülleri olsun.

1) Eğer $\vartheta : V \rightarrow W$ bir CG -homomorfizm ise ya ϑ bir CG -izomorfizmdir ya da her $v \in V$ için $v\vartheta = 0$ dir.

2) $\vartheta : V \rightarrow V$ bir CG -izomorfizm ise $\vartheta = 1_V$ birim endomorfizminin bir skaler katıdır.

İspat: 1) $v\vartheta \neq 0$ (bazı $v \in V$ için) olsun. O halde $\text{Im } \vartheta \neq \{0\}$ olur. $\text{Im } \vartheta$, W nin bir CG -

altmodülü ve W indirgenemez olduğundan $\text{Im } \vartheta = W$ elde edilir. $\text{Ker } \vartheta$, V nin bir CG-altmodülüdür. $\text{Ker } \vartheta \neq V$ ve V indirgenemez olduğundan $\text{Ker } \vartheta = \{0\}$ dır. ϑ ters çevrilebilir olduğundan ϑ bir CG-izomorfizm olur.

2) (2.17)'den ϑ endomorfizmi bir $\lambda \in C$ özdeğerine sahiptir ve $\text{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) \neq \{0\}$ dır. Buradan $\text{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V)$, V nin sıfırdan farklı bir CG-altmodülüdür. V indirgenemez olduğundan $\text{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) = V$ olur. Bu yüzden

$v(\vartheta - \lambda 1_V) = 0$ (her $v \in V$ için) olur. Yani $\vartheta = \lambda 1_V$ dir.

7.16 Önerme

V , sıfırdan farklı bir CG-modülü olsun. Her V den V ye bir CG-homomorfizm 1_V nin bir skaler katı ise V indirgenemezdir (James ve Liebeck, 1993).

İspat: V nin indirgenebilir olduğunu farzedelim. Şu halde $\{0\}$ ve V den farklı bir U CG-altmodülüne sahiptir. Maschke's teoreminden $V = U \oplus W$ olacak şekilde bir W CG-altmodülü vardır.

Her $u \in U$, $w \in W$ için $(u+w)\pi = u$ şeklinde tanımlanan $\pi: V \rightarrow V$ yansıması bir CG-homomorfizmdir ve 1_V nin bir skaler katı değildir.

7.17 Önerme

$\rho: G \rightarrow GL(n, C)$, G nin bir temsili olsun. Ancak ve ancak

$$(g\rho)A = A(g\rho) \quad (\text{her } g \in G \text{ için})$$

koşulunu sağlayan her A $n \times n$ matrisi $A = \lambda I_n$ ($\lambda \in C$) formuna sahipse ρ indirgenemezdir.

İspat: C^n , $v g = v(g\rho)$ ($v \in C^n$, $g \in G$) ile tanımlı bir CG-modülüdür. A , C üzerinde

$n \times n$ matris olsun. C^n in $v \rightarrow vA$ endomorfizmi ancak ve ancak

$$(vg)A = (vA)g \quad (v \in C^n, g \in G) \text{ olduğunda bir CG-homomorfizmdir.}$$

Yani $(g\rho)A = A(g\rho)$ (her $g \in G$ için) olur.

7.17.1 Örnekler

1) $G=C_3=\langle a : a^3=1 \rangle$ ve $\rho : G \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ temsili

$$1\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^2\rho = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ şeklinde verilsin.}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ matrisi $g \in G$ için $(g\rho)A = A(g\rho)$ yı sağlar. A matrisi $A = \lambda I_2$ formunda olmadığından ρ indirgenebilir.

2) $G=D_{10}=\langle a, b : a^5=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1} \rangle$ ve $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ olsun.

$\rho : G \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ temsili

$$a\rho = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ matrisi } (a\rho)A = A(a\rho) \text{ ve } (b\rho)A = A(b\rho) \text{ koşullarını sağlasın.}$$

$(a\rho)A = A(a\rho)$ den $\beta = \gamma = 0$ elde edilir.

$(b\rho)A = A(b\rho)$ den $\alpha = \delta$ olur.

O halde $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I$ dır. Dolayısıyla ρ indirgenemezdir.

