

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

139707

**EĞRİLİK ÇİZGİLERİYLE SABİT AÇI YAPAN BİR DİK
ŞEBEKEYE SAHİP YÜZEYLER**

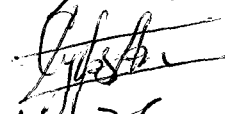
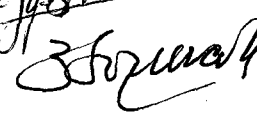
139707

Matematikçi Yasemin GÜLLÜK

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK

Prof. Dr. Akin Taşdizen 
Prof. Dr. S. D. Akbarov 
Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK 

İSTANBUL, 2003

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. YÜZEYLERİN EĞRİLİK ÇİZGİLERİ KORUNARAK BİR İZOMETRİ KABUL ETMESİ PROBLEMİ.....	3
3. ÜZERİNDE EĞRİLİK ÇİZGİLERİ ile SABİT AÇI YAPAN BİR DİK ŞEBEKE BULUNAN YÜZEYLER.....	7
4. AÇILABİLİR YÜZEYLER HALİ.....	9
5. AÇILABİLİR OLMAYAN YÜZEYLER HALİ.....	13
6. EĞRİLİK ÇİZGİLERİNİN AÇIORTAYI DİK ŞEBEKE OLUŞTURAN YÜZEYLER.....	19
6.1 $K = 2\epsilon c^2 = sbt \neq 0$ Hali.....	19
6.1.1 $f' \neq 0, g' \neq 0$ Hali.....	21
6.1.2 $g' = 0$ Hali.....	22
6.1.2.1 $a = 0$ Durumu.....	23
6.1.2.2 $a > 0$ Durumu.....	24
6.1.2.3 $a < 0$ Durumu.....	25
6.2 $K \neq sbt$ Hali.....	29
6.2.1 Genel Halde Gauss Eğriliğinin İncelenmesi.....	31
6.2.2 $(e_v^2 - e_u^2) = 0$ Koşulu Altında Gauss Eğriliğinin İncelenmesi.....	31
7. EĞRİLİK ÇİZGİLERİ KOORDİNAT SİSTEMİNE GEÇİŞ.....	37
7.1 $K = 2\epsilon c^2 = sbt \neq 0$ Hali İçin Koordinat Dönüşümü.....	38
7.2 $K \neq sbt$ Hali İçin Koordinat Dönüşümü.....	41
8. SONUÇLAR.....	43
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	46

SİMGE LİSTESİ

E	Yüzeyin I temel form katsayısı
F	Yüzeyin I temel form katsayısı
G	Yüzeyin I temel form katsayısı
H	Ortalama eğrilik
K	Gauss eğrilik
k	Normal eğrilik
$\bar{k}$	Normal eğrilik
p	Jeodizik eğrilik
$\bar{p}$	Jeodizik eğrilik
$\vec{r}$	Yüzeyin yer vektörü
r	Asal eğrilik
$\bar{r}$	Asal eğrilik



ÖNSÖZ

Bu çalışmam sırasında, bilimsel ve manevi yönden bana destek olan değerli hocam Prof. Dr. Ziya Soyucok'a teşekkürü bir borç bilirim.



ÖZET

Bu çalışmada, üzerinde eğrilik çizgileriyle sabit açı yapan bir dik şebeke bulunan yüzeyler ele alınmıştır. Yüzeyin böyle bir dik şebekeye sahip olması için, jeodizik eğrilikleri ve Gauss eğriliği arasında bir bağıntı bulunması gerektiği kanıtlanmıştır. Yüzeyin açılabilir olması halinde, bunun bir silindir olduğu gösterilmiştir. Özel olarak, eğrilik çizgilerinin açıortayları bir izometrik şebeke oluşturan yüzeyler incelenmiş ve sonuçta: (1) Sabit Gauss eğrilikli yüzeyler içinde üç tanesinin bu özelliği taşıdığı (2) Gauss eğriliği sabit olmayan yüzeylerin de iki sınıfa ayrıldığı gösterilmiş ve bu sınıflardan birine ait bütün yüzeyler belirlenmiş, diğer sınıftaki yüzeylerin Gauss eğriliği ile ilgili bir formül elde edilmiştir. Ayrıca yüzeylerin eğrilik çizgileri korunarak bir izometri kabul etmesi ile ilgili mevcut çalışmalarda geçen bir formülün oldukça sade bir şekli verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yüzey, izometri, eğrilik.



ABSTRACT

In this study, the surfaces having an orthogonal net on which are some lines of curvature that make a constant angle are written. And to have an orthogonal net on a surface needs to have a connection between geodesic curvature and Gauss curvature. If the surface is trivial, it shows it is a cylinder. To sum up, the surfaces, on which the bisectors of the lines of curvature make a isometric net are studied and as a result. (1) Only the three of the constant Gauss curvature surfaces have the some qualities. (2) The surfaces which haven't a constant Gauss curvature are divided into two groups and all the surfaces which belong to one of these groups are defined. A formula which is connected with the Gauss curvature of the surfaces of the other group is made up. A part from that quite a simple formula about the surfaces keeping the lines of curvature and having an isometry is also given.



1. GİRİŞ

Üç boyutlu öklid uzayında yüzeylerin deformasyonu ile ilgili iki temel problem söz konusudur. Bunlardan biri yüzeylerin eğrilik çizgileri korunarak bükülebilmesi, diğeri ise asal eğrilikler korunarak bükülebilmesidir. Bonnet tarafından ortaya atılan bu problemler tam olarak çözülmüştür.

Yüzeylerin eğrilik çizgileri korunarak bükülebilmesi problemi Bonnet (1876) tarafından büyük ölçüde çözülmüştür. Problem Blaschke (1949) de yer almıştır. Burada elde edilen 2. dereceden bir denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek çözüme gidilmiştir. Fakat orada karmaşık gibi görünen bir formülün oldukça sade olduğu gözden kaçmıştır. Problem, Bryant (1991) de diferansiyel formlar kullanılarak oldukça sade bir biçimde çözülmüştür.

Yüzeylerin asal eğrilikler korunarak bükülmesi problemi biraz daha karmaşıktır. Bonnet (1876) ve Cartan (1942) tarafından çözüm yine büyük ölçüde verilmiştir. Bryant (1991), Roussos (1987), Kenmotsu(1994), Soyuçok (1995) tarafından tekrar ele alınan problem tam olarak çözülmüştür. Bryant (1991) bu problem için bir gerek ve yeter koşul bulmuştur.

Daha genel olan ve yüzeylerin eğrilik çizgileri korunarak veya asal eğrilikler korunarak bir izometri kabul etmesi problemi çok daha zor olup henüz her ikisi de tam olarak çözülmemiştir. Soyuçok (1995) ve Roussos (1999), bir yüzeyin asal eğrilikler korunarak bir izometri kabul etmesi problemi ile ilgilenmişler ve her ikisi de problemin bir karakterizasyonunu vermiştir. Roussos deformasyon için Bryant (1991) tarafından verilen karakterizasyonu izometri için genelleştirmiştir. Soyuçok' un karakterizasyonu şöyledir: Bir yüzeyin asal eğrilikler korunarak bir izometri kabul etmesi için gerek ve yeter koşul, yüzey üzerinde A neti denilen özel bir izometrik şebekenin bulunmasıdır.

Bu çalışmada, önce yukarıda sözü edilen, Blaschke' nin (1949) kitabındaki formülün sade şekli elde edilmiştir. Daha sonra eğrilik çizgileriyle sabit açı yapan bir dik şebeke bulunduran ve birbirlerine bükülebilen yüzeylerin belirlenmesi problemi üzerinde durulmuştur. Böyle bir yüzeyin sağlaması gereken bir bağıntı verilerek bir teorem elde edilmiştir.

Yüzeyin açılabilir olması durumunda bunun bir silindir olduğu, yani, silindir dışındaki açılabilir yüzeylerden hiçbirinde eğrilik çizgileri ile sabit açı yapan bir şebekenin bulunmadığı gösterilmiştir.

Özel olarak, sabit açının $\frac{\pi}{4}$ olması hali üzerinde durulmuş ve $K = sbt \neq 0$ yüzeylerinin bu özelliği taşıması için şebekenin izometrik olması gerektiği gösterilmiş ve bu yüzeyler için 3 hal elde edilmiştir. Her üç haldeki yüzeyin bir dönel yüzey olduğu gösterilmiştir. $K \neq sbt$ olan izotermik yüzeyler de ele alınmıştır. Bunlarında iki sınıfa ayrıldığı gösterilmiştir. Birinci sınıftaki yüzeylerin de dönel yüzeyler olduğu gösterilmiştir. İkinci sınıfa giren yüzeylerin Gauss eğriliği E ye bağlı sonlu denklem şeklinde elde edilmiştir. Yukarıdaki yüzeylerin I.temel formlarının aynı olması ve H ortalama eğriliğinin bir sabit içermesi nedeniyle, her bir sınıfa giren yüzeylerin birbirine bükülebildikleri sonucu da elde edilmiştir.



2. YÜZEYLERİN EĞRİLİK ÇİZGİLERİ KORUNARAK BİR İZOMETRİ KABUL ETMESİ PROBLEMİ

Blaschke (1949) de sözünü ettiğimiz formülü ele alacağız. Bu kitapta yüzeylerin eğrilik çizgileri korunarak bir izometri kabul etmesi problemi de ele alınmıştır. Fakat açılabilir olmayan yüzeyler halinde, verilen bir formülün karmaşık olduğu gözükmemektedir. Aslında bu formül son derece sadedir. Şimdi bunu kısaca açıklamak istiyoruz. Bir S yüzeyinin eğrilik çizgileri korunarak bir izometri kabul ettiğini varsayalım. S ye bu şekilde izometrik olarak tasvir edilebilen S' yüzeyine S nin yandaşı denir. İzometri halinde jeodizik eğrilikler korunduğundan, her iki yüzeyin jeodizik eğrilikleri aynı olacaktır. İki yüzeyin eğrilik çizgileri çakışır ama bu yüzeyleri asal eğrilikleri farklıdır.

