YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİKTE BULANIK SAYILAR

Matematikçi İlhan DAŞ

F.B.E. Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

Doç. Dr. Fatma Tiryaki

Prof. Dr. Mehmet Ahlatçıoğlu

İSTANBUL, 2003

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

a_i	Güven aralığı sınırları
A^{-1}	A bulanık sayısının tersi
E	Herhangi bir referans kümesi
F_L	$\phi(x)$ için genişleme
F_R	$\phi(x)$ için büzülme
N	Doğal sayılar kümesi
m_i	$\phi(x)$'in değerinin 1 olduğu nokta
max	Maksimum
min	Minimum
R	Reel sayılar kümesi
R^+	Pozitif reel sayılar kümesi
u_i	$[0,\infty)$ aralığında bir reel sayı
v_i	$[0,\infty)$ aralığında bir reel sayı
μ_A	Üyelik fonksiyonu
$\phi(x)$	Referans fonksiyonu
α_i	Güven seviyesi
Z	Tam sayılar kümesi
$\wedge$	Bulanık sayıların minimumu
$\vee$	Bulanık sayıların maksimumu

KISALTMA LİSTESİ

TFN	Triangular Fuzzy Number
T_rFN	Trapezoidal Fuzzy Number

ŞEKİL LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖNSÖZ

Çalışmam sırasında, tezimi yönetip danışmanlığımı yapan ve hiçbir zaman benden güler yüzlülüğü ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL'e sonsuz teşekkür ederim.

Yine bu süre zarfında ve dışında, bana hem çalışmalarımda katkıda bulunan hem de manevi destek olan arkadaşım Sayın Araştırma Görevlisi S. Ebru YENİ'ye en içten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca benim bugünkü konumumda olmamı sağlayan en önemli iki insana; canım anne ve babama teşekkür ederim.

ÖZET

Bu çalışmada; bulanık mantığın tarihsel gelişimi anlatıldı. Bulanık sayılar, bulanık kümeler ve güven aralıkları üzerinde durulup, bulanık sayılar ile güven aralıklarında işlemler nümerik örneklerle tanıtılmıştır. Bulanık sayıların maksimum, minimum, konvülüsyon ve dekonvülüsyonları ayrıca örnekleriyle açıklanmıştır.

Yine araştırmada; Dubois ve Prade'in L-R bulanık sayıları, katlı, yarı simetrik, bir yarı simetrik ve iki yarı simetrik L-R bulanık sayıları açıklanmıştır. Bununla birlikte, üçgen bulanık sayılar ve ikizkenar yamuk bulanık sayılar üzerinde de durulmuştur. Son bölümde, bulanık mantığın günlük hayatta, sanayide ve teknolojik alanda nerelerde kullanıldığı verilmek istenmiştir.

Anahtar kelimeler: Bulanık sayı, güven aralığı, konvülüsyon, dekonvülüsyon, L-R bulanık sayılar.

ABSTRACT

In this work, historical development of the fuzzy logic is told. We talk about fuzzy numbers, fuzzy sets and confidence intervals, and operations about fuzzy numbers. Confidence intervals are described with numerical examples. Maximum, minimum, convolution and deconvolution of fuzzy numbers are also explained (with examples).

Again in this study, L-R fuzzy numbers of Dubois and Prade, fuzzy numbers with flat, semisymmetric, one semisymmetric and two semisymmetric are examined. Furthermore, triangular fuzzy numbers and trapezoidal fuzzy numbers are told. In the last section, we want to give where the fuzzy logic is used in life, industry and technology.

Keywords: Fuzzy number, confidence interval, convolution, deconvolution, L-R fuzzy number.

1. GİRİŞ

Geçen yüzyılın başlarında, fen ve mühendislikte karmaşık-gerçek dünya sistemleri, kesin matematiksel modeller içine indirgenerek çözülürdü. Yüzyılın ortasında, yöneylem araştırması gerçek dünya karar verme problemlerine uygulanmaya başlandı ve böylece yöneylem araştırması, fen ve mühendislikte en önemli alanlardan biri oldu. Ancak gerçek dünya problemleri o kadar kararlı (kesin) değildi ve bu yüzden kesin matematiksel modeller bütün uygulamalı problemlerle uğraşmak için yeterli değildi.

Kesin olmama (kararsız olma) ile uğraşılırken genellikle, olasılık teorisi kavramı ve teknikleri kullanılırdı. 1930'larda ünlü Amerikan filozofu Max Black tarafından belirsizliği açıklayıcı öncü kavramlar geliştirilmiş olsa bile sonradan 1965'te Azerbaycan Türklerinden Lütfi Asker Zadeh tarafından yayınlanan "Bulanık Kümeler" adlı makale, modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. "Bulanık" terimi 1962'de Zadeh tarafından "Devre Teorisinden Sistem Teorisine" adlı makalesinde ortaya atılmış ve 1965'de Zadeh, "Bulanık Kümeler" adlı makalesini yayınlamıştır. Bulanık küme teorisi, basitleştirilmiş modeli faydalı hale getirmek için geliştirilmiş ve bu yüzden insani durumları içeren gerçek dünya sistemlerinin çözümü sırasında daha fazla sağlam ve esnek model geliştirilebilir. Üstelik karar verici sadece kısıtlar altında varolan seçenekleri göz önüne almayıp ayrıca yeni seçeneklerin geliştirilmesine de yardımcı olur. Asker Zadeh bu makalede, kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu bulanık küme teorisini ortaya koymuştur. Zadeh'in bu makalesinin önemi; sadece ihtimaller teorisine karşı duruşu ilgili değil ayrıca ihtimaller teorisinin temelini oluşturan Aristo mantığına karşı da bir meydan okuma olmasıdır.[1]

Bulanık küme teorisinin üyelikten üye olmamaya dereceli geçişi ifade etmesindeki yeteneği, geniş faydaları olan bir niteliktedir. Bize, belirsizliğin ölçülmesinde güçlü ve anlamlı araçlar sunmasının yansıra, doğal dilde ifade edilen belirsiz kavramların anlamlı bir şekilde temsilini de vermektedir. Fakat Aristo mantığı üzerinde temellenen, klasik küme teorisi verilen bir alana ait bütün bireyleri incelenen özelliğe göre ikiye ayırır; kümeye ait olan elemanlar ve ait olmayanlar. Kümeye ait ve ait olmayan elemanlar arasında kesin ve belirli bir ayrım vardır. Doğal dilde ifade edilen ve üzerinde çalıştığımız çoğu sınıflandırma kavramı, bu türde bir karakterde değildir. Örneğin; kısa insanlar kümesi, pahalı evler kümesi, yakın sürüş mesafesi, hızlı arabalar, güvenilir paraşüt takımları, birden çok büyük sayıların oluşturduğu küme gibi kavramlar klasik kümenin öngördüğü şekilde incelenemezler. Bu kümeler, kesin olmayan sınırlara sahip olarak kabul edilir ve üyelikten üye olmamaya geçişin dereceli olduğu göz önüne alınarak işlem yapılır (Lai ve Hwang, 1992).

Bulanık bir küme, çalışma yapılan alana ait her bir bireye matematiksel olarak kümedeki üyelik derecesini temsil eden bir değer atayarak tanımlanır. Bu değer, elemanın bulanık küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini ifade eder. Bundan dolayı bireylerin kümeye ait olması farklılaşır. Üyelik dereceleri 0 ile 1 arasındaki gerçel sayılarla temsil edilirler. Tam üye olma ve üye olmama durumu, bulanık kümede sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bundan dolayı, klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak da görülebilir.

Bulanık küme üzerine yapılan araştırmalar ortaya çıktığı günden bu yana hızla büyümüştür. Oluşturduğu kavramsal çerçeve ve sonuçları itibariyle şu anda oldukça geniş bir perspektife sahiptir. Uygulama alanlarının genişliği ve bu alanlarda oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından bulanık küme teorisi, bugün bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır.

Bilginin eksik olmasından (veya tam olmaması) dolayı kesin matematik, bir karmaşık sistemi modellemede yetersiz kalır. Genel olarak bu eksikliğin işlenmesinde, olasılık teorisi üstün gelen yaklaşımdır. Olasılık teorisinin esaslarından biri $p(A \cup A^c) = 1$ ve $p(A \cap A^c) = 0$ kanunudur. Örneğin bir meyve ya elma yada değildir. Bu durum için olasılık sınırları, açıkça tanımlı olan bazı bilgileri göstermek için iyi bir yaklaşımdır. Atılan bir tavla zarında sonuçlar 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 olacak fakat asla 4.5, 1.3 veya 2.1 olmayacaktır.

Bu kanunları sağlayan birçok problem vardır. Fakat diğer problemlerde bu doğru değildir. Örneğin bir adam; şık, biraz şık veya şık olmayabilir. Bir renk; kırmızı, kırmızımsı veya kırmızı olmayabilir. Bir bina; yüksek, biraz yüksek veya yüksek olmayabilir. Bu yüzden kesin sınırlar ile şık adam, kırmızı renk veya yüksek bina kümelerini tanımlamak hatalıdır. İşte bulanık küme teorisi, kesin sınırları olmayan böyle problemleri tanımlar ve çözer.

1.1 Örnek

Bir sınıfta bulunan Hüsniye, Kenan, Ahmet ve Canan adındaki dört öğrenciden oluşan bir evren göz önüne alınsın. U = {Hüsniye, Kenan, Ahmet, Canan}'dır. Bu öğrencilerin sene boyunca girdikleri tüm sınavlardan aldıkları notların ortalaması; Hüsniye = 55, Kenan = 87, Ahmet = 82, Canan = 53 olsun.

Şimdi "çalışkan öğrenciler" ifadesi ele alınsın. Bu ifadeyi tanımlayan küme bulanık bir A kümesidir.

84'den yüksek not ortalaması olanlar kesin çalışkan, 53'den az not ortalaması olanlar kesin çalışkan değil olarak kabul edilebilir. O zaman Kenan'nın kesin çalışkan olduğu ve Canan'ın kesin çalışkan olmadığı açıktır. Hüsniye ve Ahmet hakkında ne söylenebilir? Not ortalaması bakımından Hüsniye, Canan'a ve Ahmet de Kenan'a yaklaşmaktadır.

Not ortalaması yüksek olan öğrencinin, bulanık A kümesine ait olma (üyelik) derecesinin daha büyük olması gerekir. O halde aşağıdaki üyelik dereceleri yazılabilir.

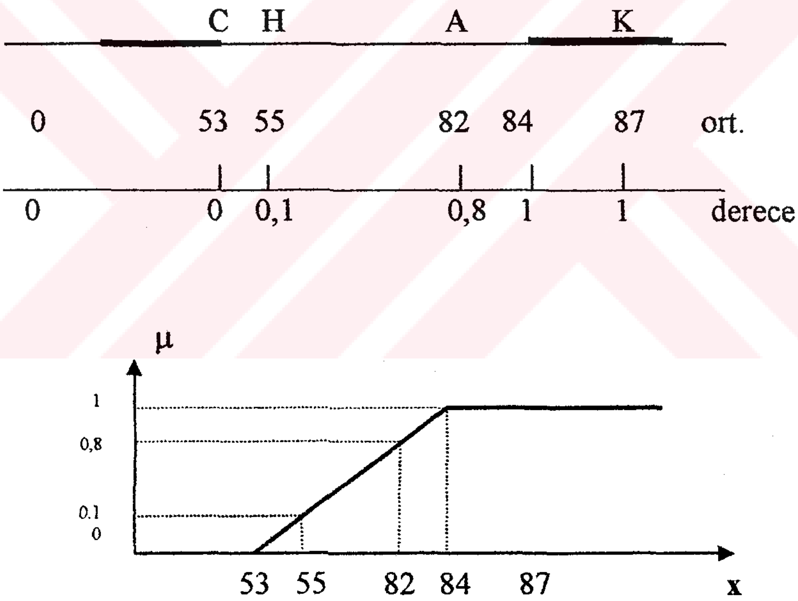
derece (Hüsniye $\in$ A) = $\mu(x = H) = 0{,}1$

derece (Kenan $\in$ A) = $\mu(x = K) = 1$

derece (Ahmet $\in$ A) = $\mu(x = A) = 0{,}8$

derece (Canan $\in$ A) = $\mu(x = C) = 0$

Burada μ, X kümesinin A bulanık alt kümesinin üyelik fonksiyonudur.



Şekil 1.1 Üyelik fonksiyonu.

2. GÜVEN ARALIĞI

Bilimde ve mühendislikte "Bir sayı; a_1'den büyük yada eşit, a_2'den küçük yada eşittir." ifadesi sık sık kullanılır. Bu göz önüne alınarak;

$A = [a_1, a_2]$

sembolü kullanılır.

Genel olarak a_1 ve a_2 sayıları sonludur fakat bazı durumlarda $a_1 = -\infty$ ve/veya $a_2 = \infty$ olarak alınması hem yararlı hem de önemlidir. Diğer durumlarda kapalı bir aralık almak yerine

$]a_1, a_2]$ yada $(a_1, a_2]$ soldan açık
$[a_1, a_2[$ yada $[a_1, a_2)$ sağdan açık
$]a_1, a_2[$ yada (a_1, a_2) soldan ve sağdan açık yada kısaca açık

notasyonları kullanılarak açık aralıklar alınabilir. Dikkat edilmelidir ki $x \in [a_1, a_2]$ olması, x'in $[a_1, a_2]$ aralığında herhangi bir değer olduğunu ifade etmektedir.

Aşağıda güven aralığı için birkaç operatör tanıtılmıştır.

2.1 Toplama

$A = [a_1, a_2]$ ve $B = [b_1, b_2]$, R'de iki güven aralığı ve $x \in [a_1, a_2]$, $y \in [b_1, b_2]$ olsun. O zaman $x + y \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$'dir.

Sembolik olarak

$$\begin{aligned} A\,(+)\,B &= [a_1, a_2]\,(+)\,[b_1, b_2] \\ &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \end{aligned} \tag{2.1}$$

yazılır (Kaufmann ve Gupta, 1991).

2.2 Çıkarma

$A = [a_1, a_2]$ ve $B = [b_1, b_2]$, R'de iki güven aralığı ve $x \in [a_1, a_2]$, $y \in [b_1, b_2]$ ise o zaman $x - y \in [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$'dir.

Sembolik olarak

$$\begin{aligned} A\,(-)\,B &= [a_1, a_2]\,(-)\,[b_1, b_2] \\ &= [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \end{aligned} \tag{2.2}$$

yazılır (Kaufmann ve Gupta, 1991).

2.3 Kesin Bir Sayıya İndirgeme

L, R'de herhangi bir sayı olsun. Bu durumda L'nin güven aralığı şeklinde yazılımı L = [l, l] gibidir. Örneğin; 0 = [0,0] ve 2 = [2,2]'dir.

2.4 Görüntüsü

$x \in [a_1, a_2]$ ise $-x \in [-a_2, -a_1]$'dir. Dolayısıyla A bir güven aralığı ise, görüntüsü

$$A^- = [-a_2, -a_1] \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır (Kaufmann ve Gupta, 1991) ve

$$\begin{aligned} A\,(+)\,A^- &= [a_1, a_2]\,(+)\,[-a_2, -a_1] \\ &= [a_1 - a_2, a_2 - a_1] \neq 0\text{'dır.} \end{aligned}$$

2.5 Toplama ve Görüntüsünün Özellikleri ve Yapısı

$\forall A,B,C \subset R$ için:

$A\,(+)\,B = B\,(+)\,A$	değişme	(2.4)
$A\,(+)\,(B\,(+)\,C) = (A\,(+)\,B)\,(+)\,C$	birleşme	(2.5)
$A\,(+)\,0 = 0\,(+)\,A = A$	etkisiz eleman	(2.6)

özelliklerine sahiptir (Klir ve Yuan, 1988).

Ayrıca görüntüsü simetrik değildir; yani $A\,(+)\,A^- = A^-\,(+)\,A \neq 0$'dır.

Bu özellik, R'deki güven aralığı kümesinin toplama işlemi için yarı grup yapısına sahip olduğunu gösterir; fakat bir grup yapısına sahip değildir. Çıkarma işleminin ise birleşme özelliği yoktur.

2.5.1 Örnek

A = [3.17, 5.62], B = [– 4.89, 1.45] ve C = [– 3.67, – 2.53] olsun. O halde

$A\,(+)\,B = [3.17, 5.62]\,(+)\,[-4.89, 1.45] = [3.17 - 4.89, 5.62 + 1.45] = [-1.72, 7.07]$

$A\,(-)\,B = [3.17, 5.62]\,(-)\,[-4.89, 1.45] = [3.17 - 1.45, 5.62 + 4.89] = [1.72, 10.51]$

$$\begin{aligned} (A\,(+)\,B)\,(-)\,C &= ([3.17, 5.62]\,(+)\,[-4.89, 1.45])\,(-)\,[-3.67, -2.53] \\ &= [-1.72, 7.07]\,(-)\,[-3.67, -2.53] \\ &= [0.81, 10.74] \end{aligned}$$

$A^- = [-5.62, -3.17]$

$A\ (+)\ A^{-} = [3.17,\ 5.62]\ (+)\ [-5.62,\ -3.17] = [-2.45,\ 2.45]$

'dir.

2.6 Çarpma

Eğer $x \in [a_1, a_2]$ ve $y \in [b_1, b_2]$ güven aralıkları R^+ 'ya aitse $x \cdot y \in [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$'dir. Bu yüzden

$$A\ (\cdot)\ B = [a_1, a_2]\ (\cdot)\ [b_1, b_2] = [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2] \qquad (2.7)$$

yazılabilir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

A ve B, R^+ yerine R'ye ait olduğunda sonuç daha karmaşık hale gelir. Çünkü a_1, a_2, b_1 ve b_2 sayıları negatif olabilir ve farklı dokuz kombinasyon ortaya çıkar.

2.7 Bölme

Bölme sadece R^+ 'da tanımlanmıştır.

$$A\ (:)\ B = [a_1, a_2]\ (:)\ [b_1, b_2] = [a_1 / b_2, a_2 / b_1] \qquad (2.8)$$

Eğer $b_1 = 0$ ise, üst sınır $+\infty$'a doğru artar. Eğer $b_1 = b_2 = 0$ ise, güven aralığı $+\infty$'a genişler (Kaufmann ve Gupta, 1991).

2.8 Tersi

Eğer $x \in [a_1, a_2] \subset R_0^+$ ise $1/x \in [1/a_2, 1/a_1]$'dir ve

$$A^{-1} = [a_1, a_2]^{-1} = [1/a_2, 1/a_1]\text{'dir.} \qquad (2.9)$$

2.9 Çarpma ve Tersinin Özellikleri ve Yapısı

$\forall A,B,C \subset R^+$ için:

$A\ (\cdot)\ B = B\ (\cdot)\ A$ değişme (2.10)

$(A\ (\cdot)\ B)\ (\cdot)\ C = A\ (\cdot)\ (B\ (\cdot)\ C)$ birleşme (2.11)

özelliklerine sahiptir (Klir ve Yuan, 1988). Aşağıda birleşme özelliği gösterilmektedir:

$$\begin{aligned}([a_1, a_2]\ (\cdot)\ [b_1, b_2])\ (\cdot)\ [c_1, c_2] &= [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]\ (\cdot)\ [c_1, c_2] \\ &= [a_1 \cdot b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 \cdot c_2]\end{aligned}$$

Ayrıca

$[a_1, a_2]\ (\cdot)\ ([b_1, b_2]\ (\cdot)\ [c_1, c_2]) = [a_1, a_2]\ (\cdot)\ [b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2]$

$= [a_1 \cdot b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 \cdot c_2]$'dir.

Bu yüzden $([a_1, a_2]\ (\cdot)\ [b_1, b_2])\ (\cdot)\ [c_1, c_2] = [a_1, a_2]\ (\cdot)\ ([b_1, b_2]\ (\cdot)\ [c_1, c_2])$'dir. Ayrıca

$$A\ (\cdot)\ 1 = 1\ (\cdot)\ A = A \tag{2.12}$$

etkisiz elemanına sahiptir. Tersi ise simetrik değildir, yani

$A\ (\cdot)\ A^{-1} = [a_1, a_2]\ (\cdot)\ [1/a_2, 1/a_1] = [a_1/a_2, a_2/a_1] \neq 1$'dir.

2.9.1 Örnek

$A = [4.21, 6.87]$, $B = [0.65, 9.81]$ ve $C = [2.64. 8.79]$ olsun.

$A\ (\cdot)\ B = [4.21, 6.87]\ (\cdot)\ [0.65, 9.81] = [2.7365, 67.3947]$

$A\ (\cdot)\ B\ (\cdot)\ C = [4.21, 6.87]\ (\cdot)\ [0.65, 9.81]\ (\cdot)\ [2.64. 8.79] = [7.22436, 592.39941]$

$A\ (:)\ B = [4.21, 6.87]\ (:)\ [0.65, 9.81] = [0.42915, 10.56923]$

$A^{-1} = [1/6.87, 1/4.21] = [0.14556, 0.23752]$

2.10 Pozitif Bir Sayıyla Çarpma

$k \in R^+$ olsun. O zaman $k = [k, k]$ yazılabilir ve $\forall A \in R^+$ için:

$$k \cdot A = k \cdot [a_1, a_2] = [k, k]\ (\cdot)\ [a_1, a_2] = [ka_1, ka_2] \tag{2.13}$$

olur.

$k > 0$ ile bölme $1/k$ ile çarpmaya eşittir.

2.11 Z'deki Güven Aralıkları

$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ve $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ idi. Z'de herhangi bir güven aralığı a_1'den a_2'ye doğru sıralanan tam sayıların bir dizisi şeklindedir. Örneğin,

$A = [-5, 4] = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = [3, 9] = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Eğer $x \in [a_1, a_2]$ ve $y \in [b_1, b_2]$ ise $x \cdot y \in [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$ idi. Buradan

$$[a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2] = \{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_1 + 1, a_1 \cdot b_1 + 2, \ldots, a_2 \cdot b_2 - 2, a_2 \cdot b_2 - 1, a_2 \cdot b_2\} \tag{2.14}$$

'dir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

2.11.1 Örnek

$A = [-2, 4] = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = [3, 7] = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$A (+) B = [-2, 4] (+) [3, 7] = [1, 11] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$A (-) B = [-2, 4] (-) [3, 7] = [-9, 1] = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

$C = [1, 5]$

$B (\cdot) C = [3, 7] (\cdot) [1, 5] = [3, 35] = \{3, 4, 5, \ldots, 18, 19, 20, \ldots, 33, 34, 35\}$

$4 = [4, 4]$

$4 (\cdot) B = [4, 4] (\cdot) [3, 7] = [12, 28] = \{12, 13, 14, \ldots, 26, 27, 28\}$

Aşağıda güven aralıklarının maksimumu ve minimumu anlatılmaktadır:

$\wedge$, A ile B bulanık sayılarının minimumu; $\vee$, A ile B bulanık sayılarının maksimumu adını alır. R'de aşağıdaki gibi tanımlanan iki sayı ele alınsın:

$$a \wedge b = \min(a, b) = a \text{ eğer } a \leq b$$
$$= b \text{ eğer } b \leq a$$
$$a \vee b = \max(a, b) = b \text{ eğer } a \leq b$$
$$= a \text{ eğer } b \leq a$$

$A = [a_1, a_2]$ ve $B = [b_1, b_2]$, R'de iki güven aralığı olsun. $\wedge$ ve $\vee$ operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A (\wedge) B = [a_1, a_2] (\wedge) [b_1, b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2] \tag{2.15}$$
$$A (\vee) B = [a_1, a_2] (\vee) [b_1, b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2] \tag{2.16}$$

$(\wedge)$ ve $(\vee)$ operatörleri değişme ve birleşme özelliklerine sahip fakat etkisiz elemana sahip değildir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

2.11.2 Örnek

$A = [-4, 6]$, $B = [1, 8]$, $C = [-5, 3]$ olsun.

