

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

139731

HİLBERT UZAYINDA KOMPAKT OPERATÖRLERİN  
SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ VE SINIFLANDIRILMASI

139731

Derya DURMAZ

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında  
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ



Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU

  
Prof. Dr. Ehtimor RABISOZELOV

  
Prof. Dr. Mehmet AHLATGİOĞLU

İSTANBUL, 2003

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI  
TEKNOLOJİ VE YATIRIM BAKANLIĞI

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                           | Sayfa |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| KISALTMA LİSTESİ .....                                                                    | iii   |
| ÖNSÖZ.....                                                                                | iv    |
| ÖZET.....                                                                                 | v     |
| ABSTRACT .....                                                                            | vi    |
| 1 GİRİŞ.....                                                                              | 1     |
| 1.1 Ön Bilgiler.....                                                                      | 1     |
| 2 HİLBERT UZAYINDA SONLU RANKLI VE KOMPAKT OPERATÖRLER....                                | 8     |
| 2.1 Hilbert Uzayında Sonlu Ranklı Operatörler .....                                       | 8     |
| 2.2 Hilbert Uzayında Kompakt Operatörler .....                                            | 10    |
| 3 HİLBERT UZAYINDA KOMPAKT OPERATÖRLERİN<br>SINIFLANDIRILMASI.....                        | 18    |
| 3.1 Hilbert-Schmidt Operatörleri.....                                                     | 18    |
| 3.2 Çekirdek Operatörleri.....                                                            | 32    |
| 3.3 Çekirdek Ve Determinant.....                                                          | 35    |
| 3.4 Çekirdek İntegral Operatörlerine Ait Örnekler Ve İzi Hesaplamak İçin<br>Fomüller..... | 37    |
| KAYNAKLAR.....                                                                            | 41    |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                                             | 42    |

**KISALTMA LİSTESİ**

|     |                   |
|-----|-------------------|
| ONB | Ortonormal Taban  |
| ONS | Ortonormal Sistem |



## ÖNSÖZ

Tezimi yöneten ve yüksek lisans öğrenimim süresince değerli bilgi ve yardımlarıyla her zaman destek olan sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu 'na en içten teşekkürlerimi sunarım.



## ÖZET

Tez çalışmasında Hilbert uzayında kompakt operatörlerin spektral özellikleri incelenmiş ve kompakt operatörlerin sınıflandırılması yapılmıştır. Yapılan çalışmanın sonuçları ise çeşitli örneklere uygulanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Hilbert uzayı , kompakt küme , kompakt operatör , operatörün izi .



## ABSTRACT

In the thesis spectral properties of compact operators which transforms in Hilbert Space investigated and clasification of compact operators are maden. With several problems the results of the thesis are applicated.

**Keywords:** Hilbert space , compact set , compact operator , trace of the operator .



## 1. GİRİŞ

Genellikle sınırsız bir lineer operatörün kendisinin spektral özelliklerinin incelenmesinden , bunun rezolventinin incelenmesi daha kolay olur. Bir Hilbert uzayında tanımlı her lineer diferansiyel operatör sınırsız bir operatördür. Çoğu kez bu tip operatörlerin rezolventi kompakt operatör olur. Regular lineer diferansiyel operatörlerin rezolventi ise her zaman kompakt operatördür. Buna göre Hilbert uzayında tanımlı kompakt operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesi büyük öneme sahiptir. Sözü edilen konu çok sayıda kaynaklarda yer almıştır. Bu konuya ait Weidmann (1980), Debnath ve Mikusinski (1990), Kato (1980), Vulikh (1963), Gohberg ve Krein (1969), Lyanse ve Storoj (1983) kitaplarını gösterebiliriz. Bu tez çalışmasında kompakt operatörlerin bazı özelliklerinin anlatılmasının yanı sıra bu operatörlerin özel sınıfları olan Hilbert-Schmidt tipli ve çekirdek operatörleri incelenmiştir. Bunların yanı sıra bir çekirdek integral operatörü için iz formülü verilmiştir. Ele alınan konu diferansiyel ve integral operatörlere uygulanmıştır.

### 1.1 Ön Bilgiler

Bilindiği gibi kompakt operatörün tanımı ve özellikleri kompakt küme ve kompakt kümelerin bazı özelliklerine dayanır. Bundan dolayı biz bu kısımda kompakt kümelerden bahsedeceğiz. Genelde kompakt kümelerin özellikleri metrik araçlığı ile verildiğinden dolayı biz bu tür kümelerin lineer normlu uzaylara ait olduğunu varsayacağız. Dolayısıyla biz bu kısımda lineer normlu uzayda verilmiş kompakt kümelerin bazı özelliklerini vereceğiz.

### Kompakt Kümeler

Matematik analizin önemli teoremlerinden biri olan Bolzano-Weierstrass Teoremine göre; her sonsuz ve sınırlı  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  sayılar dizisinden sonlu bir limite yakınsayan bir  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$  kısmi dizisi seçilebilir. Eğer A keyfi bir sınırlı sayılar kümesi ise Bolzano-Weierstrass Teoremi A kümesinin sayılarından oluşan herhangi bir diziye uygulanabilir. Diğer taraftan , eğer A sınırlı değil ise A dan  $\infty$  a giden bir dizi seçebiliriz. Böyle bir diziden sonlu bir limite yakınsayan bir kısmi dizi seçilemez. Bu nedenle  $R_1$  uzayında aşağıda verilen sonuç çıkarılabilir.

$A \subset R_1$  olsun.  $A$  kümesinin sınırlı olmasının gerek ve yeter şartı  $x_n \in A$  olacak şekilde herhangi bir  $\{x_n\}$  dizisinden, sonlu bir limite yakınsayan bir kısmi dizinin seçilebilmesidir. Fakat, bunu herhangi bir normlu uzaya uygulamaya kalktığımızda bu kadar yalın bir sonuca ulaşamayabilir. Bu nedenle Bolzano-Weierstrass Teoremini sağlayan kümeler sınıfını seçebilmek için aşağıdaki verilecek olan tanıma gerek duyulmaktadır.

**Tanım :** Eğer  $E$  normlu uzayına ait bir  $A$  kümesi, her  $x_n \in A$  noktalarının sonsuz dizisi  $E$  de yakınsak olan bir  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$  kısmi dizisine sahip ise  $A$  ya kompakt küme denir. Eğer  $E$  uzayı bu özelliği sağlıyor ise o zaman  $E$  kompakt uzaydır denir.

Buradan görüldüğü gibi  $R_1$ deki bir kümenin kompaktlığı bu kümenin sınırlılığı ile eşdeğerdedir.

Sonlu boyutlu normlu uzayın her sınırlı kümesi kompakt kümedir.

$A = \{y_1, \dots, y_p\}$  ve  $\{x_n\}$ ,  $A$  kümesinin noktalarından oluşturulan herhangi bir dizi olsun. Burada  $y_i$  noktalarından en az bir tanesi  $x_n$  boyunca sonsuz kez tekrarlanır. Örneğin bazı  $i$  ler için,

$x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = y_i$  ve kısmi dizi  $x_{n_k} \rightarrow y_i$  dir.

**Teorem 1.1.1:** Kompakt bir küme sınırlıdır.

**İspat :**  $A$  kümesinin sınırlı olmadığını kabul edelim.  $A$  dan bir  $x_1$  noktası seçelim.  $r_1=1$  olduğunu kabul edelim.  $A$  sınırlı olmadığından  $S(x_1, r_1)$  küresinde yer almayan bir elemanı bulunabilir.  $A$  dan bu küreye ait olmayan bir  $x_2$  noktası alalım.  $\|x_1 - x_2\| \geq r_1$  dir.  $r_2 = \|x_1 - x_2\| + 1$  olsun.  $A$ ,  $S(x_1, r_2)$  küresinde yer almadığından,  $A$  da  $\|x_1 - x_3\| \geq r_2$  olacak şekilde küreye ait olmayan bir  $x_3$  noktası bulunabilir.  $r_3 = \|x_1 - x_3\| + 1$  olarak bu varsayımı sonsuza kadar sürdürebiliriz. Sonuç olarak, bu şekilde  $x_n \in A$  noktalarının dizisi elde edilir ve herhangi  $n=2,3,\dots$  sayıları için  $r$  sayılarının artan dizisinde;

$$\|x_1 - x_n\| = r_n - 1 \geq r_{n-1} \quad \text{dir.}$$

Buradan herhangi  $n > m \geq 2$  için,

$$\|x_1 - x_n\| = r_n - 1 \geq r_{n-1} \geq r_m \quad ; \quad \|x_1 - x_m\| = r_m - 1 \quad \text{dir.}$$

Buradan ,

$$\|x_1 - x_n\| \leq \|x_1 - x_m\| + \|x_m - x_n\|$$

eşitsizliğinden

$$r_m \leq (r_m - 1) + \|x_m - x_n\|$$

dolayısıyla ,

$$\|x_m - x_n\| \geq 1 \quad \text{dir.}$$

Tersine ,  $\{x_n\}$  den alınan hiçbir kısmi dizi bir temel dizi olamaz ve bir limite yakınsayamaz. Bu da  $A$  nın kompakt olmadığı anlamına gelir.

Bu tersinir durum,örneğin  $\ell_2$  de, doğru değildir. Gerçekte  $\ell_2$  deki her  $e_m$  bileşen birim vektörünün sıfır vektöründen uzaklığı birdir. Bundan dolayı bu vektörler sınırlı bir küme oluşturur. Diğer taraftan ,  $m \neq p$  için  $\|e_m - e_p\| = \sqrt{2}$  dir. Bu nedenle  $\{e_m\}$  dizisinden yakınsak bir kısmi dizi sağlayamayız.

Şimdi ,  $R_n$  uzayında Bolzano-Weierstrass Teoreminin geçerli olduğunu gösterip, “  $A \subset R_n$  kümesinin kompakt olmasının gerek ve yeter şartı  $A$  nın sınırlı olmasıdır.” şeklinde verilen kompaktlık kriterini elde edelim.

Gerek şart Teorem1.1.1 de herhangi bir normlu uzay için ispatlanmıştı. Şimdi yeter şartı gösterelim.

$R_n$  deki her  $S(a,r)$  küresi

$$\|x - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - a_i)^2} < r$$

olacak şekilde tüm  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  noktalarını içersin. Burada  $a_i$  ler  $a$  nın bileşenleridir.

Eğer  $x \in S(a, r)$  ise herhangi  $i$  sayısı için  $|\xi_i - a_i| < r$  veya  $a_i - r < \xi_i < a_i + r$  dir. Tersinir olarak,  $R_n$  de sınırlı bir dizi oluşturan noktaların bileşenleri toplamda sınırlıdır.

$A \subset R_n$  ve  $A$  sınırlı olsun.  $x_m \in A : x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$  noktalarının herhangi bir dizisini alalım.  $\{\xi_1^{(m)}\}$  sayısal dizisi yakınsak olduğundan Bolzano-Weierstrass Teoremine göre  $\xi_1^{(m_k)} \rightarrow \xi_1$  olacak şekilde sonlu bir limite yakınsayan bir kısmi dizi seçilebilir. Bu kısmi dizinin noktalarının ilk bileşenleri yakınsaktır.

$x_{m_k}$  noktalarının ikinci bileşenlerinin dizisi  $\{\xi_2^{(m_k)}\}$  yı içeren yeni bir  $\{x_{m_k}\}$  kısmi dizisi, ikinci bileşenlerinin dizisi için sonlu limite yakınsayacaktır. İlk bileşenlerinin yakınsaklık özelliği de göz önüne alınarak, verilen noktalar dizisi  $n$  defa böyle bir işlemde geçirilirse; sonlu limite yakınsayan tüm bileşenlerin dizileri için noktaların kısmi bir dizisi elde edilir.  $R_n$  deki yakınsaklık, bileşenlerinin yakınsaklığı olduğu sürece seçilen noktaların kısmi dizisi  $R_n$  de bir limite sahiptir. Böylece  $A$  nın kompaktlığı ispatlanmış olur.

Bilinen  $s$  uzayında bir önceki kompaktlık kriterinin geçerli olmadığını belirtelim. Gerçekte,  $s$  de iki nokta arasındaki mesafe daima birden küçüktür. Bundan dolayı,  $S(a, 1)$  küresi ile herhangi  $a$  merkezli  $s$  sınırlıdır. Diğer taraftan,  $s$  de yakınsak bir kısmi diziden sağlanamayacak noktaların bir dizisi kolaylıkla bulunabilir. Örneğin,  $x_n = (n, 0, 0, \dots)$  olarak alınabilir.  $s$  deki kompaktlık kriteri bazı genel teoremler ispatlandıktan sonra ele alınacaktır.

$R_n$  deki kompaktlık kriterinin ispatında ele alınan Bolzano-Weierstrass Teoreminin açık bir genelleştirilmesi yapılırsa şu sonuca ulaşabiliriz: Bir  $n$ -boyutlu vektör uzayının tüm bileşenleri sınırlı olan noktalarının herhangi sonsuz dizisinden alınan elemanlarından bir kısmi yakınsak dizi seçilebilir.