S yüzeyinin eğrilik çizgilerinin jeodizik eğriliklerini $q, \bar{q}$ ile, asal eğrilikleri $r, \bar{r}$ ile gösterirsek, Mainardi-Codazzi ve Gauss uygunluk denklemleri,

$$r_2 = q(\bar{r} - r) \quad (2.1)$$

$$r_1 = \bar{q}(r - \bar{r}) \quad (2.2)$$

$$K = r\bar{r} = -q_1 - \bar{q}_2 - q^2 - \bar{q}^2 \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir.

$$r^2 = s$$

denirse, uygunluk denklemlerinden

$$s_1 = -\frac{2\bar{q}}{K}s^2 + 2s\left(\bar{q} + \frac{K_1}{K}\right)$$

$$s_2 = -2qs + 2qK$$

elde edilir.

$$s_{12} + qs_1 = s_{21} + \bar{q}s_2$$

den de

$$\left[-\left(\frac{\bar{q}}{K}\right)_2 + \frac{\bar{q}}{K}q \right] s^2 + \left[\left(\frac{K_1}{K}\right)_2 + q\frac{K_1}{K} + \bar{q}_2 + q_1 - 2q\bar{q} \right] s + K^2 \left[-\left(\frac{q}{K}\right)_1 + \frac{q}{K}\bar{q} \right] = 0$$

bulunur. Buradan, $K \neq 0$ varsayıldığından,

$$U = \frac{-\left(\frac{\bar{q}}{K}\right)_2 + \frac{\bar{q}}{K}q}{K^2 \left[-\left(\frac{q}{K}\right)_1 + \frac{q}{K}\bar{q} \right]}$$

$$B = \frac{\left(\frac{K_1}{K}\right)_2 + q\frac{K_1}{K} + \bar{q}_2 + q_1 - 2q\bar{q}}{2K^2 \left[-\left(\frac{q}{K}\right)_1 + \frac{q}{K}\bar{q} \right]}$$

olmak üzere

$$Us^2 + 2Bs + 1 = 0$$

elde edilir. B katsayısı karmaşık gözükmemektedir. Bunu

$$Ps^2 + Qs + R = 0$$

(2.4)

şeklinde yazalım ve katsayılarını tek tek ele alalım.

$$Q = \left(\frac{K_1}{K}\right)_2 + q\frac{K_1}{K} + \bar{q}_2 + q_1 - 2q\bar{q}$$

dır.

$$Q = (\ln K)_{12} + q(\ln K)_1 + \bar{q}_2 + q_1 - 2q\bar{q}$$

yazılabilir. (2.1), (2.2), (2.3) formülleri kullanılarak,

$$Q = (\ln r)_{12} + q(\ln r)_1 + q_1 - 2q\bar{q} + \left(\frac{\bar{q}}{r}\right)_2 r$$

yazılabilir.

Öte yandan

$$(\ln r)_{12} + q(\ln r)_1 = (\ln r)_{21} + \bar{q}(\ln r)_2$$

dır. Sağ yan

$$(\ln r)_{21} + \bar{q}(\ln r)_2 = \left(\frac{q}{r}\right)_1 \bar{r} - q_1$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$Q = \left(\frac{q}{r}\right)_1 \bar{r} - 2q\bar{q} + \left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\right)_2 r$$

olur. Diğer katsayılar da

$$P = -\frac{\left(\frac{\bar{q}}{r}\right)_2 r - q\bar{q}}{r^2}$$

$$R = \left[\left(\frac{q}{r}\right)_1 \bar{r} - q\bar{q}\right] r^2$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$Q = -\frac{R}{r^2} - Pr^2$$

bulunur ve (2.4) denklemi

$$Ps^2 - \left(\frac{R}{r^2} + Pr^2\right)s + R = 0$$

şeklini alır. Bunun da oldukça sade olduğu görülüyor. Bu denklemin çözümü, diskriminant

$$\Delta = \left(\frac{R}{r^2} - Pr^2\right)^2$$

olduğundan,

$$s_1 = r^2 \quad (2.5)$$

$$s_2 = \frac{R}{r^2 P} \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki s_1 S yüzeyine s_2 de S ye izometrik olan S' yandaş yüzeyine karşı gelir. Blaschke de (1949) (2.5) ve (2.6) ya karşı gelen formül son derece karmaşık gözükmemektedir.

3. ÜZERİNDE EĞRİLİK ÇİZGİLERİ İLE SABİT AÇI YAPAN BİR DİK ŞEBEKE BULUNAN YÜZEYLER

S yüzeyi üzerinde eğrilik çizgileri ile $\frac{\phi}{2}$ açısı yapan dik şebekeyi (u, v) koordinat eğrileri olarak alalım. Yüzeyin

$$H \text{ ortalama eğriliği, } H = \frac{r + \bar{r}}{2},$$

$$K \text{ Gauss eğriliği, } K = r\bar{r},$$

$$J = \frac{r - \bar{r}}{2}$$

olmak üzere, $v = \text{sbt}$ ve $u = \text{sbt}$ koordinat eğrilerinin normal eğriliği, jeodezik eğriliği, jeodezik burulmasını sırasıyla $k, -p, t$ ve $\bar{k}, \bar{p}, -t$ ile gösterelim. Bu taktirde, $e = \sqrt{E}$, $g = \sqrt{G}$ olmak üzere, (sbt=sabit)

$$p = \frac{e_v}{eg}, \bar{p} = \frac{g_u}{eg}, k = \frac{L}{E} = H + J \cos \phi, \bar{k} = \frac{N}{G} = H - J \cos \phi, t = \frac{M}{eg} = J \sin \phi \quad (3.1)$$

dır.

Mainardi-Codazzi ve Gauss uygunluk denklemleri

$$k_2 = p(\bar{k} - k) + t_1 + 2\bar{p}t \quad \left(f_1 = \frac{f_u}{\sqrt{E}}, f_2 = \frac{f_v}{\sqrt{G}} \right)$$

$$\bar{k}_1 = \bar{p}(k - \bar{k}) + 2pt + t_2$$

$$K = -p_2 - \bar{p}_1 - p^2 - \bar{p}^2$$

dır.

(3.1) kullanılarak uygunluk denklemleri

$$H_1 - J_1 \cos \phi = 2\bar{p}J \cos \phi + J_2 \sin \phi + 2pJ \sin \phi \quad (3.2)$$

$$H_2 + J_2 \cos \phi = -2pJ \cos \phi + J_1 \sin \phi + 2\bar{p}J \sin \phi \quad (3.3)$$

$$K = H^2 - J^2 \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir.

$$K = H^2 - J^2 = 4\varepsilon\tilde{T}^2 \quad (3.5)$$

diyelim.

$K = 0$ halini inceleyelim



4. AÇILABİLİR YÜZEYLER HALİ

$K = 0$ olması halinde (3.4) denklemi,

$$K = H^2 - J^2 = 0$$

halini alır. Burada $H = J$ almak genelliği bozmaz.

$H = J$ için (3.2), (3.3) Mainardi-Codazzi denklemleri,

$$H_2 + H_2 \cos \phi = -2pH \cos \phi + H_1 \sin \phi + 2\bar{p}H \sin \phi$$

$$H_1 - H_1 \cos \phi = -2\bar{p}H \cos \phi + H_2 \sin \phi + 2pH \sin \phi$$

şeklini alır. Bu denklemler,

$$(\ln H)_2 (1 + \cos \phi) - (\ln H)_1 \sin \phi = 2\bar{p} \sin \phi - 2p \cos \phi \quad (4.1)$$

$$(\ln H)_1 (1 - \cos \phi) - (\ln H)_2 \sin \phi = 2\bar{p} \cos \phi + 2p \sin \phi \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.1) ve (4.2) denklemlerinin katsayılar determinantı,

$$\begin{vmatrix} 1 + \cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi & 1 - \cos \phi \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan, çözüm için

$$\begin{vmatrix} 1 + \cos \phi & 2\bar{p} \sin \phi - 2p \cos \phi \\ -\sin \phi & 2\bar{p} \cos \phi + 2p \sin \phi \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{vmatrix} -\sin \phi & 2\bar{p} \sin \phi - 2p \cos \phi \\ 1 - \cos \phi & 2\bar{p} \cos \phi + 2p \sin \phi \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

olmalıdır.

(4.3) ve (4.4) determinantları hesaplanırsa,

$$p \sin \phi + \bar{p}(\cos \phi + 1) = 0 \quad (4.5)$$

$$p(\cos\phi - 1) + \bar{p}\sin\phi = 0 \quad (4.6)$$

bulunur. (4.5) ve (4.6) denklemlerinin katsayılar determinanı

$$\begin{vmatrix} \sin\phi & 1 + \cos\phi \\ \cos\phi - 1 & \sin\phi \end{vmatrix} = 1 - \cos 2\phi = 0$$

olmalı, dolayısıyla $\phi = 0$ (veya π) olmalıdır.

Bu taktirde problemin bir anlamı kalmaz. Buradan,

$$p = 0 \text{ ve } \bar{p} = 0$$

elde edilir.