$A (\wedge) B = [-4, 6] (\wedge) [1, 8] = [-4 \wedge 1, 6 \wedge 8] = [-4, 6]$

$A (\vee) B = [-4, 6] (\vee) [1, 8] = [-4 \vee 1, 6 \vee 8] = [1, 8]$

$A (\wedge) C = [-4, 6] (\wedge) [-5, 3] = [-4 \wedge -5, 6 \wedge 3] = [-5, 3]$

$A (\vee) C = [-4, 6] (\vee) [-5, 3] = [-4 \vee -5, 6 \vee 3] = [-4, 6]$

$B (\wedge) C = [1, 8] (\wedge) [-5, 3] = [1 \wedge -5, 8 \wedge 3] = [-5, 3]$

$B \,(\vee)\, C = [1, 8] \,(\vee)\, [-5, 3] = [1 \vee -5, 8 \vee 3] = [1, 8]$

3. BULANIK SAYILAR

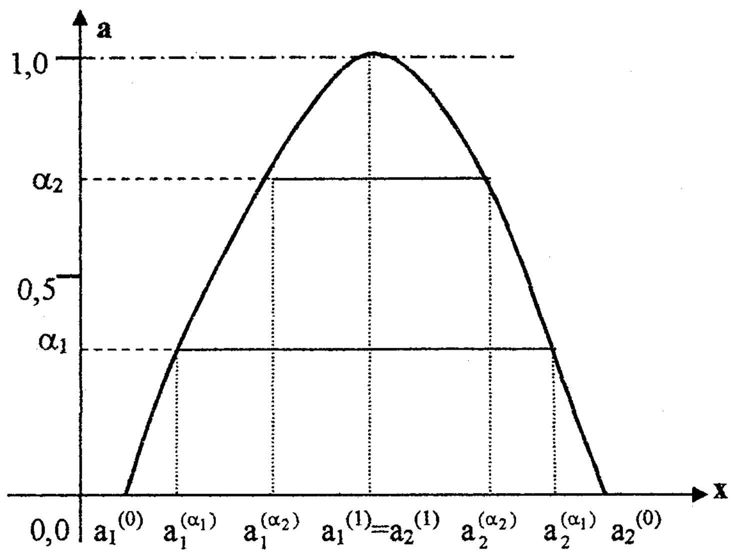
Güven aralığı, belirsizliği alt ve üst sınırları kullanarak indirgemenin bir yoludur. Bu pratik ve mantıklı bir yoldur. Aşağıda güven aralığı kavramıyla varsayım aralığı denilen başka bir kavram arasında bir bağlantı kurulmuştur.

Örneğin; belirli bir işin 15 Haziran ile 31 Haziran günleri arasında biteceği varsayılsın. Bu güven aralığıdır. Diğer yandan, aynı iş için mümkün olan bir gün olan 22 Haziran'da biteceği varsayılsın. Birinci durumda güven aralığı [15 Haziran, 31 Haziran]; ikinci durumda ise [22 Haziran, 22 Haziran] 'dır. Eğer istenirse, [15 Haziran, 31 Haziran] için 0 ve [22 Haziran, 22 Haziran] için 1 olacak şekilde güven seviyeleri işaretlenebilir. Bu iki güven seviyesi aslında varsayım seviyeleridir ve bunlar [0,1] ile gösterilebilir. Aralığın illaki 0 ve 1 değerleriyle sınırlaması için hiçbir neden yoktur.

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ için:

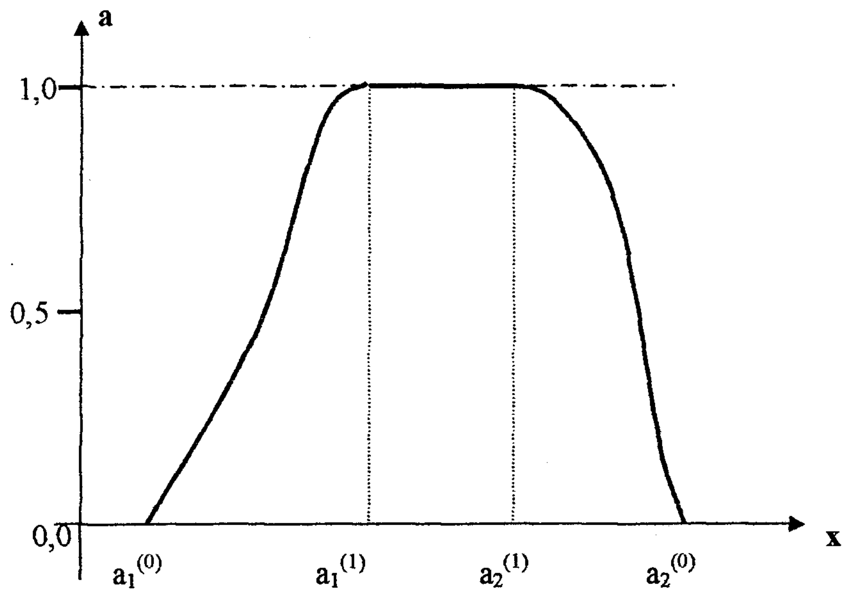
$$(\alpha_1 < \alpha_2) \Rightarrow ([a_1^{(\alpha_2)}, a_2^{(\alpha_2)}] \subset [a_1^{(\alpha_1)}, a_2^{(\alpha_1)}]) \tag{3.1}$$

olacak şekilde daha geniş bir küme de seçilebilirdi. Bu α artarken güven aralığının asla artmayacağı anlamına gelmektedir. Bu tip bir durum Şekil 3.1 ile gösterilmiştir. Varsayımın α seviyesi ve güven aralığının α seviyesini birleştirmek bulanık sayı kavramını tanımlamanın bir yolu olacaktır. Güven aralığının 0'dan 1'e değişimini gösteren eğri iki tipin biri olabilir. Bu, ya Şekil 3.1'de gösterilen düzgün eğri yada Şekil 3.2'de gösterilen eğri gibidir.



Şekil 3.1 Bulanık sayıların tanımı.

Bulanık sayı kavramı R, Z, R^+ yada N'de tanımlanmaktadır (Kaufmann ve Gupta, 1991).



Şekil 3.2 Yassı bölgeli bir bulanık sayı.

Bulanık kelimesi ilk olarak Zadeh'in ünlü "Bulanık Kümeler" adlı yazısında tanıtıldı. O, bu kelimeyi bulanık küme yada bulanık alt küme kavramlarını genelleştirmek için kullanmıştır. Burada bulanık bir kümede bir üyelik fonksiyonu referans kümesinin her elemanı için tanımlanır. Üyelik fonksiyonu değerini [0,1] aralığında alır.

Şimdiki çalışmalarda bulanık sayı kavramı, varsayım seviyesi ve güven aralığı ikilisi kullanılarak gösterilmektedir. Bununla birlikte bu, bulanık sayı tanıtmanın klasik bir yöntemi değildir ve bu çalışmada bu kavram bulanık küme teorisinden tanıtılacaktır. İlk olarak, bulanık küme kavramından bulanık sayı nasıl ayırt edileceği açıklanacaktır.

E bir referans kümesi olsun (Örneğin R yada Z). Bu referans kümesinin herhangi bir adi A alt kümesi aşağıdaki gibi karakteristik fonksiyon ile tanımlanmaktadır (Kaufmann ve Gupta, 1991):

$\forall x \in E$ için:

$\mu_A(x) \in \{0,1\}$

Bu karakteristik fonksiyonun (1 yada 0) değerine göre, E'nin bir elemanının A'ya ait olup olmadığını göstermektedir. Aynı E referans kümesi için A bulanık kümesi, üyelik fonksiyonu denilen onun karakteristik fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. Burada üyelik fonksiyonu değerini $\{0,1\}$ yerine $[0,1]$ aralığında almaktadır (Kaufmann ve Gupta, 1991).

$\forall x \in E$ için:

$\mu_A(x) \in [0,1]$

Yani E'nin elemanları [0,1] aralığındaki bir seviye ile A'ya ait olmaktadır. Şekil 3.3 R'de bir adi alt kümeyi, Şekil 3.4 ise R'de bir bulanık alt kümeyi göstermektedir.

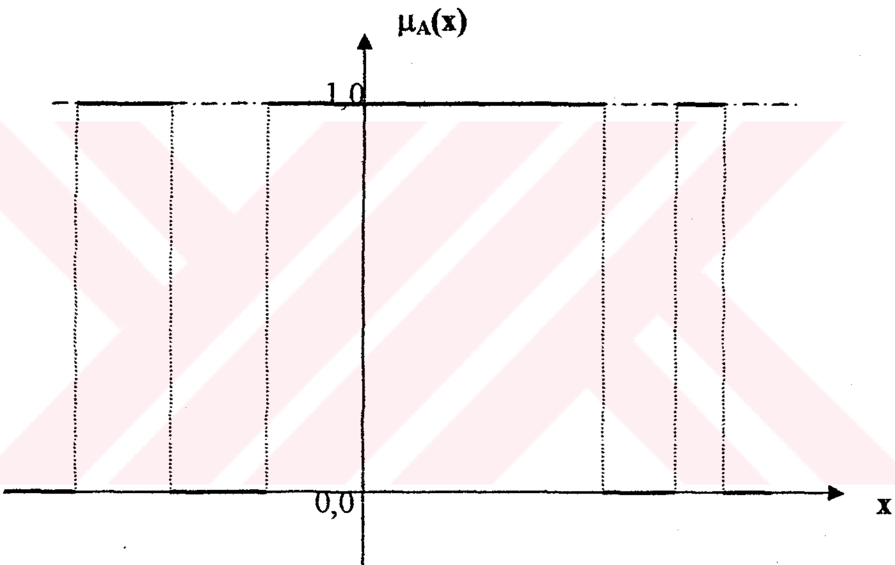
Bir $A \subset R$ bulanık alt kümesi ancak ve ancak her adi $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ $\alpha \in [0,1]$ alt kümesi konveks ise konvekstir. Şekil 3.5 konveks bir alt kümeyi göstermektedir.

Başka bir tanım olarak

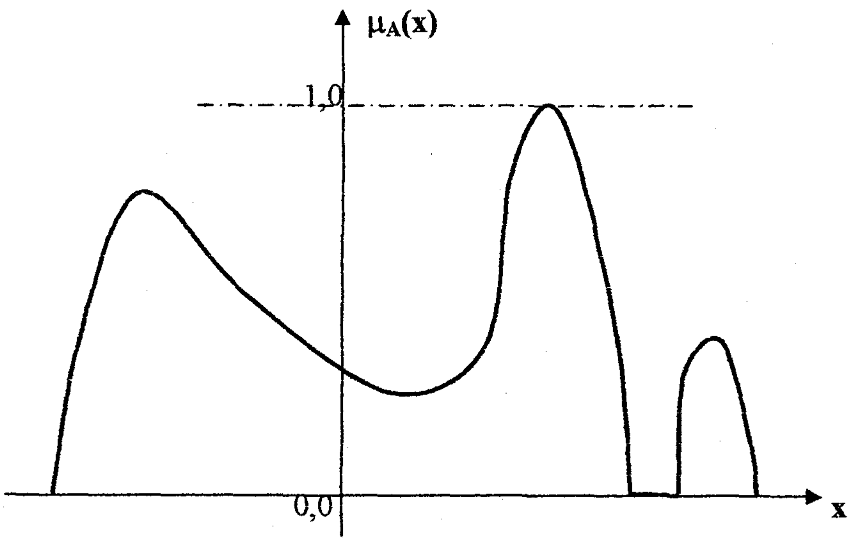
$\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in R$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için:

$$\mu_A[\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}] \geq \mu_A(x^{(1)}) \wedge \mu_A(x^{(2)}) \quad (3.2)$$

koşulu sağlanıyorsa R üzerinde tanımlı A bulanık kümesine "konvekstir" denir (Kaufmann ve Gupta, 1991).



Şekil 3.3 R'de adi bir alt küme.



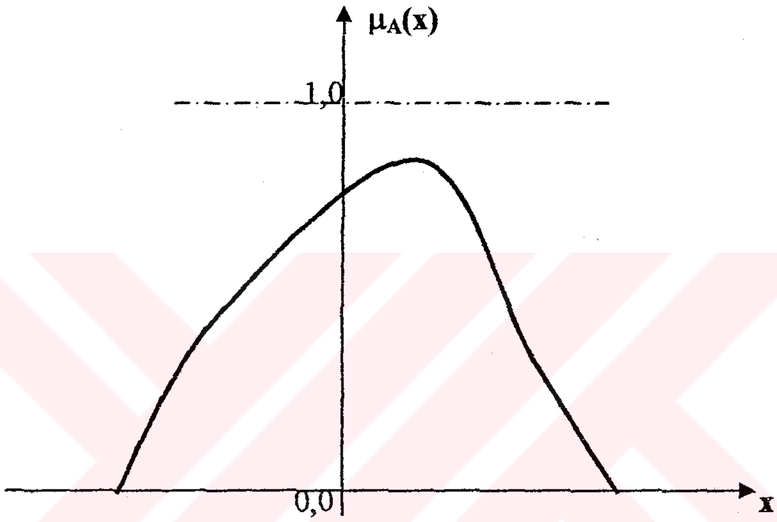
Şekil 3.4 R'de bulanık bir alt küme.

Bir $A \subset R$ bulanık alt kümesi ancak ve ancak

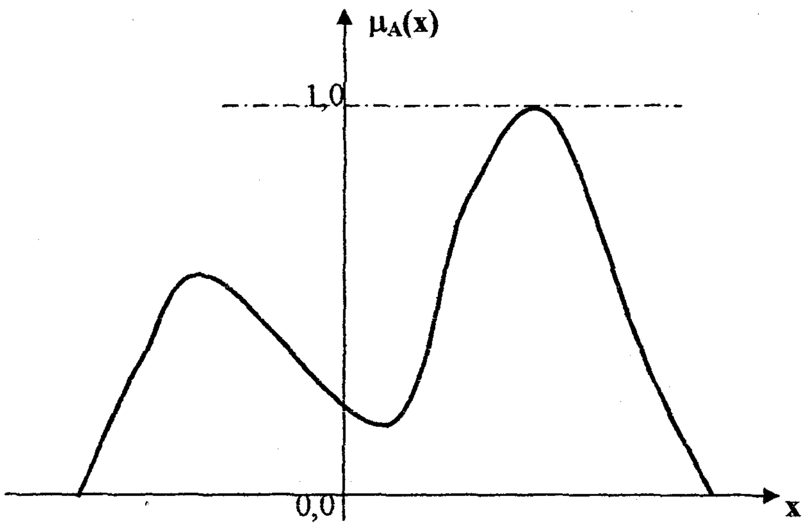
$\forall x \in R$ için: $\vee\, \mu_A(x) = 1$ ise normaldir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

Bu $\mu_A(x)$'in en yüksek değerinin 1'e eşit olması demektir. Bu maksimum, tek olabilir de olmayabilir de. Şekil 3.5 normal olmayan bulanık bir alt kümeyi ve Şekil 3.6'da normal bir bulanık alt kümeyi göstermektedir.

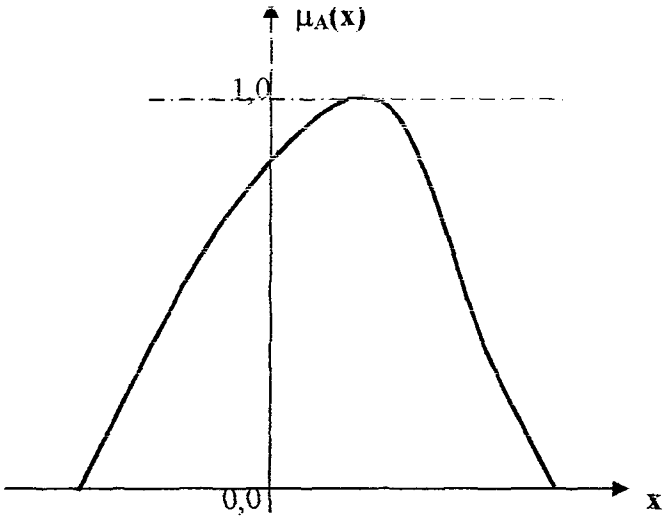
R'de bulanık sayı, R'nin konveks ve normal olan bulanık bir alt kümesidir ve Şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.5 Konveks bir bulanık alt küme (normal olmayan).



Şekil 3.6 Bir bulanık alt küme (normal).



Şekil 3.7 Konveks ve normal bulanık küme.

3.1 Bulanık Sayıların Toplamı

Güven aralıklarının toplamı gibi, iki bulanık sayının toplamında da aynı yöntem uygulanır. Örneğin A ve B iki bulanık sayı, A_α ile B_α ise A ve B'nin güven aralıkları olsun. O zaman

$$
\begin{aligned}
A_\alpha\ (+)\ B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\ (+)\ [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\
&= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

yazılır.

Eğer $A,B \subset R$ ise α güven aralıkları için aşağıdaki A_α ve B_α alt kümeleri tanımlanabilir:

$$A_\alpha = \{\ x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \qquad (3.4)$$

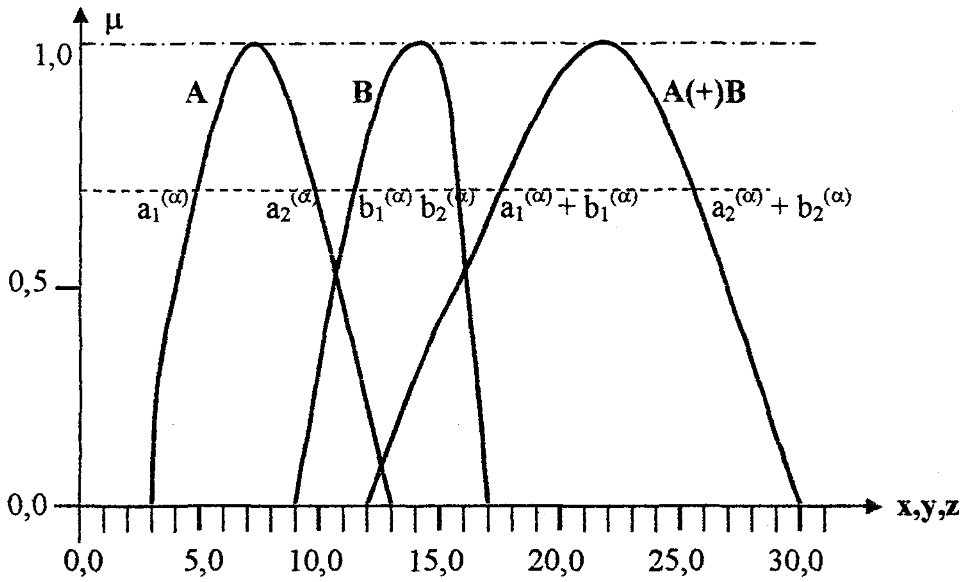
$$B_\alpha = \{\ x \mid \mu_B(x) \geq \alpha\} \qquad (3.5)$$

Şimdi bulanık sayıların toplamı için başka bir metot ele alınırsa;

$A,B \subset R$ ve $\forall x,y,z \in R$ için:

$$\mu_{A(+)B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \qquad (3.6)$$

'dir (Kaufmann ve Gupta, 1991).



Şekil 3.8 İki bulanık sayının toplamı.

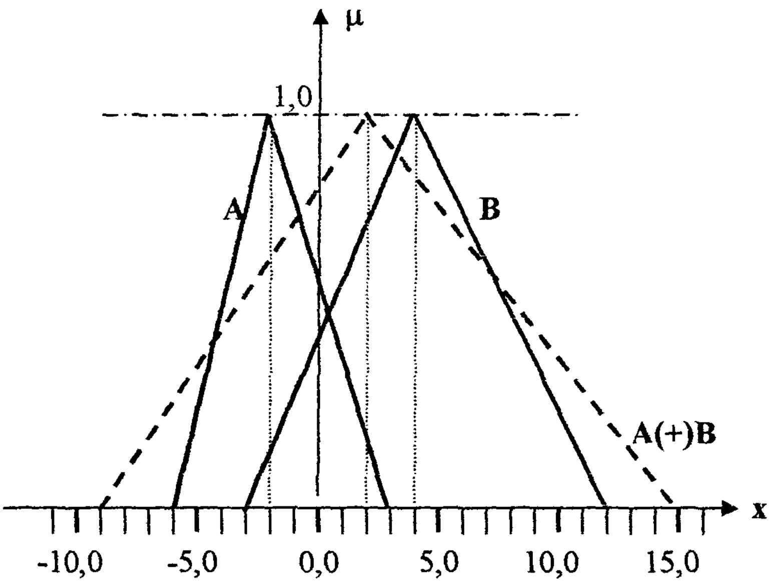
3.1.1 Örnek

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -6 \\ x/4 + 6/4 & -6 \leq x \leq -2 \\ -x/5 + 3/5 & -2 \leq x \leq 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -3 \\ x/7 + 3/7 & -3 \leq x \leq 4 \\ -x/8 + 12/8 & 4 \leq x \leq 12 \\ 0 & x \geq 12 \end{cases}$$

olsun.



Şekil 3.9 İki üçgen bulanık sayının toplamı.

$\forall\alpha$ seviyesi için güven aralıklarını hesaplamak için aşağıdaki yol kullanılarak α'nın fonksiyonları ile üçgen şekiller tanıtılmıştır.

$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)}}{4} + \frac{6}{4}$ ve $\alpha = -\frac{a_2^{(\alpha)}}{5} + \frac{3}{5}$ 'tir.

Bilindiği gibi $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [4\alpha - 6, -5\alpha + 3]$'dir. Aynı şekilde

$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{7} + \frac{3}{7}$ ve $\alpha = -\frac{b_2^{(\alpha)}}{8} + \frac{12}{8}$ 'dir. Buradan da

$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [7\alpha - 3, -8\alpha + 12]$'dir. Toplama yapılırsa;

$$\begin{aligned} A_\alpha (+) B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] (+) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \\ &= [4\alpha - 6, -5\alpha + 3] (+) [7\alpha - 3, -8\alpha + 12] \\ &= [11\alpha - 9, -13\alpha + 15] \end{aligned}$$

elde edilir.