**Tanım :**  $E$  bir normlu uzay,  $A \subset E$  ve  $\varepsilon > 0$  verilen bir sayı olsun.  $B \subset E$  olmak üzere, herhangi  $x \in A$  için  $\|x - y\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $y \in B$  noktası var ise  $B$  kümesine  $A$  kümesinin bir  $\varepsilon$ -ağıdır denir.

**Teorem 1.1.2 :** Her  $\varepsilon > 0$  için kompakt bir küme sonlu  $\varepsilon$ -ağına sahiptir.

**İspat :**  $A$  nın bir kompakt küme olduğunu, fakat bazı  $\varepsilon > 0$  için sonlu bir  $\varepsilon$ -ağına sahip olmadığını varsayalım. Herhangi bir  $x_1 \in A$  noktası alalım. Buradan  $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$  olacak şekilde bir  $x_2 \in A$  noktası vardır. Aksi takdirde,  $A$  daki ağı sadece bir tek nokta oluşturmuş

olacaktı.

$i \neq k$  için  $i, k=1, 2, \dots, n$  olmak üzere  $\|x_i - x_k\| \geq \varepsilon$  olacak şekilde  $x_1, \dots, x_n \in A$  noktalarının varlığını kabul edelim. Varsayımımızdan dolayı sonlu sayıdaki  $x_1, \dots, x_n$  noktaları  $A$  kümesi için  $\varepsilon$ -ağı oluşturamaz. Bu nedenle,

$$\|x_1 - x_{n+1}\| \geq \varepsilon, \|x_2 - x_{n+1}\| \geq \varepsilon, \dots, \|x_n - x_{n+1}\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $x_{n+1} \in A$  mevcuttur. Bu yöntem devam ettirilirse herhangi  $n \neq m$  için  $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$  olacak şekilde  $x_n \in A$  noktalarının sonsuz bir dizisi ile karşılaşılır. Fakat, bu diziden hiçbir kısmi yakınsaklık seçilemez. Bu  $A$  nın kompaktlığı ile çelişir. Bu nedenle de herhangi  $\varepsilon > 0$  için  $A$  da sonlu bir  $\varepsilon$ -ağı mevcuttur.

**Teorem 1.1.3 :** Eğer tam normlu  $E$  uzayında yer alan  $A$  kümesinde herhangi  $\varepsilon > 0$  için sonlu bir  $\varepsilon$ -ağı mevcut ise  $A$  kompakttır.

**İspat :**  $x_n \in A$  noktalarının keyfî bir dizisini alalım ve bundan  $E$  de bir limite yakınsayan kısmi bir dizi seçebileceğimizi gösterelim.

$\varepsilon_1 = 1$  ve  $E$  de  $A$  kümesi için sonlu bir  $\varepsilon_1$ -ağı seçelim. Bu ağın  $a_i (i=1, 2, \dots, k)$  noktalarından oluştuğunu kabul edelim. Bu noktaların herbirinin etrafını birim yarıçaplı bir küre ile saralım.  $\varepsilon_1$ -ağının tanımına göre  $A$  kümesinin her bir noktası, yani her  $x_n$  noktası,  $a_i$  noktalarının en az bir tanesinden bir birimden daha az uzaklıktadır.

Diğer taraftan her  $x_n$  noktası bu oluşturulan kürelerden en az bir tanesinde bulunabilir. Fakat sonlu sayıda küre olduğundan bu kürelerden en az bir tanesi, ki bunu  $S_1$  olarak adlandırıyoruz,  $\{x_n\}$  dizisinin terimlerinin sonsuz bir kümesini kapsar. Aksi takdirde, dizi sonlu terime sahip olacaktır.  $S_1$  de bulunan  $x_n$  noktalarını kısmi bir dizi olacak şekilde numaralandırıp

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots$$

şeklinde sıralayalım.

Şimdi,  $\varepsilon_2 = 1/2$  olsun. Seçilen  $\{x_n^{(1)}\}$  dizisinde olduğu gibi, aynı yolu izlersek  $1/2$  yarıçaplı  $S_2$  küresinde sonlu  $\varepsilon_2$ -ağı olduğu ve sonsuz



$$\|x_m^{(m)} - a\| < \frac{1}{n}, \quad \|x_p^{(p)} - a\| < \frac{1}{n}$$

ve buradan da,

$$\|x_m^{(m)} - x_p^{(p)}\| \leq \|x_m^{(m)} - a\| + \|a - x_p^{(p)}\| < \frac{2}{n} \quad \text{dir.}$$

Buradan  $m, p \rightarrow \infty$  iken ,

$$\|x_m^{(m)} - x_p^{(p)}\| \rightarrow 0$$

olduğu görülür.

E uzayının tamlığıнын bir sonucu olarak (1.2) dizisi bir limite yakınsar. Böylelikle A kümesinin kompaktlığı ispatlanır.

**Teorem 1.1.4 :** Eğer tam normlu E uzayında yer alan A kümesi , herhangi  $\varepsilon > 0$  için bir kompakt  $\varepsilon$ -ağı içeriyor ise A nın kendisi de aynı zamanda kompaktır.

**İspat :** Keyfi bir  $\varepsilon > 0$  için A kümesinin kompakt  $\frac{1}{2} \varepsilon$ -ağı ,  $B \subset E$  olacak şekilde bir B kümesi olsun. B nin kompaktlığından ve Teorem 1.1.2 den sonlu sayıda  $\frac{1}{2} \varepsilon$ -ağı vardır. Ağın  $a_1, \dots, a_k$  noktalarından oluştuğunu kabul edelim.

Bu noktalardan herhangi birini  $x \in A$  olarak alalım. B , A için  $\frac{1}{2} \varepsilon$ -ağı olduğundan  $\|x - y\| < \varepsilon/2$  olacak şekilde  $y \in B$  vardır. Ayrıca ,  $\frac{1}{2} \varepsilon$ -ağındaki  $a_1, \dots, a_k$  noktaları B de olduğundan , bunlardan en az bir tanesi , ki buna  $a_i$  diyelim ,  $\|y - a_i\| < \varepsilon/2$  koşulunu sağlar. Fakat burada  $\|x - a_i\| < \varepsilon$  dur. Bu nedenle herhangi  $x \in A$  noktası  $a_1, \dots, a_k$  noktalarından en az birinden daha az bir mesafededir.  $a_1, \dots, a_k$  noktaları A kümesinin sonlu  $\varepsilon$ -ağını oluşturur. Teorem 1.1.3 den  $\varepsilon$  un keyfiliğine bağlı olarak A kümesi kompaktır.

Şimdi s deki kompaktlık kriterini açıklayalım:  $A \subset s$  kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart , her  $i=1,2,\dots$  için  $A_i$  topluluğunun  $x \in A$  noktalarının i.  $\xi_i$  bileşenlerinin sınırlı olmasıdır.

(a) Gereklik : s deki yakınsaklık , bileşenlerinin yakınsaklığı olduğundan , her sayısal  $A_i$

kümesinin kompaktlığı bir  $A$  kümesinin kompaktlığından gelmektedir. Buradan , bütün bu kümelerin sınırlı olduğu görülür.

(b) Yeterlilik : Bütün  $A_i$  ler sınırlı olacak şekilde bir  $A$  kümesi seçelim.  $\varepsilon > 0$  olduğunu kabul edip,

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^p} < \varepsilon$$

olacak şekilde  $p$  yi seçelim.

Burada her  $x = \{\xi_i\} \in A$  noktasına karşılık ilk  $p$  bileşeni  $x$  ile aynı ,geri kalanı ise sıfır olan bir  $y = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, 0, 0, \dots\}$  noktası alalım.

Her  $x \in A$  ya karşılık gelen tüm  $y$  noktalarının kümesini  $B$  ile gösterelim. Her  $x \in A$  ve buna karşılık gelen  $y \in B$  için ,

$$\|x - y\| = \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i|}{1 + |\xi_i|} < \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon \quad \text{dur.}$$

Diğer taraftan ;  $B$  kümesi ,  $A$  kümesinin  $\varepsilon$ -ağından oluşmaktadır. Şimdi ,  $B$  kümesinin kompaktlığını gösterelim.  $y_n \in B$  noktalarının dizisini alalım. Verilen varsayımdan  $y_n$  lerin bileşenlerinin hepsi sınırlıdır. Eğer her  $y_n$  için ,  $(p+1)$ .den başlayarak sıfıra eşit olan bütün bileşenleri çıkartırsak , bir  $p$ -boyutlu vektör uzayı olan  $\{y_n\}$  noktalarının bir dizisini elde ederiz. Genelleştirilmiş Bolzano-Weierstrass Teoremine göre bu diziden , bileşenleri ile birlikte yakınsak olan  $\{y'_{n_k}\}$  kısmi dizisi çekebiliriz. Fakat ,  $y_{n_k}$  noktası  $y'_{n_k}$  noktalarından sadece sıfır bileşenlerde farklı olduğundan ;  $s$  deki bir mesafeye yakınsaklıkta olduğu gibi  $\{y_{n_k}\}$  dizisinin bileşenleri yakınsak olacaktır. Dolayısıyla ,  $B$  kümesi kompakttır.

Böylelikle  $A$  nın kompaktlığı Teorem 1.1.3 ten kesin olarak elde edilmiştir.

$\ell_2$  uzayında bir mesafeye yakınsaklık , bileşenlerin yakınsaklığı ile aynı değildir. Bu yüzden  $R_n$  ve  $s$  deki kompaktlık kriteri  $\ell_2$  de geçerli değildir.  $\ell_2$  deki kompaktlık kriterini kısa bir örnekte gösterelim:

$\ell_2$ deki temel paralelkenar prizma , her  $i$  için  $|\xi_i| \leq \frac{1}{2^i}$  olacak şekilde bütün  $x = \{\xi_i\} \in \ell_2$  noktalarının kümesi  $I$  ya verilen addır.  $I$  nın kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir  $\varepsilon > 0$  için  $p$  yi ,

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

olacak şekilde alalım.  $I$  dan elde edilen  $B$  kümesi , önceki ispatta  $A$  dan elde edilen küme ile aynı olduğu takdirde  $I$  kümesinin  $\varepsilon$  - ağıdır.  $B$  kümesinin kompaktlığı Bolzano-Weierstrass Teoreminin yardımıyla elde edilir. Buradan da  $I$  nın kompaktlığı görülür.

## 2 HİLBERT UZAYINDA SONLU RANKLI VE KOMPAKT OPERATÖRLER

### 2.1 Hilbert Uzayında Sonlu Ranklı Operatör

**Tanım :**  $H_1$  ve  $H_2$  iki Hilbert uzayı olsun.  $H_1$  den  $H_2$  ye bir  $T$  operatörü için ,  $R(T)$  sonlu boyutlu ( $m$  boyutlu) ise rankı sonludur ( $m$  dir) denir.

**Teorem 2.1.1 :**  $T$  , tanım kümesi  $D(T)=H_1$  olan ,  $H_1$  den  $H_2$  ye bir operatör olsun.  $T$  operatörü ancak ve ancak  $H_1$  in  $f_1, f_2, \dots, f_m$  lineer bağımsız elemanları ve  $H_2$  nin  $g_1, g_2, \dots, g_m$  lineer bağımsız elemanları için ;

$$\text{her } f \in H_1 \text{ için } Tf = \sum_{j=1}^m \langle f_j, f \rangle g_j \quad (2.1)$$

$$\text{her } g \in H_2 \text{ için } T^*g = \sum_{j=1}^m \langle g_j, g \rangle f_j \quad (2.2)$$

ve

$$\|T\| \leq \sum_{j=1}^m \|f_j\| \|g_j\|$$

koşullarını sağlıyor ise rankı  $m$  olan sınırlı bir operatördür.  $T$  operatörünün rankı ancak ve ancak  $T^*$  ın rankı  $m$  ise  $m$  dir.  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  ve  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  nin bir ortonormal sistem olması bu kabulümüzü değiştirmez.

**İspat :** Eğer  $T$  operatörü (2.1) formunda ise  $R(T) \subset L(g_1, g_2, \dots, g_m)$  dir. Her  $j_0 \in (1, \dots, m)$  için  $h_{j_0} \neq 0$  olacak şekilde bir  $h_{j_0} \in L(f_1, f_2, \dots, f_m)$  vardır. Ve  $j \neq j_0$  için  $h_{j_0} \perp f_j$  dir.

$\langle f_{j_0}, h_{j_0} \rangle \neq 0$  ve  $Th_0 = \langle f_{j_0}, h_{j_0} \rangle g_{j_0}$  olduğu sürece  $R(T)$  bütün  $g_j$  leri kapsar. Dolayısıyla ,  $R(T) = L(g_1, g_2, \dots, g_m)$  olur. Ayrıca , görüldüğü gibi  $R(T)$   $m$  boyutludur.

$$\|Tf\| \leq \sum_{j=1}^m |\langle f_j, f \rangle| \|g_j\| \leq \|f\| \sum_{j=1}^m \|f_j\| \|g_j\|$$

eşitsizliğinden dolayı  $T$  sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|T\| \leq \sum_{j=1}^m \|f_j\| \|g_j\| \quad \text{dir.}$$

$T$  nin sınırlı olması durumunda  $\dim R(T) = m$  ,  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$   $R(T)$  nin bir ONB si ve  $j=1, \dots, m$  için  $f_j = T^* g_j$  dir.