$p = 0$ ise (3.1) den dolayı

$$e_v = 0$$

dır. Buradan

$$e = e(u)$$

bulunur. Aynı şekilde

$\bar{p} = 0$ ise (3.1) den dolayı

$$g_u = 0$$

dır. Buradan da

$$g = g(v)$$

bulunur.

Şimdi $\bar{u} = \int e(u) du$ ve $\bar{v} = \int g(v) dv$ ölçek dönüşümleri yapalım.

Bu taktirde yüzeyin $\vec{r}$ yer vektörünün u 'ya ve v 'ye göre

$$\vec{r}_u = \vec{r}_u \frac{d\bar{u}}{du}, \quad \vec{r}_v = \vec{r}_v \frac{d\bar{v}}{dv}$$

türevleri

$$\vec{r}_u = \vec{r}_u e(u), \quad \vec{r}_v = \vec{r}_v g(v)$$

şeklını alır.

Buna göre ,yüzeyin (u,v) ve $(\bar{u},\bar{v})$ koordinat sistemlerindeki I.temel form katsayıları arasında

$$E = \bar{E}e^2 \text{ ve } G = \bar{G}g^2$$

bağıntıları vardır.

$$E = e^2 \text{ ve } G = g^2 \text{ olduğundan}$$

$$\bar{E} = 1 \text{ ve } \bar{G} = 1$$

bulunur.

$\bar{u}, \bar{v}$ yi tekrar u, v ile gösterelim. Böylece

$$E = 1 \text{ ve } G = 1$$

bulunur.

$p = 0$ ve $\bar{p} = 0$ değerleri (4.1) denkleminde yerleştirilirse

$$(\ln H)_2 = (\ln H)_1 \tan \frac{\phi}{2}$$

bu denklemde

$$(\ln H)_v = (\ln H)_u \tan \frac{\phi}{2}$$

şeklinde yazılabilir. $\ln H = h$ denirse çözüm,

$$h = h \left(u \cos \frac{\phi}{2} + v \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.7)$$

olur.

Şimdi (u, v) koordinat sisteminin $\frac{\phi}{2}$ kadar döndürülmesiyle oluşan (U, V) eğrilik çizgileri koordinat sistemine geçelim.

(u, v) koordinat sistemi ile (U, V) Koordinat sistemi arasında

$$u = U \cos \frac{\phi}{2} - V \sin \frac{\phi}{2} \quad (4.8)$$

$$v = V \cos \frac{\phi}{2} + U \sin \frac{\phi}{2} \quad (4.9)$$

bağıntıları vardır.

(4.8) denklemi $\cos \frac{\phi}{2}$, (4.9) denklemi de $\sin \frac{\phi}{2}$ ile çarpılıp sonrada bu iki denklem toplanırsa

$$u \cos \frac{\phi}{2} + v \sin \frac{\phi}{2} = U$$

denklemi elde edilir. Bu denklem (4.7) denkleminde yerine konulursa

$$h = h(U)$$

elde edilir. $\ln H = h$ olduğundan

$$H = f(U)$$

bulunur.

5. AÇILABİLİR OLMAYAN YÜZEYLER HALİ

Şimdi $K \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\frac{H+J}{2T} \frac{H-J}{2T} = \varepsilon$$

yazılabilir

$$\frac{H+J}{2T} = \lambda \varepsilon \text{ denirse } \frac{H-J}{2T} = \frac{1}{\lambda} \text{ olur ve buradan}$$

$$H = \left(\lambda \varepsilon + \frac{1}{\lambda} \right) T \quad (5.1)$$

$$J = \left(\lambda \varepsilon - \frac{1}{\lambda} \right) T \quad (5.2)$$

bulunur.

(5.1) ve (5.2) denklemlerinden H_1, H_2, J_1, J_2 hesaplanırsa,

$$H_1 = \lambda_1 \left(\varepsilon - \frac{1}{\lambda^2} \right) T + \left(\varepsilon \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) T_1 \quad (5.3)$$

$$H_2 = \lambda_2 \left(\varepsilon - \frac{1}{\lambda^2} \right) T + \left(\varepsilon \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) T_2 \quad (5.4)$$

$$J_1 = \lambda_1 \left(\varepsilon + \frac{1}{\lambda^2} \right) T + \left(\lambda \varepsilon - \frac{1}{\lambda} \right) T_1 \quad (5.5)$$

$$J_2 = \lambda_2 \left(\varepsilon + \frac{1}{\lambda^2} \right) T + \left(\lambda \varepsilon - \frac{1}{\lambda} \right) T_2 \quad (5.6)$$

denklemleri elde edilir.

$$\left(\lambda \varepsilon + \frac{1}{\lambda} \right) = a, \quad \left(\lambda \varepsilon - \frac{1}{\lambda} \right) = b \text{ denir ve bu değerler (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) denklemlerinde}$$

yerine konursa,

$$H_1 = \frac{b}{\lambda} \lambda_1 T + a T_1, \quad H_2 = \frac{b}{\lambda} \lambda_2 T + a T_2$$

$$J_1 = \frac{a}{\lambda} \lambda_1 T + b T_1, \quad J_2 = \frac{a}{\lambda} \lambda_2 T + b T_2$$

denklemleri elde edilir. Bulunan bu değerlere göre (3.2) ve (3.3) Mainardi-Codazzi uygunluk denklemleri,

$$(b + a \cos \phi) \frac{T}{\lambda} \lambda_2 - a \sin \phi \frac{T}{\lambda} \lambda_1 = 2(\bar{p} \sin \phi - p \cos \phi) b T - (b \cos \phi + a) T_2 + b \sin \phi T_1 \quad (5.7)$$

$$(b - a \cos \phi) \frac{T}{\lambda} \lambda_1 - a \sin \phi \frac{T}{\lambda} \lambda_2 = 2(\bar{p} \cos \phi + p \sin \phi) b T + (b \cos \phi - a) T_1 + b \sin \phi T_2 \quad (5.8)$$

şeklini alır. (5.7) ve (5.8) denklemlerinde λ_1 ve λ_2 yi bulalım.

Denklemin katsayılar determinantı,

$$J^* = \begin{vmatrix} (b - a \cos \phi) \frac{T}{\lambda} & -\frac{a}{\lambda} T \sin \phi \\ -\frac{a}{\lambda} T \sin \phi & (b + a \cos \phi) \frac{T}{\lambda} \end{vmatrix} = (b^2 - a^2) \frac{T^2}{\lambda^2}$$

dır. a ve b değerleri J^* de yerine konursa,

$$J^* = -4\varepsilon \frac{T^2}{\lambda^2}$$

olur ve çözümde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}(\bar{p} \cos \phi + p \sin \phi) \lambda \frac{b^2}{\varepsilon} + \cos \phi \lambda \frac{T_1}{T} + \sin \phi \lambda \frac{T_2}{T} - \frac{1}{2} \bar{p} a b \frac{\lambda}{\varepsilon}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\bar{p} \sin \phi - p \cos \phi) \lambda \frac{b^2}{\varepsilon} + \sin \phi \lambda \frac{T_1}{T} - \cos \phi \lambda \frac{T_2}{T} - \frac{1}{2} p a b \frac{\lambda}{\varepsilon}$$

bulunur. Bu denklemlerin her iki tarafını 2λ ile çarpalım.

$$2\lambda\lambda_1 = -(\bar{p}\cos\phi + p\sin\phi)b^2 \frac{\lambda^2}{\varepsilon} + 2\cos\phi\lambda^2 \frac{T_1}{T} + 2\sin\phi\lambda^2 \frac{T_2}{T} - \bar{p}ab \frac{\lambda^2}{\varepsilon} \quad (5.9)$$

$$2\lambda\lambda_2 = -(\bar{p}\sin\phi - p\cos\phi)b^2 \frac{\lambda^2}{\varepsilon} + 2\sin\phi\lambda^2 \frac{T_1}{T} - 2\cos\phi\lambda^2 \frac{T_2}{T} - pab \frac{\lambda^2}{\varepsilon} \quad (5.10)$$

bulunur.

$$\lambda^2 = \alpha \quad (5.11)$$

denirse,

$$2\lambda\lambda_1 = \alpha_1, \quad 2\lambda\lambda_2 = \alpha_2$$

olacağından (5.9) ve (5.10) denklemleri

$$\alpha_1 = -(\bar{p}\cos\phi + p\sin\phi) \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} + 2\alpha\cos\phi \frac{T_1}{T} + 2\alpha\sin\phi \frac{T_2}{T} - \bar{p} \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} \quad (5.12)$$

$$\alpha_2 = -(\bar{p}\sin\phi - p\cos\phi) \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} + 2\alpha\sin\phi \frac{T_1}{T} - 2\alpha\cos\phi \frac{T_2}{T} - p \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} \quad (5.13)$$

şeklini alır.