$a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} = 11\alpha - 9$ ve $a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} = -13\alpha + 15$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} \mu_{A(+)B}(x) &= 0 && x \le -9 \\ &= x/11 + 9/11 && -9 \le x \le 2 \\ &= -x/13 + 15/13 && 2 \le x \le 15 \\ &= 0 && x \ge 15 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.2 Örnek

N'de aşağıdaki iki bulanık sayı ele alınsın.

	0	1	2	3	4	5	6	7
A =	0	0,1	0,3	0,7	1	0,6	0,2	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
B =	0	0,3	0,8	1	0,7	0,4	0,1	0

Çizelge 3.1 İki bulanık sayının toplamı.

	0	1	2	3	4	5	6	7
1,0					1			
0,9					1			
0,8					1			
0,7				1	1			
0,6				1	1	1		
0,5				1	1	1		
0,4				1	1	1		
0,3			1	1	1	1		
0,2			1	1	1	1	1	
0,1		1	1	1	1	1	1	
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0,1	0,3	0,7	1	0,6	0,2	0

(+)

	0	1	2	3	4	5	6	7
1,0				1				
0,9				1				
0,8			1	1				
0,7			1	1	1			
0,6			1	1	1			
0,5			1	1	1			
0,4			1	1	1	1		
0,3		1	1	1	1	1		
0,2		1	1	1	1	1		
0,1		1	1	1	1	1	1	
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0,3	0,8	1	0,7	0,4	0,1	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1,0							1						
0,9							1						
0,8						1	1						
0,7					1	1	1	1					
0,6					1	1	1	1	1				
0,5					1	1	1	1	1				
0,4					1	1	1	1	1	1			
0,3			1	1	1	1	1	1	1	1			
0,2			1	1	1	1	1	1	1	1	1		
0,1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0,1	0,3	0,3	0,7	0,8	1	0,7	0,6	0,4	0,2	0,1	0

α seviyesinde güven aralığının toplamını hesaplamakta (3.3) kullanılarak Çizelge 3.1 elde edilir. Buradan C = A (+) B yada

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
C =	0	0,1	0,3	0,3	0,7	0,8	1	0,7	0,6	0,4	0,2	0,1	0	(3.7)

bulunur.

Dikkat edilmelidir ki (3.6) kullanılarak Çizelge 3.1'de verilen toplam hesaplanabilir. Bu hesaplamalar kullanılarak aşağıdaki denklemler kümesi elde edilir:

$\mu_C(1) = (0 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}1 \wedge 0) = 0$

$\mu_C(2) = (0 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}3 \wedge 0) = 0{,}1$

$\mu_C(3) = (0 \wedge 1) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}3 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}7 \wedge 0) = 0{,}3$

$\mu_C(4) = (0 \wedge 0{,}7) \vee (0{,}1 \wedge 1) \vee (0{,}3 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}3) \vee (1 \wedge 0) = 0{,}3$

$\mu_C(5) = (0 \wedge 0{,}4) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}7) \vee (0{,}3 \wedge 1) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}8) \vee (1 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}6 \wedge 0) = 0{,}7$

$\mu_C(6) = (0 \wedge 0{,}1) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}4) \vee (0{,}3 \wedge 0{,}7) \vee (0{,}7 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}2 \wedge 0) = 0{,}8$

$\mu_C(7) = (0 \wedge 0) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}1) \vee (0{,}3 \wedge 0{,}4) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}7) \vee (1 \wedge 1) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}3)$
$\quad \vee (0 \wedge 0) = 1$

$\mu_C(8) = (0{,}1 \wedge 0) \vee (0{,}3 \wedge 0{,}1) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}4) \vee (1 \wedge 0{,}7) \vee (0{,}6 \wedge 1) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}8) \vee (0 \wedge 0{,}3) = 0{,}7$

$\mu_C(9) = (0{,}3 \wedge 0) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}1) \vee (1 \wedge 0{,}4) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}7) \vee (0{,}2 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0{,}8) = 0{,}6$

$\mu_C(10) = (0{,}7 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0{,}1) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}4) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}7) \vee (0 \wedge 1) = 0{,}4$

$\mu_C(11) = (1 \wedge 0) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}1) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}4) \vee (0 \wedge 0{,}7) = 0{,}2$

$\mu_C(12) = (0{,}6 \wedge 0) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}1) \vee (0 \wedge 0{,}4) = 0{,}1$

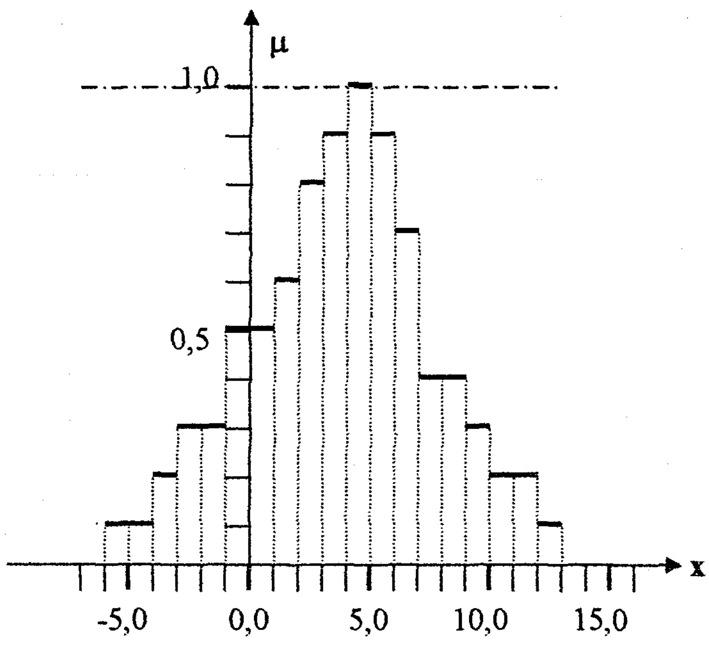
$\mu_C(13) = (0{,}2 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0{,}1) = 0$

Görüldüğü gibi çıkan sonuçlar (3.7) ile aynıdır. Aşağıdaki sayı ele alınırsa:

-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0,5	0,5	0,6	0,8	0,9	1	0,9	0,7	0,4	0,4	0,3	0,2	0,2	0,1	0

(3.8)

(3.8)'de verilen sayı Z'de bir bulanık sayıdır ve Şekil 3.10'da gösterilmiştir.



Şekil 3.10 Z'de bir bulanık sayı.

3.1.3 Teorem

Eğer A ve B, R'de iki bulanık sayı ise A(+)B R'nin konveks olan bulanık bir alt kümesidir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

İspat:

α' ve α, $\alpha' > \alpha$ olacak şekilde iki seviye olsun. O halde

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$$
$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$
$$A'_\alpha = [a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}]$$
$$B'_\alpha = [b_1^{(\alpha')}, b_2^{(\alpha')}]$$
$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow [a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}] \subset [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$$
$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow [b_1^{(\alpha')}, b_2^{(\alpha')}] \subset [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \tag{3.9}$$

yazılabilir.

$A_\alpha (+) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}]$ ve $A'_\alpha (+) B'_\alpha = [a_1^{(\alpha')} + b_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')} + b_2^{(\alpha')}]$'dür.

(3.9) göz önüne alınırsa;

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow [a_1^{(\alpha')} + b_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')} + b_2^{(\alpha')}] \subset [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}]$$

elde edilir. Bu yüzden monotonluk ve konvekslik toplama ile korunmaktadır.

3.1.4 Teorem

Eğer A ve B, R'de iki bulanık sayı ise A(+)B, R'de normal bulanık bir alt kümedir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

İspat:

$\alpha = 1$ seviyesinde $A_{\alpha=1} = [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}]$ ve $B_{\alpha=1} = [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}]$ elde edilir. O zaman

$A_{\alpha=1} (+) B_{\alpha=1} = [a_1^{(1)} + b_1^{(1)}, a_2^{(1)} + b_2^{(1)}] \neq \varnothing$'dir.

Buradan A(+)B normaldir. Bu da eğer A ve B, R'de iki bulanık sayı ise A (+) B'nin de bir bulanık sayı olduğunu kanıtlamaktadır.

3.2 Bulanık Sayıların Çıkarması

Toplamanın tanımı, çıkarmanın tanımına genişletilir. Bunun için aşağıdaki tanım ve semboller ele alınırsa;

$\forall\alpha\in[0,1]$ için:

$A\,(-)\,B = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\,(-)\,[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$

$\quad = [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}]$

yada

$\forall x,y,z\in R$ için:

$$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \qquad (3.10)$$

yazılır (Kaufmann ve Gupta, 1991). Aslında çıkarma; B^- ile A'nın toplamıdır. Burada

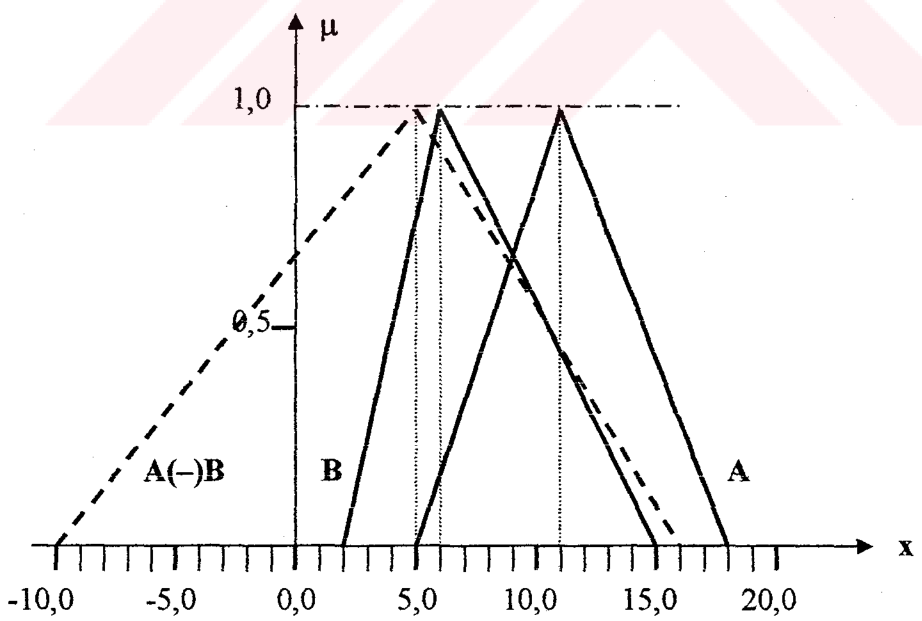
$\forall\alpha\in[0,1]$ için:

$B^-_\alpha = [-b_2^{(\alpha)}, -b_1^{(\alpha)}]$'dır.

Çıkarma ne değişme ne de birleşme özelliğine sahiptir. Z'de tanımlanmış fakat R^+ yada N'de tanımlanmamıştır. Çünkü negatif sayılar görülebilir.

3.2.1 Örnek

Şekil 3.11'de gösterilen üçgen şekilli iki bulanık sayı ele alınsın.



Şekil 3.11 İki bulanık sayının çıkarması.

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_A(x) = 0 \qquad x \leq 5$$
$$= x/6 - 5/6 \qquad 5 \leq x \leq 11$$
$$= -x/7 + 18/7 \qquad 11 \leq x \leq 18$$
$$= 0 \qquad x \geq 18 \tag{3.11}$$

$$\mu_B(x) = 0 \qquad x \leq 2$$
$$= x/4 - 2/4 \qquad 2 \leq x \leq 6$$
$$= -x/9 + 15/9 \qquad 6 \leq x \leq 15$$
$$= 0 \qquad x \geq 15 \tag{3.12}$$

(3.11) denklemi kullanılırsa; $\alpha = a_1^{(\alpha)}/6 - 5/6$ ve $\alpha = -a_2^{(\alpha)}/7 + 18/7$ ifadelerinden

$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [6\alpha + 5, -7\alpha + 18]$ bulunur.

(3.12) kullanılarak

$$\alpha = b_1^{(\alpha)}/4 - 2/4 \text{ ve } \alpha = -b_2^{(\alpha)}/9 + 15/9 \tag{3.13}$$

ve

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$
$$= [4\alpha + 2, -9\alpha + 15] \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.13)'ten (3.14) çıkarılırsa

$$A_\alpha (-) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}]$$
$$= [6\alpha + 5 - (-9\alpha + 15), -7\alpha + 18 - (4\alpha + 2)]$$
$$= [15\alpha - 10, -11\alpha + 16] \text{ olur.}$$

Bu yüzden $a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)} = 15\alpha - 10$ ve $a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)} = -11\alpha + 16$ olarak tanımlanırsa;

$$\mu_{A(-)B}(x) = 0 \qquad x \leq -10$$
$$= x/15 + 10/15 \qquad -10 \leq x \leq 5$$
$$= -x/11 + 16/11 \qquad 5 \leq x \leq 16$$
$$= 0 \qquad x \geq 16$$

elde edilir.

3.2.2 Örnek

Z'de aşağıda verilen nümerik bir örnek ele alınsın:

	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
A =	0	0,2	0,5	0,7	0,8	1	0,4	0

	-2	-1	0	1	2	3	4
B =	0	0,3	0,6	1	0,8	0,2	0

olsun. A (–) B Çizelge 3.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2 İki bulanık sayının çıkarması.

	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
1,0						1		
0,9						1		
0,8					1	1		
0,7				1	1	1		
0,6				1	1	1		
0,5			1	1	1	1		
0,4			1	1	1	1	1	
0,3			1	1	1	1	1	
0,2		1	1	1	1	1	1	
0,1		1	1	1	1	1	1	
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0,2	0,5	0,7	0,8	1	0,4	0

(–)

	-2	-1	0	1	2	3	4
1,0				1			
0,9				1			
0,8				1	1		
0,7				1	1		
0,6			1	1	1		
0,5			1	1	1		
0,4			1	1	1		
0,3		1	1	1	1		
0,2		1	1	1	1	1	
0,1		1	1	1	1	1	
0,0	1	1	1	1	1	1	1
	0	0,3	0,6	1	0,8	0,2	0

	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1,0									1					
0,9									1					
0,8							1	1	1					
0,7						1	1	1	1					
0,6						1	1	1	1	1				
0,5					1	1	1	1	1	1				
0,4					1	1	1	1	1	1	1			
0,3					1	1	1	1	1	1	1	1		
0,2			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
0,1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0	0,2	0,2	0,5	0,7	0,8	0,8	1	0,6	0,4	0,3	0	0

Ayrıca (3.10) kullanılırsa aşağıdaki sonuçlar çıkar:

$\mu_{A(-)B}(-7) = 0 \wedge 0 = 0$

$\mu_{A(-)B}(-6) = (0 \wedge 0{,}2) \vee (0{,}2 \wedge 0) = 0$

$\mu_{A(-)B}(-5) = (0 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}2) \vee (0{,}5 \wedge 0) = 0{,}2$

$\mu_{A(-)B}(-4) = (0 \wedge 1) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}5 \wedge 0{,}2) \vee (0{,}7 \wedge 0) = 0{,}2$

$\mu_{A(-)B}(-3) = (0 \wedge 0{,}6) \vee (0{,}2 \wedge 1) \vee (0{,}5 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}2) \vee (0{,}8 \wedge 0) = 0{,}5$

$\mu_{A(-)B}(-2) = (0 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}6) \vee (0{,}5 \wedge 1) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}8 \wedge 0{,}2) \vee (1 \wedge 0) = 0{,}7$

$\mu_{A(-)B}(-1) = (0 \wedge 0) \vee (0,2 \wedge 0,3) \vee (0,5 \wedge 0,6) \vee (0,7 \wedge 1) \vee (0,8 \wedge 0,8) \vee (1 \wedge 0,2) \vee (0,4 \wedge 0) = 0,8$

$\mu_{A(-)B}(0) = (0,2 \wedge 0) \vee (0,5 \wedge 0,3) \vee (0,7 \wedge 0,6) \vee (0,8 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0,8) \vee (0,4 \wedge 0,2) \vee (0 \wedge 0) = 0,8$

$\mu_{A(-)B}(1) = (0,5 \wedge 0) \vee (0,7 \wedge 0,3) \vee (0,8 \wedge 0,6) \vee (1 \wedge 1) \vee (0,4 \wedge 0,8) = 1$

$\mu_{A(-)B}(2) = (0,7 \wedge 0) \vee (0,8 \wedge 0,3) \vee (1 \wedge 0,6) \vee (0,4 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0,8) = 0,6$

$\mu_{A(-)B}(3) = (0,8 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0,3) \vee (0,4 \wedge 0,6) \vee (0 \wedge 1) = 0,4$

$\mu_{A(-)B}(4) = (1 \wedge 0) \vee (0,4 \wedge 0,3) \vee (0 \wedge 0,6) = 0,3$

$\mu_{A(-)B}(5) = (0,4 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0,3) = 0$

$\mu_{A(-)B}(6) = (0 \wedge 0) = 0$

3.3 Bulanık Sayıların Çarpımı

Bulanık sayıların çarpımı R^+ ve N'de tanımlanır. A ve B, R^+ 'da iki bulanık sayı olsun.

$$A_\alpha (\cdot) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] (\cdot) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$
$$= [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}] \tag{3.15}$$

yazılır. Ayrıca

$\forall x,y,z \in R$ için:

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \bigvee_{z=x.y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{3.16}$$

'dir (Kaufmann ve Gupta, 1991). (3.15) ve (3.16) denklemleri eşittir.

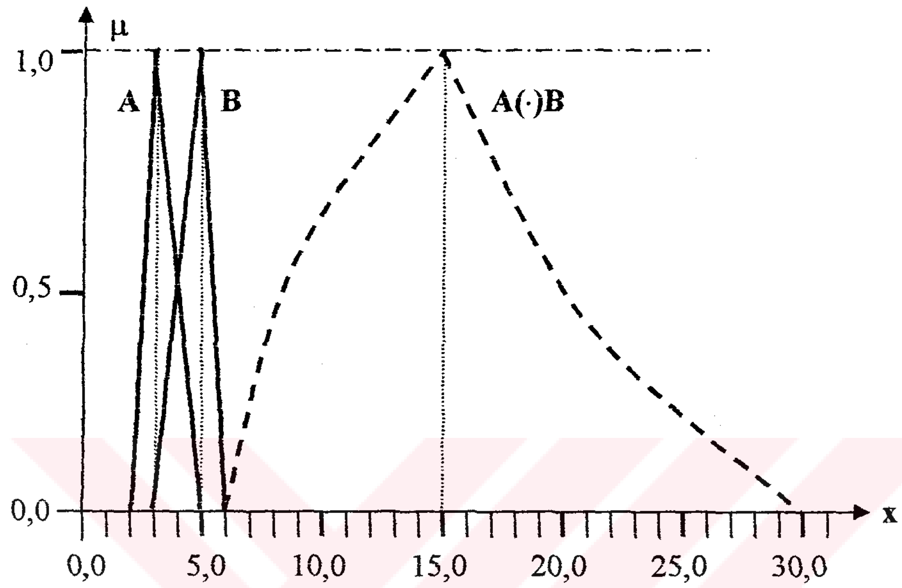
3.3.1 Örnek

Bu örnek için yine üçgen bulanık sayılar kullanılmıştır.

$\forall x \in R^+$ için:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ x-2 & 2 \leq x \leq 3 \\ -x/2 + 5/2 & 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & x \geq 5 \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\mu_B(x) = 0 \qquad x \le 3$$
$$= x/2 - 3/2 \qquad 3 \le x \le 5$$
$$= -x + 6 \qquad 5 \le x \le 6$$
$$= 0 \qquad x \ge 6 \qquad (3.18)$$



Şekil 3.12 İki bulanık sayının çarpımı.

Şekil 3.12'deki α seviyesi ve (3.17) kullanılarak

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} - 2 \ \text{ ve } \alpha = -a_2^{(\alpha)}/2 + 5/2 \qquad (3.19)$$

olur. Bu yüzden

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$$
$$= [\alpha + 2, -2\alpha + 5]\text{'dır.}$$

Ayrıca (3.18) kullanılarak $\alpha = b_1^{(\alpha)}/2 - 3/2$ ve $\alpha = -b_2^{(\alpha)} + 6$ elde edilir. Buradan da

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$
$$= [2\alpha + 3, -\alpha + 6]\text{'dır.}$$

Bu yüzden

$$A_\alpha\,(\cdot)\,B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}]$$
$$= [(\alpha + 2) \cdot (2\alpha + 3), (-2\alpha + 5) \cdot (-\alpha + 6)]$$
$$= [2\alpha^2 + 7\alpha + 6, 2\alpha^2 - 17\alpha + 30]$$

çarpımı elde edilir. Çözmek için $2\alpha^2 + 7\alpha + 6 = 0$ ve $2\alpha^2 - 17\alpha + 30 = 0$ gibi iki denklem bulunmaktadır. İki kök [0,1] aralığında olmalıdır.

Yukarıdaki iki denklem için $\alpha = (-7 + \sqrt{1+8x})/4$ ve $\alpha = (17 - \sqrt{49+8x})/4$ olur. Sonuçta

$\forall x \in R^+$ için:

$$
\begin{aligned}
\mu_{A(\cdot)B}(x) &= 0 && x \le 6 \\
&= (-7 + \sqrt{1+8x})/4 && 6 \le x \le 15 \\
&= (17 - \sqrt{49+8x})/4 && 15 \le x \le 30 \\
&= 0 && x \ge 30
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dikkat edilirse A(·)B üçgen bir yapıya sahip değildir.

3.3.2 Örnek

A =

	2	3	4	5	6
A	0	0,4	1	0,7	0

(3.20)

B =

	2	3	4	5	6	7
B	0	0,1	0,8	1	0,3	0

(3.21)

A ve B, N'de iki bulanık sayı olsun. (3.15) kullanılarak Çizelge 3.3'de verilen sonuçlar elde edilir. Bu yüzden

	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
A(·)B	0,	0,1	0,1	0,1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,8	0,8	0,8	0,8	1	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0

bulunur.

Çizelge 3.3 İki bulanık sayının çarpımı.

	3	4	5
1		1	
0,9		1	
0,8		1	
0,7		1	1
0,6		1	1
0,5		1	1
0,4	1	1	1
0,3	1	1	1
0,2	1	1	1
0,1	1	1	1
0,0	1	1	1
	0,4	1	0,7

(·)

	3	4	5	6
1			1	
0,9			1	
0,8		1	1	
0,7		1	1	
0,6		1	1	
0,5		1	1	
0,4		1	1	
0,3		1	1	1
0,2		1	1	1
0,1	1	1	1	1
0,0	1	1	1	1
	0,1	0,8	1	0,3

	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1												1										
0,9												1										
0,8								1	1	1	1	1										
0,7								1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
0,6								1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
0,5								1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
0,4				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
0,3				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,2				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,1	0,1	0,1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,8	0,8	0,8	0,8	1	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3

Bulanık sayılar; solda normal değere (μ = 1) kadar monoton olarak artar, sağ tarafta ise monoton olarak azalır.