Böylece her  $f \in H_1$  için,

$$Tf = \sum_{j=1}^m \langle g_j, Tf \rangle g_j = \sum_{j=1}^m \langle f_j, f \rangle g_j \quad \text{dir.}$$

$f_1, f_2, \dots, f_m$  elemanlarının lineer bağımsızlığını gösterelim. Bunu göstermek için aksini varsayıp  $f_1, f_2, \dots, f_m$  nin lineer bağımlı olduğunu kabul edelim.

$$f_1 = \sum_{j=2}^m a_j f_j \quad \text{olduğunu kabul etmemiz genelliği bozmayacağından,}$$

$$Tf = \sum_{j=1}^m \langle f_j, f \rangle g_j = \sum_{j=2}^m \langle f_j, f \rangle (a_j^* g_1 + g_j) \quad , \quad f \in H_1 \quad \text{dir.}$$

Bu eşitsizlikten  $R(T)$  nin en fazla  $(m-1)$  boyutlu olduğu görülmektedir. Bu ise bizim kabulümüze aykırı düşer. Dolayısıyla ,  $f_1, f_2, \dots, f_m$  lineer bağımsızdır. Eğer  $T$  , eşitlik (2.1) şeklinde ise her  $f \in H_1$  ,  $g \in H_2$  için ;

$$\langle g, Tf \rangle = \sum_{j=1}^m \langle f_j, f \rangle \langle g, g_j \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m \langle g_j, g \rangle f_j, f \right\rangle \quad \text{dir.}$$

Benzer şekilde ,  $T^*$  için de eşitlik (2.2) geçerlidir. Eğer  $T$  nin rankı  $m$  ise eşitlik (2.2) den

görüldüğü gibi  $T^*$ 'ın da rankı  $m$  dir. Bunun tersinin de doğru olduğu aynı şekilde gösterilebilir. Buradan görüldüğü gibi  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  bir ONS olarak seçilebilir. Benzer şekilde  $T^*$  ı da incelersek , onun için de  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  nin bir ONS olarak seçilebileceğini görürüz.

**Örnek :** Eğer  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  ve  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  sırasıyla  $H_1$  ve  $H_2$  de ortonormal sistemler ve  $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$  ise

$$Tf = \sum_{j=1}^m \mu_j \langle f_j, f \rangle g_j, \quad f \in H_1$$

ile  $T \in B(H_1, H_2)$  olacak şekilde  $\|T\| = \max\{|\mu_j| : j=1, \dots, m\}$  ve rankı  $m$  olan bir operatör tanımlar.

Bu örnekte sadece en son durumu ispatlayacağız.

Her  $f \in H$  için ,

$$\|Tf\|^2 = \sum_{j=1}^m |\mu_j|^2 |\langle f_j, f \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \max\{|\mu_j|^2 : j=1, \dots, m\}$$

olduğundan ,

$$\|T\| \leq \max\{|\mu_j| : j=1, \dots, m\} \text{ dir.}$$

Eğer  $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ ,  $|\mu_{j_0}| = \max\{|\mu_j| : j=1, \dots, m\}$  olacak şekilde seçilirse ,  $\|T f_{j_0}\| = |\mu_{j_0}|$  dir.

Buradan da  $\|T\| \geq |\mu_{j_0}|$  dir.

## 2.2 Hilbert Uzayında Kompakt Operatörler

**Tanım :**  $H_1$  ve  $H_2$  iki Hilbert Uzayı olsun.  $H_1$  den  $H_2$  ye bir  $T$  operatörü için  $D(T)$  de bir  $(f_{n_k})$  alt dizisi içeren her sınırlı  $(f_n)$  dizisi için  $(Tf_{n_k})$  yakınsak ise  $T$  kompakt operatördür.

**Teorem 2.2.1 :** Her kompakt operatör sınırlıdır. Eğer  $T$  kompakt ise bunun kapanışı olan  $\bar{T}$  de kompakttır.

**İspat :**  $T$  nin sınırlı olmadığını kabul edelim. Bu takdirde her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\|f_n\| \leq 1$  ve  $\|Tf_n\| \geq n$

şartlarını sağlayan ve  $D(T)$  de bulunan bir  $(f_n)$  dizisi vardır. Bu yüzden hiçbir  $(f_{n_k})$  alt dizisinde  $(Tf_{n_k})$  yakınsak değildir. Dolayısıyla  $T$  kompakt değildir.

$T$  kompakt olsun.  $\overline{D(T)}$ ,  $D(T)$  kümesinin kapanışı olmak üzere; eğer  $(f_n)$ ,  $D(\overline{T}) = \overline{D(T)}$  de sınırlı bir dizi ise  $D(T)$  de  $\|g_n - f_n\| \leq n^{-1}$  koşulunu sağlayan bir  $(g_n)$  dizisi vardır.  $T$  kompakt olduğundan  $(g_n)$  nin  $(Tg_{n_k})$  yakınsak olacak şekilde bir  $(g_{n_k})$  alt dizisi vardır. Bu nedenle  $(\overline{T}f_{n_k})$  da

$$\|\overline{T}f_{n_k} - Tg_{n_k}\| \leq n^{-1} \|T\|$$

eşitsizliğinden dolayı yakınsaktır. Yani,  $T$  kompakt ise  $\overline{T}$  de kompaktır.

**Teorem 2.2.2 :**  $H_1$  ve  $H_2$  iki Hilbert Uzayı olsun. Bir  $T \in B(H_1, H_2)$  operatörü ancak ve ancak  $H_1$  deki her bir  $(f_n)$  zayıf sıfır dizisi için  $Tf_n \rightarrow 0$  ise kompaktır.

**İspat :**  $T$  operatörü kompakt olsun.  $H_1$  deki her bir  $(f_n)$  zayıf sıfır dizisinin  $Tf_{n_k} \rightarrow 0$  olacak şekilde bir  $(f_{n_k})$  alt dizisinin varlığını ispatlayalım.

$(f_n)$ ,  $H_1$  de bir zayıf sıfır dizisi olsun.  $T$  kompakt olduğundan  $(Tf_{n_k})$  yakınsak olan bir  $(f_{n_k})$  alt dizisi vardır.  $g = \lim Tf_{n_k}$  olsun.

$f_{n_k} \xrightarrow{w} 0$  iken Teorem 2.2.1 den ve  $f_n \xrightarrow{w} f$  için  $Tf_n \xrightarrow{w} Tf$  olduğundan  $Tf_{n_k} \xrightarrow{w} 0$  dır. Buradan ,

$$g = \lim Tf_{n_k} = w - \lim Tf_{n_k} = 0 \text{ dır.}$$

$T$ ,  $H_1$  deki her bir zayıf sıfır dizisini, bir sıfır dizisine gönderen bir operatör olsun.  $H_1$  deki bir  $(f_n)$  sınırlı dizisini gözönüne alalım.  $H_1$  deki her sınırlı dizinin bir zayıfça yakınsayan alt dizisi olduğundan  $(f_n)$  nin zayıfça yakınsayan  $(f_{n_k})$  alt dizisi vardır.

$$f_{n_k} \xrightarrow{w} f \text{ olsun.}$$

Burada kabulümüzden dolayı ,

$$f_{n_k} - f \xrightarrow{w} 0 \text{ ve } T(f_{n_k} - f) \xrightarrow{w} 0 \text{ dır.}$$

Böylece  $(Tf_{n_k})$  nın yakınsaklığı görülür. Dolayısıyla  $T$  kompakttır.

**Önerme :**  $H$  bir sonsuz boyutlu Hilbert Uzayı olsun. Eğer ,  $T \in B(H)$  kompakt ise  $0 \in \sigma(T)$  dir.

**İspat :** Eğer  $(e_n)$   $H$  de keyfi bir ortonormal dizi ise  $Te_n \rightarrow 0$  dir. Bu nedenle  $T$  sürekli tersinir değildir.

**Teorem 2.2.3 :**  $H_1, H_2$  ve  $H_3$  Hilbert Uzayları olsunlar.

(a) Eğer  $S \in B(H_2, H_3)$  ,  $T \in B(H_1, H_2)$  ve bu operatörlerden biri kompakt ise  $ST$  kompakttır.

(b) Eğer  $T_1, T_2 \in B(H_1, H_2)$  kompakt ve  $a, b \in K$  ise  $aT_1 + bT_2$  kompakttır.

(c)  $T \in B(H_1, H_2)$  ancak ve ancak  $T^*T$  kompakt ise kompakttır.

(d)  $T \in B(H_1, H_2)$  ancak ve ancak  $T^*$  kompakt ise kompakttır.

(e) Eğer  $(T_n)$  ,  $B(H_1, H_2)$  de bir kompakt operatörler dizisi ve bazı  $T \in B(H_1, H_2)$  için  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  ise  $T$  kompakttır.

**İspat :**

(a)  $S$  kompakt olsun. Eğer  $(f_n)$   $H_1$  de bir zayıf sıfır dizisi ise ,

$f_n \xrightarrow{w} f$  iken  $Tf_n \xrightarrow{w} Tf$  dir.

Buradan  $(Tf_n)$  dizisi de aynı zamanda bir sıfır dizisidir.  $S$  kompakt olduğundan  $STf_n \rightarrow 0$  dir. Dolayısıyla  $ST$  kompakttır.

Şimdi ,  $T$  kompakt olsun. O zaman  $H_1$  deki her bir  $(f_n)$  zayıf sıfır dizisi için  $Tf_n \rightarrow 0$  dir.  $S$  sürekli olduğundan  $STf_n \rightarrow 0$  dir. Buradan da  $ST$  nin kompakt olduğu görülür.

(b) Eğer  $H_1$  de ,

$f_n \xrightarrow{w} 0$  ise  $T_1f_n \rightarrow 0$  ve  $T_2f_n \rightarrow 0$  dir. Buradan da  $a, b \in K$  için  $(aT_1 + bT_2)f_n \rightarrow 0$  dir.

(c) Eğer  $T$  kompakt ise (a)dan dolayı  $T^*T$  operatörü de kompakttır.  $T^*T$  kompakt olsun.

Eğer  $(f_n)$   $H_1$  de bir zayıf sıfır dizisi ise  $T^*Tf_n \rightarrow 0$  dir. Buradan ,

$$\|Tf_n\|^2 = \langle Tf_n, Tf_n \rangle = \langle T^*Tf_n, f_n \rangle \rightarrow 0 \text{ dir.}$$

Bu nedenle  $T$  kompakttır.

(d) Eğer  $T$  kompakt ise (a)dan dolayı  $(T^*)^*T^*=TT^*$  da kompakttır.

Buna göre (c)den dolayı  $T^*$  kompakttır.

(e)  $(f_n)$ ,  $H_1$  de bir zayıf sıfır dizisi olsun.  $(f_n)$  dizisi sınırlı olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\|f_n\| \leq C$  dir. Şimdi,  $Tf_n \rightarrow 0$  olduğunu, yani; her  $\varepsilon > 0$  için  $n \geq n_0$  olacak şekilde  $\|Tf_n\| \leq \varepsilon$  şartını sağlayan bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$  verilmiş olsun.  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  olduğu sürece

$$\|T_{m_0} - T\| \leq \frac{1}{2} \varepsilon C^{-1}$$

şartını sağlayan bir  $m_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

$T_{m_0}$  kompakt olduğu sürece, her  $n \geq n_0$  için,  $\|T_{m_0}f_n\| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

Bunu takiben, her  $n \geq n_0$  için,

$$\|Tf_n\| \leq \|(T - T_{m_0})f_n\| + \|T_{m_0}f_n\| \leq \varepsilon \text{ dur.}$$

$B(H_1, H_2)$  deki kompakt operatörler kümesi  $B_\infty(H_1, H_2)$  ile gösterilir. Eğer  $H = H_1 = H_2$  ise  $B_\infty(H)$  şeklinde yazılır.

Teorem 2.2.3ü takiben  $B_\infty(H)$ ,  $B(H)$  nin bir kompakt iki taraflı idealidir.

$H_1$  den  $H_2$  ye her  $I$ , sınırlı rank operatörü kompakttır. Çünkü, herbir  $(f_n)$  zayıf sıfır dizisi ve  $g \in H_1$ ,  $h \in H_2$  için  $T$  operatörü  $Tf = \langle g, f \rangle h$  şeklinde ve  $Tf_n = \langle g, f_n \rangle h \rightarrow 0$  dir. Teorem 2.2.3(b) den dolayı sonlu rank operatörü aynı zamanda kompakttır. Teorem 2.2.3(e) den dolayı da her operatör  $B(H_1, H_2)$  nin normuyla ilgili olarak, sonlu rank operatörlerinin dizisinin bir limitidir. Gerçekten de, bunların hepsi kompakt operatörlerdir.

**Teorem 2.2.4 :** Bir  $T \in B(H_1, H_2)$  operatörü ancak ve ancak  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  olacak şekilde  $B(H_1, H_2)$  nin  $(T_n)$  sonlu rank operatörler dizisi varsa kompakttır. Her  $T$  kompakt operatörü için  $N(T)^\perp$  ve  $R(T)$  alt uzayları ayrılabilir. Burada  $N(T)$ ,  $T$  nin sıfırları kümesi,  $N(T)^\perp$

ise  $N(T)$  nin dik tümleyenidir.