Şimdi (5.12) ve (5.13) denklemlerinden α_{12} , α_{21} , $\bar{p}\alpha_2$ ve $-p\alpha_1$ değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \alpha_{12} = & -\bar{p}_2 \cos\phi \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} - p_2 \sin\phi \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} + 2(\bar{p}^2 - p^2) \sin\phi \cos\phi \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^3}{\varepsilon} - 2p\bar{p} \cos 2\phi \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^3}{\varepsilon} + \\ & 4\alpha(\alpha\varepsilon - 1)\bar{p} \cos^2\phi \frac{T_2}{T} + 4\alpha(\alpha\varepsilon - 1)p \cos\phi \sin\phi \frac{T_2}{T} - 4\alpha(\alpha\varepsilon - 1)\bar{p} \cos\phi \sin\phi \frac{T_1}{T} - 4\alpha(\alpha\varepsilon - 1)p \sin^2\phi \frac{T_1}{T} + \\ & 2p\bar{p} \cos\phi(\alpha\varepsilon - 1) \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} + 2p^2 \sin\phi(\alpha\varepsilon - 1) \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} - 2\bar{p} \sin\phi \cos\phi \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \frac{T_1}{T} + 2p \cos^2\phi \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \frac{T_1}{T} \\ & - 4\alpha \cos^2\phi \frac{T_1 T_2}{T^2} + 4\alpha \sin\phi \cos\phi \frac{T_1^2}{T^2} - 2p \cos\phi \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} \frac{T_1}{T} + 2\alpha \cos\phi \frac{T_{12}}{T} - 2\alpha \cos\phi \frac{T_1 T_2}{T^2} - 2\alpha \sin\phi \frac{T_2^2}{T^2} \\ & - 2\bar{p} \sin^2\phi \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \frac{T_2}{T} + 2p \sin\phi \cos\phi \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \frac{T_2}{T} - 4\alpha \cos\phi \sin\phi \frac{T_2^2}{T^2} + 4\alpha \sin^2\phi \frac{T_1 T_2}{T^2} + 4\bar{p} \cos\phi \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \frac{T_2}{T} \\ & - 2p \sin\phi \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} \frac{T_2}{T} + 2\alpha \sin\phi \frac{T_{22}}{T} - \bar{p}_2 \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} + 2\bar{p}^2 \sin\phi \alpha(\alpha\varepsilon - 1)^2 - 4\bar{p} \sin\phi \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \frac{T_1}{T} + 2p\bar{p}(\alpha^2 - 1)\alpha \\ & - 2p\bar{p} \cos\phi \alpha(\alpha\varepsilon - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{21} = & -\bar{p}_1 \sin \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} + p_1 \cos \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} + 2(\bar{p}^2 - p^2) \sin \phi \cos \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^3}{\varepsilon} - 2p\bar{p} \cos 2\phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^3}{\varepsilon} + \\
& 2\bar{p} \cos^2 \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \frac{T_2}{T} + 2p \sin \phi \cos \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \frac{T_2}{T} - 4\alpha \sin \phi \cos \phi \frac{T_2^2}{T^2} + 2\bar{p} \cos \phi \frac{(\alpha^2 - 1) T_2}{\varepsilon T} - p_1 \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} \\
& - 2\alpha \cos \phi \frac{T_{21}}{T} + 2\alpha \cos \phi \frac{T_1 T_2}{T^2} - 2\bar{p} \cos \phi \sin \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \frac{T_1}{T} - 2p \sin^2 \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \frac{T_1}{T} + 4\alpha \cos \phi \sin \phi \frac{T_1^2}{T^2} + \\
& 4\alpha \sin^2 \phi \frac{T_1 T_2}{T^2} - 2\bar{p} \sin \phi \frac{(\alpha^2 - 1) T_1}{\varepsilon T} + 2\alpha \sin \phi \frac{T_{11}}{T} - 2\alpha \sin \phi \frac{T_1^2}{T^2} + 2p\bar{p} \cos \phi \alpha (\alpha \varepsilon - 1)^2 - 4\alpha \cos^2 \phi \frac{T_1 T_2}{T^2} \\
& 2p^2 \sin \phi \alpha (\alpha \varepsilon - 1)^2 - 4p \cos \phi \frac{\alpha^2 T_1}{\varepsilon T} - 4p \sin \phi \frac{\alpha^2 T_2}{\varepsilon T} + 2p\bar{p} \alpha (\alpha^2 - 1) - 4\bar{p} \sin \phi \cos \phi \alpha (\alpha \varepsilon - 1) \frac{T_1}{T} + \\
& 4p \cos^2 \phi \alpha (\alpha \varepsilon - 1) \frac{T_1}{T} - 4\bar{p} \sin^2 \phi \alpha (\alpha \varepsilon - 1) \frac{T_2}{T} + 4p \sin \phi \cos \phi \alpha (\alpha \varepsilon - 1) \frac{T_2}{T} + 2\bar{p}^2 \sin \phi (\alpha^2 - 1) \frac{(\alpha \varepsilon - 1)}{\varepsilon} \\
& - 2p\bar{p} \cos \phi (\alpha^2 - 1) \frac{(\alpha \varepsilon - 1)}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\bar{p}\alpha_2 = -\bar{p}^2 \sin \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} + p\bar{p} \cos \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} - 2\alpha\bar{p} \cos \phi \frac{T_2}{T} + 2\alpha\bar{p} \sin \phi \frac{T_1}{T} - p\bar{p} \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon}$$

$$-p\alpha_1 = p^2 \sin \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} + p\bar{p} \cos \phi \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} - 2\alpha p \cos \phi \frac{T_1}{T} - 2\alpha p \sin \phi \frac{T_2}{T} + p\bar{p} \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon}$$

Bulunan bu değerleri,

$$\alpha_{12} + p\alpha_1 = \alpha_{21} + \bar{p}\alpha_2 \quad (5.14)$$

uygunluk denkleminde yazalım.

$$\begin{aligned}
& (p_2 - \bar{p}_1) \sin \phi (\alpha^2 - 2\alpha \varepsilon + 1) + (p_1 + \bar{p}_2) \cos \phi (\alpha^2 - 2\alpha \varepsilon + 1) - 4(\alpha^2 - \alpha \varepsilon) \bar{p} \frac{T_2}{T} + 4(\alpha^2 - \alpha \varepsilon) p \frac{T_1}{T} \\
& + 4p\bar{p} \cos \phi (-\alpha^2 + 2\alpha \varepsilon - 1) + 2(p^2 - \bar{p}^2) \sin \phi (-\alpha^2 + 2\alpha \varepsilon - 1) - 2p(\alpha^2 - 2\alpha \varepsilon + 1) \frac{T_1}{T} + \\
& 2(p \cos \phi - \bar{p} \sin \phi) (\alpha^2 - 1) \frac{T_1}{T} - 2\alpha \varepsilon \cos \phi \frac{T_{12}}{T} - 2\alpha \varepsilon \cos \phi \frac{T_{21}}{T} + 4\alpha \varepsilon \cos \phi \frac{T_1 T_2}{T^2} + 2\bar{p} (\alpha^2 - 2\alpha \varepsilon + 1) \frac{T_2}{T} + \\
& 2(\bar{p} \cos \phi + p \sin \phi) (\alpha^2 - 1) \frac{T_2}{T} + 2\alpha \varepsilon \sin \phi \frac{T_{11}}{T} - 2\alpha \varepsilon \sin \phi \frac{T_{22}}{T} + 2\alpha \varepsilon \sin \phi \frac{T_2^2}{T^2} - 2\alpha \varepsilon \sin \phi \frac{T_1^2}{T^2} + \\
& (\bar{p}_2 - p_1) (\alpha^2 - 1) - 4(\bar{p} \cos \phi + p \sin \phi) \alpha^2 \frac{T_2}{T} + 4(\bar{p} \sin \phi - p \cos \phi) \alpha^2 \frac{T_1}{T} + (p^2 - \bar{p}^2) \sin \phi (\alpha^2 - 2\alpha \varepsilon + 1) + \\
& 2p\bar{p} \cos \phi (\alpha^2 - 2\alpha \varepsilon + 1) + 2\alpha \varepsilon (\bar{p} \sin \phi - p \cos \phi) \frac{T_1}{T} - 2\alpha \varepsilon (\bar{p} \cos \phi + p \sin \phi) \frac{T_2}{T} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem de

$$A = (p_2 - \bar{p}_1)\sin\phi + (p_1 + \bar{p}_2)\cos\phi + 2p\frac{T_1}{T} - 2\bar{p}\frac{T_2}{T} + \bar{p}_2 - p_1 + (\bar{p}^2 - p^2)\sin\phi + 2(\bar{p}\sin\phi - p\cos\phi)\frac{T_1}{T} - 2(\bar{p}\cos\phi + p\sin\phi)\frac{T_2}{T} - 2p\bar{p}\cos\phi$$

$$\varepsilon B = -2(p_2 - \bar{p}_1)\sin\phi - 2(p_1 + \bar{p}_2)\cos\phi + 2\sin\phi\frac{T_{11}}{T} - 2\cos\phi\frac{T_{12}}{T} + 4\cos\phi\frac{T_1T_2}{T^2} - 2\sin\phi\frac{T_{22}}{T} + 2\sin\phi\frac{T_2^2}{T^2} - 2\sin\phi\frac{T_1^2}{T^2} - 2\cos\phi\frac{T_{21}}{T} + 4p\bar{p}\cos\phi + 2(p^2 - \bar{p}^2)\sin\phi + 2(\bar{p}\sin\phi - p\cos\phi)\frac{T_1}{T} - 2(\bar{p}\cos\phi + p\sin\phi)\frac{T_2}{T}$$

$$C = (p_2 - \bar{p}_1)\sin\phi + (p_1 + \bar{p}_2)\cos\phi - 2p\frac{T_1}{T} + 2\bar{p}\frac{T_2}{T} - \bar{p}_2 + p_1 + (\bar{p}^2 - p^2)\sin\phi + 2(\bar{p}\sin\phi - p\cos\phi)\frac{T_1}{T} - 2(\bar{p}\cos\phi + p\sin\phi)\frac{T_2}{T} - 2p\bar{p}\cos\phi$$

olmak üzere,

$$A\alpha^2 + \varepsilon B\alpha + C = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Bu denklemin bütün katsayıları sıfır, yani

$A = 0$ $C = 0$ ve $B = 0$ ise (5.12) ve (5.13) denklemlerinin yani α nın sonsuz çözümü vardır.