$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \mu(x \cdot y = 20) = \mu(4 \cdot 5) = 1$

$\mu_{A(\cdot)B}(9) = (0,4 \wedge 0,1) = 0,1$

$\mu_{A(\cdot)B}(10) = (0,4 \wedge 0,1) = 0,1$

$\mu_{A(\cdot)B}(11) = (0,4 \wedge 0,1) = 0,1$

$\mu_{A(\cdot)B}(12) = (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,4 \wedge 0,8) \vee (1 \wedge 0,1) = 0,4$

$\mu_{A(\cdot)B}(13) = (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,4 \wedge 0,8) \vee (1 \wedge 0,1) = 0,4$

$\mu_{A(\cdot)B}(14) = (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,4 \Lambda 0,8) \vee (1 \Lambda 0,1) = 0,4$

$\mu_{A(\cdot)B}(15) = (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,4 \wedge 0,8) \vee (1 \wedge 0,3) \vee (0,4 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,1) = 0,4$

$\mu_{A(\cdot)B}(16) = (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,4 \wedge 0,8) \vee (1 \wedge 0,3) \vee (0,4 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,1) \vee (1 \wedge 0,8) = 0,8$

$\mu_{A(\cdot)B}(17) = (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,4 \wedge 0,8) \vee (1 \wedge 0,3) \vee (0,4 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,1) \vee (1 \wedge 0,8) = 0,8$

$\mu_{A(\cdot)B}(18) = (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,4 \wedge 0,8) \vee (1 \wedge 0,3) \vee (0,4 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,1) \vee (1 \wedge 0,8) \vee$
$(0,4 \wedge 0,3) = 0,8$

$\mu_{A(\cdot)B}(19) = (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,4 \wedge 0,8) \vee (1 \wedge 0,3) \vee (0,4 \wedge 0,1) \vee (0,7 \wedge 0,1) \vee (1 \wedge 0,8) \vee$
$(0,4 \wedge 0,3) = 0,8$

$\mu_{A(\cdot)B}(20) = 1$

$\mu_{A(\cdot)B}(21) = (1 \wedge 0,3) \vee (0,7 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,3) = 0,7$

$\mu_{A(\cdot)B}(22) = (1 \wedge 0,3) \vee (0,7 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,3) = 0,7$

$\mu_{A(\cdot)B}(23) = (1 \wedge 0,3) \vee (0,7 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,3) = 0,7$

$\mu_{A(\cdot)B}(24) = (1 \wedge 0,3) \vee (0,7 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,3) = 0,7$

$\mu_{A(\cdot)B}(25) = (0,7 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,3) = 0,7$

$\mu_{A(\cdot)B}(26) = (0,7 \wedge 0,3) = 0,3$

$\mu_{A(\cdot)B}(27) = (0,7 \wedge 0,3) = 0,3$

$\mu_{A(\cdot)B}(28) = (0,7 \wedge 0,3) = 0,3$

$\mu_{A(\cdot)B}(29) = (0,7 \wedge 0,3) = 0,3$

$\mu_{A(\cdot)B}(30) = (0,7 \wedge 0,3) = 0,3$

$\mu_{A(\cdot)B}(z > 30) = 0$

3.4 Bulanık Sayıların Bölümü

İki bulanık sayının bölümü R^+ 'da

$\forall\alpha\in[0,1]$ ve $b_2^{(\alpha)} > 0$ için:

$$A\,(:)\,B = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\,(:)\,[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$

$$= [a_1^{(\alpha)} / b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} / b_1^{(\alpha)}] \qquad (3.22)$$

yada

$\forall x,y,z\in R$ için:

$$\mu_{A(:)B}(z) = \bigvee_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \qquad (3.23)$$

ile tanımlanır (Kaufmann ve Gupta, 1991). Bölme, tersi ile çarpmaya eşittir. Yani

$\forall\alpha\in[0,1]$ ve $b_2^{(\alpha)} > 0$ için:

$$B_\alpha^- = [1/b_2^{(\alpha)}, 1/b_1^{(\alpha)}] \qquad (3.24)$$

'dir. Bununla birlikte, bölme değişme ve birleşme özelliklerine sahip değildir.

3.4.1 Örnek

Nümerik bir örnek ele alınsın.

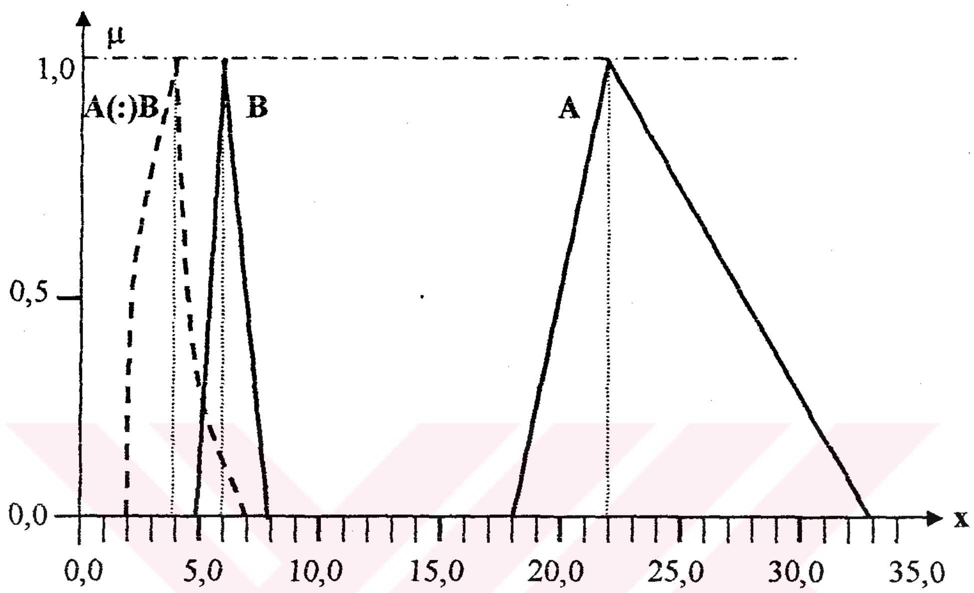
Şekil 3.13'de gösterilen üçgen şekil kullanılırsa

$\forall x\in R^+$ için:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= 0 && x \le 18\\ &= x/4 - 18/4 && 18 \le x \le 22\\ &= -x/11 + 3 && 22 \le x \le 33\\ &= 0 && x \ge 33\end{aligned} \qquad (3.25)$$

$$\mu_B(x) = 0 \qquad x \le 5$$
$$= x - 5 \qquad 5 \le x \le 6$$
$$= -x/2 + 4 \qquad 6 \le x \le 8$$
$$= 0 \qquad x \ge 8 \qquad (3.26)$$

olur.



Şekil 3.13 İki bulanık sayının bölümü.

(3.25)'ten $\alpha = a_1^{(\alpha)}/4 - 18/4$ ve $\alpha = -a_2^{(\alpha)}/11 + 3$ ile $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [4\alpha + 18, -11\alpha + 33]$ olur.

Yine (3.26)'dan $\alpha = b_1^{(\alpha)} - 5$ ve $\alpha = -b_2^{(\alpha)}/2 + 4$ ile $B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [\alpha + 5, -2\alpha + 8]$ olur. Bu yüzden

$$A_\alpha (:) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} / b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} / b_1^{(\alpha)}]$$
$$= \left(\frac{4\alpha+18}{-2\alpha+8}, \frac{-11\alpha+33}{\alpha+5} \right)$$

'dır. Böylece

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_{A(:)B}(x) = 0 \qquad x \le 9/4$$
$$= (8x - 18) / (2x + 4) \qquad 9/4 \le x \le 11/3$$
$$= (-5x + 33) / (x + 11) \qquad 11/3 \le x \le 33/5$$
$$= 0 \qquad x \ge 33/5$$

bulunur.

3.5 Bulanık Sayının Adi Sayıyla Çarpımı

A, R'de bir bulanık sayı ve $k \in R_0^+$ adi bir sayı olsun.

$\forall A \subset R$ için:

$$k \cdot A_\alpha = [k,k]\ (\cdot)\ [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [ka_1^{(\alpha)}, ka_2^{(\alpha)}] \tag{3.27}$$

yada

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_{k \cdot A}(x) = \mu_A(x/k) \tag{3.28}$$

'dır (Kaufmann ve Gupta, 1991).

3.5.1 Örnek

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -5 \\ x/9 + 5/9 & -5 \leq x \leq 4 \\ -x/3 + 7/3 & 4 \leq x \leq 7 \\ 0 & x \geq 7 \end{cases}$$

k = 4 olsun. (3.28) kullanılırsa,

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_{4 \cdot A}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -20 \\ x/36 + 5/9 & -20 \leq x \leq 16 \\ -x/12 + 7/3 & 16 \leq x \leq 28 \\ 0 & x \geq 28 \end{cases}$$

bulunur.

4. BULANIK SAYILARIN MAKSİMUM ve MİNİMUMU

R'de karşılaştırılabilir olması önemli olmayan A ve B bulanık sayıları ele alınsın.

$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ ve $B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$ olsun. Eğer

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$$a_1^{(\alpha)} \le b_1^{(\alpha)} \text{ ve } a_2^{(\alpha)} \le b_2^{(\alpha)} \tag{4.1}$$

ise $A \le B$ yazılır.

Eğer (4.1) koşulu ya da $\le$'den $\ge$'ye geçen ters koşul sağlanmıyorsa A ve B bulanık sayıları karşılaştırılamaz. Bulanık sayılar tam sıralama (lineer sıralama) yapısına sahip değildir; onlar sadece kısmi sıralamaya sahiptir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

A ve B'nin bulanık minimumu

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$$\begin{aligned} A_\alpha\,(\wedge)\,B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\,(\wedge)\,[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} \wedge b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \wedge b_2^{(\alpha)}] \end{aligned} \tag{4.2}$$

bulanık sayısı olarak ve A ve B'nin bulanık maksimumu da

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$$\begin{aligned} A_\alpha\,(\vee)\,B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\,(\vee)\,[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} \vee b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \vee b_2^{(\alpha)}] \end{aligned} \tag{4.3}$$

bulanık sayısı olarak tanımlanmaktadır.

Ayrıca $(\wedge)$, $(\vee)$ sembolleri aynı zamanda A ve B bulanık sayılarının sırasıyla minimum ve maksimumunu göstermek için de kullanılır. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2; (4.2) ve (4.3) tanımlarını göstermektedir. Bu özellikler başka bir yolla;

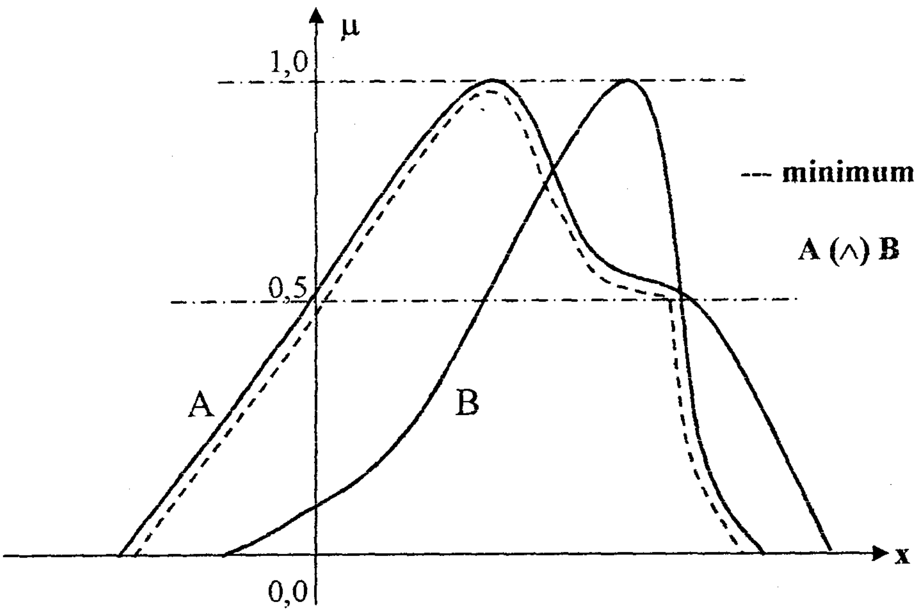
$\forall x,y,z \subset R$ için:

$$\mu_{A(\wedge)B}(z) = \bigvee_{z=x\wedge y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{4.4}$$

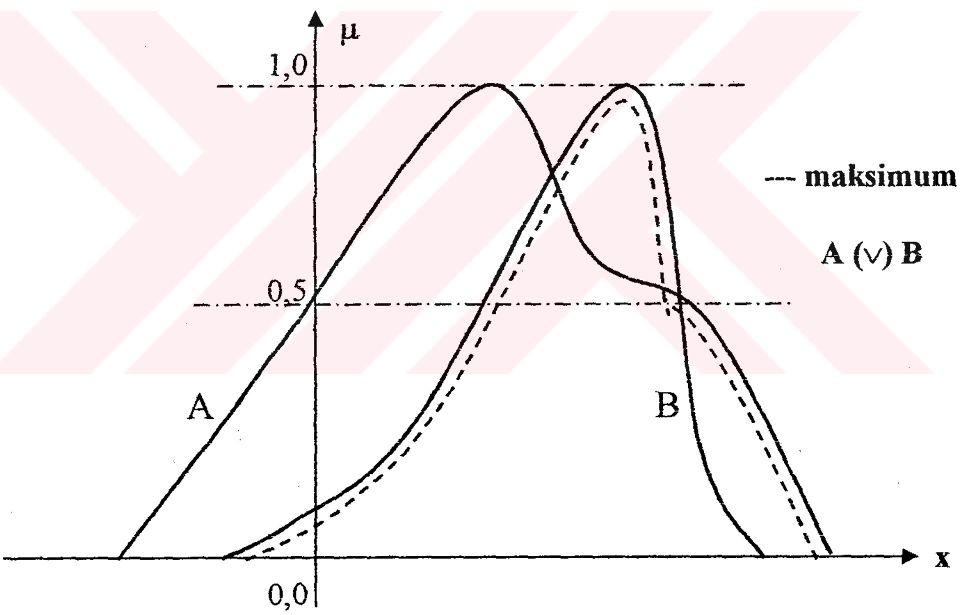
ve

$$\mu_{A(\vee)B}(z) = \bigvee_{z=x\vee y} (\mu_A(x) \vee \mu_B(y)) \tag{4.5}$$

ile tanımlanır (Klir ve Yuan, 1988).



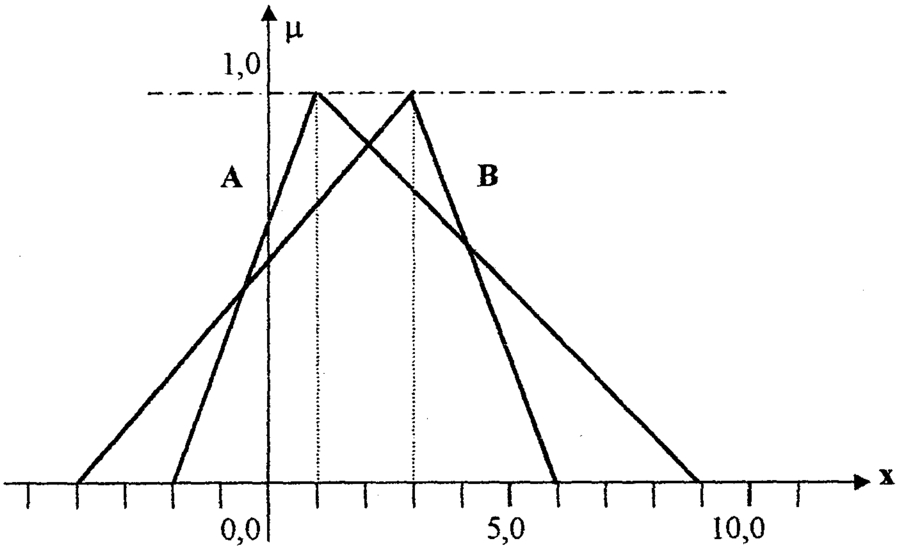
Şekil 4.1 A ve B bulanık sayılarının minimumu.



Şekil 4.2 A ve B bulanık sayılarının maksimumu.

4.1 Örnek

Şekil 4.3'de gösterilen örnek ele alınırsa:



Şekil 4.3 İki A ve B üçgen bulanık sayı.

$\forall x \in R$ için:

$\mu_A(x) = 0 \qquad x \leq -2$

$= x/3 + 2/3 \qquad -2 \leq x \leq 1$

$= -x/8 + 9/8 \qquad 1 \leq x \leq 9$

$= 0 \qquad x \geq 9$

$\mu_B(x) = 0 \qquad x \leq -4$

$= x/7 + 4/7 \qquad -4 \leq x \leq 3$

$= -x/3 + 2 \qquad 3 \leq x \leq 6$

$= 0 \qquad x \geq 6$

olur. O halde $\forall \alpha \in [0,1]$ için: $A_\alpha = [3\alpha - 2, -8\alpha + 9]$ ve $B_\alpha = [7\alpha - 4, -3\alpha + 6]$ elde edilir.

$A_\alpha (\wedge) B_\alpha = [(3\alpha - 2) \wedge (7\alpha - 4), (-8\alpha + 9) \wedge (-3\alpha + 6)]$'dır. Böylece

$A_\alpha (\wedge) B_\alpha = [7\alpha - 4, -3\alpha + 6] \qquad 0 \leq \alpha \leq 0{,}50$

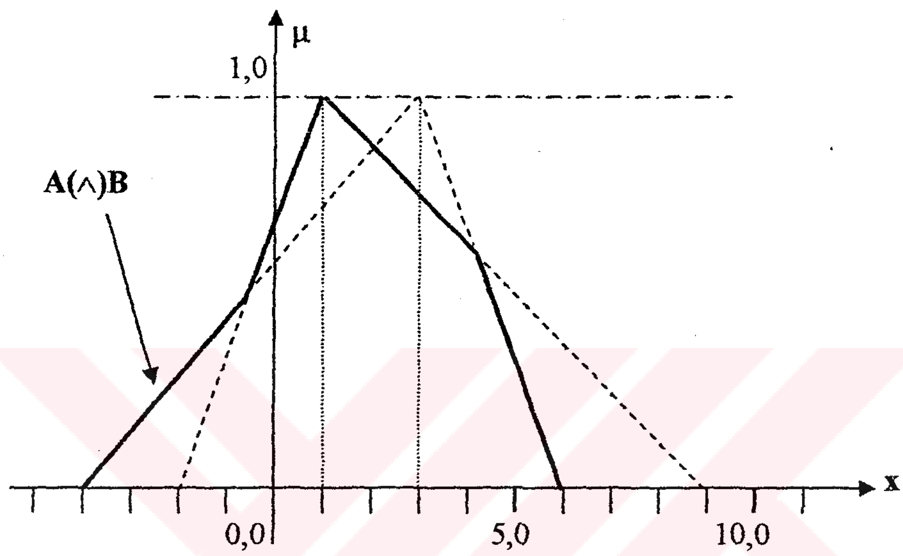
$= [3\alpha - 2, -3\alpha + 6] \qquad 0{,}50 \leq \alpha \leq 0{,}60$

$= [3\alpha - 2, -8\alpha + 9] \qquad 0{,}60 \leq \alpha \leq 1$

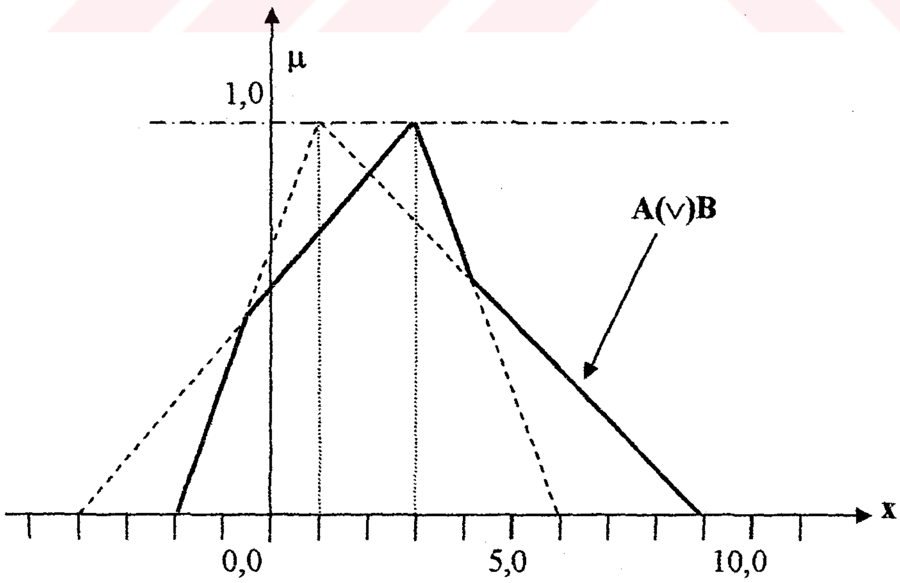
olduğu bulunur.

Bundan da aşağıdaki sonuç saptanır.

$$
\begin{aligned}
\mu_{A(\wedge)B}(x) &= 0 && x \le -4 \\
&= x/7 + 4/7 && -4 \le x \le -0{,}5 \\
&= x/3 + 2/3 && -0{,}5 \le x \le 1 \\
&= -x/8 + 9/8 && 1 \le x \le 4{,}2 \\
&= -x/3 + 2 && 4{,}2 \le x \le 6 \\
&= 0 && x \ge 6
\end{aligned} \tag{4.6}
$$



Şekil 4.4 A ve B bulanık sayılarının minimumu.



Şekil 4.5 A ve B bulanık sayılarının maksimumu.

Maksimum değer için;

$A_\alpha\ (\vee)\ B_\alpha = [(3\alpha - 2) \vee (7\alpha - 4),\ (-8\alpha + 9) \vee (-3\alpha + 6)]$'dır.

$$A_\alpha\ (\vee)\ B_\alpha = [3\alpha - 2, -8\alpha + 9] \qquad 0 \le \alpha \le 0{,}50$$
$$= [7\alpha - 4, -8\alpha + 9] \qquad 0{,}50 \le \alpha \le 0{,}60$$
$$= [7\alpha - 4, -3\alpha + 6] \qquad 0{,}60 \le \alpha \le 1$$

olur. Bundan dolayı aşağıdaki sonuç saptanır:

$$\mu_{A(\vee)B}(x) = 0 \qquad x \le -2$$
$$= x/3 + 2/3 \qquad -2 \le x \le -0{,}5$$
$$= x/7 + 4/7 \qquad -0{,}5 \le x \le 3$$
$$= -x/3 + 2 \qquad 3 \le x \le 4{,}2$$
$$= -x/8 + 9/8 \qquad 4{,}2 \le x \le 9$$
$$= 0 \qquad x \ge 9 \qquad (4.7)$$

Bunun bir taslağı Şekil 4.5'de gösterilmiştir.