8. İNDİRGENEMEZ MODÜLLER ve GRUP CEBRİ

G sonlu bir grup ve CG , G nin bir grup cebri olsun. CG yi CG –modülü olarak düşünün. Maschke’s teoreminin sonucundan

$CG = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ yazılabilir. Burada $U_1, \dots, U_r$ indirgenemez CG -modülleridir.

Bu bölümde her indirgenemez CG -modülünün $U_1, \dots, U_r$ CG - modüllerinden birine izomorf olduğu gösterilecektir. Sonuç olarak, izomorf olmayan sonlu sayıda indirgenemez CG -modülü vardır. Tüm indirgenemez CG -modüllerini bulmak için CG yi indirgenemez CG -altmodüllerinin direkt toplamı olarak ayırtırmak yeterlidir. Fakat bu yöntem eğer G küçük bir grup olmazsa pek de pratik değildir.

CG nin İndirgenemez Alt Modülleri

Maschke’s teoreminin bir başka sonucunu verelim.

8.1 Önerme

V ve W CG -modülleri ve $\vartheta : V \rightarrow W$ bir CG -homomorfizm olsun. O halde V nin

$$V = \text{Ker } \vartheta \oplus U \quad \text{ve} \quad U \cong \text{İm } \vartheta$$

olacak şekilde bir U CG -altmodülü mevcuttur.

İspat: $\text{Ker } \vartheta$, V nin bir CG -altmodülüdür. O halde Maschke’s teoreminden $V = \text{Ker } \vartheta \oplus U$ olacak şekilde V nin bir U CG -altmodülü vardır.

$$\bar{\vartheta} : U \rightarrow \text{İm } \vartheta$$

$$u \bar{\vartheta} = u \vartheta \quad (u \in U)$$

fonksiyonu tanımlansın.

$\bar{\vartheta}$ nin bir CG -izomorfizm olduğunu gösterelim.

$\bar{\vartheta}$ nin bir CG - homomorfizm olduğu açıktır. Çünkü ϑ bir CG -homomorfizmdir.

$u \in \text{Ker } \bar{\vartheta}$ ise $u \in \text{Ker } \vartheta \cap U = \{0\}$ dır. Buradan $\text{Ker } \bar{\vartheta} = \{0\}$ olur.

Şimdi $w \in \text{İm } \vartheta$ için $w = v \vartheta$ olacak şekilde $v \in V$ vardır.

$k \in \text{Ker } \vartheta$, $u \in U$ için $v = k + u$ yazalım. O halde

$$w=v\vartheta=k\vartheta+u\vartheta=u\vartheta=u\overline{\vartheta}$$

Dolayısıyla $\text{İm } \overline{\vartheta} = \text{İm } \vartheta$ dir.

Şu halde $\overline{\vartheta}$ fonksiyonu ters çevrilebilir bir CG-homomorfizmdir. Buradan $U \cong \text{İm } \vartheta$ olur.

8.2 Önerme

V , bir CG-modülü olsun ve $U_1, \dots, U_s$ indirgenemez CG-altmodülleri için

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$$

yazılsın. Eğer U , V nin herhangi bir indirgenemez CG-altmodülü ise $U \cong U_i$ ($1 \leq i \leq s$) olur.

İspat: $u \in U$ için $u = u_1 + \dots + u_s$ ($u_i \in U_i$, $1 \leq i \leq s$) şeklinde tek türlü yazılabilir.

$\pi_i : U \rightarrow U_i$, $u \pi_i = u_i$ fonksiyonu tanımlansın.

Bazı $u \in U$ lar için i yi $u_i \neq 0$ olacak şekilde seçersek $\pi_i \neq 0$ olur.

π_i bir CG-homomorfizmdir.

U ve U_i indirgenemez ve $\pi_i \neq 0$ olduğu için schur's lemma 7.15.(1) 'den π_i bir CG-izomorfizm olur. Bu yüzden $U \cong U_i$ olur.

U , U_i ($1 \leq i \leq s$) lerden herhangi birine eşit olmadan $U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ ($U_1, \dots, U_s$ indirgenemez CG-modülleri) nin indirgenemez CG-altmodülü olabilir. Bu aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

8.3 Örnek

G herhangi bir grup ve V , 2-boyutlu v_1, v_2 bazlı $vg = v$ (her $v \in V$ ve $g \in G$ için) şeklinde tanımlanan bir CG-modülü olsun.

$U_1 = \text{sp}(v_1)$, $U_2 = \text{sp}(v_2)$ indirgenemez CG-altmodülleridir.