**İspat :** Bu teoremin bir kısmının ispatını Teorem 2.2.3(e)de zaten yapmıştık. Şimdi diğer kısmının ispatını yapalım.

$T$  kompakt olsun. İlk olarak  $N(T)^\perp$  in ayrılabilir olduğunu gösterelim.

$\{e_a : a \in A\}$  ,  $N(T)^\perp$  in bir ONB si olsun.  $T$  kompakt olduğundan ,  $n \neq m$  için  $a_n \neq a_m$  koşulunu sağlayan ,  $A$  daki her  $(a_n)$  dizisi için ;  $Te_{a_n} \rightarrow 0$  dır.

Bunu takiben , her  $\varepsilon > 0$  için  $\|Te_a\| \geq \varepsilon$  olacak şekilde sadece sonlu sayıda  $a \in A$  vardır. Sonuç olarak  $A$  kümesi sayılabilir ve  $N(T)^\perp$  ayrılabilirdir.

$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $N(T)^\perp$  in bir ONB si olsun. Ayrıca ,  $P_m$   $L(e_1, \dots, e_m)$  üzerinde bir ortogonal izdüşüm olsun. Buradan ;  $P_m \xrightarrow{s} P$  ,  $N(T)^\perp$  üzerinde bir ortogonal izdüşümdür.  $T_m = TP_m$  operatörlerinin rankı en çok  $m$  kadardır.

$$T_m f = \sum_{n=1}^m \langle e_n, f \rangle T e_n$$

Bundan dolayı kompakttılar. Her  $m$  için  $\|f_m\| = 1$  olacak şekilde bir  $f_m \in H$  vardır. Ve

$$\|(T - T_m)f_m\| \geq \|T - T_m\|/2 \quad \text{dir.}$$

$$\langle (P - P_m)f_m, g \rangle = \langle f_m, (P - P_m)g \rangle \rightarrow 0$$

olduğundan ,

$$(P - P_m)f_m \xrightarrow{w} 0$$

Buradan ,  $T$  kompakt olduğu sürece  $(T - T_m)f_m = T(P - P_m)f_m \rightarrow 0$  dır. Buradan ,

$$\|T - T_m\| \leq 2\|(T - T_m)f_m\| \rightarrow 0 \quad \text{olduğundan } T_m \rightarrow T \text{ dir.}$$

Eğer  $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$   $N(T)^\perp$  in sayılabilir yoğunluktaki altkümesi ise  $\{Tg_n : n \in \mathbb{N}\}$   $R(T)$  de yoğundur. Dolayısıyla ,  $R(T)$  de ayrılabilirdir.

**Teorem 2.2.5 :**  $H$  bir Hilbert Uzayı ,  $T \in B_\infty(H)$  ,  $\lambda \in K$  ve  $\lambda \neq 0$  olsun. Bu durumda  $R(\lambda - T)$  kapalıdır.

**İspat :**  $g \in \overline{R(\lambda - T)}$  olsun. Bu durumda  $H$  de  $g_n = (\lambda - T)f'_n \rightarrow g$  olacak şekilde bir  $(f'_n)$

dizisi vardır. Eğer  $f_n, f'_n$  nün  $N(\lambda - T)^\perp$  üzerine ortogonal izdüşümü ise  $g_n = (\lambda - T)f_n$  dir.

Eğer  $(f_n)$  dizisi sınırlı değil ise  $\|f_n\| \rightarrow \infty$  olduğunu varsayabiliriz.

$h_n = \|f_n\|^{-1} f_n$  için  $\|h_n\| = 1$  ve  $(\lambda - T)h_n \rightarrow 0$  dır.

$T$  kompakt olduğundan  $(h_n)$  dizisinin öyle bir  $(h_{n_k})$  alt dizisi vardır ki  $(Th_{n_k})$  yakınsaktır.

$$h_{n_k} = \lambda^{-1} \left( \|f_{n_k}\|^{-1} g_{n_k} + Th_{n_k} \right)$$

dizisi bir  $h \in H$  elemanına yaklaşmaktadır.

$h_n \in N(\lambda - T)^\perp$  ve  $\|h_n\| = 1$  bağıntılarından dolayı  $h \in N(\lambda - T)^\perp$  ve  $\|h\| = 1$  dir.

Diğer taraftan ;

$$(\lambda - T)h = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda - T)h_{n_k} = 0 ,$$

buradan da  $h \in N(\lambda - T)$  dir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle  $(f_n)$  dizisi sınırlıdır.  $T$  kompakt olduğundan  $(f_n)$  dizisinin  $(Tf_{n_k})$  yakınsak olacak şekilde bir  $(f_{n_k})$  alt dizisi vardır. Böylece ,

$$f_{n_k} = \lambda^{-1} (g_{n_k} + Tf_{n_k})$$

dizisi aynı zamanda bir  $f \in H$  elemanına yaklaşmaktadır. Ayrıca ,

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda - T)f_{n_k} = (\lambda - T)f \in R(\lambda - T) \text{ dir.}$$

**Teorem 2.2.6 :**  $H, K$  üzerinde bir Hilbert Uzayı ve  $T \in B_\infty(H)$  olsun.  $\sigma(T) \cap (K \setminus \{0\}) = \sigma_p(T) \cap (K \setminus \{0\})$  için , eğer  $H$  sonsuz boyutlu ise  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$  ve  $T$  operatörü sadece 0 da bir küme oluşturabilen , sayılabilir çoklukta özdeğerlere sahiptir. Sıfırdan farklı her özdeğer sonlu çoklukta.  $\lambda \neq 0$  sayısı ancak ve ancak  $\lambda^*, T^*$  ın bir özdeğeri ise  $T$  nin bir özdeğeridir. Burada  $\sigma(T)$   $T$  nin spektrumunu ,  $\sigma_p(T)$  ise  $T$  nin özdeğerler kümesini gösterir.

**İspat :** Eğer  $H$  sonsuz boyutlu ise Teorem 2.2.1 in bir sonucu olarak  $0 \in \sigma(T)$  dir.

$\sigma(T) \cap (K \setminus \{0\}) = \sigma_p(T) \cap (K \setminus \{0\})$  eşitliğini göstermek için ; eğer  $\lambda \neq 0$   $T$  nin bir özdeğeri değil

ise  $\lambda \notin \sigma(T)$  olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için  $\lambda \neq 0$  ve  $N(\lambda-T)=0$  olduğunu kabul edelim.  $R(\lambda-T)$  kapalı olduğu sürece  $\lambda-T$  ;  $H$  den  $R(\lambda-T)$  Hilbert Uzayı üzerine bijective eşlemedir. Bunu takiben  $R(\lambda-T) = H$  olduğunu gösterelim. Bu şekilde  $\lambda \in \rho(T)$  , dolayısıyla  $\lambda \notin \sigma(T)$  sonucuna varabiliriz.

$R(\lambda-T) \neq H$  olduğunu varsayalım.  $H_0$  ve  $H_n$  yi  $n \geq 1$  için  $H_0 = H$  ve  $H_n = R((\lambda-T)^n)$  eşitlikleriyle tanımlayalım. Burada  $n \in \mathbb{N}$  için  $H_{n+1}$  alt uzayı kesinlikle  $H_n$  den daha küçük olan bir kapalı alt uzayıdır.  $H_{n+1}$  alt uzayının kapalı olmasının nedeni ,  $(\lambda-T)^{-1}$  in sürekli ve  $H_n$  nin kapalı olmasıdır. Ayrıca ,  $H_n = H_{n+1}$  olduğundan  $Tf_n \rightarrow 0$  dır. Diğer taraftan , her  $n \in \mathbb{N}$  için

$Tf_n = \lambda f_n - (\lambda-T)f_n$  dir. Burada  $(\lambda-T)f_n$  ,  $H_n$  ye ait ve  $f_n$  ye ortogonaldir. Buradan da  $\|Tf_n\| \geq |\lambda| \cdot \|f_n\| = |\lambda|$  dir. Bu da  $Tf_n \rightarrow 0$  kabulü ile çelişir. Sonuç olarak ,  $R(\lambda-T) = H$  dir.

Şimdi , sıfırdan farklı her  $\lambda$  özdeğerinin sonlu olduğunu gösterelim. Eğer ,  $\dim N(\lambda-T) = \infty$  ise  $N(\lambda-T)$  de bir  $(f_n)$  ortonormal dizisi vardır.  $T$  kompakt olduğundan  $\|Tf_n\| = |\lambda| \cdot \|f_n\| = |\lambda|$  eşitlikleriyle çelişen  $Tf_n \rightarrow 0$  ortaya çıkar.

Bir sonraki adımda , özdeğerlerin sadece 0 da bir küme oluşturduğunu ve sayılabilir çoklukta özdeğer olduğunu gösterelim.  $T$  nin ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$  olacak şekilde farklı özdeğerlerinin oluşturduğu  $(\lambda_n)$  dizisinin varlığını kabul edelim. Bu takdirde ,  $H$  de  $\|f_n\| = 1$  ve  $(\lambda_n - T)f_n = 0$  olacak şekilde bir  $(f_n)$  dizisi vardır. Lineer cebirden bilindiği gibi  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  ailesi lineer bağımsızdır.  $H_n = L(f_1, \dots, f_n)$  ,  $(H_0 = \{0\})$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\|g_n\| = 1$  olacak şekilde  $g_n \in H_n \ominus H_{n-1}$  olsun. Buradan ,  $g_n \xrightarrow{w} 0$  olduğundan  $Tg_n = 0$  dır.

Diğer yandan, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(\lambda_n - T)g_n \in H_{n-1}$  iken  $Tg_n = \lambda_n g_n - (\lambda_n - T)g_n$  dir.

Bunu takiben ,  $g_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} f_j$  eşitliğinden ;

$$(\lambda_n - T)g_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} (\lambda_n - T)f_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} (\lambda_n - \lambda_j) f_j \in H_{n-1} \quad \text{dir.}$$

$g_n \perp H_{n-1}$  olduğundan  $\|Tg_n\| \geq |\lambda_n|$  dir. Bu ise  $Tg_n \rightarrow 0$  durumuyla çelişir.

Son iddiamız ise  $\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$  ve  $\sigma(T^*) \cap (K \setminus \{0\}) = \sigma_p(T^*) \cap (K \setminus \{0\})$  eşitliklerinden

görülür. Buradaki ikinci eşitlik  $T^*$  ın da kompakt olması halinde geçerlidir.

**Teorem 2.2.7 :**  $H$  bir Hilbert Uzayı ve  $T \in B_\infty(H)$  olsun. Eğer  $\lambda \neq 0$   $T$  nin bir özdeğeri (bundan dolayı  $\lambda^*$  da  $T^*$  nin bir özdeğeri) ise  $N(\lambda - T)$  ve  $N(\lambda^* - T^*) = R(\lambda - T)^\perp$  aynı boyuta sahiptir.

**İspat :**  $\dim N(\lambda - T) \leq \dim N(\lambda^* - T^*)$  veya  $\dim N(\lambda^* - T^*) \leq \dim N(\lambda - T)$  dir. Birinci durumu ele alalım. Burada  $N(\lambda - T)$  den  $N(\lambda^* - T^*) = R(\lambda - T)^\perp$  e bir  $V$  izometrik eşlemesi vardır.  $P$  ile  $N(\lambda - T)$  üzerine ortogonal izdüşüm gösterilsin.  $P$  operatörü sonlu ranklı , bu nedenle de kompaktır.  $T_1 = T + VP$  kompakt operatörü için  $N(\lambda - T_1) = \{0\}$  dır. Burada  $\lambda$  ,  $T_1$  in bir özdeğeri değildir. Teorem 2.6 dan  $\lambda^*$  da  $T_1^*$  ın bir özdeğeri değildir.  $\{0\} = N(\lambda^* - T_1^*) = R(\lambda - T_1)^\perp = (R(\lambda - T) \oplus R(V))^\perp$  dir. Bu nedenle  $R(V) = R(\lambda - T)^\perp$  ve buradan da  $\dim N(\lambda - T) = \dim R(V) = \dim R(\lambda - T)^\perp = \dim N(\lambda^* - T^*)$  dir. Diğer durum için de benzer yoldan ispat yapılabilir.

### 3 HİLBERT UZAYINDA KOMPAKT OPERATÖRLERİN SINIFLANDIRILMASI

#### 3.1 Hilbert-Schmidt Operatörleri

Kompakt operatörlerin en önemli sınıflarından biri Hilbert-Schmidt operatörler sınıfıdır.  $H_1$  ve  $H_2$  iki Hilbert Uzayı olsun.  $T \in B(H_1, H_2)$  operatörü için ,  $H_1$  in

$$\sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 < \infty$$

olacak şekilde bir  $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$  ortonormal tabanı varsa  $T$  bir Hilbert-Schmidt operatörüdür denir.

**Teorem 3.1.1 :** Bir  $T \in B(H_1, H_2)$  operatörü ancak ve ancak  $T^*$  bir Hilbert-Schmidt operatörü ise bir Hilbert-Schmidt operatörüdür.  $H_1$  in  $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$  ve  $H_2$  nin  $\{e'_\beta : \beta \in B\}$  keyfi ortonormal tabanları için ,

$$\|T\| \leq \left( \sum_{\alpha \in A} \|Tf_\alpha\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{\beta \in B} \|T^*e'_\beta\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \text{dur. (3.1)}$$

(3.1)deki kareköklerin adi değerleri  $T$  nin Hilbert-Schmidt normudur ve  $\|T\|$  ile gösterilir.