4.2 Örnek

Z'de başka bir örnek ele alınsın.

	-2	-1	0	1	2	3	4
A=	0,2	0,3	0,5	1	0,5	0	0

	-2	-1	0	1	2	3	4
B=	0	0,5	1	0,7	0,6	0,4	0,1

Açıkça görülmektedir ki bu iki sayı karşılaştırılamaz. Buna alternatif olarak maksimum ve minimum değerleri saptamak için, minimum kare kümeleri ve maksimum kare kümeleri kullanılmaktadır.

Çizelge 4.1 İki bulanık sayının minimumu ve maksimumu.

	-2	-1	0	1	2	3
1				1		
0,9				1		
0,8				1		
0,7				1		
0,6				1		
0,5			1	1	1	
0,4			1	1	1	
0,3		1	1	1	1	
0,2	1	1	1	1	1	
0,1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1
	0,2	0,3	0,5	1	0,5	0,0

(∧)

	-1	0	1	2	3	4
1		1				
0,9		1				
0,8		1				
0,7		1	1			
0,6		1	1	1		
0,5	1	1	1	1		
0,4	1	1	1	1	1	
0,3	1	1	1	1	1	
0,2	1	1	1	1	1	
0,1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
	0,5	1	0,7	0,6	0,4	0,1

	-2	-1	0	1	2	3	4
1			1				
0,9			1				
0,8			1				
0,7			1	1			
0,6			1	1			
0,5		1	1	1	1		
0,4		1	1	1	1		
0,3		1	1	1	1		
0,2	1	1	1	1	1		
0,1	1	1	1	1	1		
0	1	1	1	1	1	1	1
	0,2	0,5	1	0,7	0,5	0,0	0,0

	-2	-1	0	1	2	3	4
A(∧)B=	0,2	0,5	1	0,7	0,5	0	0

	-2	-1	0	1	2	3
1				1		
0,9				1		
0,8				1		
0,7				1		
0,6				1		
0,5			1	1	1	
0,4			1	1	1	
0,3		1	1	1	1	
0,2	1	1	1	1	1	
0,1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1
	0,2	0,3	0,5	1	0,5	0,0

(∨)

	-1	0	1	2	3	4
1		1				
0,9		1				
0,8		1				
0,7		1	1			
0,6		1	1	1		
0,5	1	1	1	1		
0,4	1	1	1	1	1	
0,3	1	1	1	1	1	
0,2	1	1	1	1	1	
0,1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
	0,5	1	0,7	0,6	0,4	0,1

	-2	-1	0	1	2	3	4
1				1			
0,9				1			
0,8				1			
0,7				1			
0,6				1	1		
0,5			1	1	1		
0,4			1	1	1	1	
0,3		1	1	1	1	1	
0,2		1	1	1	1	1	
0,1		1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
	0,0	0,3	0,5	1	0,6	0,4	0,1

	-2	-1	0	1	2	3	4
A(∨)B=	0	0,3	0,5	1	0,6	0,4	0,1

R ve Z'de aşağıda verilen özellikler mevcuttur (Klir ve Yuan, 1988):

$$A\ (\wedge)\ B = B\ (\wedge)\ A \tag{4.8}$$

$$A\ (\vee)\ B = B\ (\vee)\ A \tag{4.9}$$

$$(A\,(\wedge)\,B) \wedge C = A \wedge (B\,(\wedge)\,C) \tag{4.10}$$

$$(A\,(\vee)\,B) \vee C = A \vee (B\,(\vee)\,C) \tag{4.11}$$

$$A\,(\wedge)\,A = A \tag{4.12}$$

$$A\,(\vee)\,A = A \tag{4.13}$$

$$A\,(\vee)\,(A\,(\wedge)\,B) = A \tag{4.14}$$

$$A\,(\wedge)\,(A\,(\vee)\,B) = A \tag{4.15}$$

$$A\,(\vee)\,(B\,(\wedge)\,C) = (A\,(\vee)\,B)\,(\wedge)\,(A\,(\vee)\,C) \tag{4.16}$$

$$A\,(\wedge)\,(B\,(\vee)\,C) = (A\,(\wedge)\,B)\,(\vee)\,(A\,(\wedge)\,C) \tag{4.17}$$

Şimdiye kadar (∧) ve (∨) sembolleri minimum ve maksimumu ifade etmek için kullanılmıştı. Terimler alt sınır ve üst sınır yerine de kullanılabilmektedir.

Çizelge 4.2 İki bulanık sayının minimumu ve maksimumu.

A \ B	-2	-1	0	1	2	3	4
-2	0 0,2	0,5 0,2	1 0,2	0,7 0,2	0,6 0,2	0,4 0,2	0,1 0,2
-1	0 0,3	0,5 0,3	1 0,3	0,7 0,3	0,6 0,3	0,4 0,3	0,1 0,3
0	0 0,5	0,5 0,5	1 0,5	0,7 0,5	0,6 0,5	0,4 0,5	0,1 0,5
1	0 1	0,5 1	1 1	0,7 1	0,6 1	0,4 1	0,1 1
2	0 0,5	0,5 0,5	1 0,5	0,7 0,5	0,6 0,5	0,4 0,5	0,1 0,5
3	0 0	0,5 0	1 0	0,7 0	0,6 0	0,4 0	0,1 0
4	0 0	0,5 0	1 0	0,7 0	0,6 0	0,4 0	0,1 0

	-2	-1	0	1	2	3	4
A (∧) B	0,2	0,5	1	0,7	0,5	0	0

A \ B	-2	-1	0	1	2	3	4
-2	0,2 \ 0	0,2 \ 0,5	0,2 \ 1	0,2 \ 0,7	0,2 \ 0,6	0,2 \ 0,4	0,2 \ 0,1
-1	0,3 \ 0	0,3 \ 0,5	0,3 \ 1	0,3 \ 0,7	0,3 \ 0,6	0,3 \ 0,4	0,3 \ 0,1
0	0,5 \ 0	0,5 \ 0,5	0,5 \ 1	0,5 \ 0,7	0,5 \ 0,6	0,5 \ 0,4	0,5 \ 0,1
1	1 \ 0	1 \ 0,5	1 \ 1	1 \ 0,7	1 \ 0,6	1 \ 0,4	1 \ 0,1
2	0,5 \ 0	0,5 \ 0,5	0,5 \ 1	0,5 \ 0,7	0,5 \ 0,6	0,5 \ 0,4	0,5 \ 0,1
3	0 \ 0	0 \ 0,5	0 \ 1	0 \ 0,7	0 \ 0,6	0 \ 0,4	0 \ 0,1
4	0 \ 0	0 \ 0,5	0 \ 1	0 \ 0,7	0 \ 0,6	0 \ 0,4	0 \ 0,1

	-2	-1	0	1	2	3	4
A (v) B	0	0,3	0,5	1	0,6	0,4	0,1

5. BULANIK SAYILARIN KONVÜLÜSYONU

Aşağıdaki operatörlere "max-min konvülüsyonu" denir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

$\forall x,y,z \in R$ için:

$$\mu_{A(+)B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{5.1}$$

$$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{5.2}$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \bigvee_{z=x.y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{5.3}$$

$$\mu_{A(:)B}(z) = \bigvee_{z=x:y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{5.4}$$

$$\mu_{A(\wedge)B}(z) = \bigvee_{z=x\wedge y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{5.5}$$

$$\mu_{A(\vee)B}(z) = \bigvee_{z=x\vee y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{5.6}$$

Çizelge 4.2'de A ve B, Z'de olduğunda bu konvülüsyonun $\wedge$ ve $\vee$ operatörleri için nasıl kullanıldığı gösterilmişti. Şimdi (+) ve (–) operatörleri için aynı yöntemin nasıl kullanıldığı incelenmektedir.

Bunun için yeniden nümerik bir örnek kullanılmıştır.

5.1 Örnek

A = (5.7)

0	1	2	3	4	5
0,1	0,4	0,7	1	0,9	0,3

B = (5.8)

0	1	2	3	4	5	6
0,2	0,6	1	0,8	0,7	0,2	0,1

Yukarıda verilen iki bulanık sayı ele alınsın.

Çizelge 5.1 İki bulanık sayının toplamı ve çıkarması.

A (+) B için:

A \ B	0	1	2	3	4	5	6
0	0,2 0,1	0,6 0,1	1 0,1	0,8 0,1	0,7 0,1	0,2 0,1	0,1 0,1
1	0,2 0,4	0,6 0,4	1 0,4	0,8 0,4	0,7 0,4	0,2 0,4	0,1 0,4
2	0,2 0,7	0,6 0,7	1 0,7	0,8 0,7	0,7 0,7	0,2 0,7	0,1 0,7
3	0,2 1	0,6 1	1 1	0,8 1	0,7 1	0,2 1	0,1 1
4	0,2 0,9	0,6 0,9	1 0,9	0,8 0,9	0,7 0,9	0,2 0,9	0,1 0,9
5	0,2 0,3	0,6 0,3	1 0,3	0,8 0,3	0,7 0,3	0,2 0,3	0,1 0,3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A(+)B	0,1	0,2	0,4	0,6	0,7	1	0,9	0,8	0,7	0,3	0,2	0,1

A (–) B için:

A \ B	0	1	2	3	4	5	6
0	0,2 0,1	0,6 0,1	1 0,1	0,8 0,1	0,7 0,1	0,2 0,1	0,1 0,1
1	0,2 0,4	0,6 0,4	1 0,4	0,8 0,4	0,7 0,4	0,2 0,4	0,1 0,4
2	0,2 0,7	0,6 0,7	1 0,7	0,8 0,7	0,7 0,7	0,2 0,7	0,1 0,7
3	0,2 1	0,6 1	1 1	0,8 1	0,7 1	0,2 1	0,1 1
4	0,2 0,9	0,6 0,9	1 0,9	0,8 0,9	0,7 0,9	0,2 0,9	0,1 0,9
5	0,2 0,3	0,6 0,3	1 0,3	0,8 0,3	0,7 0,3	0,2 0,3	0,1 0,3

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
A(-)B	0,1	0,1	0,2	0,4	0,7	0,7	0,8	1	0,9	0,6	0,3	0,2

Her diagonal için max-min operatörleri Çizelge 5.1'de gösterilen sonucu verir. Konvülüsyonun herhangi bir tipi mümkündür. Örneğin;

$\forall x,y,z \in R$ için:

$$\mu_{A(*)B}(z) = \bigvee_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{5.9}$$

olabilir. Burada *, z = x (*) y olacak şekilde seçilen bir operatördür. Sonuç olarak, $x * y$, $x^2 + y^2$ yada (x,y) çifti için herhangi bir operatör manasına da gelebilir. Ayrıca min-max konvülüsyonu gibi başka tip konvülüsyonlar ele alınabilir. Örneğin;

$\forall x,y,z \in R$ için:

$$\mu_{A(*)B}(z) = \bigwedge_{z=x*y} (\mu_A(x) \vee \mu_B(y)) \tag{5.10}$$

için sıradaki örnek * = + alınsın.

5.2 Örnek

(5.7), (5.8) ve (5.9) kullanılarak min-max konvülüsyonu saptanırsa;

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A(+)B Min-max	0,2	0,4	0,6	0,7	0,7	0,2	0,1	0,4	0,7	0,7	0,3	0,3

olur. Bu örnek bir bulanık sayının keyfi konvülüsyonunun ne konveks ne de normal olan bir bulanık alt kümeyi verebileceğini göstermektedir. (5.1)-(5.6)'da verilen konvülüsyonlarla ilgili olduğu kadar, teorem 3.1.3 ve teorem 3.1.4 kullanılarak bulanık sayılar için bu tip konvülüsyonların bulanık sayılar vereceğini ispatlamak kolaydır. Olasılık teorisinde kullanılan konvülüsyon toplam-çarpım konvülüsyonu olarak yeniden adlandırılır. Bu,

$\forall x,y,z \in R$ için:

$$\sum_x \mu_A(x) = 1 \text{ ve } \sum_y \mu_B(y) = 1$$

olmak üzere

$$\mu_{A(+)B}(z) = \sum_{z=x+y} (\mu_A(x) \cdot \mu_B(y))\text{'dir.} \tag{5.11}$$

Burada μ'ler rasgele A ve B kümeleri için olasılık fonksiyonları olabilen fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar genellikle normal değildir. Sürekli durumda ∫ sembolü yerine Σ sembolü alınır.

6. BULANIK SAYILARIN DEKONVÜLÜSYONU

Toplama için max-min konvülüsyonuyla ilgili olan

$\forall x,y,z \in R$ için:

$$\mu_{A(+)B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{6.1}$$

ve

$$C = A + B \tag{6.2}$$

denklemleri ele alınsın.

(6.1) denkleminde A ve B verilmiş, C verilmemişti. Problemin tersi için, C ve A verildiğinde (6.2) denklemindeki B çözülmelidir. Buna, çıkarmayla karıştırmamak koşuluyla "dekonvülüsyon" denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır (Kaufmann ve Gupta, 1991):

$$\mu_{C(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_C(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{6.3}$$

Bazı durumlar hariç C(−)B, (6.2)'nin bir çözümü değildir. $\alpha \in [0,1]$'da bir seviye olsun.

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}],\ B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$

$$C_\alpha = A_\alpha\,(+)\,B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}]$$

$$\begin{aligned} C_\alpha\,(-)\,B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}]\,(-)\,[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}] \\ &\neq [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \text{ eğer } b_1^{(\alpha)} = b_2^{(\alpha)} \text{ ise} \end{aligned}$$

(6.2)'nin bir çözüme sahip olup olmadığını kontrol eden dekonvülüsyon koşulunu kurmak için aşağıdaki teorem ele alınmıştır.

6.1 Teorem

$\forall\alpha : (c_2^{(\alpha)} - a_2^{(\alpha)}) \geq (c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)})$ olacak şekilde R'de A ve C bulanık sayıları verilsin.

$$A\,(+)\,B = C \tag{6.4}$$

olsun. (6.4)'ü sağlayan bir B bulanık sayısının varlığı için yeter koşul

$\forall\alpha,\alpha' \in [0,1]$ için:

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow (c_1^{(\alpha')} - a_1^{(\alpha')}) \geq (c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)})$$

ve

$$(c_2^{(\alpha')} - a_2^{(\alpha')}) \leq (c_2^{(\alpha)} - a_2^{(\alpha)}) \tag{6.5}$$

olmasıdır. Eğer bu koşul sağlanırsa çözüm vardır ve tektir ve $\forall\alpha\in[0,1]$ için:

$$B_\alpha = [c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)},\ c_2^{(\alpha)} - a_2^{(\alpha)}] \tag{6.6}$$

'dır (Kaufmann ve Gupta, 1991).

İspat:

Eğer A ve C normal ise B de normaldir. Tam tersine (6.5) koşulunun varlığıysa; seviye seviye A ve C konveks olduğundan bu (6.6)'yı sağlayan B'nin konveksliğini ifade etmektedir. (6.6)'daki B için çözüm, normal ve konvekstir. Bu ayrıca A ve C için tektir.

6.2 Örnek

Aşağıda N'de iki bulanık sayı tanımlanmıştır:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C =	0,1	0,2	0,6	0,7	0,8	0,9	1	0,5	0,4	0,2	0,1

	0	1	2	3	4	5	6
A =	0,2	0,6	0,8	0,9	1	0,5	0,1

İlerledikçe aşağıdakiler hesaplanır:

$C_1 = [6, 6]$, $A_1 = [4, 4]$, $B_1 = [2, 2]$

$C_{0,9} = [5, 6]$, $A_{0,9} = [3, 4]$, $B_{0,9} = [2, 2]$

$C_{0,8} = [4, 6]$, $A_{0,8} = [2, 4]$, $B_{0,8} = [2, 2]$

$C_{0,7} = [3, 6]$, $A_{0,7} = [2, 4]$, $B_{0,7} = [1, 2]$

$C_{0,6} = [2, 6]$, $A_{0,6} = [1, 4]$, $B_{0,6} = [1, 2]$

$C_{0,5} = [2, 7]$, $A_{0,5} = [1, 5]$, $B_{0,5} = [1, 2]$

$C_{0,4} = [2, 8]$, $A_{0,4} = [1, 5]$, $B_{0,4} = [1, 3]$

$C_{0,3} = [2, 8]$, $A_{0,3} = [1, 5]$, $B_{0,3} = [1, 3]$

$C_{0,2} = [1, 9]$, $A_{0,2} = [0, 5]$, $B_{0,2} = [1, 4]$

$C_{0,1} = [0, 10]$, $A_{0,1} = [0, 6]$, $B_{0,1} = [0, 4]$

(6.5) koşulu bu yüzden (Çizelge 6.1'de) sağlanır. Şimdi A (+) B = C sonucu kontrol edilirse;

Çizelge 6.1 B için dekonvülüsyon.

	0	1	2	3	4
1					
0,9			1		
0,8			1		
0,7			1		
0,6		1	1		
0,5		1	1		
0,4		1	1	1	
0,3		1	1	1	
0,2		1	1	1	1
0,1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
B =	0,1	0,7	1	0,4	0,2

0	1	2	3	4	5	6
0,2	0,6	0,8	0,9	1	0,5	0,1

(+)

0	1	2	3	4
0,1	0,7	1	0,4	0,2

=

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1	0,2	0,6	0,7	0,8	0,9	1	0,5	0,4	0,2	0,1

elde edilir.

6.3 Örnek

Şimdi (6.5) koşulunun varlığını sağlamayan bir örnek ele alınsın.

C = (6.7)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1	0,9	0,4	0,3	0,1

A = (6.8)

0	1	2	3	4	5	6
0,2	0,4	0,6	0,7	1	0,5	0,1

$C_1 = [5, 5]$, $A_1 = [4, 4]$, $B_1 = [1, 1]$

$C_{0,9} = [5, 6]$, $A_{0,9} = [4, 4]$, $B_{0,9} = [1, 2]$

$C_{0,8} = [4, 6]$, $A_{0,8} = [4, 4]$, $B_{0,8} = [0, 2]$

$C_{0,7} = [3, 6]$, $A_{0,7} = [3, 4]$, $B_{0,7} = [0, 2]$

$C_{0,6} = [3, 6]$, $A_{0,6} = [2, 4]$, $B_{0,6} = [1, 2]$

$C_{0,5} = [2, 6]$, $A_{0,5} = [2, 5]$, $B_{0,5} = [0, 1]$

$C_{0,4} = [2, 7]$, $A_{0,4} = [1, 5]$, $B_{0,4} = [1, 2]$

$C_{0,3} = [1, 8]$, $A_{0,3} = [1, 5]$, $B_{0,3} = [0, 3]$

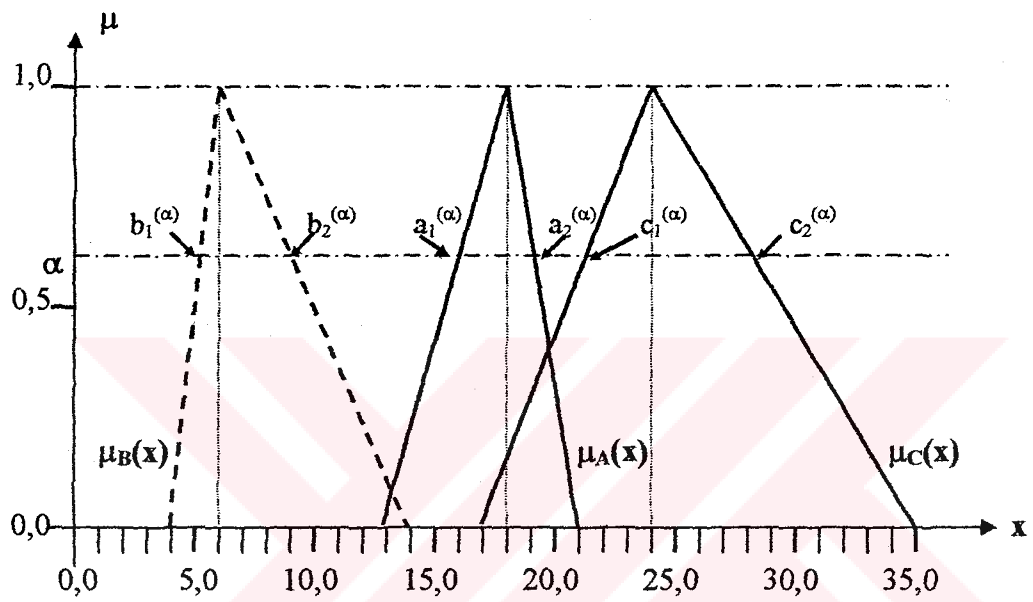
$C_{0,2} = [0, 8]$, $A_{0,2} = [0, 5]$, $B_{0,2} = [0, 3]$

$C_{0,1} = [0, 9]$, $A_{0,1} = [0, 6]$, $B_{0,1} = [0, 3]$

Eğer 0,7 ve 0,6 seviyelerine bakılırsa ve $B_{0,7}$ ve $B_{0,6}$: 0 < 1 ve 2 = 2 karşılaştırılırsa, (6.5) ile uygun olmadığı görülür. Bu sebepten dolayı (6.7)'de verilen C ile (6.8)'de verilen A bulanık sayıları, A(+)B= C denklemi için bir B çözümüne sahip değildir.

6.4 Örnek

Şekil 6.1 üçgen biçimli C ve A bulanık sayılarını göstermektedir. A(+)B = C denklemiyle ilgili olan B için bir çözüm araştırılsın. A ve C bulanık sayıları,



Şekil 6.1 B için dekonvülüsyon.

$\forall x \in R$ için:

$\mu_A(x) = 0$ $\quad x \leq 13$

$= x/5 - 13/5$ $\quad 13 \leq x \leq 18$

$= -x/3 + 7$ $\quad 18 \leq x \leq 21$

$= 0$ $\quad x \geq 21$

$\mu_C(x) = 0$ $\quad x \leq 17$

$= x/7 - 17/7$ $\quad 17 \leq x \leq 24$

$= -x/11 + 35/11$ $\quad 24 \leq x \leq 35$

$= 0$ $\quad x \geq 35$

olur.

(6.5) özelliği kontrol edilirse;

$b_1^{(\alpha)} = c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)} = (7\alpha + 17) - (5\alpha + 13) = (2\alpha + 4)$

$b_2^{(\alpha)} = c_2^{(\alpha)} - a_2^{(\alpha)} = (-11\alpha + 35) - (-3\alpha + 21) = (-8\alpha + 14)$

olur. Bu yüzden,

$$[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 4, -8\alpha + 14] \qquad (6.9)$$

(6.9)'da $\alpha \in [0,1]$ için alt sınır monoton artarak α'ya ve üst sınır monoton azalarak α'ya gelmektedir. Böylece (6.5) koşulunun sağlandığı görülmektedir. Bu yüzden Şekil 6.1'de gösterilen B için dekonvülüsyon elde edilir.