$V = U_1 \oplus U_2$ yazılabilir. $U = \text{sp}(v_1 + v_2)$ de indirgenemez CG-altmodülüdür ve U_1 ve U_2 ye eşit değildir.

8.4 Teorem

CG yi düzenli CG-modülü olarak düşünün. $CG, U_1, \dots, U_r$ indirgenemez CG-altmodüllerinin direkt toplamı olsun. Yani $CG = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ yazılsın.

O halde her indirgenemez CG-modülü $U_1, \dots, U_r$ CG-modüllerinden birine izomorftur.

İspat: W , indirgenemez CG-modülü olsun ve sıfırdan farklı bir $w \in W$ alalım.

$\{wr : r \in CG\}$, W nin CG-altmodülü olduğunu ileri sürelim. W indirgenemez olduğundan

$$W = \{wr : r \in CG\} \quad (8.1)$$

olacaktır. Şimdi $\vartheta : CG \rightarrow W$, $r\vartheta = wr$ ($r \in CG$) fonksiyonunu tanımlayalım.

ϑ nin bir lineer dönüşüm olduğu açıktır. (8.1)'den $\text{Im } \vartheta = W$ dir. Üstelik ϑ bir CG-homomorfizmdir. Çünkü $r, s \in CG$ için

$$(rs)\vartheta = w(rs) = (wr)s = (r\vartheta)s \text{ dir.}$$

Önerme 8.1 'den $CG = U \oplus \text{Ker } \vartheta$ ve $U \cong \text{Im } \vartheta = W$

olacak şekilde CG nin bir U CG-altmodülü vardır.

W indirgenemez olduğundan U da indirgenemezdir. Önerme 8.2 ile bazı i ler için $U \cong U_i$ olur.

O halde $W \cong U_i$ istenen sonuçtur.

Teorem 8.4 indirgenemez CG-modüllerinin sonlu bir kümesinin var olduğunu gösterir. Her indirgenemez CG-modülü bu kümedeki indirgenemez CG-modüllerinden birine izomorftur.

Not : G sonlu bir grup ise sonlu sayıda izomorf olmayan indirgenemez CG-modülü vardır.

8.5 Örnek

$$G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle \text{ ve } \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ olsun.}$$

$$v_0, v_1, v_2 \in CG$$

$$v_0 = 1 + a + a^2$$

$$v_1 = 1 + \omega^2 a + \omega a^2$$

$$v_2 = 1 + \omega a + \omega^2 a^2$$

şeklinde tanımlansın.

$i=0,1,2$ için $U_i = \text{sp}(v_i)$ olsun.

$$v_1 a = a + \omega^2 a^2 + \omega 1 = \omega v_1$$

Benzer şekilde

$$v_i a = \omega^i v_i \quad (i=0,1,2 \text{ için})$$

Buradan U_i ($i=0,1,2$), CG nin bir CG-altmodülüdür.

v_0, v_1, v_2 , CG nin bir bazıdır ve buradan CG, U_i ($i=0,1,2$) indirgenemez CG-altmodüllerinin direkt toplamıdır. $CG = U_0 \oplus U_1 \oplus U_2$

Teorem 8.4 ' den her indirgenemez CG-modülü U_0, U_1 ya da U_2 den birine izomorftur.