(3.1)den dolayı  $\|T\| \leq \|T\| = \|T^*\|$  dır. Hilbert-Schmidt operatörlerinin kümesi  $B_2(H_1, H_2)$  veya  $B_2(H)$  ile gösterilir.  $B_2(H_1, H_2)$  nin Hilbert-Schmidt normu ile birlikte bir Hilbert Uzayı olduğunu göstermek zor değildir.

**İspat :**  $T \in B(H_1, H_2)$  bir Hilbert-Schmidt operatörü ve  $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$   $H$  nin  $\sum \|Te_\alpha\|^2 < \infty$  olacak şekilde bir ONB si olsun. Eğer  $\{e'_\beta : \beta \in B\}$   $H_2$  nin keyfi bir ONB si ise ,

$$\sum_{\beta \in B} \|T^* e'_\beta\|^2 = \sum_{\beta \in B} \sum_{\alpha \in A} |\langle T^* e'_\beta, e_\alpha \rangle|^2 = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} |\langle e'_\beta, Te_\alpha \rangle|^2 = \sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 \text{ dir.}$$

Burada  $T^*$  bir Hilbert-Schmidt operatördür.

Bunun tersi de aynı şekilde ispatlanarak (3.1) eşitsizliği elde edilebilir. Eğer  $\{e'_\beta : \beta \in B\}$   $H_2$  nin bir ONB si ise her  $f \in H_1$  için ,

$$\|Tf\|^2 = \sum_{\beta} |\langle e'_\beta, Tf \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \sum_{\beta} \|T^* e'_\beta\|^2 \text{ dir.}$$

Sonuç olarak ,

$$\|T\|^2 \leq \sum_{\beta} \|T^* e'_\beta\|^2 \text{ dir.}$$

Buradan da eşitsizlik (3.1) in doğruluğu görülmektedir.

**Teorem 3.1.2:**  $H_1$  den  $H_2$  ye bir  $S$  operatörü ancak ve ancak  $S$  kapanabilir ve  $D(\bar{S})$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|\bar{S}e_\gamma\|^2 \leq \infty$$

olacak şekilde bir  $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  ortonormal tabana sahip ise bir  $T$  Hilbert-Schmidt operatörünün sınırlanmış halidir. Her Hilbert-Schmidt operatörü kompaktır.

**İspat :**  $T \in B(H_1, H_2)$  bir Hilbert-Schmidt operatörü ve  $S \subset T$  olsun. Burada  $S$  sınırlıdır. Ve  $D(\bar{S}) = \overline{D(S)}$  dir.  $D(\bar{S})$  bir Hilbert Uzayı olduğundan bir  $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  ONB sine sahiptir.  $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$   $H_1$  in bir ONB sinde olduğundan ve Teorem (3.1.1)den

$$\sum \|\bar{S}e_\gamma\|^2 = \sum \|Te_\gamma\|^2 < \infty \text{ dur.}$$

Şimdi , S nin verilen özelliği sağladığını kabul edelim. S nin kompakt olduğunu , dolayısıyla keyfî bir Hilbert-Schmidt operatörünün kompaktlığını gösterelim.  $(f_n)$  ,  $D(\bar{S})$  de bir dizi olsun.  $\varepsilon > 0$  için

$$f_n \xrightarrow{w} 0$$

olduğunu kabul edelim.  $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  nin  $\{e_\gamma : \langle e_\gamma, f_n \rangle \neq 0, \text{ bazı } n \in \mathbb{N} \text{ için}\}$  alt kümesi sayılabilir. Bunu  $\{e_1, e_2, \dots\}$  ile gösterelim.

$$f_n = \sum_j \langle e_j, f_n \rangle e_j \text{ ve } \sum_j \|\bar{S}e_j\|^2 < \infty \text{ dur.}$$

$$\sum_j \langle e_j, f_n \rangle \|\bar{S}e_j\|^2 \leq \left\{ \sum_j \langle e_j, f_n \rangle^2 \cdot \sum_j \|\bar{S}e_j\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \|f_n\| \left\{ \sum_j \|\bar{S}e_j\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğinden dolayı

$$\sum_j \langle e_j, f_n \rangle \bar{S}e_j$$

serileri yakınsaktır.  $\bar{S}$  kapalı olduğundan ,

$$\bar{S}f_n = \sum_j \langle e_j, f_n \rangle \bar{S}e_j \text{ dir.}$$

Bunu takiben , her  $N \in \mathbb{N}$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için ,

$$\begin{aligned} \|\bar{S}f_n\| &= \sum_j \langle e_j, f_n \rangle \|\bar{S}e_j\| \leq \sum_{j \leq N} \langle e_j, f_n \rangle \|\bar{S}e_j\| + \left\{ \sum_{j > N} \langle e_j, f_n \rangle^2 \sum_{j > N} \|\bar{S}e_j\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{j \leq N} \langle e_j, f_n \rangle \|\bar{S}e_j\| + \|f_n\| \left\{ \sum_{j > N} \|\bar{S}e_j\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$\sum_j \|\bar{S}e_j\|^2 < \infty$  eşitsizliği ve  $(\|f_n\|)$  nin sınırlı olmayışı nedeniyle her  $n \in \mathbb{N}$  için ,

$$\|f_n\| \left\{ \sum_{j > N_0} \|\bar{S}e_j\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $N_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

$f_n \xrightarrow{w} 0$  olduğundan , her  $n \geq n_0$  için

$$\sum_{j \in N_0} |\langle e_j, f_n \rangle| \|\bar{S}e_j\| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

Bunu takiben  $n \geq n_0$  için  $\|\bar{S}f_n\| < \varepsilon$  , dolayısıyla  $\bar{S}f_n \rightarrow 0$  dır. Buradan da  $\bar{S}$  kompakttır.  $\bar{S}$  kompakt operatörü sürekli olduğundan  $D(\bar{S}) = \overline{D(\bar{S})}$  dir.  $D(T) = H_1$  ve  $f \in D(\bar{S})$  ,  $g \in D(\bar{S})^\perp$  için  $T(f+g) = \bar{S}f$  eşitlikleriyle  $S$  nin bir  $T$  genişlemesini tanımlayalım.

$\|T\| = \|S\|$  ile  $T \in B(H_1, H_2)$  iken  $T$  bir Hilbert-Schmidt operatörüdür. Eğer  $\{g_\beta : \beta \in B\}$   $D(\bar{S})^\perp$  nin bir ONB si ise  $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{g_\beta : \beta \in B\}$   $H_1$  in

$$\sum_\gamma \|Te_\gamma\|^2 + \sum_\beta \|Tg_\beta\|^2 = \sum_\gamma \|\bar{S}e_\gamma\|^2 < \infty \quad \text{olacak şekilde bir ONB sidir.}$$

**Önerme :**  $T \in B(H_1, H_2)$  ,  $S \in B(H_1, H_2)$  ve bu operatörlerden biri Hilbert-Schmidt operatörü olsun. Bu durumda  $ST$  bir Hilbert-Schmidt operatörüdür.  $B(H_2)$  ise  $B(H)$  nin iki taraflı idealidir.

**İspat :**  $T$  bir Hilbert-Schmidt operatörü ve  $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$   $H_1$  de bir ONB olsun. Bu durumda

$$\sum_{\alpha \in A} \|STe_\alpha\|^2 \leq \|S\|^2 \sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 < \infty \quad \text{dur.}$$

Eğer  $S$  bir Hilbert-Schmidt operatörü ise  $T^*S^*$  , gösterilen eşitsizlik ve Teorem 3.1.1 den bir Hilbert-Schmidt operatörüdür. Böylece ,  $ST = (T^*S^*)^*$  da aynı zamanda bir Hilbert-Schmidt operatörüdür.

**Teorem 3.1.3 :**  $M_1$  ve  $M_2$  sırasıyla  $\mathbb{R}^p$  ve  $\mathbb{R}^q$  nun ölçülebilir alt kümeleri olsun.

$T \in B(L_2(M_1), L_2(M_2))$  operatörü ancak ve ancak ,

$$f \in L_2(M_1) \text{ için } M_2 \text{ de hemen her yerde } Tf(x) = \int_{M_1} K(x, y) f(y) dy \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir  $K \in L_2(M_1 \times M_2)$  çekirdeği varsa bir Hilbert-Schmidt operatörüdür.  $T^*$  eşlenik operatörü  $K^+(x,y)=K(y,x)^*$  eşlenik çekirdeği ile belirtilir.

**İspat :** Eğer  $T$  bu formda ise  $T \in B(L_2(M_1), L_2(M_2))$  dir. Eğer  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  ve  $\{f_m : m \in \mathbb{N}\}$  sırasıyla  $L_2(M_1)$  ve  $L_2(M_1 \times M_2)$  nin ortonormal tabanları ise  $\{g_{nm} : (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$  ,  $L_2(M_2 \times M_1)$  nin  $g_{nm}(x,y) = f_m(x).e_n(y)^*$  olacak şekilde bir ONB sıdır.

Bundan dolayı ,

$$\begin{aligned} \sum_n \|Te_n\|^2 &= \sum_{n,m} |\langle Te_n, f_m \rangle|^2 = \sum_{n,m} \left| \int_{M_2} \int_{M_1} K(x,y)^* e_n(y)^* dy \cdot f_m(x) dx \right|^2 \\ &= \sum_{n,m} |\langle K, g_{nm} \rangle|^2 = \|K\|^2 < \infty \quad \text{dur.} \end{aligned}$$

Buradan da  $T$  nin bir Hilbert-Schmidt operatörü olduğu görülür.

Şimdi ,  $T$  bir Hilbert-Schmidt operatörü ve  $e_n, f_m$  ve  $g_{nm}$  ise yukarıdaki gibi tanımlanmış olsunlar.  $C_{nm}$  yi ise  $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $C_{nm} = \langle f_m, Te_n \rangle$  şeklinde tanımlayalım.

Buradan ,

$$\sum_{n,m} |C_{nm}|^2 = \sum_{n,m} |\langle f_m, Te_n \rangle|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2 = \|T\|^2 < \infty ,$$

bu nedenle de her  $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $\langle g_{nm}, K \rangle = C_{nm}$  olacak şekilde bir  $K \in L_2(M_2 \times M_1)$  vardır. Eğer  $T_0$  , eşitlik (3.2) deki  $K$  ile belirtilen operatör ise  $h(x,y)=g(x)f^*(y)$  ile her  $f \in L_2(M_1)$  ve  $g \in L_2(M_2)$  için ,

$$\begin{aligned} \langle g, T_0 f \rangle &= \int_{M_2} g(x)^* \int_{M_1} K(x,y) f(y) dy dx = \langle h, k \rangle \\ &= \sum_{n,m} C_{nm} \langle h, g_{nm} \rangle = \sum_{n,m} \langle f_m, Te_n \rangle \langle g, f_m \rangle \langle e_n, f \rangle \\ &= \left\langle \sum_m \langle f_m, g \rangle f_m, \sum_n \langle e_n, f \rangle Te_n \right\rangle = \langle g, Tf \rangle \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Bundan dolayı da  $T=T_0$  dir.

**Teorem 3.1.4 :**  $T$  bir Hilbert Uzayından  $L_2(M)$  ye bir operatör olsun. Aşağıda verilen iddialar birbirine eşdeğerdirler.

(i)  $T$  bir Hilbert-Schmidt operatörünün sınırlanmış halidir.

(ii)  $\|k(\cdot)\| \in L_2(M)$  olacak şekilde bir  $k:M \rightarrow H$  fonksiyonu vardır ve  $M$  de hemen her yerde  $Tf(x) = \langle k(x), f \rangle$ ,  $f \in D(T)$  dir.

(iii)  $M$  de hemen her yerde  $|Tf(x)| \leq \|f\| \kappa(x)$ ,  $f \in D(T)$  olacak şekilde bir  $\kappa \in L_2(M)$  fonksiyonu vardır.

( (ii) ve (iii) deki kümelerin kuralla uymayan noktaları  $f$  ve  $Tf$  nin temsilcisinin seçimine bağlıdır.)

**İspat :**

(i) $\Rightarrow$ (ii) :  $T \subset S$  ve  $S \in B_2(H, L_2(M))$  olsun. (ii) yi  $S$  operatörü için gösterelim.

$S$  kompakt olduğu takdirde ,  $N(T)^\perp$  Teorem 2.2.4 den dolayı ayrılabilir.

$\{e_1, e_2, \dots\}$ ,  $N(S)^\perp$  için bir ONS olsun.