$\forall x \in R$ için:

$\mu_B(x) = 0 \qquad x \leq 4$

$= x/2 - 2 \qquad 4 \leq x \leq 6$

$= -x/8 + 7/4 \qquad 6 \leq x \leq 14$

$= 0 \qquad x \geq 14$

bulunur.

6.5 Örnek

C=

-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0,1	0,4	0,5	0,8	0,8	0,9	1	0,6	0,5	0,2	0,1	0,1

A=

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
0,4	0,8	1	0,6	0,2	0,1	0,1

Dekonvülüsyon için başka bir yöntem de (6.1)'de direkt yerine koymaktır.

1.) $\mu_C(-7) = \mu_A(-5) \wedge \mu_B(-2)$

$0,1 = 0,4 \wedge \mu_B(-2)$

Bu yüzden $\mu_B(-2) = 0,1$

2.) $\mu_C(-6) = (\mu_A(-5) \wedge \mu_B(-1)) \vee (\mu_A(-4) \wedge \mu_B(-2))$

$0,4 = (0,4 \wedge \mu_B(-1)) \vee (0,8 \wedge 0,1)$

Bu yüzden $\mu_B(-1) \geq 0,4$

3.) $\mu_C(-5) = (\mu_A(-5) \wedge \mu_B(0)) \vee (\mu_A(-4) \wedge \mu_B(-1)) \vee (\mu_A(-3) \wedge \mu_B(-2))$

$0,5 = (0,4 \wedge \mu_B(0)) \vee (0,8 \wedge \mu_B(-1)) \vee (1 \wedge 0,1)$

$= (\mu_B(0) \leq 0,4) \vee (\mu_B(-1) \geq 0,4) \vee (0,1)$

$\mu_B(-1) = 0{,}5$ olmasını gerektirir.

4.) $\mu_C(-4) = (\mu_A(-5) \wedge \mu_B(1)) \vee (\mu_A(-4) \wedge \mu_B(0)) \vee (\mu_A(-3) \wedge \mu_B(-1)) \vee (\mu_A(-2) \wedge \mu_B(-2))$

$$0{,}8 = (0{,}4 \wedge \mu_B(1)) \vee (0{,}8 \wedge \mu_B(0)) \vee (1 \wedge 0{,}5) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}1)$$

$\mu_B(0) \geq 0{,}8$ olmasını gerektirir.

5.) $\mu_C(-3) = (\mu_A(-5) \wedge \mu_B(2)) \vee (\mu_A(-4) \wedge \mu_B(1)) \vee (\mu_A(-3) \wedge \mu_B(0)) \vee (\mu_A(-2) \wedge \mu_B(-1)) \vee$
$(\mu_A(-1) \wedge \mu_B(-2))$

$$0{,}8 = (0{,}4 \wedge \mu_B(2)) \vee (0{,}8 \wedge \mu_B(1)) \vee (1 \wedge \mu_B(0)) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}5) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}1)$$

Bu yüzden $\mu_B(0) = 0{,}8$ ve $\mu_B(1) \geq 0{,}8$

6.) $\mu_C(-2) = (\mu_A(-5) \wedge \mu_B(3)) \vee (\mu_A(-4) \wedge \mu_B(2)) \vee (\mu_A(-3) \wedge \mu_B(1)) \vee (\mu_A(-2) \wedge \mu_B(0)) \vee$
$(\mu_A(-1) \wedge \mu_B(-1)) \vee (\mu_A(0) \wedge \mu_B(-2))$

$$0{,}9 = (0{,}4 \wedge \mu_B(3)) \vee (0{,}8 \wedge \mu_B(2)) \vee (1 \wedge \mu_B(1)) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}5) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}1)$$

$\mu_B(1) = 0{,}9$ olması gerekir.

7.) $\mu_C(-1) = (\mu_A(-5) \wedge \mu_B(4)) \vee (\mu_A(-4) \wedge \mu_B(3)) \vee (\mu_A(-3) \wedge \mu_B(2)) \vee (\mu_A(-2) \wedge \mu_B(1)) \vee$
$(\mu_A(-1) \wedge \mu_B(0)) \vee (\mu_A(0) \wedge \mu_B(-1)) \vee (\mu_A(1) \wedge \mu_B(-2))$

$$1 = (0{,}4 \wedge \mu_B(4)) \vee (0{,}8 \wedge \mu_B(3)) \vee (1 \wedge \mu_B(2)) \vee (0{,}6 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}5) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}1)$$

Bu yüzden $\mu_B(2) = 1$

8.) $\mu_C(0) = (\mu_A(-5) \wedge \mu_B(5)) \vee (\mu_A(-4) \wedge \mu_B(4)) \vee (\mu_A(-3) \wedge \mu_B(3)) \vee (\mu_A(-2) \wedge \mu_B(2)) \vee$
$(\mu_A(-1) \wedge \mu_B(1)) \vee (\mu_A(0) \wedge \mu_B(0)) \vee (\mu_A(1) \wedge \mu_B(-1)) \vee (\mu_A(2) \wedge \mu_B(-2))$

$$0{,}6 = (0{,}4 \wedge \mu_B(5)) \vee (0{,}8 \wedge \mu_B(4)) \vee (1 \wedge \mu_B(3)) \vee (0{,}6 \wedge 1) \vee (0{,}2 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}8) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}5) \vee (0 \wedge 0{,}1)$$

Bu yüzden $\mu_B(3) \leq 0{,}6$ ve $\mu_B(4) \leq 0{,}6$

9.) $\mu_C(1) = (\mu_A(-5) \wedge \mu_B(6)) \vee (\mu_A(-4) \wedge \mu_B(5)) \vee (\mu_A(-3) \wedge \mu_B(4)) \vee (\mu_A(-2) \wedge \mu_B(3)) \vee$
$(\mu_A(-1) \wedge \mu_B(2)) \vee (\mu_A(0) \wedge \mu_B(1)) \vee (\mu_A(1) \wedge \mu_B(0)) \vee (\mu_A(2) \wedge \mu_B(-1))$

$$0{,}5 = (0{,}4 \wedge \mu_B(6)) \vee (0{,}8 \wedge \mu_B(5)) \vee (1 \wedge \mu_B(4)) \vee (0{,}6 \wedge \mu_B(3)) \vee (0{,}2 \wedge 1) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}1 \wedge 0{,}8) \vee (0 \wedge 0{,}5)$$

Bu nedenle $\mu_B(3) = 0{,}5$ $\mu_B(4) \leq 0{,}5$ ve $\mu_B(5) \leq 0{,}5$

Eğer bu metoda devam edilirse $\mu_B(x \geq 4) = 0$ elde edilir. B'nin dekonvülüze edilmiş değerleri aşağıda verilmiştir.

	-2	-1	0	1	2	3
B=	0,1	0,5	0,8	0,9	1	0,5

6.6 Bir Fark veya Çıkarmanın Dekonvülüsyonu

$\forall\alpha\in[0,1]$ için $B_\alpha = [-b_2^{(\alpha)}, -b_1^{(\alpha)}]$ ifadesi B'nin görüntüsü olarak tanımlanırsa; A (–) B = C farkı A (+) B = C halini alır. Bu nedenle toplama için açıklanan dekonvülüsyon metodu kullanılabilir.

6.7 Bir Çarpımın Dekonvülüsyonu

Bir çarpımı içeren max-min konvülüsyonu için aşağıdaki denklem tekrar ele alınsın.

$\mu_A(0) = 0$ koşuluyla $\forall x,y,z\in R$ için:

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \bigvee_{z=x.y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{6.10}$$

'dir. Şimdi

$$A\,(\cdot)\,B = C \tag{6.11}$$

denklemi ele alınırsa; burada B ve C verilmiş, A ise bilinmeyen bir bulanık sayıdır. Bu şekilde bir operatöre bir "çarpımın dekonvülüsyonu" denir ki burada bölme operatörü ile karıştırılmamalıdır (Kaufmann ve Gupta, 1991). Aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$\forall x,y,z\in R$ için:

$$\mu_{C(:)B}(z) = \bigvee_{z=x:y} (\mu_C(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{6.12}$$

C (:) B özel durumlar hariç (6.10) denkleminin bir çözümü değildir. Çünkü

$\forall\alpha$ seviyesi için:

$$C_\alpha = A_\alpha\,(\cdot)\,B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}]$$

$$\begin{aligned} C_\alpha\,(:)\,B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}]\,(:)\,[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [(a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}) / b_2^{(\alpha)}, (a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}) / b_1^{(\alpha)}] \\ &\neq [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\text{'dır.} \end{aligned}$$

6.7.1 Teorem

R'de herhangi iki A ve C bulanık sayıları verilsin.

$\forall \alpha \in [0,1]$ seviyesi için:

$c_2^{(\alpha)} / a_2^{(\alpha)} \geq c_1^{(\alpha)} / a_1^{(\alpha)} \quad , \quad a_2^{(\alpha)} \geq 0$

olsun.

$$A\,(\cdot)\,B = C \tag{6.13}$$

denklemi ele alınırsa; (6.13)'ü sağlayan bir B bulanık sayısının varlığı için gerek ve yeter koşul

$\forall \alpha, \alpha' \in [0,1]$ için:

$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow (c_1^{(\alpha')} / a_1^{(\alpha')} \geq c_1^{(\alpha)} / a_1^{(\alpha)})$

ve

$$(c_2^{(\alpha')} / a_2^{(\alpha')} \leq c_2^{(\alpha)} / a_2^{(\alpha)}) \tag{6.14}$$

olmasıdır. Eğer bu koşul sağlanırsa çözüm vardır ve tektir ve

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$B_\alpha = [c_1^{(\alpha)} / a_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)} / a_2^{(\alpha)}]$

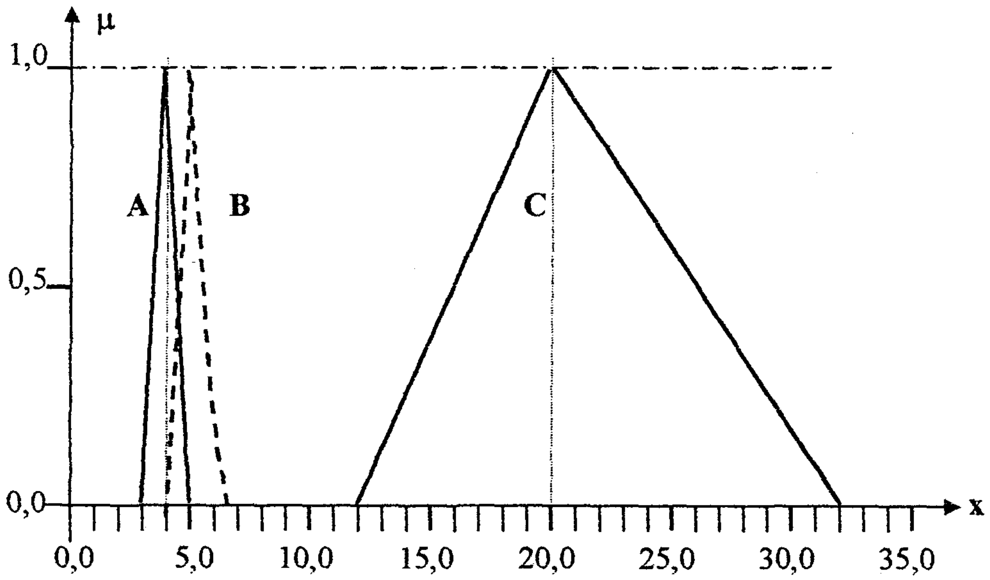
ile verilir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

İspat:

Eğer A ve C normalse B de normaldir. Diğer yandan seviye seviye yuva yapma koşulu (6.14) 'dür. A ve C konveks olduğundan bu koşul (6.14)'ü sağlayan B'nin konveksliğini gösterir. Bu koşul bir önceki ile kontrol edilmelidir. Bu yüzden B için çözüm normal ve konvekstir ve ayrıca tektir.

6.7.2 Örnek

Şekil 6.1'de gösterilen üçgen şekilli iki A ve C bulanık sayıları ele alınsın.



Şekil 6.2 B için dekonvülüsyon.

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \le 3 \\ x - 3 & 3 \le x \le 4 \\ -x + 5 & 4 \le x \le 5 \\ 0 & x \ge 5 \end{cases} \tag{6.15}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0 & x \le 12 \\ x/8 - 12/8 & 12 \le x \le 20 \\ -x/12 + 32/12 & 20 \le x \le 32 \\ 0 & x \ge 32 \end{cases} \tag{6.16}$$

'dir.

(6.15) ve (6.16) kullanılırsa,

$A_\alpha = [\alpha + 3, -\alpha + 5]$ ve $C_\alpha = [8\alpha + 12, -12\alpha + 32]$ elde edilir. Ek olarak

$$[c_1^{(\alpha)} / a_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)} / a_2^{(\alpha)}] = [(8\alpha + 12) / (\alpha + 3), (-12\alpha + 32) / (-\alpha + 5)]$$
$$= [8 - 12 / (\alpha + 3), 12 - 28 / (-\alpha + 5)]$$

'dir. Bu sonuçtan $[12 - 28 / (-\alpha + 5)]$'in α'da bir azalımla azalırken, $[8 - 12 / (\alpha + 3)]$'ün α'da bir artımla arttığı görülmektedir. Dolayısıyla çözüm;

$\forall x \in R$ için:

$\mu_B(x) = 0 \qquad x \leq 4$

$= (12 - 3x) / (x - 8) \qquad 4 \leq x \leq 5$

$= (32 - 5x) / (12 - x) \qquad 5 \leq x \leq 6{,}4$

$= 0 \qquad x \geq 6{,}4$

olur. Görüldüğü gibi B üçgen bir yapıya sahip değildir.

6.8 A (+) A = C ve A (·) A = C'nin Dekonvülüsyonu

Aşağıdaki denklem ele alınsın.

$$A\ (+)\ A = C \tag{6.17}$$

Burada C verilmiştir. $A, C \subset R$ olduğu varsayılsın. $\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ ve $C_\alpha = [c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}]$

yazılabilir. Bu durumda

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\ (+)\ [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}]$

yada

$[2a_1^{(\alpha)}, 2a_2^{(\alpha)}] = [c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}]$

yada

$$[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [c_1^{(\alpha)}/2, c_2^{(\alpha)}/2] \tag{6.18}$$

elde edilir. Bu nedenle (6.17)'yi çözmek için (6.18) kullanılmalıdır.

6.8.1 Örnek

Şekil 6.3'de gösterilen C bulanık sayısı ele alınsın.

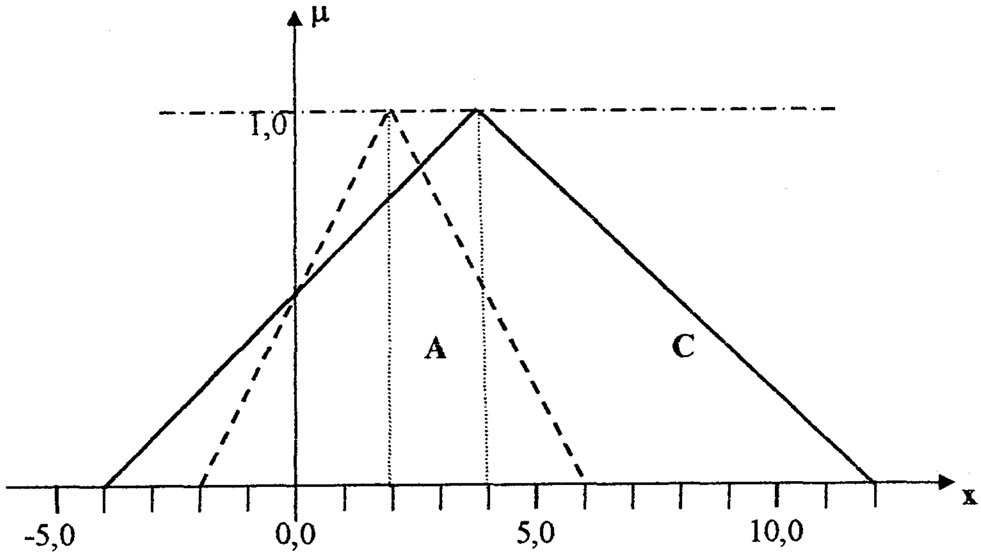
$\forall x \in R$ için:

$\mu_C(x) = 0 \qquad x \leq -4$

$= x/8 + 4/8 \qquad -4 \leq x \leq 4$

$= -x/8 + 12/8 \qquad 4 \leq x \leq 12$

$= 0 \qquad x \geq 12$



Şekil 6.3 A için dekonvülüsyon.

Bu durumda $\forall\alpha\in[0,1]$ için:

$C_\alpha = [8\alpha - 4, -8\alpha + 12]$

olur. (6.18) kullanılarak

$\forall\alpha\in[0,1]$ için:

$A_\alpha = [4\alpha - 2, -4\alpha + 6]$

ve

$\forall x\in R$ için:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ x/4 + 2/4 & -2 \le x \le 2 \\ -x/4 + 6/4 & 2 \le x \le 6 \\ 0 & x \ge 6 \end{cases}$$

elde edilir. Eğer (3.28)'e bakılırsa,

$\forall x\in R$ için:

$\mu_A(x) = \mu_{2C}(x) = \mu_C(x/2)$

bulunur.

Daha genel olarak

$A\ (+)\ A\ (+)\ A\ (+) \ldots (+)\ A = C$ $\qquad k = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ için

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_A(x) = \mu_{kC}(x) = \mu_C(x/k) \tag{6.19}$$

yada

$$A_\alpha = [c_1^{(\alpha)}/k,\ c_2^{(\alpha)}/k] \tag{6.20}$$

elde edilir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

A (·) A = C durumu aşikardır. A sayısı C'nin "kare kökü" adını alır ve A ile çalışmalar R'deki bulanık sayılarla sınırlıdır.

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ ve $C_\alpha = [c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}]$

yazılabilir. O zaman

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\ (\cdot)\ [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}]$

yada

$$[(a_1^{(\alpha)})^2, (a_2^{(\alpha)})^2] = [c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}] \tag{6.21}$$

yada

$$[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [\sqrt{c_1^{(\alpha)}}, \sqrt{c_2^{(\alpha)}}\ ] \tag{6.22}$$

bulunur.

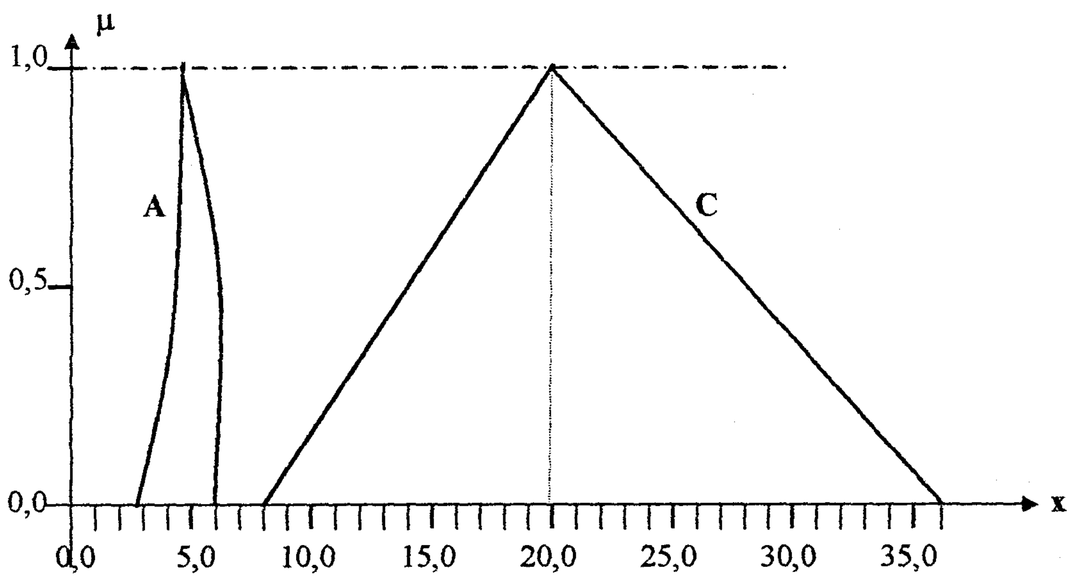
6.8.2 Örnek

Şekil 6.4'de gösterilen şekil ele alınırsa;

$\forall x \in R$ için:

$$\begin{aligned}
\mu_C(x) &= 0 && x \le 8\\
&= x/12 - 8/12 && 8 \le x \le 20\\
&= -x/16 + 36/16 && 20 \le x \le 36\\
&= 0 && x \ge 36
\end{aligned} \tag{6.23}$$

olur.



Şekil 6.4 C'nin kare kökü.

O halde

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$C_\alpha = [12\alpha + 8, -16\alpha + 36]$

yazılır. Dolayısıyla bu denklem kullanılarak $A_\alpha = [\sqrt{12\alpha+8}, \sqrt{-16\alpha+36}]$ ve

$\forall x \in R$ için:

$$\begin{aligned}
\mu_A(x) &= 0 && x \leq \sqrt{8} \\
&= x^2/12 - 8/12 && \sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{20} \\
&= -x^2/16 + 36/16 && \sqrt{20} \leq x \leq 6 \\
&= 0 && x \geq 6
\end{aligned}$$

saptanır. Bu metotla aşağıdaki gibi n dizisinin köklerine zorluk çekmeden genişletilebilir.

$A\,(\cdot)\,A\,(\cdot)\,A\,(\cdot)\ldots(\cdot)\,A = C \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ için

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$$A_\alpha = [\sqrt[n]{c_1^{(\alpha)}}, \sqrt[n]{c_2^{(\alpha)}}] \qquad (6.24)$$

'dır (Kaufmann ve Gupta, 1991).

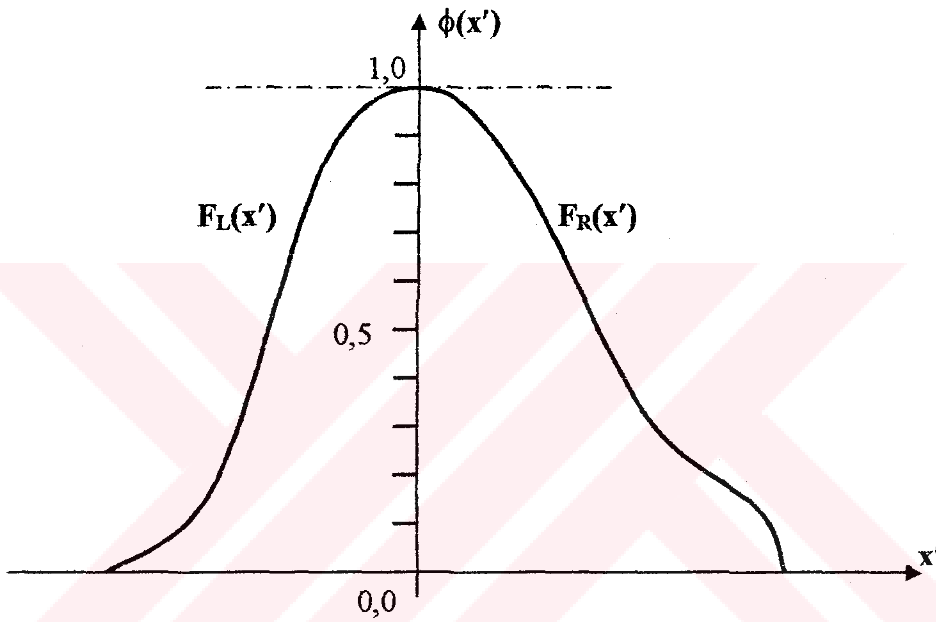
7. DUBOİS ve PRADE'İN L-R BULANIK SAYILARI

Referans fonksiyonu adı verilen bir fonksiyon ele alınsın.