9. SONUÇ

Sekiz bölümden oluşan bu çalışma özetlenirse temsil teorisi ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- 1) Bir G grubunun bir temsili bazı n ' ler için G ' den $GL(n,F)$ ' ye bir homomorfizmdir.
- 2) G nin ρ ve σ temsilleri ancak ve ancak tüm $g \in G$ ' ler için $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$ olacak şekilde bir T ters çevrilebilir matrisi varsa denk olur.
- 3) Bir temsil eğer bire bir ise dürüst temsildir.
- 4) Bir V FG -modül , elemanlarının sağdan G grubunun elemanları ile çarpımı işlemine göre F üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu çarpma işlemi tanım 4.2 ' deki (1)-(5) özelliklerini sağlar.
- 5) Aşağıdaki şekilde , FG -modülleri ile G nin temsilleri arasında yakın bir ilişki vardır.
 - a) $\rho : G \rightarrow GL(n,F)$, G nin bir temsili olsun. Eğer $vg = v(g\rho)$ ($v \in F^n$, $g \in G$) çarpımı tanımlanırsa F^n bir FG -modül olur.
 - b) Eğer V , B bazlı bir FG -modül ise $\rho : g \rightarrow [g]_B$, G nin bir temsidir.
- 6) Eğer G , S_n in bir alt grubu ise G nin permütasyon modülü $v_1, \dots, v_n$ bazına sahip olur ve tüm $g \in G$ ler için $v_i g = v_{ig}$ ($1 \leq i \leq n$) olur.
- 7) V , bir FG -modül ve W , kendisi de FG -modül olan V nin bir alt uzayı ise W , V nin bir FG -altmodülüdür.
- 8) V FG -modül , eğer sıfırdan farklı ise ve FG -altmodülleri sadece $\{0\}$ ve V ise indirgenemezdir.
- 9) F de tanımlı G nin FG grup cebri , G nin elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarından oluşur ve doğal bir çarpmaya sahiptir.
- 10) vg ($v \in FG$, $g \in G$) doğal çarpımı ile tanımlı FG -vektör uzayı , düzenli FG -modülüdür.
- 11) Düzenli FG -modül dürüsttür.
- 12) V ve W FG - modülleri için tanımlanan $\vartheta : V \rightarrow W$ lineer dönüşümü $(vg)\vartheta = (v\vartheta)g$ (her $v \in V$, $g \in G$ için) eşitliğini sağlarsa bir FG -homomorfizm olur.

- 13) FG-homomorfizmlerin çekirdek ve görüntüleri de FG-modülleridir.
- 14) İzomorfik FG-modülleri denk temsillere karşılık gelir.
- 15) U, V nin bir FG-altmodülü ise $V=U \oplus W$ olacak şekilde bir W FG-altmodülü vardır.
- 16) Her sıfırdan farklı V FG-modülü bir takım indirgenemez FG-modüllerinin direkt toplamıdır.

$$V=U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

- 17) Schur's lemması şunu belirtir: İndirgenemez CG-modülleri arasında tanımlı her CG-homomorfizm ya sıfırdır ya da bir CG-izomorfizmdir. Üstelik bir indirgenebilir CG-modülünden kendisine tanımlı CG-homomorfizm birim elemanın bir skaler katıdır.
- 18) V ve W CG-modülleri ve $\vartheta: V \rightarrow W$ bir CG-homomorfizm olsun. O halde V nin bir U CG-altmodülü vardır ki :

$$V = \text{Ker } \vartheta \oplus U \quad \text{ve} \quad U \cong \text{Im } \vartheta$$

koşullarını sağlar.

- 19) V , bir CG-modülü olsun ve $U_1, \dots, U_s$ indirgenemez CG-modülleri için

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$$

yazılsın. Eğer U, V nin herhangi bir indirgenemez CG-altmodülü ise $U \cong U_i$ ($1 \leq i \leq s$) olur.

KAYNAKLAR

Coxeter, H.S.M. ve Moser, W.J.O., (1980), Generators and Relations for Discrete Groups (Fourth Edition), Springer-Verlag.

Fraleigh, J.B., (1982) , A First Course in Abstract Algebra (Third Edition), Addison-Wesley.

James , G. ve Liebeck , M. , (1993), Representations and Characters of Groups , Cambridge University Press.

Lipschutz , S. , (1968), Linear Algebra , Mc Graw Hill Book Co., NewYork.

Passman, D.S., (1968) , Permutation Groups.

Right , D. ve Axler , S. , (1996) , Linear Algebra , NewYork.

Rotman, J.J., (1984), An Introduction to the Theory of Groups (Third Edition) , Allyn and Bacon.

Şenkon , H. , (1993) , Soyut Cebir Dersleri, İstanbul.

Zeren , B. , (1997) , Soyut Matematik Dersi Notları , İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 01.08.1978

Doğum Yeri İstanbul

Lise 1993-1995

Zeytinburnu Mensucat Santral Lisesi

Lisans 1996-2000

İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi

Matematik Bölümü

Y. Lisans 2000-2003

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri

Enstitüsü Matematik Mühendisliği

Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği

Programı

Çalıştığı Kurum

2002-Devam Ediyor

Zeytinburnu Ziya Gökalp İlköğretim

Okulunda Matematik Öğretmeni