Bu durumda ,

$$\sum_n \int_M |Se_n(x)|^2 dx = \sum_n \|Se_n\|^2 < \infty \text{ dur.}$$

Bu nedenle B.Levi's Teoreminden ,

$$\sum_n |Se_n(x)|^2 < \infty$$

ve  $M$  de hemen her yerde ,

$$\int_M \sum_n |Se_n(x)|^2 dx < \infty \text{ dur.}$$

Buradan ,  $k:M \rightarrow H$  fonksiyonunu şu şekilde tanımlayabiliriz ;

$$k(x) = \begin{cases} \sum_n (Se_n(x))^* e_n & , \quad \text{eger } \sum_n |Se_n(x)|^2 < \infty \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

Bu  $k$  fonksiyonu ile her  $f \in H$  için .

$$\langle k(x), f \rangle = \sum_n \langle e_n, f \rangle Se_n(x) = Sf(x)$$

M de hemen her yerde sağlanır.

$$\|k(x)\|^2 = \sum_n |Se_n(x)|^2 \quad \text{eşitliğinden dolayı } \|k(\cdot)\| \text{ fonksiyonu } L_2(M) \text{ ye aittir.}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :  $\kappa(x) = \|k(x)\|$  olarak alınırsa görülmektedir.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : (iii) den dolayı her  $f \in D(T)$  için ,

$$\|Tf\|^2 \leq \|f\|^2 \int_M |\kappa(x)|^2 dx \quad \text{dir.}$$

Bu nedenle T sınırlıdır.  $\bar{T}$  da aynı zamanda (iii) ü sağlar. Bunu şu şekilde gösterebiliriz.

Her  $f \in D(\bar{T}) = \overline{D(T)}$  için  $f_n \rightarrow f$  olacak şekilde bir  $(f_n)$  dizisi mevcuttur.

Buradan da  $Tf_n \rightarrow \bar{T}f$  dir. Hemen her yerde  $Tf_{n_k}(x) \rightarrow \bar{T}f(x)$  olacak şekilde bir  $(f_{n_k})$  dizisi vardır. Böylece hemen her yerde ,

$$|\bar{T}f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |Tf_{n_k}(x)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}\| \kappa(x) = \|f\| \kappa(x) \quad \text{dir.}$$

Bu aynı zamanda  $f \in D(\bar{T}), g \in D(T)^\perp$  için  $S(f+g) = \bar{T}f$  şeklinde tanımlanan  $S \in B(H, L_2(M))$  operatörü için de geçerlidir.

S nin bir Hilbert-Schmidt operatörü ve

$$\|S\|^2 \leq \int_M |\kappa(x)|^2 dx$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için de H de her sonlu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ONS si için ,

$$\sum_{j=1}^n \|Se_j\|^2 \leq \int_M |\kappa(x)|^2 dx$$

olduğu gösterilmelidir.

$Se_j(\cdot)$  ,  $Se_j$  nin bir keyfi gösterimi olsun.  $A : L(e_1, \dots, e_n) \rightarrow L_2(M)$  yi ise  $(A(\sum a_j e_j))(x) = \sum a_j Se_j(x)$  eşitliğiyle tanımlayalım.

$L_2(M)$  den dolayı  $A = S|_{L(e_1, \dots, e_n)}$  dir. rasyonel katsayılara sahip  $e_1, \dots, e_n$  lerin lineer kombinasyonu olan  $L_r(e_1, \dots, e_n)$  kümesi sayılabilir olduğu sürece  $M$  de her  $x \in M \setminus N$  ,  $f \in L_r(e_1, \dots, e_n)$  için ,

$$|Af(x)| \leq \|f\| \kappa(x)$$

olacak şekilde 0 ölçümlü bir  $N$  alt kümesi vardır.

Eğer  $f = \sum_{j=1}^n a_j e_j \in L(e_1, \dots, e_n)$  ve rasyonel seriler  $(a_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$  olarak seçilirse  $k \rightarrow \infty$  iken  $a_{j_k} \rightarrow a_j$  dir.

Böylece her  $x \in M \setminus N$  için  $f_k = \sum_{j=1}^n a_{j_k} e_j$  olmak üzere ,

$$|Af(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |Af_k(x)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\| \kappa(x) = \|f\| \kappa(x) \quad \text{dir}$$

Sonuç olarak  $x \in M \setminus N$  ve  $f \in L(e_1, \dots, e_n)$  için  $|Af(x)| \leq \|f\| \kappa(x)$  dir.

Her  $x \in M \setminus N$  için  $f \rightarrow Af(x)$  fonksiyonu , normu  $\kappa(x)$  den daha büyük olmayan ,  $L(e_1, \dots, e_n)$  üzerinde bir sürekli lineer fonksiyoneldir. Buna göre  $|k(x)| \leq \kappa(x)$  olacak şekilde bir  $k(x) \in L(e_1, \dots, e_n) \subset H$  var ve  $x \in M \setminus N$  ,  $f \in L(e_1, \dots, e_n)$  için  $Af(x) = \langle k(x), f \rangle$  dir.

Bunu takiben ,

$$\sum_{j=1}^n \|Ae_j\|^2 = \int_M \sum_{j=1}^n |\langle k(x), e_j \rangle|^2 dx = \int_M \|k(x)\|^2 dx \leq \int_M |\kappa(x)|^2 dx \quad \text{dir.}$$

Hilbert-Schmidt operatörlerinin ,  $H$  uzayındaki  $L_2^{(v)}(Q)$  vektör fonksiyonlarının bir uzayı formunda olması durumundaki bir analitik tanımını verelim.

$Q$  ,  $n$ -boyutlu Öklid Uzayı  $E_n$  nin kapalı sınırlı bir kümesi olsun. Ayrıca , bu kümenin pozitif Lebesgue ölçümüne sahip olduğunu varsayalım.

Verilen bir  $r (=1, 2, \dots, \infty)$  için bütün  $r$ -boyutlu

$$f(x) = \{f_j(x)\}_1^r, \quad x \in Q$$

vektör fonksiyonları ile

$$|f|^2 = \int_Q \sum_{j=1}^r |f_j(x)|^2 dx < \infty$$

olacak şekilde , ölçülebilir  $f_j(x)$  ( $j=1,2,\dots,r$ ) koordinatları bir  $L_2^{(r)}(Q)$  Hilbert Uzayını oluşturur.

$L_2^{(r)}(Q)$  daki skaler çarpım aşağıda verilen formül ile tanımlanır.

$$(f, g) = \int_Q g^*(x) f(x) dx = \int_Q \sum_{j=1}^r \overline{g_j(x)} f_j(x) dx \quad (f, g \in L_2^{(r)}(Q)) \quad (3.3)$$

Diğer taraftan ,  $L_2^{r \times r}(Q \times Q)$  Hilbert uzayı  $Q \times Q$  da

$$|A(x, y)|^2 = \int_Q \int_Q \sum_{j,k=1}^r |a_{jk}(x, y)|^2 dx dy < \infty \quad (3.4)$$

olacak şekilde elemanları ölçülebilir

$$A(x, y) = \|a_{\mu\nu}(x, y)\|_1^r$$

matris fonksiyonlarını içersin. Burada  $A(x, y)$  ve  $B(x, y)$  gibi iki elemanın skaler çarpımı ;

$$(A, B) = \int_Q \int_Q \sum_{j,k=1}^r a_{jk}(x, y) \overline{b_{jk}(x, y)} dx dy$$

eşitliğiyle tanımlanır.

**Teorem 3.1.5:** Her  $A(x, y) \in L_2^{r \times r}(Q \times Q)$  elemanına

$$(Af)(x) = \int_Q A(x, y) f(y) dy \quad (f \in L_2^r(Q)) \quad (3.5)$$

eşitliğine göre  $L_2^{(r)}(Q)$  da temsil edilen bir  $A$  Hilbert-Schmidt operatörü karşılık gelir.

$A(x, y) \rightarrow A$  eşlemesi , her  $L_2^{r \times r}(Q \times Q)$  nun ;  $L_2^{(r)}(Q)$  da temsil eden Hilbert-Schmidt operatörlerinin  $B_2(H_1, H_2)$  Hilbert Uzayı üzerine bir izometrik eşlemesidir. Buradan ;

$$(A, B) = \text{tr}(B^* A) \quad \text{dir.} \quad (3.6)$$

**İspat :**  $r$  sonlu olduğunda ispatı kolaylıkla görülebilir. Bu yüzden ilk önce daha zor olan  $r=\infty$  durumunu inceleyelim.

$L_2^{(r)}(Q)$  ve  $L_2^{r*}(Q \times Q)$  uzaylarını kısaca  $L_2$  ve  $L_2 \times L_2$  olarak gösterelim.

Fubini'nin iyi bilinen bir teoreminden denklem (3.4) ,  $r=\infty$  halinde hemen her  $x \in Q$  için ,

$$\int_Q \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}(x, y)|^2 dy < \infty \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (3.7)da belirtilen serilerin yakınsadığı  $x \in Q$  elemanları için ,

$$\begin{aligned} \left( \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}(x, y)| |f_k(y)| dy \right)^2 &\leq \left( \int_Q \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}(x, y)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dy \right)^2 \\ &\leq \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}(x, y)|^2 dy \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y)|^2 dy \quad (j=1,2,\dots) \end{aligned} \quad (3.8)$$

sınırı herhangi  $f = \{f_j(y)\}_1^{\infty} \in L_2$  için geçerlidir. Buradan , bu  $x$  ler için ;

$$g_j(x) = \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(x, y) f_k(y) dy \quad (j=1,2,\dots) \quad (3.9)$$

integralleri anlamlıdır. Ve denklem (3.7) den ;

$$\int_Q \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)|^2 dx \leq \int_{Q \times Q} \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}(x, y)|^2 dx dy \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y)|^2 dy < \infty$$

elde edilir.

Son eşitsizlikten  $g = \{g_j\}_1^{\infty} \in L_2$  olmak üzere (3.9) eşitlikleri  $L_2$  de bir  $g=Af$  lineer operatörünü tanımlar ve

$$|Af| \leq \sqrt{(A, A)} |f| \quad \text{dir.}$$

(3.9) eşitlikler sistemi kısaca

$$g(x) = \int_Q A(x, y) f(y) dy \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir.

A nın bir Hilbert-Schmidt operatörü olduğunu ve

$$\text{tr}(A^* A) = (A, A) \quad (3.11)$$

olduğunu gösterelim.

$\{\phi_j\}_1^\infty$ ,  $L_2$  uzayının bazı ortonormal tabanları olsun.

Matris fonksiyonunu  $Q \times Q$  üzerinde

$$F_{jk}(x, y) = \phi_j(y) \phi_k^*(x) = \left\| \phi_{j\mu}(y) \overline{\phi_{kv}(x)} \right\|_{\mu, v=1}^\infty \quad (j, k = 1, 2, \dots)$$

şeklinde yazalım.

Buradan kolaylıkla  $F_{jk}(x, y) \in L_2 \times L_2$  ( $j, k=1, 2, \dots$ ) olduğu görülebilir.

Ayrıca, bunlar bir

$$(F_{jk}, F_{j_1 k_1}) = \delta_{jj_1} \delta_{kk_1} \quad (j, k; j_1, k_1 = 1, 2, \dots)$$

ortonormal sistemi oluşturur.

$\{F_{jk}(x, y)\}_{j,k=1}^\infty$  sisteminin  $L_2 \times L_2$  de tam olduğu kolayca gösterilebilir.

Bu gösterildiği takdirde,

$$(A, A) = \sum_{j,k=1}^\infty |(A, F_{jk})|^2 \quad (3.12)$$

olduğu, diğer taraftan da

$$(A, F_{jk}) = \int_{Q \times Q} \phi_k^*(x) A(x, y) \phi_j(y) dx dy = (A \phi_j, \phi_k) \quad (j, k = 1, 2, \dots) \quad (3.13)$$

olduğu kolayca görülür.

Böylece eşitlik (3.11) in, eşitlik (3.12) ve (3.13) ün bir sonucudur.

$A \rightarrow A$  eşlemesi lineer olduğu sürece eşitlik (3.11) den görüldüğü gibi ; eğer  $A \rightarrow A$  ve  $B \rightarrow B$  ise eşitlik (3.6) sağlanır.

Teoremin ispatını tamamlamak için  $L_2$  deki herhangi Hilbert-Schmidt operatörünün bazı  $A(x, y) \in L_2 \times L_2$  çekirdeği ile eşitlik (3.9) şeklinde temsil edilebileceği gösterilmelidir. Bunu göstermek için yine  $L_2$  uzayının bazı  $\{\phi_j\}_1^\infty$  ortonormal tabanlarını ve buna karşılık gelen  $L_2 \times L_2$  uzayının  $\{F_{jk}\}$  ortonormal tabanlarını kullanacağız.

Eğer  $A$  bir Hilbert-Schmidt operatörü ise ,

$$\text{tr}(A^*A) = \sum_{j,k=1}^{\infty} |\gamma_{jk}|^2, \quad \gamma_{jk} = (A\phi_j, \phi_k) \quad (j, k = 1, 2, \dots) \quad \text{dir.}$$

$$A_0(x, y) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \gamma_{jk} F_{jk}(x, y) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \gamma_{jk} \phi_j(x) \phi_k^*(y) \quad , \quad (3.14)$$

eşitliğinde sağ taraftaki sonsuz seriler  $L_2 \times L_2$  de yakınsadığı takdirde  $A_0(x, y) \in L_2 \times L_2$  çekirdeğini oluşturabiliriz.