Şimdi bu sonsuz çözüm halini ele alalım.

$$A = 0 \text{ ve } C = 0 \text{ ise } A - C = 0$$

dır. Bu son denklem

$$2p\frac{T_1}{T} - 2\bar{p}\frac{T_2}{T} + \bar{p}_2 - p_1 = 0$$

halini alır. Bu da

$$\left(\frac{p}{T^2}\right)_1 = \left(\frac{\bar{p}}{T^2}\right)_2$$

olup bu denklemi de (3.5) gereğince $T^2 = \varepsilon \frac{K}{4}$ olduğundan

$$\left(\frac{p}{K}\right)_1 = \left(\frac{\bar{p}}{K}\right)_2$$

şeklinde yazabiliriz.

TEOREM: Açılabilir olmayan bir yüzeyde eğrilik çizgileriyle sabit açı yapan bir dik şebeke bulunması için yüzey

$$\left(\frac{p}{K}\right)_1 = \left(\frac{\bar{p}}{K}\right)_2$$

koşulunu taşımalıdır.



6.EĞRİLİK ÇİZGİLERİNİN AÇIORTAYI DİK ŞEBEKE OLUŞTURAN YÜZEYLER

Burada $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}$ için sonuçları elde etmek istiyoruz. Böylece eğrilik çizgilerinin açıortayları bir dik şebeke oluşturan yüzeyleri belirlemiş olacağız. Yüzeylerin açılabilir olmadığını hatırlatalım ($K \neq 0 \Rightarrow T \neq 0$). Bu hal için denklemlerimiz

$$\left(\frac{p}{T^2}\right)_1 = \left(\frac{\bar{p}}{T^2}\right)_2 \quad (6.1)$$

$$p_2 - \bar{p}_1 + \bar{p}^2 - p^2 + 2\bar{p}\frac{T_1}{T} - 2p\frac{T_2}{T} = 0 \quad (6.2)$$

$$\bar{p}_1 - p_2 + \frac{T_{11}}{T} - \frac{T_{22}}{T} + \frac{T_2^2}{T^2} - \frac{T_1^2}{T^2} + p^2 - \bar{p}^2 + \bar{p}\frac{T_1}{T} - p\frac{T_2}{T} = 0 \quad (6.3)$$

olur. Bir de

$$K = -p_2 - \bar{p}_1 - p^2 - \bar{p}^2 \quad (6.4)$$

Gauss denkleminiz var.

6.1 $K = 2\epsilon c^2 = sbt \neq 0$ Hali.

$K = 2\epsilon c^2 = sbt \neq 0$ için, (6.1) denklemi,

$$p_1 = \bar{p}_2$$

elde edilir. Bu takdirde

$$e = g$$

varsayabiliriz. Buna göre,

$$p = \frac{e_v}{e^2}, \quad \bar{p} = \frac{e_u}{e^2} \quad (6.1.1)$$

dir $T = sbt$ olduğundan . (6.2) ve (6.3) denklemleri de

$$p_2 - \bar{p}_1 + \bar{p}^2 - p^2 = 0 \quad (6.1.2)$$

halini alır.

$$p_2 = \frac{e_{vv}}{e^3} - 2 \frac{e_v^2}{e^4} \quad (6.1.3)$$

$$\bar{p}_1 = \frac{e_{uu}}{e^3} - 2 \frac{e_u^2}{e^4} \quad (6.1.4)$$

olup (6.1.1), (6.1.3) ve (6.1.4) de bulunan değerler (6.1.2) denkleminde yerine koyarsak,

$$\frac{e_{vv}}{e^3} - 3 \frac{e_v^2}{e^4} - \frac{e_{uu}}{e^3} + 3 \frac{e_u^2}{e^4} = 0$$

olur. Bu denklem de,

$$\left(\frac{1}{e^2} \right)_{uu} - \left(\frac{1}{e^2} \right)_{vv} = 0 \quad (6.1.5)$$

şeklinde yazılabilir ve (6.1.5) denkleminin çözümünden

$$\frac{1}{e^2} = f(u+v) + g(u-v) \quad (6.1.6)$$

bulunur. (6.4) Gauss denklemini (6.1.1), (6.1.3) ve (6.1.4) de bulunan değerlere göre,

$$-2\mathcal{E}^2 = \frac{e_{vv}}{e^3} - \frac{e_v^2}{e^4} + \frac{e_{uu}}{e^3} - \frac{e_u^2}{e^4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem düzenlenirse

$$-4\mathcal{E}^2 e^2 = (\ln e^2)_{uu} + (\ln e^2)_{vv} \quad (6.1.7)$$

olur. (6.1.6) denklemini de (6.1.7) de kullanılırsak,

$$4\mathcal{E}^2 \frac{1}{f+g} = (\ln(f+g))_{uu} + (\ln(f+g))_{vv} \quad (f+g \neq 0)$$

olur. Bu denklem (6.1.6) gereğince,

$$2\epsilon^2 f + 2\epsilon^2 g = ff'' + fg'' + gf'' + gg'' - f'^2 - g'^2 \quad (6.1.8)$$

yazılabilir. (6.1.8) denkleminin ilk önce $u + v$ ye daha sonrada $u - v$ ye göre türevini alırsak

$$f'''g' + g'''f' = 0 \quad (6.1.9)$$

elde edilir.

6.1.1 $f' \neq 0, g' \neq 0$ Hali

Bu takdirde

$$\frac{f'''}{f'} = -\frac{g'''}{g'} = a \quad a = \text{sbt}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\frac{f'''}{f'} = a$$

denklemini çözülürse

$$f'' = af + b_1 \quad b_1 = \text{sbt} \quad (6.1.10)$$

bulunur.

$$-\frac{g'''}{g'} = a$$

denklemini çözülürse

$$g'' = -ag + b_2 \quad b_2 = \text{sbt} \quad (6.1.11)$$

olur.

(6.1.10) ve (6.1.11) denklemleri (6.1.8) de yerine konursa

$$2\epsilon^2 f + 2\epsilon^2 g = af^2 + b_1 f + b_2 f + b_1 g + b_2 g - ag^2 - f'^2 - g'^2 \quad (6.1.12)$$

olur. Bu denklemin de $u + v$ ye göre türevini alırsak

$$2aff' - 2ff'' + (b_1 + b_2 - 2\epsilon c^2)f' = 0 \quad (6.1.13)$$

bulunur.

(6.1.10) denklemini (6.1.13) de yerine koyarsak

$$b_2 - b_1 = 2\epsilon c^2 \quad (6.1.14)$$

olur. Aynı şekilde (6.1.12) denkleminin $u - v$ ye göre türevini alırsak

$$2agg' + 2g'g'' + (2\epsilon c^2 - b_1 - b_2)g' = 0 \quad (6.1.15)$$

bulunur.

(6.1.11) denklemini (6.1.15) de yerine konursa

$$b_2 - b_1 + 2\epsilon c^2 = 0 \quad (6.1.16)$$

halini alır.

(6.1.14) ve (6.1.16) denklemlerinden de

$$b_2 = b_1$$

bulunur. Bu da (6.1.14) yada (6.1.16) denkleminde yerine konulursa

$$K = 2\epsilon c^2 = 0$$

elde edilir. Oysa $K = 2\epsilon c^2 = \text{sbt} \neq 0$ kabul etmiştik. Dolayısıyla bir çelişki elde edilir. Yani bu koşulu sağlayan bir yüzey yoktur .

6.1.2 $g' = 0$ Hali

$$g' = 0 \text{ ise } g = c_1 = \text{sbt}$$

olur $c_1 = 0$ almak genelliği bozmaz (6.1.6) denklemini

$$\frac{1}{e^2} = f(u + v) \quad (6.1.17)$$

halini alır, buna göre (6.1.7) denklemini,

$$4\epsilon^2 \frac{1}{f} = (\ln f)_{uu} + (\ln f)_{vv} \quad (f \neq 0)$$

olur. Bu denklemde (6.1.7) gereğince

$$ff'' - f'^2 - 2\epsilon^2 f = 0 \quad (6.1.18)$$

şeklinde yazılabilir.

(6.1.18) denklemi çözülürse,

$$f' = \epsilon_1 \sqrt{af^2 - 4\epsilon^2 f} \quad a = \text{sbt} \quad (6.1.19)$$

bulunur.

Bulduğumuz (6.1.19) denkleminde 3 durum söz konusudur. Bu durumlar,

6.1.2.1 $a = 0$ Durumu

$f > 0$ olduğundan $\epsilon = -1$ dir.(6.1.19) denklemi

$$f' = \pm \sqrt{4c^2 f}$$

olur. Bu diferansiyel denklem çözülürse

$$f = c^2 (\pm (u + v) + s_1)^2, \quad s_1 = \text{sbt} \quad (6.1.20)$$

bulunur. (6.1.20) denkleminde öteleme ile $s_1 = 0$ alınabilir ve böylece

$$f = c^2 (u + v)^2 \quad (6.1.21)$$

elde edilir.(6.1.21) denklemini (6.1.17) denkleminde yerine koyarsak

$$e^2 = \frac{1}{c^2 (u + v)^2}$$

olur.

$$e^2 = E \text{ olduğundan}$$

$$E = \frac{1}{c^2(u+v)^2} \quad (6.1.22)$$

dır. Bu takdirde

$$K = -2c^2$$

olur.