$\forall x' \in R$ ve $\phi \in [0,1]$ için:

$$\begin{aligned} \phi(x') &= F_L(x') && -\infty < x' < 0 \\ &= 1 && x' = 0 \\ &= F_R(x') && 0 < x' < \infty \end{aligned} \qquad (7.1)$$

olsun.



Şekil 7.1 Konveks ve normal olan bir L-R $\phi(x')$ bulanık fonksiyonu.

$F_L(x')$ üzerinde monoton bir artma ve $F_R(x')$ üzerinde de monoton bir azalma yüklenmektedir; yani $\phi(x')$ normal konveks bir fonksiyondur. $F_L(x')$ ve $F_R(x')$'nün simetrik olması önemli değildir. Şekil 7.1 bu tip bir $\phi(x')$ fonksiyonunu göstermektedir.

$\phi(x')$ kullanılarak Şekil 7.1'de gösterilen bulanık sayı kurulabilir.

$\forall x \in R$ için:

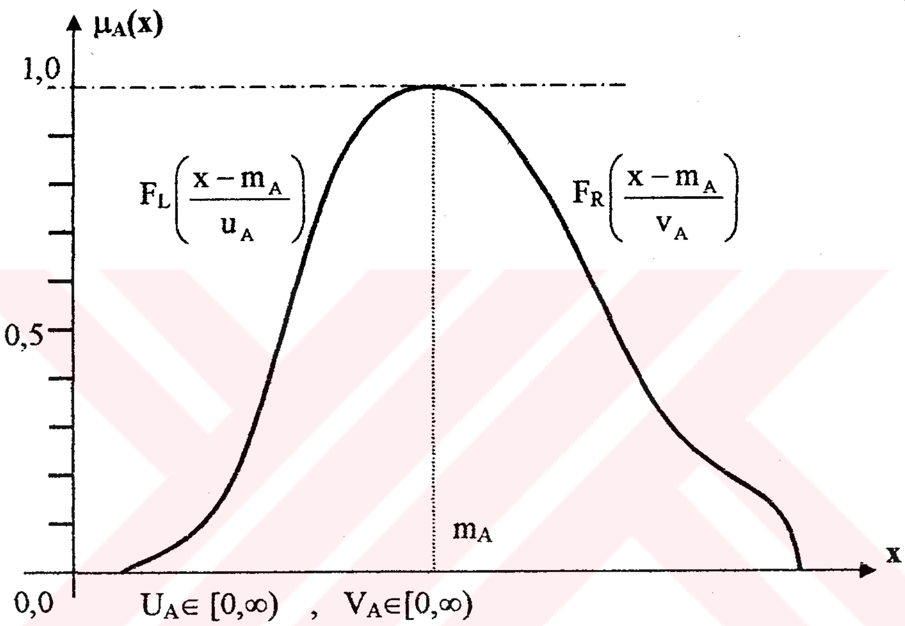
$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= F_L((x - m_A) / u_A) && -\infty < x < m_A \\ &= 1 && x = m_A \\ &= F_R((x - m_A) / v_A) && m_A < x < \infty \end{aligned}$$

Burada $u_A > 0$, $v_A > 0$'dır. $m_A < 0$ için, bir sol dönüşüm ve $m_A > 0$ için bir sağ dönüşüm elde edilir. Eğer $u_A < 1$ ve $v_A < 1$ ise bir büzülme, $u_A > 1$ ve $v_A > 1$ ise bir genişleme elde edilir. Bu nedenle Şekil 7.2, F_L için bir genişlemeyi ve F_R için bir büzülmeyi göstermektedir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

B bulanık sayısı (7.1)'den dolayı aynı yolla kurulabilir.

$\forall x \in R$ için:

$$
\begin{aligned}
\mu_B(x) &= F_L((x - m_B) / u_B) & -\infty < x < m_B \\
&= 1 & x = m_B \\
&= F_R((x - m_B) / v_B) & m_B < x < \infty
\end{aligned}
$$



Şekil 7.2 $\phi(x)$'in (F_L) genişlemesi ve (F_R) büzülmesi.

(m, u, v) üçlüsü kullanılarak A ve B bulanık sayıları tanımlanabilir:

$A = (m_A, u_A, v_A)$ ve $B = (m_B, u_B, v_B)$

olur.

Dubois ve Prade, A ve B'nin toplamı için max-min konvülüsyonunu şu şekilde ispatlar:

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_{A(+)B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

$$
\begin{aligned}
A(+)B &= (m_A, u_A, v_A) + (m_B, u_B, v_B) \\
&= (m_A + m_B, u_A + u_B, v_A + v_B) \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

ile bağlantılıdır. Bunun ispatı yapılırsa; keyfi bir α seviyesi için F_L için A ile ilgili

$F_L((x_1 - m_A) / u_A) = \alpha$'dır.

Bu fonksiyonun tersi alınarak

$(x_1 - m_A) / u_A = F_L'(\alpha)$

yada

$x_1 = m_A + u_A.F_L'(\alpha) \quad , \quad \alpha \in [0,1]$

ile saptanır. Aynı yolla B için F_L varsayılarak ters fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$(y_1 - m_B) / u_B = F_L'(\alpha)$

yada

$y_1 = m_B + u_B.F_L'(\alpha) \quad , \quad \alpha \in [0,1]$

Sonunda

$x_1 + y_1 = m_A + m_B + (u_A + u_B)\, F_L'(\alpha)$

olur. Aynı şekilde $F_R'(\alpha)$ varsayılarak,

$x_2 + y_2 = m_A + m_B + (v_A + v_B)\, F_R'(\alpha)$'dır.

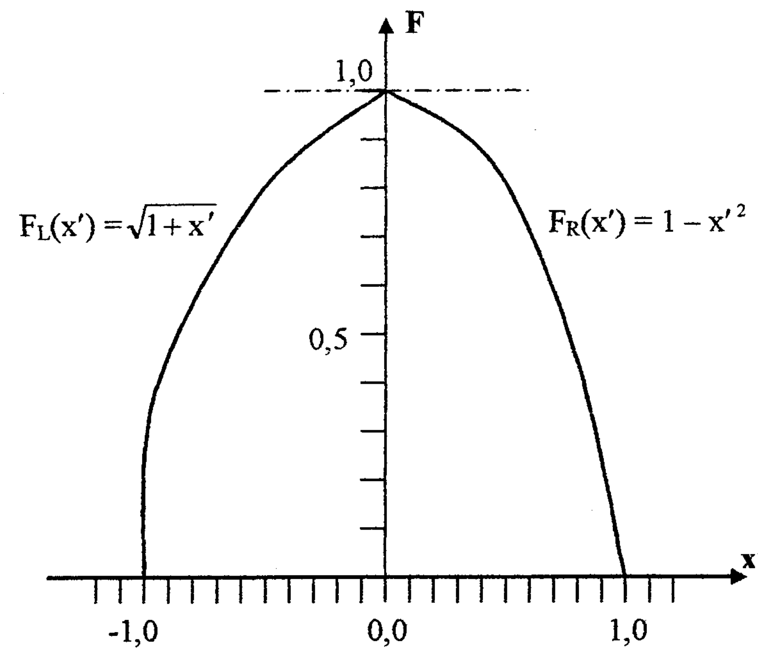
Dubois ve Prade L-R bulanık sayılar ailesi olarak adlandırılmaktadır (Kaufmann ve Gupta, 1991).

7.1 Örnek

$$F_L(x') = \begin{cases} 0 & x' \leq -1 \\ \sqrt{1+x'} & -1 \leq x' \leq 0 \end{cases}$$

$$F_R(x') = \begin{cases} 1 - x'^2 & 0 \leq x' \leq 1 \\ 0 & x' > 1 \end{cases}$$

ifadeli L-R bulanık sayısı ele alınsın. Bu, Şekil 7.3'de gösterilmiştir.



Şekil 7.3 Bir L-R bulanık sayısı (7.1 Örnek).

Eğer

$m_A = 4$, $u_A = 2$, $v_A = 3$

$m_B = 8$, $u_B = 3$, $v_B = 5$

aynı L-R aileli iki bulanık sayı ele alınırsa aşağıdaki bulanık sayılar elde edilir.

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ \sqrt{1+(x-4)/2} & 2 \le x \le 4 \\ 1 & x = 4 \\ 1 - |(x-4)/3|^2 & 4 \le x \le 7 \\ 0 & x > 7 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & x \le 5 \\ \sqrt{1+(x-8)/3} & 5 \le x \le 8 \\ 1 & x = 8 \\ 1 - |(x-8)/5|^2 & 8 \le x \le 13 \\ 0 & x > 13 \end{cases}$$

Sonunda (7.2) kullanılarak,

$$A(+)B = (m_A + m_B,\ u_A + u_B,\ v_A + v_B)$$
$$= (4+8,\ 2+3,\ 3+5)$$
$$= (12,\ 5,\ 8)$$

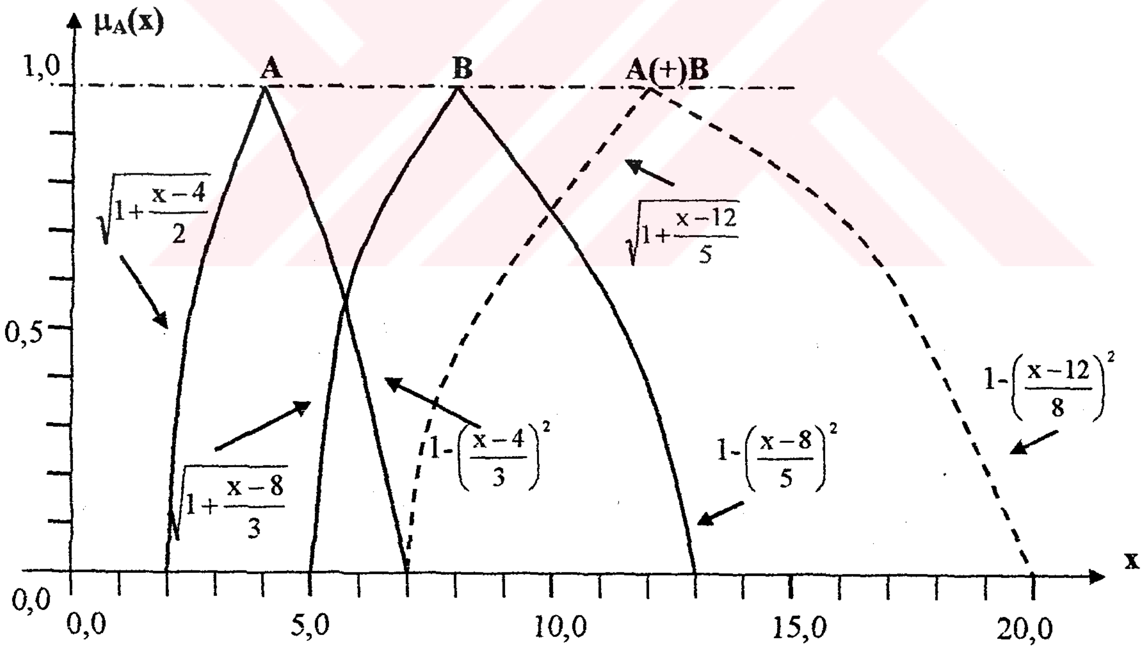
elde edilir. Buradan da

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_{A(+)B}(x) = 0 \qquad x \leq 7$$
$$= \sqrt{1+(x-12)/5} \qquad 7 \leq x \leq 12$$
$$= 1 \qquad x = 12$$
$$= 1 - \left|(x-12)/8\right|^2 \qquad 12 \leq x \leq 20$$
$$= 0 \qquad x > 20$$

olur.

Bu, Şekil 7.4'de gösterilmiştir.



Şekil 7.4 İki L-R bulanık sayısının bulanık toplamı.

7.2 Katlı L-R Bulanık Sayıları

Eğer mod tek değilse (Şekil 7.5), L-R bulanık sayısı bir katlı noktaya sahiptir (Kaufmann ve Gupta, 1991). Bu tip bulanık sayı iki farklı yolla gösterilebilir:

1. Keyfi bir m_A seçilerek,

$m_{1A} \leq m_A \leq m_{2A}$

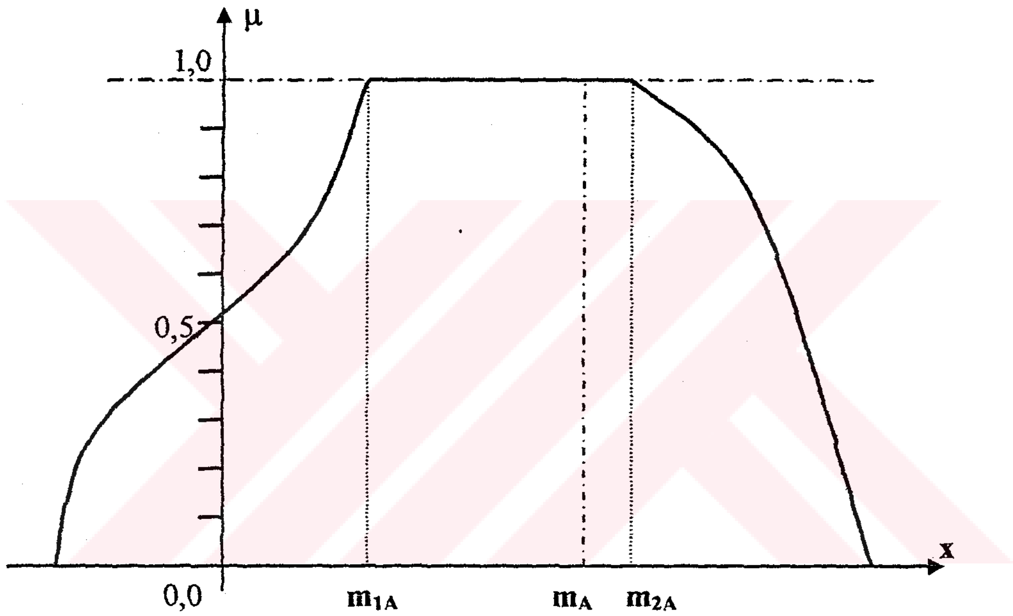
2. L-R bulanık sayısını göstermek için dört önemli sayı seçilerek,

$(m_{1A}, m_{2A}, u_A, v_A)$

Katlı iki sayının toplamı bu yüzden

$$\begin{aligned} A(+)B &= (m_{1A}, m_{2A}, u_A, v_A) + (m_{1B}, m_{2B}, u_B, v_B) \\ &= (m_{1A} + m_{1B}, m_{2A} + m_{2B}, u_A + u_B, v_A + v_B) \end{aligned}$$

ile verilmektedir.



Şekil 7.5 Katlı bir L-R bulanık sayısı.

7.3 Yarı Simetrik L-R Bulanık Sayıları

$\forall x' \in R$ için:

$$F_L(x') = F_R(-x')$$
$$F_L(0) = F_R(0) = 1 \qquad (7.3)$$

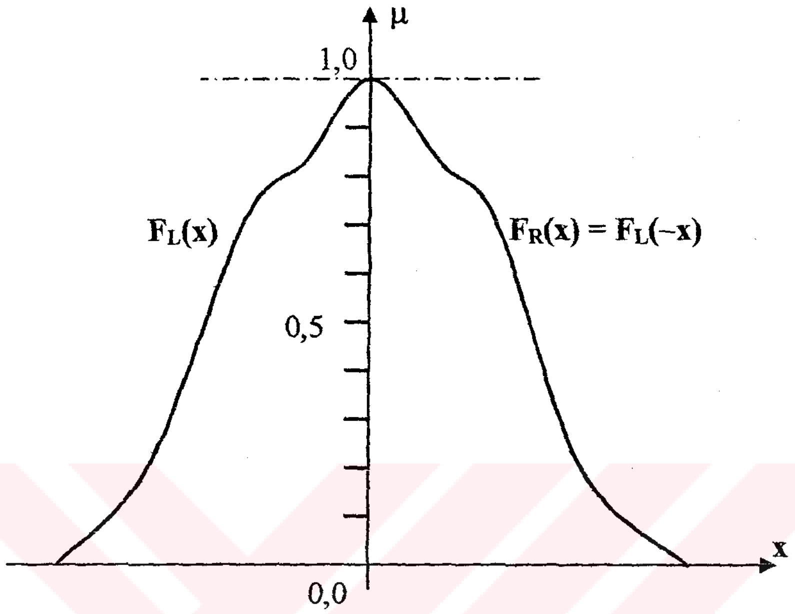
olacak şekilde bir L-R bulanık sayısı ele alınsın. Bu durumda L-R ailesinin her üyesi

$\forall x \in R$ için:

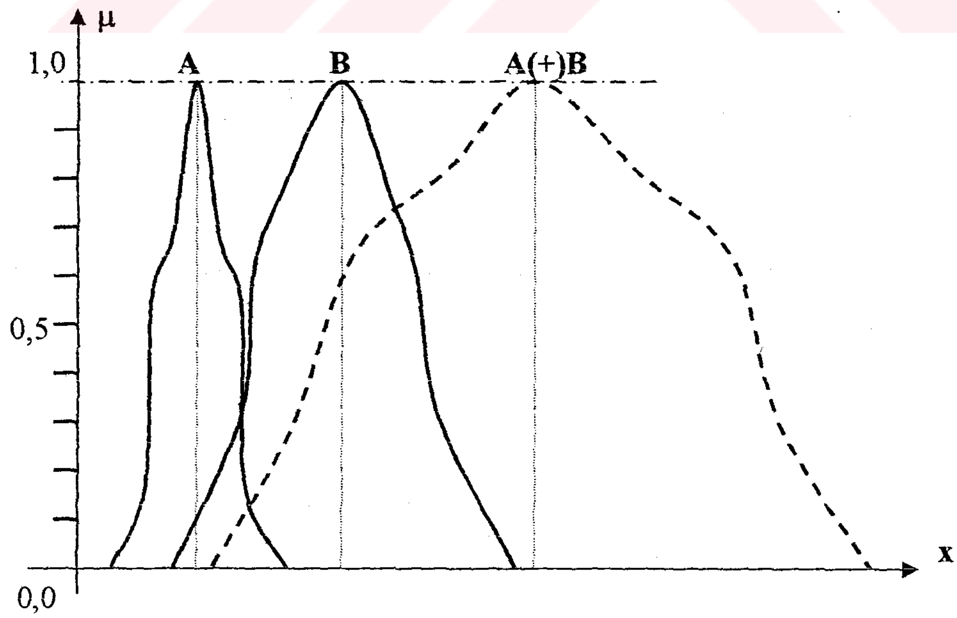
$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= F_L((x - m_A) / u_A) && -\infty < x < m_A \\ &= 1 && x = m_A \\ &= F_L((x - m_A) / v_A) && m_A < x < \infty \end{aligned}$$

(7.3) kullanılarak kurulan yarı simetrik aile şeklindedir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

Şekil 7.6 yarı simetrik bir L-R bulanık sayısını ve Şekil 7.7 ise iki yarı simetrik L-R bulanık sayısının toplamını göstermektedir. Yarı simetrik ve L-R özellikleri toplama için korunmaktadır.



Şekil 7.6 Yarı simetrik bir L-R bulanık sayısı.



Şekil 7.7 İki yarı simetrik L-R bulanık sayısının toplamı.

7.4 Bir Yarı Simetrik L-R Bulanık Sayısının Görüntüsü (Tersi)

Eğer $A = (m_A, u_A, v_A)$ ise

$$A^{-} = (-m_A, v_A, u_A) \tag{7.4}$$

'dır.

Görüntüsünde, m_A'nın işaretinin değiştiği, u_A ve v_A'nın yer değiştiği görülmektedir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

7.5 İki Yarı Simetrik L-R Bulanık Sayısının Farkı

Çıkarma toplamanın tersidir. Bu kullanılarak,

$$\begin{aligned} A(-)B^{-} &= A(+)B = (m_A, u_A, v_A)\,(+)\,(-m_B, v_B, u_B) \\ &= (m_A - m_B, u_A + v_B, v_A + u_B) \end{aligned} \tag{7.5}$$

olur (Kaufmann ve Gupta, 1991).

7.6 L-R Bulanık Sayılarının Çarpımı

R'deki bulanık sayılar ele alınsın. Özel durumlar hariç, L-R bulanık sayılarının çarpımını bir L-R bulanık sayısı vermemektedir. Bu, ayrıca bölme, bulanık max ve bulanık min operatörleri için de geçerlidir.

7.7 Bir Adi Sayıyla Çarpım

Eğer $A = (m_A, u_A, v_A)$ ise

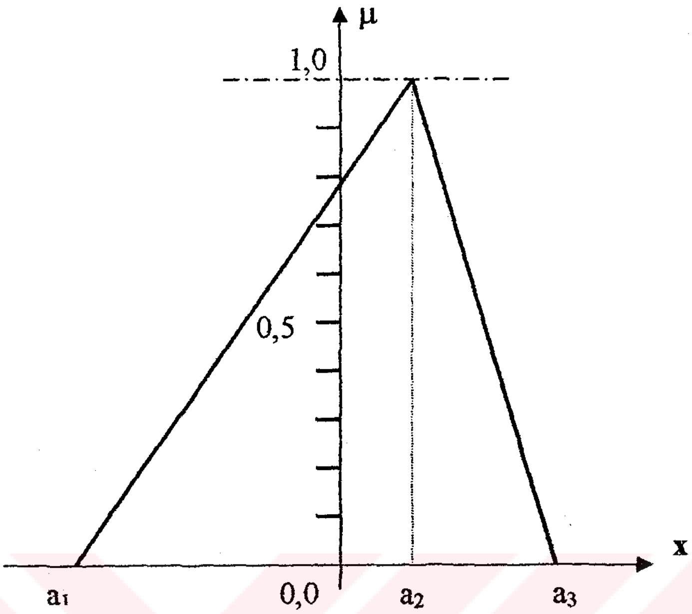
$$k \cdot A = (km_A, ku_A, kv_A) \qquad k > 0 \tag{7.6}$$

$$k \cdot A = (km_A, -ku_A, -kv_A) \qquad k < 0 \tag{7.7}$$

'dır (Kaufmann ve Gupta, 1991). Sonunda, L-R bulanık sayılarının kullanımı genel olarak "toplama, çıkarma ve bir adi sayıyla çarpımı için yararlıdır" sonucu elde edilir. Başka operatörler için de aynı yaklaşımlar kullanılabilir.