$A_0$  ile , (3.5) eşitliğine göre  $A_0(x, y)$  çekirdeği yardımıyla  $L_2$  de belirtilen Hilbert-Schmidt operatörünü gösterelim. (3.14) eşitliğine göre ;

$$(A_0, F_{jk}) = \gamma_{jk} = (A\phi_j, \phi_k) \quad (j, k = 1, 2, \dots)$$

ve (3.5) eşitliğine göre ,

$$(A_0, F_{jk}) = (A_0\phi_j, \phi_k) \quad (j, k = 1, 2, \dots) \quad \text{dir.}$$

Bu nedenle ,

$$(A\phi_j, \phi_k) = (A_0\phi_j, \phi_k) \quad (j, k = 1, 2, \dots)$$

ve böylece  $A = A_0$  dır. Böylelikle teorem ispatlanır.

Şimdi , rezolventi Hilbert-Schmidt tipinden olan diferansiyel operatöre ait bir örnek verelim.

$L_2(a, b)$   $(-\infty < a, b < \infty)$  Hilbert uzayında ,  $I(y) = -iy'$  diferansiyel ifadesi ve

$$v(y) = \alpha y(a) + \beta f(b) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan T operatörünü ele alalım. Burada  $\alpha, \beta$   $|\alpha| + |\beta| > 0$  olmak üzere sabit kompleks sayılardır.

T operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D(T) = \{ y(x) \in L_2(a, b) : y(x) \text{ [a,b] de mutlak sürekli, } I(y) \in L_2(a, b) \text{ ve } v(y) = 0 \}$$

$$y(x) \in D(T) \text{ iken } Ty = iy'.$$

$$\omega(\xi) = \alpha e^{i\xi a} + \beta e^{i\xi b} \quad (3.15)$$

olsun.

Aşağıdakilerin doğruluğunu ispatlayalım.

$\lambda \in \mathbb{C}$  sayısının, T operatörünün özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul  $\omega(\lambda) = 0$  olmasıdır. Eğer  $\lambda$  sayısı T nin özdeğeri değil ise  $\lambda$  T nin regular noktasıdır.  $(T - \lambda I)^{-1}$  rezolventi, çekirdeği Hilbert-Schmidt tipinde olan bir integral operatörüdür. Bunun doğruluğunu gösterelim.

$u \in D(T)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  ve  $Tu = \lambda u$  olsun. Bu takdirde  $-iu' = \lambda u$  ve  $\alpha u(a) + \beta u(b) = 0$  dır.

Böylece,

$$u(x) = ce^{i\lambda x}, \quad c \neq 0 \text{ ve } \alpha e^{i\lambda a} + \beta e^{i\lambda b} = 0, \text{ yani ; } \omega(\lambda) = 0 \text{ olur.}$$

Tersine ;  $\omega(\lambda) = 0$  ise  $e^{i\lambda x}$ , T nin  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu olur.

Şimdi,  $\lambda$  sayısının T nin özdeğeri olmadığını, yani ;  $\omega(\lambda) \neq 0$  olduğunu varsayalım. Bu takdirde her  $f \in L_2(a, b)$  iken

$$Ly - \lambda y = f$$

denkleminin, yani ;

$$iy' - \lambda y = f$$

diferansiyel denkleminin

$$\alpha y(a) + \beta y(b) = 0$$

koşulunu sağlayan çözümünün varlığını gösterelim.

Birinci mertebeden  $iy' - \lambda y = f$  diferansiyel denkleminin genel çözümü :

$$u(x) = e^{i\lambda x} \left( c + i \int_a^x e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi \right) \quad c = \text{sabit} \quad \text{dir. (3.16)}$$

c sabitini  $u(x)$  çözümünün  $\alpha u(a) + \beta u(b) = 0$  koşulunu sağlayacak şekilde seçelim.

$$\alpha e^{i\lambda a} c + \beta e^{i\lambda b} \left( c + i \int_a^b e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi \right) = 0 \quad ,$$

$$(\alpha e^{i\lambda a} + \beta e^{i\lambda b}) c = -i\beta e^{i\lambda b} \int_a^b e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi \quad \text{dir.}$$

Burada  $\omega(\lambda) = \alpha e^{i\lambda a} + \beta e^{i\lambda b}$  olduğundan,

$$c = -\frac{i\beta e^{i\lambda b}}{\omega(\lambda)} \int_a^b e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi \quad \text{dir.}$$

c nin bu değerini (3.16) da yerine koyalım.

$$u(x) = e^{i\lambda x} \left( -\frac{i\beta e^{i\lambda b}}{\omega(\lambda)} \int_a^b e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi + i \int_a^x e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi \right) \quad (3.17)$$

$$H(x-a) = \begin{cases} 1 & , \quad x > a \text{ iken} \\ 0 & , \quad x \leq a \text{ iken} \end{cases}$$

Heaviside fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonu kullanırsak (3.17) eşitliği ;

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{i\lambda x} \left( -\frac{i\beta e^{i\lambda b}}{\omega(\lambda)} \int_a^b e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi + i \int_a^b H(x-\xi) e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi \right) \\ &= \int_a^b \left\{ -\frac{i\beta e^{i\lambda b}}{\omega(\lambda)} + iH(x-\xi) \right\} e^{i\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b K(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

haline gelir. Böylece ,

$$u(x) = (L - \lambda I)^{-1} f = \int_a^b K(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi$$

bulunur.

Burada ,

$$K(x, \xi; \lambda) = \left\{ -\frac{i\beta e^{i\lambda b}}{\omega(\lambda)} + iH(x - \xi) \right\} e^{i\lambda(x - \xi)} \quad \text{dir.}$$

$K(x, \xi; \lambda)$  fonksiyonun ifadesinden ,

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, \xi; \lambda)|^2 dx d\xi < \infty \quad (3.18)$$

olduğu kolayca görülebilir.

(3.18) eşitsizliği  $(T - \lambda I)^{-1}$  operatörünün Hilbert-Schmidt tipli integral operatörü olduğunu gösterir.

### 3.2 Çekirdek Operatörleri

$H_1$  ve  $H_2$  iki Hilbert Uzayı olmak üzere  $B_2(H_1, H_2)$  Hilbert-Schmidt sınıfını inceledik. Bu konuda çekirdek sınıfı denilen ve  $B_1(H_1, H_2)$  ile belirtilen çekirdek operatörlerini inceleyeceğiz. Burada ,  $H_1 = H_2 = H$  olması halinde , çekirdek operatörü  $B_1(H)$  ile gösterilir.

$T \in B_0(H_1, H_2)$   $H_1$  den  $H_2$  ye kompakt operatörler sınıfı ve  $\alpha_n$   $T$  nin tekil değerleri olsun.

$T$  nin çekirdek normu

$$\|T\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır.

(3.19) eşitliğinde sağdaki seri ıraksak ise  $\|T\|_1 = \infty$  dur.

Eğer  $\|T\|_1 < \infty$  ise o zaman  $T$  bir çekirdek operatörüdür denir. Bütün çekirdek operatörlerin kümesi  $B_1(H_1, H_2)$  sembolü ile gösterilir.  $\|\cdot\|_1$  üçgen eşitsizliği de dahil olmak üzere normun bütün özelliklerini sağlar.

$T$ ,  $T^*$  ve  $|T|$  nin sıfırdan farklı tekil değerleri aynı olduğu sürece ,

$$\|T\|_1 = \|T^*\|_1 = \||T|\|_1 = \left\| |T|^{1/2} \right\|_2^2 \quad \text{dir. (3.20)}$$

Buradan ,

$$\|T\|_2 \leq \|T\|_1, \quad B_1(H_1, H_2) \subset B_2(H_1, H_2) \quad (3.21)$$

olduğu açıktır.

Bundan başka , eğer  $T \in B_2(H_1, H_2)$  ve  $S \in B_2(H_2, H_3)$  ise  $ST \in B_2(H_1, H_3)$  ve

$$\|ST\|_1 \leq \|S\|_2 \|T\|_2 \quad \text{dir. (3.22)}$$

Bunun doğruluğunu göstermek için  $ST \in B_2(H_1, H_3)$  ün kanonik açılımı olan ,

$$ST = \sum \beta_k (, \psi_k) \psi_k'' , \quad \beta_k > 0 \quad (3.23)$$

eşitliğini göz önüne alalım.

Tanımdan dolayı ,

$$\begin{aligned} \|ST\|_1 &= \sum \beta_k = \sum (ST \psi_k, \psi_k'') = \sum (T \psi_k, S^* \psi_k'') \\ &\leq \sum \|T \psi_k\| \|S^* \psi_k''\| \leq \left( \sum \|T \psi_k\|^2 \right)^{1/2} \left( \sum \|S^* \psi_k''\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|T\|_2 \|S^*\|_2 = \|T\|_2 \|S\|_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan her bir  $T \in B_1(H_1, H_2)$  operatörü Hilbert-Schmidt sınıfının iki operatörünün çarpımı olarak yazılabilir. Ayrıca , eğer  $T \in B_1(H)$  ise sözü edilen operatörlerin ikincisi  $T \in B_2(H)$  den alınabilir.

Örneğin ,  $U \in B(H_1, H_2)$  olduğu sürece (3.19) eşitliğinden  $|T|^{1/2} \in B_2(H)$  ye ait ve  $U|T|^{1/2}$  de

$B_2(H_1, H_2)$  ye ait olmak üzere

$$T = U|T| = U|T|^{1/2}|T|^{1/2} \text{ dir.}$$

Ayrıca , (3.22) eşitliği ile benzer özellikler taşıyan ,

$$\|ST\|_1 \leq \|S\|\|T\|_1, \|TS\|_1 \leq \|T\|\|S\| \quad (3.25)$$

eşitsizlikleri mevcuttur.

(3.25) deki birinci eşitsizliği ispatlamak için yukarıdaki gibi  $T = U|T|$  alalım.

$$ST = SU|T| = SU|T|^{1/2}|T|^{1/2} \text{ olduğundan ve (3.22) ile (3.20) eşitliklerinden}$$

$$\|ST\|_1 \leq \|SU|T|^{1/2}\|_2 \| |T|^{1/2} \|_2 \leq \|SU\| \| |T|^{1/2} \|_2^2 \leq \|S\|\|T\|_1 \quad \text{dir. (3.26)}$$

(3.25) deki ikinci eşitsizlik de aynı yoldan veya birinci eşitlikte  $\|TS\|_1 = \|S^*T^*\|_1$  alınarak elde edilebilir.

Şimdi , çekirdek operatörlerinde

$$\|T + S\|_1 \leq \|T\|_1 + \|S\|_1 \quad (3.27)$$

üçgen eşitsizliğini ispatlayalım.

$T, S, T+S$  nin sırasıyla polar analizleri  $T = U|T|, S = V|S|, T + S = W|T + S|$  olsun.  $X_k$  yı  $|T + S|$  nin özvektörleri olarak gösterelim.  $X'_k = WX_k$  olarak alırsak (3.24) den ,

$$\begin{aligned} \|T + S\|_1 &= \sum_k ((T + S)X_k, X'_k) = \sum_k [(TX_k, X'_k) + (SX_k, X'_k)] \\ &= \sum_k [(U|T|X_k, X'_k) + (V|S|X_k, X'_k)] \\ &= \sum_k \left[ (|T|^{1/2}X_k, |T|^{1/2}U^*X'_k) + (|S|^{1/2}X'_k, |S|^{1/2}V^*X'_k) \right] \\ &\leq \| |T|^{1/2} \|_2 \| |T|^{1/2}U^* \|_2 + \| |S|^{1/2} \|_2 \| |S|^{1/2}V^* \|_2 \\ &\leq \| |T|^{1/2} \|_2^2 + \| |S|^{1/2} \|_2^2 = \|T\|_1 + \|S\|_1 \quad \text{dir.} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Böylece üçgen eşitsizliği ispatlanmış olur.  $B_1(H_1, H_2)$  , normu  $\| \cdot \|_1$  olan bir normlu vektör uzayıdır.

Hilbert-Schmidt ve çekirdek operatörleri ile aşağı yukarı benzer özellikler taşıyan başka kompakt operatör sınıfları da vardır. Bu sınıfların her biri belirli bir norm ile tanımlanabilir.

Bu tür bir norma aşağıdaki şekilde tanımlanan p-norm örnek olarak verilebilir.

$$\|T\|_p = \left( \sum_k \alpha_k^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (3.29)$$

$\|T\|_p \leq \infty$  olan bütün kompakt T ler kümesi , normu  $\| \cdot \|_p$  olan bir normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzay tamdır. Ayrıca , eğer  $H_1 = H_2 = H$  ise  $B(H)$  nin iki taraflı idealidir.

Daha genel olarak , benzer bir  $\|T\|$  normu T nin  $\alpha_k$  tekil değerlerinin  $\alpha_k$  da simetrik ve her  $\alpha_k$  da azalmayan belirli bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir.

Herhangi U , V birim operatörleri için ,

$$\|UTV\| = \|T\| \quad (3.30)$$

olması halinde  $\|T\|$  birimsel sabittir.  $\|T\| < \infty$  olan bütün T lerin kümesi bir Banach Uzayı oluşturur.

Eğer  $|T|$  bir-boyutlu ortogonal izdüşüm ise  $\| \cdot \|$  normu genellikle  $\|T\| = 1$  olacak şekilde normalize edilir. Bu tür normlar çapraz normlar denir.

$p = \infty$  için p-norm , bildiğimiz sıradan norm ile özdeştir :  $\| \cdot \|_\infty = \| \cdot \|$  .