6.1.2.2 $a > 0$ Durumu

$$a = b^2$$

alalım.(6.1.19) denkleminde bu ifadeyi yerine koyarsak,

$$f' = \varepsilon_1 \sqrt{b^2 f^2 - 4\varepsilon^2 f}$$

olur. Bu denklem çözülürse,

$$f = \frac{2c^2}{b^2} [ch(b\varepsilon_1\varepsilon_2(u+v) + b\varepsilon_2s_2) + \varepsilon] \quad s_2 = s_1$$

bulunur. Bulduğumuz bu denklemde öteleme ile $s_2 = 0$ yapılabilir ve

$$f = \frac{2c^2}{b^2} [ch(b(u+v)) + \varepsilon] \quad (6.1.23)$$

yazılabilir. (6.1.23) denklemini (6.1.17) denkleminde yerine konursa,

$$e^2 = \frac{b^2}{2c^2 [ch(b(u+v)) + \varepsilon]}$$

elde edilir.

$$e^2 = E$$

olduğundan

$$E = \frac{b^2}{2c^2 [ch(b(u+v)) + \varepsilon]} \quad (6.1.24)$$

bulunur.

6.1.2.3 $a < 0$ Durumu

$a = -b^2$ alalım. (6.1.19) denkleminde bu ifadeyi yerine koyarsak,

$$f' = \varepsilon_1 \sqrt{-b^2 f^2 - 4\varepsilon c^2 f}$$

olur. Bulduğumuz bu denklemi çözersek,

$$f = \frac{2c^2}{b^2} [\sin(b\varepsilon_1 \varepsilon_3 (u+v) + b\varepsilon_3 s_3) - \varepsilon] \quad s_3 = s_{bt}$$

elde edilir. Bu denklemde aynı düşünce ile

$$f = \frac{2c^2}{b^2} [\sin(b(u+v)) - \varepsilon] \quad (6.1.25)$$

halini alır. (6.1.25) denklemini (6.1.17) denkleminde yerine koyarsak

$$e^2 = \frac{b^2}{2c^2 [\sin(b(u+v)) - \varepsilon]}$$

elde edilir.

$$e^2 = E$$

olduğundan

$$E = \frac{b^2}{2c^2 [\sin(b(u+v)) - \varepsilon]} \quad (6.1.26)$$

olur.

Şimdi bu üç hal için α lı denklemleri çözelim ve dolayısıyla H ve J yi elde edelim.

(5.12) ve (5.13) denklemleri $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}$ ve $K = 2\varepsilon c^2 = s_{bt} \neq 0$ için,

$$\alpha_1 = -p \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} - \bar{p} \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon}$$

$$\alpha_2 = -\bar{p} \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} - p \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon}$$

olur.

bu denklemler (6.1.1) gereğince

$$\alpha_u = -\frac{E_v}{2E} \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} - \frac{E_u}{2E} \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} \quad (6.1.27)$$

$$\alpha_v = -\frac{E_u}{2E} \frac{(\alpha \varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} - \frac{E_v}{2E} \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon} \quad (6.1.28)$$

halini alır.(6.1.27) ve (6.1.28) denklemlerinden

$$\alpha_u - \alpha_v = -\frac{E_v}{E} \left(\alpha - \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{E_u}{E} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \alpha \right)$$

bulunur. Bu denklemi de

$$\left(\alpha E - \frac{E}{\varepsilon} \right)_u - \left(\alpha E - \frac{E}{\varepsilon} \right)_v = 0$$

şeklinde yazabiliriz.Buradan,

$$\alpha = \frac{F(u+v)}{E} + \frac{1}{\varepsilon} \quad (6.1.29)$$

bulunur. (6.1.29) denkleminin u ya göre türevi alınıp (6.1.27) denkleminde yerine konursa,

$$F_u = -\frac{F^2}{2E^2 \varepsilon} (E_u + E_v)$$

elde edilir.

$F = F(u+v)$ ve $E = E(u+v)$ olduğundan denklemi

$$\left(\frac{1}{F}\right)' + \left(\frac{1}{\varepsilon E}\right)' = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklem çözülürse,

$$F = \frac{-\varepsilon E}{m\varepsilon E + 1} \quad -m = \text{sbt}$$

bulunur.

bulduğumuz F değerini (6.1.29) denkleminde yerine koyarsak,

$$\alpha = \frac{mE}{m\varepsilon E + 1} \quad (6.1.30)$$

bulunur.

$a = 0$ durumu için bulunan

$$E = \frac{1}{c^2(u+v)^2}$$

için α değeri hesaplanırsa,

$$\alpha = \frac{m}{-m + c^2(u+v)^2} \quad (6.1.31)$$

olur.

H ortalama eğriliği,

$$H = \frac{c(2m - c^2(u+v)^2)}{\pm \sqrt{2(-m^2 + c^2m(u+v)^2)}} \quad (6.1.32)$$

olur.

J değeri ise,

$$J = \frac{c^3(u+v)^2}{\pm \sqrt{2(-m^2 + c^2m(u+v)^2)}} \quad (6.1.33)$$

bulunur.

$a > 0$ durumunda bulunan

$$E = \frac{b^2}{2c^2 [ch(b(u+v)) + \varepsilon]}$$

için α değeri hesaplanırsa,

$$\alpha = \frac{mb^2}{mb^2\varepsilon + 2c^2(ch(b(u+v)) + \varepsilon)} \quad (6.1.34)$$

olur.

H ortalama eğriliği,

$$H = \frac{-2mb^2c\varepsilon - 2c^3(ch(b(u+v)) + \varepsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\varepsilon + 4c^2m(ch(b(u+v)) + \varepsilon)}} \quad (6.1.35)$$

dır.

J değeri de

$$J = \frac{2c^3(ch(b(u+v)) + \varepsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\varepsilon + 4c^2m(ch(b(u+v)) + \varepsilon)}} \quad (6.1.36)$$

bulunur.

$a < 0$ durumunda bulunan

$$E = \frac{b^2}{2c^2 [\sin(b(u+v)) - \varepsilon]}$$

için α değeri hesaplanırsa,

$$\alpha = \frac{mb^2}{mb^2\varepsilon + 2c^2(\sin(b(u+v)) - \varepsilon)} \quad (6.1.37)$$

olur.

H ortalama eğriliği,

$$H = \frac{-2mb^2c\varepsilon - 2c^3(\sin(b(u+v)) - \varepsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\varepsilon + 4c^2m(\sin(b(u+v)) - \varepsilon)}} \quad (6.1.38)$$

dır.

J değeri ise,

$$J = \frac{2c^3(\sin(b(u+v)) - \varepsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\varepsilon + 4c^2m(\sin(b(u+v)) - \varepsilon)}} \quad (6.1.39)$$

bulunur.

6.2 $K \neq \text{sbt}$ Hali

Burada ayrıca $p_1 = \bar{p}_2$ olduğunu varsayacağız. Bu dik şebekemiz eğrilik çizgileri ile sabit açı $\left(\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}\right)$ yaptığı için, eğrilik çizgileri de bir izometrik bir şebeke oluşturur Soyuçok (1995).

Dolayısıyla yüzey bir izotermik yüzeydir.

$$p_1 = \bar{p}_2 \text{ ise } e = g$$

yapılabilir. Buna göre,

$$p = \frac{e_v}{e^2}, \quad \bar{p} = \frac{e_u}{e^2} \quad (6.2.1)$$

$$\bar{p}_1 = \frac{e_{uu}}{e^3} - 2\frac{e_u^2}{e^4} \quad (6.2.2)$$

$$p_2 = \frac{e_{vv}}{e^3} - 2\frac{e_v^2}{e^4} \quad (6.2.3)$$

olur.

(6.1) denklemi,

$$p\frac{T_1}{T} - \bar{p}\frac{T_2}{T} = 0 \quad (6.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. (6.2.1) denklemlerini (6.2.4) denkleminde yerine konursa,

$$e_v T_u - e_u T_v = 0$$

elde edilir. Bu denklemden de

$$T = T(e), K = K(e), K = K(E) \quad (6.2.5)$$

bulunur.

$$\ln K = k$$

denir ve buna göre (6.2.1), (6.2.2) ve (6.2.3) denklemleri (6.2) de yerleştirilirse,

$$\frac{e_{vv}}{e^3} - 3 \frac{e_v^2}{e^4} - \frac{e_{uu}}{e^3} + 3 \frac{e_u^2}{e^4} + k_1 \frac{e_u}{e^2} - k_2 \frac{e_v}{e^2} = 0$$

elde edilir.

Bu denklemi de (6.2.5) de bulduğumuz sonuca göre yazarsak

$$\frac{e_{vv}}{e^3} - 3 \frac{e_v^2}{e^4} - \frac{e_{uu}}{e^3} + 3 \frac{e_u^2}{e^4} + k' \frac{e_u^2}{e^3} - k' \frac{e_v^2}{e^3} = 0$$

olur. Bulunan bu denklemi de

$$e_{vv} - e_{uu} = \left(k' + \frac{3}{e} \right) (e_v^2 - e_u^2) \quad (6.2.6)$$

şeklinde yazabiliriz.

(6.2) ve (6.3) denklemlerinin toplamlarından

$$\frac{T_{11}}{T} - \frac{T_{22}}{T} + \frac{T_2^2}{T^2} - \frac{T_1^2}{T^2} + 3\bar{p} \frac{T_1}{T} - 3p \frac{T_2}{T} = 0$$

elde edilir.

Bu denkleminde $K = 4\epsilon T^2$, (6.2.1) ve (6.2.5) bağıntılarını kullanırsak

$$k'(e_{uu} - e_{vv}) = \left(k'' + \frac{2k'}{e} \right) (e_v^2 - e_u^2) \quad (6.2.7)$$

elde edilir.

6.2.1 Genel Halde Gauss Eğriliğinin İncelenmesi

yani $(e_{uu} - e_{vv}) \neq 0$, $(e_v^2 - e_u^2) \neq 0$, $\left(k' + \frac{3}{e}\right) \neq 0$ koşulları altında Gauss eğriliğini inceleyelim.