8. ÜÇGEN BULANIK SAYILAR

Şekil 8.1'de gösterilen tipik üçgen bulanık sayılar (triangular fuzzy number(TFN)), yarı simetrik L-R bulanık sayıların özel bir halidir.



Şekil 8.1 Bir üçgen bulanık sayı (TFN) $A = (a_1, a_2, a_3)$.

$\forall x, a_1, a_2, a_3 \in R$ için:

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0 && x \leq a_1 \\ &= (x - a_1)/(a_2 - a_1) && a_1 \leq x \leq a_2 \\ &= (a_3 - x)/(a_3 - a_2) && a_2 \leq x \leq a_3 \\ &= 0 && x \geq a_3 \end{aligned}$$

olsun. a_1, a_2 ve a_3'ün sonlu olduğu varsayılsın.

Bir TFN daima $A = (a_1, a_2, a_3)$ gibi bir üçlü ile gösterilmektedir (L-R bulanık sayılarının tanımında kullanılan üçlü ile karıştırılmamalıdır).

Güvenli bir aralığın α seviyesi

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \\ &= [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)] \end{aligned} \tag{8.1}$$

dır. TFN'ler aynı aileye ait olan L-R bulanık sayıları olduğundan, onların toplamı bir TFN'yi vermektedir. Bu, aşağıdaki teoremle ispatlanmıştır.

8.1 Teorem

Eğer A ve B TFN ise A(+)B de bir TFN'dir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

İspat:

(8.1)'deki güven aralıkları kullanılırsa;

$A_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)]$

$B_\alpha = [b_1 + \alpha(b_2 - b_1), b_3 - \alpha(b_3 - b_2)]$

olur. O zaman

$A_\alpha (+) B_\alpha = [a_1 + b_1 + \alpha(a_2 + b_2 - a_1 - b_1), a_3 + b_3 - \alpha(a_3 + b_3 - a_2 - b_2)]$

ve

$\forall x, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in R$ ve $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ için:

$$
\begin{aligned}
\mu_{A(+)B}(x) &= 0 && x \leq a_1 + b_1 \\
&= \frac{x-(a_1+b_1)}{a_2+b_2-a_1-b_1} && a_1 + b_1 \leq x \leq a_2 + b_2 \\
&= 1 && x = a_2 + b_2 \\
&= \frac{a_3+b_3-x}{a_3+b_3-a_2-b_2} && a_2 + b_2 \leq x \leq a_3 + b_3 \\
&= 0 && x \geq a_3 + b_3
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu yüzden bir toplama operatörü için,

$$(a_1, a_2, a_3) (+) (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad (8.2)$$

yazılır.

8.2 Bir TFN'nin Görüntüsü (Tersi)

$A = (a_1, a_2, a_3)$ için

$$A^- = (-a_3, -a_2, -a_1) \quad (8.3)$$

ve $\forall\alpha$ seviyesi için:

$$A_\alpha^- = [a_3 + \alpha(a_3 - a_2), a_1 - \alpha(a_2 - a_1)] \quad (8.4)$$

'dir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

8.3 Çıkarma

Çıkarma toplamanın tersi olarak düşünülmektedir.

$$A(-)B^- = A(+)B = (a_1, a_2, a_3)\ (+)\ (-b_3, -b_2, -b_1)$$
$$= (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1) \quad (8.5)$$

ve $\forall\alpha$ seviyesi için:

$$A_\alpha(-)B_\alpha = A_\alpha(+)B^-_\alpha$$
$$= [a_1 - b_3 + \alpha(a_2 - b_2 - a_1 + b_3),\ a_3 - b_1 - \alpha(a_3 - b_1 - a_2 + b_2)] \quad (8.6)$$

'dir.

Ayrıca $\forall x, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in R$ ve $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ için:

$$\mu_{A(-)B}(x) = 0 \qquad x \leq a_1 - b_3$$
$$= \frac{x-(a_1-b_3)}{a_2-b_2-(a_1-b_3)} \qquad a_1 - b_3 \leq x \leq a_2 - b_2$$
$$= 1 \qquad x = a_2 - b_2$$
$$= \frac{a_3-b_1-x}{a_3-b_1-(a_2-b_2)} \qquad a_2 - b_2 \leq x \leq a_3 - b_1$$
$$= 0 \qquad x \geq a_3 - b_1$$

'dir.

Eğer A ve B birer TFN ise A, B, A(–)B de TFN'dir. Bununla birlikte bu A(·)B, A′, B′, A(:)B, A(∧)B ve A(∨)B için doğru değildir. Şimdi bir adi sayıyla çarpımla ilgili olan bir teorem ele alınmaktadır.

8.4 Teorem

Eğer A bir TFN ise k·A ($k \in R$) da bir TFN'dir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

Burada

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_{k.A}(x) = \mu_A(x / k) \qquad k \neq 0\text{'dır.} \quad (8.7)$$

İspat:

(8.1)'den dolayı $k > 0$ olduğu varsayılırsa;

$\forall \alpha \in [0,1]$ için:

$$k \cdot A_\alpha = [ka_1 + \alpha(ka_2 - ka_1),\ ka_3 - \alpha(ka_3 - ka_2)] \tag{8.8}$$

olur ve buradan da

$\forall x \in R$ için:

$$\begin{aligned}
\mu_{k.A}(x) &= 0 && x \le ka_1 \\
&= (x - ka_1)/(ka_2 - ka_1) && ka_1 \le x \le ka_2 \\
&= 1 && x = ka_2 \\
&= (ka_3 - x)/(ka_3 - ka_2) && ka_2 \le x \le ka_3 \\
&= 0 && x \ge ka_3
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca alternatif olarak

$\forall x \in R$ için:

$$\begin{aligned}
\mu_{k.A}(x) &= 0 && (x/k) \le a_1 \\
&= (x/k - a_1)/(a_2 - a_1) && a_1 \le (x/k) \le a_2 \\
&= 1 && (x/k) = a_2 \\
&= (a_3 - x/k)/(a_3 - a_2) && a_2 \le (x/k) \le a_3 \\
&= 0 && (x/k) \ge a_3
\end{aligned}$$

de yazılabilir. Eğer $k < 0$ ise ispat benzer şekildedir. Eğer $k = 0$ ise $k \cdot A = (0, 0, 0)$ bir TFN'nin özel bir çözümüdür ki burada $k \cdot A$ bir 0 (sıfır) adi sayısıdır.

Bu yüzden aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

$$k \cdot A = (ka_1, ka_2, ka_3) \qquad k > 0 \tag{8.9}$$

$$= (ka_3, ka_2, ka_1) \qquad k < 0 \tag{8.10}$$

$$= (0, 0, 0) \qquad k = 0 \tag{8.11}$$

8.5 Sağa Ve Sola Yer Değiştirme

Aşağıdaki operatörler kullanılarak bir TFN sağa $(r > 0)$ yada sola $(r < 0)$ yer değiştirebilir.

$\forall x \in R$ için:

$$\mu_{A(+)r}(x) = \mu(x - r) \tag{8.12}$$

yada

$A\ (+)\ r = (a_1, a_2, a_3)\ (+)\ (r, r, r)$

$$= (a_1 + r,\ a_2 + r,\ a_3 + r) \tag{8.13}$$

'dir. Ayrıca

$$A_\alpha (+)\, r = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1),\ a_3 - \alpha(a_3 - a_2)]\ (+)\ [r, r]$$
$$= [a_1 + r + \alpha(a_2 - a_1),\ a_3 + r - \alpha(a_3 - a_2)] \tag{8.14}$$

'dir.

8.6 TFN'nin Dekonvülüsyonu

Aşağıdaki denklemde, A ve C verilen TFN'ler olmak üzere A (+) B = C denklemi ele alınsın. Teorem 6.1 ile bilinmektedir ki; yalnız ve yalnız bir tek ve çözüm olan B bulanık sayısı aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

1. $\forall\alpha\in[0,1]$ için:

$$c_3^{(\alpha)} - a_3^{(\alpha)} \geq c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)} \tag{8.15}$$

2. $\forall\alpha,\alpha'\in[0,1]$ için:

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow (c_1^{(\alpha')} - a_1^{(\alpha')}) \geq (c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)})$$

ve

$$(c_3^{(\alpha')} - a_3^{(\alpha')}) \leq (c_3^{(\alpha)} - a_3^{(\alpha)}) \tag{8.16}$$

'dır.

Bu durumda çözüm

$\forall\alpha\in[0,1]$ için:

$$B_\alpha = [c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)},\ c_3^{(\alpha)} - a_3^{(\alpha)}] \tag{8.17}$$

'dır. Eğer A ve C birer TFN ise kesin bir koşul altında B de bir TFN'dir.

8.6.1 Teorem

Eğer A ve C birer TFN ve

$$A\ (+)\ B = C \tag{8.18}$$

ise B varsa aşağıdaki koşula bağlı bir TFN'dir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

$$(c_2 - c_1) \geq (a_2 - a_1) \ \text{ ve } \ (c_3 - c_2) \geq (a_3 - a_2) \tag{8.19}$$

yada bunlara denk olarak

$$(c_3 - a_3) \geq (c_2 - a_2) \geq (c_1 - a_1) \tag{8.20}$$

İspat:

A ve C'nin birer TFN olduğu varsayıldığından,

$$A_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)]$$

$$C_\alpha = [c_1 + \alpha(c_2 - c_1), c_3 - \alpha(c_3 - c_2)]$$

$$c_1^{(\alpha)} = c_1 + \alpha(c_2 - c_1)$$

$$c_3^{(\alpha)} = c_3 - \alpha(c_3 - c_2) \tag{8.21}$$

$$a_1^{(\alpha)} = a_1 + \alpha(a_2 - a_1)$$

$$a_3^{(\alpha)} = a_3 - \alpha(a_3 - a_2) \tag{8.22}$$

$$c_1^{(\alpha')} = c_1 + \alpha'(c_2 - c_1)$$

$$c_3^{(\alpha')} = c_3 - \alpha'(c_3 - c_2) \tag{8.23}$$

$$a_1^{(\alpha')} = a_1 + \alpha'(a_2 - a_1)$$

$$a_3^{(\alpha')} = a_3 - \alpha'(a_3 - a_2) \tag{8.24}$$

$$c_1^{(\alpha')} - a_1^{(\alpha')} = c_1 - a_1 + \alpha'(c_2 - a_2 - (c_1 - a_1)) \tag{8.25}$$

$$c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)} = c_1 - a_1 + \alpha(c_2 - a_2 - (c_1 - a_1)) \tag{8.26}$$

olur. (8.25) ve (8.26)'dan

$$(c_1^{(\alpha')} - a_1^{(\alpha')}) - (c_1^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)}) = (\alpha' - \alpha)(c_2 - c_1 - (a_2 - a_1))$$

elde edilir. (8.16) koşulunu sağlamak için,

$$(c_2 - c_1) \geq (a_2 - a_1)$$

'in olması gerekmektedir.

Yine (8.21), (8.22), (8.23) ve (8.24) denklemleri alınarak aşağıdaki elde edilir.

$$c_3^{(\alpha')} - a_3^{(\alpha')} = c_3 - a_3 - \alpha'(c_3 - a_3 - (c_2 - a_2))$$

$$c_3^{(\alpha)} - a_3^{(\alpha)} = c_3 - a_3 - \alpha(c_3 - a_3 - (c_2 - a_2))$$

olduğundan

$$(c_3^{(\alpha')} - a_3^{(\alpha')}) - (c_3^{(\alpha)} - a_3^{(\alpha)}) = -(\alpha' - \alpha)(c_3 - c_2 - (a_3 - a_2))$$

olur. Yine (8.16) kullanılarak,

$(c_3 - c_2) \geq (a_3 - a_2)$

elde edilir. Bu yüzden (8.19) yine saptanır. (8.18)'in çözümü TFN'nin özel notasyonu kullanılarak yazılabilir:

$B = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$

8.6.2 Örnek

A ve C aşağıdaki şekilde verilsin.

$A = (a_1, a_2, a_3) = (11, 18, 19)$
$C = (c_1, c_2, c_3) = (14, 24, 32))$

Kontrol edilirse,

$(32 - 19) \geq (24 - 18) \geq (14 - 11)$

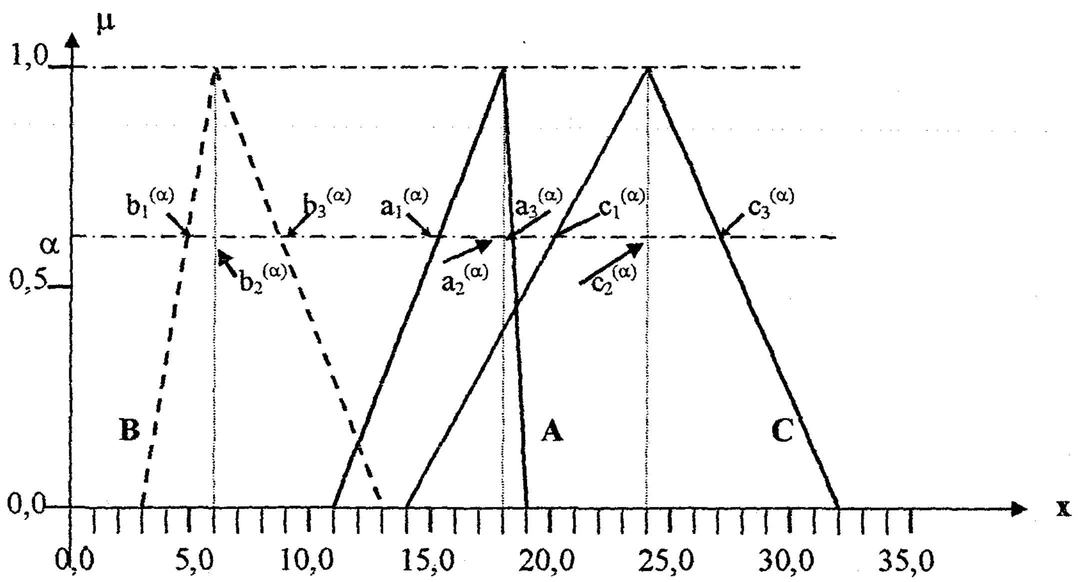
bulunur. Böylece A ve C'nin dekonvülüsyonu olduğu ve bunun da bir TFN B olduğu görülmektedir.

Ayrıca

$B = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) = (3, 6, 13)$

bulunur.

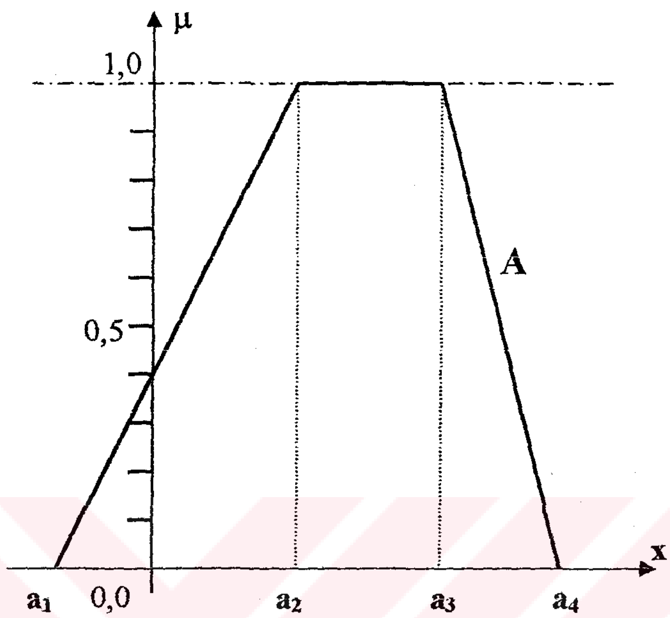
Bu, Şekil 8.2'de gösterilmiştir.



Şekil 8.2 B için TFN'nin dekonvülüsyonu.

8.7 İkizkenar Yamuk Bulanık Sayılar (T_rFN)

Şekil 8.3, ikizkenar yamuk bulanık sayıyı (trapezoidal fuzzy number(T_rFN)) göstermektedir. İkizkenar yamuk bulanık sayılar L-R bulanık sayıların özel bir durumudur ve TFN'ler de T_rFN'lerin özel bir durumudur (Kaufmann ve Gupta, 1991).



Şekil 8.3 Bir ikizkenar yamuk bulanık sayı (T_rFN).

Şekilden de görüldüğü gibi T_rFN için üç yerine dört nokta kullanılmaktadır. Bu nedenle

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

'tür. Toplama yöntemi aşağıda gösterildiği gibidir:

$$\begin{aligned} A\,(+)\,B &= (a_1, a_2, a_3, a_4)\,(+)\,(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \end{aligned} \quad (8.27)$$

Tersi aşağıdaki gibidir:

$$A^- = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1) \quad (8.28)$$

Çıkarma yöntemi ise

$$A\,(-)\,B = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1) \quad (8.29)$$

ile verilmektedir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

(.), (:), ($\wedge$), ($\vee$) gibi kesin operatörler, bazı özel durumlar hariç T_rFN'yi vermezler.

9. BULANIK MANTIĞIN UYGULAMALARI

Bulanık mantığın ilk uygulaması, Mamdani tarafından 1974'de buhar makinesinin bulanık denetiminin gerçekleştirilmesi olmuştur.[2] Daha sonra endüstriyel alanlarda, çimento sanayinde (1980), su arıtma sistemlerinde (1983), nükleer reaktörlerde, asansör ve vinç denetiminde ve metro denetimi gibi birçok değişik alanda kullanılmıştır. Bu gelişim içerisinde en önemli olay bulanık mantığın, Kuzey Japonya'nın Sendai kentindeki metro sisteminde çok başarılı bir şekilde kullanılması olmuştur (Elmas, 2003). Bu olay bulanık mantık uygulamalarına büyük bir hız kazandırmış, Japonya'da adeta bir patlama yaratmıştır. 1987 yılında başlayan bu patlama 1990 yılında doruğa ulaşarak bulanık mantığın ev aletlerinden borsa portföyü denetimine, fotoğraf makinelerinden hasta izleme uzman sistemlerine kadar uzanan çok geniş bir alanda kullanılması ile sonuçlanmıştır.

Bulanık mantığın Japon toplumu içerisinde gördüğü yüksek oranda kabule ilginç bir örnek; bir Japon ev kadınının, çocuk yetiştirmede kazandığı deneyimlerden yararlanarak geliştirdiği bebek bakımı uzman sistemidir. Bu bulanık uzman sistem, çocuğun karakterini, fiziksel durumunu ve çevre koşullarını da içeren bir bilgi tabanına dayandırılarak, annenin bebeğine ne kadar süt vermesi gerektiğini söylemektedir. Sistem anneler arasında oldukça rağbet görmüş ve mucit anne zengin olmuştur. Diğer benzer bir uzman sistem de Maruman firması tarafından geliştirilmiş olup golf sopasının seçiminde yardımcı olmaktadır (Elmas, 2003).

Aşağıda bulanık mantığın kullanıldığı bazı alanlar ve şirketler verilmiştir:

- Hidroelektrik güç üniteleri için kullanılan baraj kapılarının otomatik kontrolü
  (Tokio Electric Pow.)
- Stok kontrol değerlendirmesi için bir uzman sistem
  (Yamaichi, Hitachi)
- Klima sistemlerinde istenmeyen ısı iniş çıkışlarının önlenmesi
  (Mitsubishi)
- Araba motorlarının etkili ve kararlı kontrolü
  (Nissan)
- Otomobiller için "Cruise-control"
  (Nissan, Subaru)

- Dokümanların arşivleme sistemi
  (Mitsubishi Elec.)

- Depremlerin önceden bilinmesi için tahmin sistemi
  (Inst. of Seismology Bureau of Metrology, Japan)

- İlaç teknolojisinde kanser teşhisi
  (Kawasaki Medical School)

- Cep bilgisayarlarında el yazısı algılama teknolojisi
  (Sony)

- Video kameralarda hareketin algılanması
  (Canon, Minolta)

- El yazısı ve ses tanımlaması
  (CSK, Hitachi, Hosai Univ., Ricoh)

- Helikopterler için uçuş desteği
  (Sugeno)

- Çelik sanayinde makine hızı ve ısısının kontrolü
  (Kawasaki Steel, New-Nippon Steel, NKK)

- Raylı metro sistemlerinde sürüş rahatlığı, duruş mesafesinin kesinliğini ve ekonomikliğin geliştirilmesi
  (Hitachi)

- Otomobiller için gelişmiş yakıt tüketimi
  (NOK, Nippon Denki Tools)

- Çimento değirmeninde ısı ve oksijen oranı denetimi
  (Mitsubishi-Chen)

- Asansörde yolcu trafiğini değerlendirme ve böylece bekleme zamanının azaltılması
  (Fujitech, Toshiba, Mitsubishi)

- Video aygıtının elle tutulması nedeniyle oluşan sarsıntıları ortadan kaldırılması
  (Panasonic)

- Tansiyonun ölçülmesi

  (Omron)

- Su ısıtıcısında suyun miktarı ve sıcaklığına göre ayarlama

  (Matsushita)

- Fotoğraf makinesinin ekranında birkaç obje olması durumunda en iyi görüntüyü ve aydınlatmayı belirlemesi

  (Sanyo-Fisher, Canon, Minolta)

- Çamaşır kirliliğini, ağırlığını, kumaş cinsini sezme ve ona göre yıkama programını seçme

  (Matsushita)

- Halının durumunu ve kirliliğini sezme ve elektrik süpürgesinin motor gücünü uygun bir şekilde ayarlama

  (Matsushita)

- Otomobil ABS fren sisteminde tekerleklerin kilitlenmeden frenlenmesini sağlama

  (Nissan)

- Hisse senedi portföyü idare etme

  (Yamaichi-Securities)

- Araba kullanış stilini ve yükünü sezerek en iyi dişli oranını seçme

  (Subaru-Nissan)

KAYNAKLAR

Elmas, Ç., (2003), Bulanık Mantık Denetleyiciler, Ankara.

Kaufmann, A., (1973), Theory of Fuzzy Subsets, Academic Press, New York.

Kaufmann, A. ve Gupta, M. M., (1991), Introduction to Fuzzy Arithmetic, New York.

Klir, G. J. ve Yuan, B., (1988) Fuzzy Sets And Fuzzy Logic, New York.

Lai, Y. J. ve Hwang, C. L., (1992), Fuzzy Mathematical Programming, Springer-Verlag, Berlin.

Taştan, M., (2003), Bulanık Matematiksel Teknikler, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

İNTERNET KAYNAKLARI

[1]www.bumat.itu.edu.tr/dokuman_FUZZY_SETS.doc

[2]www.bumat.itu.edu.tr/dokuman_BULANIK_KuMELER.doc

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	28.07.1979	
Doğum yeri	Bochum/Almanya	
Lise	1993-1996	Kartal Lisesi
Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2002-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

Çalıştığı kurumlar

1997-1999	İstek Vakfı
2001-Devam ediyor	Göçbeyli İ.Ö.O.