Buradan görüldüğü gibi  $\alpha_1 = \| |T| \| = \|T\|$  dir.

Çapraz normlar arasında en küçük olanı ; bildiğimiz sıradan norm , en geniş olanı ise çekirdek normdur. Herhangi  $T \in B_0(H_1, H_2)$  için,

$$\|T\| \leq \|T\| \leq \|T\|_1 \quad \text{dir.} \quad (3.31)$$

### 3.3 Çekirdek Ve Determinant

Bu kısımda  $\text{tr}T$  izinin  $B_1(H)$  çekirdek sınıfına ait her  $T$  operatörü için tanımlanabileceği gösterilecektir.

Çekirdek operatörlerini tanımlarken bahsettiğimiz gibi  $T \in B_1(H)$ , Hilbert-Schmidt sınıfı  $B_2(H)$  nin  $A$  ve  $B$  gibi iki operatörünün çarpımı olarak  $T=A.B$  şeklinde yazılabilir.

Buradan  $\text{tr}T$  şu şekilde tanımlanır ;

$$\text{tr}T = (A, B^*) = (B, A^*) \quad (3.32)$$

(3.32) eşitsizliği  $T=A.B$  için ,

$$\begin{aligned} \text{tr}T = (B, A^*) &= \sum_k (B\varphi_k, A^*\varphi_k) = \sum_k (AB\varphi_k, \varphi_k) \\ &= \sum_k (T\varphi_k, \varphi_k) \end{aligned} \quad (3.33)$$

için kısmi analizlerinden bağımsızdır.

Dolayısıyla ,  $\text{tr}T$  bir tam ortonormal sisteme göre  $T$  nin herhangi bir matrissel gösteriminde  $T$  matrisinin diyagonal elemanlarının toplamıdır. (3.33) eşitliği , diyagonal toplamın her zaman mutlak yakınsak olduğunu gösterir.

(3.32) eşitliğinden  $AB \in B_2(H)$  için ,

$$\text{tr}AB = \text{tr}BA \quad \text{dır.} \quad (3.34)$$

Daha genel olarak , bu durum  $A \in B_2(H_1, H_2)$  ve  $B \in B_2(H_2, H_1)$  için doğrudur. Bu durumda  $AB \in B_1(H_2)$  ve  $BA \in B_1(H_1)$  dir. (3.34) eşitliği aynı zamanda ,  $A \in B_1(H_1, H_2)$  ve  $B \in B(H_2, H_1)$  için de doğrudur. Bu durumda da yine  $AB \in B_1(H_2)$  ve  $BA \in B_1(H_1)$  dir.

İspatı yapmak için  $C \in B_2(H_1, H_2)$  ve  $D \in B_2(H_1)$  olacak şekilde  $A=C.D$  alalım. Buradan (3.34) eşitliğini , her ikisi de Hilbert-Schmidt sınıfına dahil olan  $C$  ,  $DB$  ve  $D$  ,  $BC$  çiftlerinden önce  $C$  ,  $DB$  ye ; sonra da  $D$  ,  $BC$  ye uygularsak :

$$\text{tr}AB = \text{tr}CDB = \text{tr}DBC = \text{tr}BCD = \text{tr}BA$$

olduğu görülür.

Determinant , yozlaşmış bir  $T$  ile sadece  $1+T$  formunda operatörler için tanımlanmıştır. Bu  $T \in B_1(H_1)$  olması halinde genişletilebilir ;

$$\det(1+T) = e^{\text{tr} \log(1+T)} . \quad (3.35)$$

$\log(1+T)$  her  $T \in B_1(H_1)$  için belirli bir şekilde tanımlanmadığından , tanımımız tam değildir. Eğer  $\|T\| < 1$  ise  $\log(1+T)$   $T$  ile  $B_1(H_1)$  e aittir. Ve ,

$$\log(1+T) = T - T^2/2 + T^3/3 - \dots$$

şeklinde Taylor Serisi ile tanımlanabilir. Bu durumda (3.35) eşitliği  $\|T\| < 1$  için  $\det(1+T)$  yi tanımlar.  $\det(1+T)$  yi tanımlamanın bir diğer yolu da ,  $|z| < \|T\|^{-1}$  için yukarıda tanımlanan Taylor Serisinde  $\det(1+zT)$  fonksiyonunun analitik sürekliliğidir.

Genel  $T \in B_1(H_1)$  için  $\det(1+T)$  yi kullanmamıza gerek olmadığından , burada detaylara girmeyeceğiz.

### 3.4 Çekirdek İntegral Operatörlerine Ait Örnekler Ve İzi Hesaplamak İçin Formüller

Çekirdek operatörlerinin yardımıyla , bu kısımda integral operatörlerinin çekirdeği için örnekler vereceğiz.

**Örnek 3.4.1 :**  $I$  sonlu veya sonsuz uzunluğa sahip reel eksenin kapalı , açık veya yarı açık aralığı olsun. Eğer , herhangi  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) için sürekli bir  $A(t, s)$  ( $t, s \in I$ ) çekirdeğinin

$$\sum_{j,k=1}^n A(t_j, t_k) \xi_k \bar{\xi}_j$$

kuadratik formu negatif değil ise  $A(t, s)$   $I$  üzerinde bir non-negatif Hermitiandır denir. Bu durumda  $A(t, s) = \overline{A(s, t)}$  bağıntısı sağlanır.

Sürekli bir  $A(t, s)$  çekirdeğinin ancak ve ancak  $I$  nin uç noktalarındaki bir komşulukta sıfır olan , herbir sürekli  $\phi(t)$  ( $t \in I$ ) fonksiyonu için ,

$$\iint_I A(t,s)\phi(s)\overline{\phi(t)}d\sigma \geq 0$$

ise non-negatif Hermitian olduğu kolayca gösterilebilir.

İlk olarak , sonlu bir kapalı aralık olan  $I=[a,b]$  durumunu inceleyelim.

$C(a,b)$  de  $[a,b]$  üzerindeki  $A(t,s)$  sürekli non-negatif Hermitian çekirdeğinde

$$\phi(t) = \lambda \int_a^b A(t,s)\phi(s)d\sigma(s) \quad (3.36)$$

integral denklemini inceleyelim. Burada  $\sigma(s)$  ( $a \leq s \leq b$ ) ,  $\text{Var} \sigma = \sigma(b) - \sigma(a) > 0$  olan , azalmayan fonksiyondur. Bu tip denklemlere bilinen Hilbert-Schmidt-Mercer teorisi uygulanabilir.

Her zaman (3.36) eşitliğinde ,  $\{\lambda_j\}$  pozitif özdeğerler sistemine  $\sigma$  ölçüsünde

$$\int_a^b \phi_j(t)\overline{\phi_k(t)}d\sigma(t) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots) \quad (3.37)$$

ortonormallik koşulunu sağlayan sürekli  $\{\phi_j(t)\}$  fonksiyonlar sistemi karşılık gelir.

Düzgün yakınsak

$$A(t,s) = \Re(t,s) + \sum_j \frac{\phi_j(t)\overline{\phi_j(s)}}{\lambda_j} \quad (a \leq t, s \leq b) \quad (3.38)$$

açılımında  $\Re(t,s)$  ( $a \leq t, s \leq b$ ) ;  $t, s$  noktalarından en az biri  $\sigma$  nın büyüme noktaları kümesi  $\wp_\sigma$  ya ait olduğunda sıfıra eşit olan sürekli bir fonksiyondur.

Özel olarak (3.37) ve (3.38) eşitliklerinden

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j} = \int_a^b A(s,s)d\sigma(s) < \infty \quad \text{dur.}$$

$\sigma$ -integral karelerine sahip bütün  $\sigma$ -ölçümlü  $f(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) fonksiyonlarını içerecek şekilde

$$(f,g)_\sigma = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}d\sigma(t)$$

skaler çarpımı ile  $L_2^{(\sigma)} = L_2^{(\sigma)}(a, b)$  Hilbert Uzayını oluşturalım.

İncelenen  $A(t, s)$  çekirdeği  $L_2^{(\sigma)}$  de bir

$$(Af)(t) = \int_a^b A(t, s)f(s)d\sigma(s) \quad (3.39)$$

non-negatif tam sürekli operatörü tanımlar.

(3.38) eşitliğine göre  $c_j = (f, \phi_j)_\sigma$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) olmak üzere

$$(Af)(t) = \sum_j \frac{c_j}{\lambda_j} \phi_j(t) \quad \text{dir.}$$

Böylece  $\{\phi_j(t)\}_1^\infty$  sistemi  $A$  operatörünün  $\overline{\mathfrak{R}(A)}$  daki özvektörlerinin bir tam ortonormal sistemi olacaktır. Ayrıca  $\{\lambda_j\}$  de,  $A$  nın karakteristik sayılarının bir tam sistemi olacaktır.

Bu bilgiler ışığında aşağıdaki sonuçlara varılabilir :

1. Eğer  $A(t, s)$  ( $a \leq t, s \leq b$ ) çekirdeği sürekli ve non-negatif Hermitian iken (3.39) eşitliği  $L_2^{(\sigma)}$  de bir  $A$  non-negatif çekirdeği üretir. Ve ,

$$\text{tr}A = \int_a^b A(s, s)d\sigma(s) \quad \text{dir.} \quad (3.40)$$

2.  $I$  sonlu veya sonsuz uzunluktaki reel eksenin açık veya yarı açık aralığı ;  $\sigma(t)$  ( $t \in I$ )  $\text{Var} \sigma \leq \infty$  olan azalmayan bir fonksiyon ve  $A(t, s)$  ( $t, s \in I$ ) sürekli bir non-negatif Hermitian çekirdek olsun.

Bu durumda ,  $L_2^{(\sigma)}(I)$  de  $A(t, s)$  çekirdeği ile tanımlanan non-negatif  $A$  operatörü

$$(Af)(t) = \int_I A(t, s)f(s)d\sigma(s)$$

ancak ve ancak

$$\int_I A(s, s)d\sigma(s) < \infty \quad (3.41)$$

iken bir çekirdek operatörüdür.

Bu durum tamamıyla sağlandığında (3.41) eşitsizliğindeki integral  $\text{tr}A$  izini vermektedir.

**Örnek 3.4.2 :**  $H = L_2(a, b)$  ve  $T \in B_1(H)$  olsun.  $R, S \in B_2(H)$  için  $T, T=RS$  olarak yazılabilir.  $R$  ve  $S$  Hilbert-Schmidt tipinde  $r(y, x)$  ve  $s(y, x)$  çekirdekleri ile integral operatörleri olarak tanımlanabilir. Böylece  $T$ ,

$$t(y, x) = \int_a^b r(y, z) \cdot s(z, x) dz \quad (3.42)$$

çekirdeğine sahip bir integral operatörüdür.

Buradan

$$\text{tr}T = (R, S^*) = \iint r(x, z) \overline{s^*(x, z)} dx dz = \iint r(x, z) s(z, x) dz dx$$

veya

$$\text{tr}T = \int_a^b t(x, x) dx \quad \text{dir.} \quad (3.43)$$

(3.43) eşitliği, sadece (3.42) eşitliğinde verilen kısmi çekirdek kullanılırsa doğrudur.  $t(x, x)$  in hemen her  $x$  için (3.42) eşitliğindeki gibi verildiği belirtilmelidir.

Diğer taraftan, eğer  $T$  nin  $t(y, x)$  çekirdeği bir integral operatörü olarak verilmiş ise  $T$  operatörünü değiştirmeden  $t(x, x)$  değerleri keyfi olarak değiştirilebilir.

Eğer  $T \in B_1(H)$   $x, y$  de sürekli bir  $t(y, x)$  çekirdeği ile temsil ediliyor ise (3.43) çekirdek formülünün doğru olduğu gösterilebilir. Fakat, sürekli bir çekirdeğe sahip olan her integral operatörü çekirdek sınıfına dahil değildir. Böyle bir durumda  $\text{tr}T$ , (3.43) eşitliği ile tanımlansa bile daha önce vermiş olduğumuz çekirdeğin özelliklerini taşımayabilir.

**KAYNAKLAR**

- Debnath, J.C. and Mikusinski, J., (1990), Introduction To Hilbert Spaces With Applications, Department Of Mathematics, University Of Central Florida, Orlando, Florida.
- Gohberg, I.C. and Krein, M.G., (1969), Introduction To The Theory Of Linear Nonself Adjoint Operators, Am. Math. Soc. Translations, Vol. 18, Providence, R.I.
- Kato, T., (1980), Perturbation Theory For Linear Operators, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Lyanse, V.E. ve Storoj, O.G., (1983), Sınırsız Operatörler Teorisinin Yöntemleri, KYİV:Naukova Dumka.
- Vulikh, B.Z., (1963), Introduction To Functional Analysis For Scientists And Technologists, 1963 Pergamonpress, Oxford-London-New York-Paris.
- Weidmann, J., (1980), Linear Operators In Hilbert Spaces, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.



**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi 04.04.1979

Doğum yeri İstanbul

Lise 1993-1997 Özel Bilfen Lisesi

Lisans 1997-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Ed. Fak.  
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2001-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

**Çalıştığı kurumlar**

2001-Devam ediyor Milli Eğitim Bakanlığı Ali Fuat Başgil İ.Ö.O  
Matematik Öğretmenliği