(6.2.7) denklemini (6.2.6) denklemine bölersek,

$$k' = -\frac{k'' + \frac{2k'}{e}}{k' + \frac{3}{e}}$$

olur. Bu denklemini de

$$k'' + \frac{5k'}{e} + k'^2 = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu diferansiyel denklem çözülürse,

$$k = \ln\left(\frac{4Be^4 - 1}{e^4}\right) + \ln s \quad B = sbt, \quad s = sbt$$

bulunur.

$\ln K = k$ olduğundan

Gauss eğriliği de,

$$K = \frac{4BE^2 - 1}{E^2} s \quad (6.2.8)$$

olur.

6.2.2 $(e_v^2 - e_u^2) = 0$ Koşulu Altında Gauss Eğriliğinin İncelenmesi

$$(e_v^2 - e_u^2) = 0 \text{ ise}$$

$$(e_v - e_u)(e_v + e_u) = 0$$

dır.

$(e_v - e_u) = 0$ için inceleyelim

$(e_v - e_u) = 0$ ise $(e_{uu} - e_{vv}) = 0$ dır.

$(e_v - e_u) = 0$ ve $(e_{uu} - e_{vv}) = 0$ olduğundan dolayı (6.2.6) ve (6.2.7) denklemleri sağlanır.

$(e_v - e_u) = 0$ ise $(E_v - E_u) = 0$ dır.

Bu denklemin çözümünden

$$E = E(u + v) \quad (6.2.9)$$

bulunur.

$e_v = e_u$ için (6.4) Gauss denklemini yazarsak

$$K = -2 \frac{e_{uu}}{e^3} + 2 \frac{e_u^2}{e^4}$$

olur. Bu denklemi de

$$K = -\frac{1}{E} (\ln E)_{uu}$$

şeklinde yazabiliriz.

$E = E(u + v)$ olduğundan,

$$K = -\frac{1}{E} (\ln E)'' \quad (6.2.10)$$

olur.

Şimdi bu hal için α lı denklemleri çözelim ve dolayısıyla H ve J yi elde edelim

$\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}$ değeri için (5.12) ve (5.13) denklemleri

$$\alpha_u = -\frac{E_v}{2E} \frac{(\alpha\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} + \alpha \frac{K_v}{K} - \frac{E_u}{2E} \frac{(\alpha^2 - 1)}{\varepsilon}$$

$$\alpha_v = -\frac{E_u (\alpha\varepsilon - 1)^2}{2E \varepsilon} + \alpha \frac{K_u}{K} - \frac{E_v (\alpha^2 - 1)}{2E \varepsilon}$$

halini alır. $E = E(u+v)$, $K = K(u+v)$ olduğundan bu denklemler de

$$\alpha_u = -\frac{E' (\alpha\varepsilon - 1)^2}{2E \varepsilon} + \alpha \frac{K'}{K} - \frac{E' (\alpha^2 - 1)}{2E \varepsilon} \quad (6.2.11)$$

$$\alpha_v = -\frac{E' (\alpha\varepsilon - 1)^2}{2E \varepsilon} + \alpha \frac{K'}{K} - \frac{E' (\alpha^2 - 1)}{2E \varepsilon} \quad (6.2.12)$$

olur.

(6.2.11) ve (6.2.12) denklemlerinden,

$$\alpha_u - \alpha_v = 0$$

bulunur. Bu denklem de çözülürse

$$\alpha = \alpha(u+v)$$

elde edilir.

Buna göre

$\alpha = \alpha(u+v)$, $E = E(u+v)$, $K = K(u+v)$ olduğundan ve (6.2.11), (6.2.12) denklemlerinden

$$\alpha' = -\frac{E' (\alpha\varepsilon - 1)^2}{2E \varepsilon} + \alpha \frac{K'}{K} - \frac{E' (\alpha^2 - 1)}{2E \varepsilon}$$

bulunur.

Bu denklemi de

$$\alpha' - \left(\frac{E'}{E} + \frac{K'}{K} \right) \alpha = -\frac{E' \alpha^2}{E \varepsilon}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu diferansiyel denklemin çözümünden de,

$$\alpha = \frac{2\varepsilon E^3 K}{2E^2 C - E'^2} \quad C = sbt$$

bulunur.

Öte yandan Gauss denklemi,

$$K = 4\varepsilon T^2 = -\frac{(\ln E)''}{E}$$

şeklini alır.

$$H = \left(\lambda \varepsilon + \frac{1}{\lambda} \right) T \text{ ortalama eğriliği ise,}$$

$$H = \frac{2E^3 K + 2EC^2 - E'^2}{\pm 2E \sqrt{2E(2E^2 C - E'^2)}} \quad (6.2.13)$$

olur.

$$J = \left(\lambda \varepsilon - \frac{1}{\lambda} \right) T \text{ den de,}$$

$$J = \frac{2E^3 K + E'^2 - 2EC^2}{\pm 2E \sqrt{2E(2E^2 C - E'^2)}} \quad (6.2.14)$$

bulunur

Aynı şekilde

$$(e_v + e_u) = 0 \text{ için incelenirse}$$

$$E = E(u - v) \text{ olmak üzere}$$

Gauss denklemi,

$$K = -\frac{1}{E} (\ln E)''$$

dır.

H ortalama eğriliği

$$H = \frac{2E^3K + 2EC^2 - E'^2}{\pm 2E\sqrt{2E(2E^2C - E'^2)}}$$

olur.

J değeri de

$$J = \frac{2E^3K + E'^2 - 2EC^2}{\pm 2E\sqrt{2E(2E^2C - E'^2)}}$$

bulunur.

Ayrıca,

$(e_{uu} - e_{vv}) = 0$, $(e_v^2 - e_u^2) \neq 0$, $\left(k' + \frac{3}{e}\right) \neq 0$ koşulları altında Gauss eğriliği incelenirse,

(6.2.6) denklemi sağlanmaz.

$(e_{uu} - e_{vv}) = 0$, $\left(k' + \frac{3}{e}\right) = 0$, $(e_v^2 - e_u^2) \neq 0$, $k' \neq 0$ koşulları altında Gauss eğriliği incelenirse,

(6.2.6) denklemi,

$$k' + \frac{3}{e} = 0 \tag{6.2.15}$$

olur. (6.2.7) denklemi,

$$k'' + 2\frac{k'}{e} = 0 \quad k' \rightarrow k_e \tag{6.2.16}$$

halini alır. (6.2.15) denkleminin e 'ye göre türevini alırsak,

$$k'' = \frac{3}{e^2} \tag{6.2.17}$$

elde edilir.

(6.2.15) ve (6.2.17) değerlerini (6.2.16) denkleminde yerine konursa,

$\frac{3}{e^2} = 0$ elde edilir $\frac{3}{e^2} \neq 0$ olduğundan

$(e_u - e_v) = 0$, $\left(k' + \frac{3}{e}\right) = 0$, $(e_v^2 - e_u^2) \neq 0$, $k' \neq 0$ koşullarını sağlayan Gauss eğriliği yoktur.



7. EĞRİLİK ÇİZGİLERİ KOORDİNAT SİSTEMİNE GEÇİŞ

Şimdi eğrilik çizgileri ile $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan dik şebekede bulunan bu sonuçların eğrilik çizgileri sistemindeki şekillerini elde etmek istiyoruz. Bunun içinde bu sistemden eğrilik çizgileri sistemine geçmeliyiz. (u, v) koordinat sistemi ile, bu sistemin $\frac{\phi}{2}$ kadar döndürülmesiyle oluşan (U, V) eğrilik çizgileri koordinat sistemi arasında

$$u = U \cos \frac{\phi}{2} - V \sin \frac{\phi}{2} \quad (7.1)$$

$$v = V \cos \frac{\phi}{2} + U \sin \frac{\phi}{2} \quad (7.2)$$

bağıntıları vardır

(U, V) koordinat sisteminde yüzeyin I. temel form katsayıları, $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ ve $\bar{r}$ yer vektörünün U 'ya ve V 'ye göre türevleri alınır,

$$\bar{r}_u = \bar{r}_u \frac{du}{dU} + \bar{r}_v \frac{dv}{dU}$$

$$\bar{r}_v = \bar{r}_u \frac{du}{dV} + \bar{r}_v \frac{dv}{dV}$$

olur. Bu denklemleri de

$$\bar{r}_u = \bar{r}_u \cos \frac{\phi}{2} + \bar{r}_v \sin \frac{\phi}{2} \quad (7.3)$$

$$\bar{r}_v = -\bar{r}_u \sin \frac{\phi}{2} + \bar{r}_v \cos \frac{\phi}{2} \quad (7.4)$$

şeklinde yazabiliriz.

(7.3) ve (7.4) denklemlerinden

$$\bar{F} = \bar{r}_u \bar{r}_v = 0$$

$$\bar{E} = \vec{r}_U \cdot \vec{r}_U = E \cos^2 \frac{\phi}{2} + G \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (7.5)$$

$$\bar{G} = \vec{r}_V \cdot \vec{r}_V = E \sin^2 \frac{\phi}{2} + G \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad (7.6)$$

olur. Şimdi yukarıdaki halleri tek tek ele alalım.

7.1 $K = 2\epsilon c^2 = \text{sbt} \neq 0$ Hali İçin Koordinat Dönüşümü

Bu hal için

$$p_1 = \bar{p}_2$$

dır. Bu denklemden de

$$E = G$$

varsayabiliriz.

(7.5) ve (7.6) denklemlerinden

$$\bar{E} = E \text{ ve } \bar{G} = G \text{ bulunur.}$$

(7.1) ve (7.2) denklemleri $\phi = \frac{\pi}{2}$ değeri için

$$u + v = \sqrt{2}U \quad (7.7)$$

$$u - v = -\sqrt{2}V \quad (7.8)$$

halini alır.

6.1.2.1 $\alpha = 0$ durumu için

(6.1.22) denklemi

$$E = \frac{1}{2c^2 U^2} \text{ olur.}$$

(6.1.31) denklemi de

$$\alpha = \frac{m}{m\varepsilon + 2c^2U^2}$$

şeklinde yazılabilir.

(6.1.32) H ortalama eğriliği,

$$H = \frac{c(2m - 2c^2U^2)}{\pm \sqrt{2(-m^2 + 2c^2mU^2)}}$$

bulunur.

(6.1.33) J değeri de,

$$J = \frac{c^3 2U^2}{\pm \sqrt{2(-m^2 + 2c^2mU^2)}}$$

olur.

6.1.2.2 $a > 0$ durumu için

(6.1.24) denklemi

$$E = \frac{b^2}{2c^2[ch(b\sqrt{2}U) + \varepsilon]}$$

dır.

(6.1.34) α değeri hesaplanırsa,

$$\alpha = \frac{mb^2}{mb^2\varepsilon + 2c^2[ch(b\sqrt{2}U) + \varepsilon]}$$

olur.

(6.1.35) H ortalama eğriliği,

$$H = \frac{-2mb^2c\varepsilon - 2c^3[ch(b\sqrt{2}U) + \varepsilon]}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\varepsilon + 4c^2m[ch(b\sqrt{2}U) + \varepsilon]}}$$

dır.

(6.1.36) J değeri de,

$$J = \frac{2c^3(ch(b\sqrt{2U}) + \varepsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\varepsilon + 4c^2m(ch(b\sqrt{2U}) + \varepsilon)}}$$

bulunur.

6.1.2.3 $a < 0$ durumu için

(6.1.26) denklemi

$$E = \frac{b^2}{2c^2[\sin(b\sqrt{2U}) - \varepsilon]}$$

olur.

(6.1.37) α değeri hesaplanırsa,

$$\alpha = \frac{mb^2}{mb^2\varepsilon + 2c^2(\sin(b\sqrt{2U}) - \varepsilon)}$$

bulunur.

(6.1.38) H ortalama eğriliği,

$$H = \frac{-2mb^2c\varepsilon - 2c^3(\sin(b\sqrt{2U}) - \varepsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\varepsilon + 4c^2m(\sin(b\sqrt{2U}) - \varepsilon)}}$$

dır.

(6.1.39) J değeri ise,

$$J = \frac{2c^3(\sin(b\sqrt{2U}) - \varepsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\varepsilon + 4c^2m(\sin(b\sqrt{2U}) - \varepsilon)}}$$

olur.

O halde $K = s b t \neq 0$ halinde her üç durumda da büyüklükler eğrilik çizgileri koordinat sisteminde sadece U parametresi cinsinden ifade edilebildiğinden yüzey bir dönel yüzeydir.

7.2 $K \neq \text{sbt}$ Hali İçin Koordinat Dönüşümü

$p_1 = \bar{p}_2$ kabul edilmişti dolayısıyla

$$E = G$$

dır. Buna göre

(7.5) ve (7.6) denklemlerinden

$$\bar{E} = E \text{ ve } \bar{G} = G \text{ bulunur.}$$

$E = E(u + v)$ olduğundan,

$$E = E(U)$$

dır. (6.2.10) denklemi

$$K = -\frac{1}{2E} (\ln E)'' \quad f' = \frac{df}{dU}$$

olur. Bu denklemin çözümünden $K = K(U)$ elde edilir.

(6.2.13) H ortalama eğriliği,

$$H = \frac{2E^3 K + 2EC^2 - E'^2}{\pm 2E \sqrt{2E(2E^2 C - E'^2)}}$$

dır.

(6.2.14) J değeri hesaplanırsa,

$$J = \frac{2E^3 K + E'^2 - 2EC^2}{\pm 2E \sqrt{2E(2E^2 C - E'^2)}}$$

bulunur.

Aynı şekilde

$$e_v + e_u = 0 \text{ için}$$

$$E = E(V)$$

olup

Gauss denklemi

$$K = -\frac{1}{2E}(\ln E)''$$

olur. Bu denklemin çözümünden $K = K(V)$ elde edilir.

H ortalama eğriliği,

$$H = \frac{2E^3 K + 2EC^2 - E'^2}{\pm 2E\sqrt{2E(2E^2 C - E'^2)}}$$

dır.

J değeri ise,

$$J = \frac{2E^3 K + E'^2 - 2EC^2}{\pm 2E\sqrt{2E(2E^2 C - E'^2)}}$$

bulunur.

Görülüyor ki büyüklükler eğrilik çizgileri koordinat sisteminde sadece U ya da sadece V parametresine bağlıdır. O halde yüzey dönel bir yüzeydir.

$p_1 = \bar{p}_2$, $K \neq \text{sbt}$ için genel halde

$$K = \frac{4BE^2 - 1}{E^2} s \quad s = \text{sbt}$$

dır. Bu yüzeylerin ayrıca incelenmesi gerekir.

8. SONUÇLAR

1. Yüzeylerin eğrilik çizgileri korunarak bir izometri kabul etmesi probleminin ele alındığı Blashke (1949) deki çalışmada verilen ve karmaşık gözüken formülün oldukça sade şekli elde edilmiştir.

2. Bir yüzeyin eğrilik çizgileri ile sabit açı yapan bir dik şebekeye sahip olması için, $K(\neq 0)$ Gauss eğriliği, $p, \bar{p}$ şebekenin jeodizik eğrilikleri olmak ve 1 ve 2 koordinat eğrileri doğrultusundaki invaryant türevleri göstermek üzere

$$\left(\frac{p}{K}\right)_1 = \left(\frac{\bar{p}}{K}\right)_2$$

koşulunu taşımaktadır.

3. Üzerinde eğrilik çizgileri ile sabit açı yapan bir dik şebekeye sahip tek açılabilir yüzey ($K = 0$) silindirdir.

4. Eğrilik çizgileriyle 45° lik açı yapan bir dik şebekeye sahip $K = sbt \neq 0$ yüzeyleri için, şebeke izometriktir. Bu yüzeyler üç tanedir:

$$i). K = -2c^2, E = \frac{1}{2c^2U^2}, H = \frac{c(2m - 2c^2U^2)}{\pm\sqrt{2(-m^2 + 2c^2mU^2)}}$$

$$ii) K = 2\epsilon^2, \epsilon = \pm 1, E = \frac{b^2}{2c^2[ch(b\sqrt{2}U) + \epsilon]}, H = \frac{2mb^2c\epsilon - 2c^3(ch(b\sqrt{2}U) + \epsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\epsilon - 4c^2m(ch(b\sqrt{2}U) + \epsilon)}}$$

$$iii) K = 2\epsilon^2, E = \frac{b^2}{2c^2[\sin(b\sqrt{2}U) - \epsilon]}, H = \frac{2mb^2c\epsilon - 2c^3(\sin(b\sqrt{2}U) - \epsilon)}{\pm b\sqrt{2m^2b^2\epsilon - 4c^2m(\sin(b\sqrt{2}U) - \epsilon)}}$$

formüllerde U, V eğrilik çizgileri parametreleridir.

5. Eğrilik çizgileri ile 45° lik açı yapan bir izometrik şebekeye sahip yüzeyler $K \neq sbt$ iki sınıfa ayrılır.

$$i) E = E(U), 2EK + (\ln E)'' = 0, H = \frac{2E^3K + 2EC^2 - E'^2}{\pm 2E\sqrt{2E(2E^2C - E'^2)}}, C = sbt.$$

Bu yüzeyler dönel yüzeyler olup, birbirine izometrik olarak tasvir edilebilir. U, V eğrilik çizgileri parametreleridir.

$$\text{ii) } K = K(E) = s \frac{4BE^2 - 1}{E^2}$$

KAYNAKLAR

Bonnet, O., (1867), *Memorie Sur La Theorie Des Surfaces, Applicable Sur Une Surface Donnee*, *Journale De l'Ecole Polytechnique*, T.25.

Blaschke, W., (1949), *Diferensiyel Geometri Dersleri*, Şirketi Mürettebiye Basımevi.

Bryant, R.L., Chern, S.S., Gardner, R.B., Gold Schmidt, H.L., Griffiths, P.A., (1991), *Exterior Diferantial Systems*, Springer-Verlak, New York.

Cartan, E., (1942), "Sur Les Couples De Surfaces Applicables Avec Conservation Des Courbures Principales", *Bull. Sci. Math*, 66:55-85.

Chern, S.S., (1985), "Deformation of surfaces Preserving Principal Curvatures", *Differential Geometry and Complex Analysis*, 155-163.

Roussos, I.M., (1987), "Principal Curvature Preserving Isometries of Surfaces in Ordinary Space", *Bol. Soc. Mat.* 18,2:95-105.

Kemmotsu, K., (1994), "An İntrinsic Characterization of H-Deformable Surfaces", *J. London Math. Soc.* 49:555-568.

Soyuçok, Z., (1995), "The Problem of Non-Trivial Isometries of Surfaces Preserving Principal Curvatures", *Journal of Geometry*, Birkhauser Verlag, 52:174-187.

Roussos, I.M., (1999), "Tangential Developable Surfaces as Bonnet Surfaces", *Akta Mathematica Sinica, English Series*, Springer Verlak, 15,2:269-276.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 01.12.1978

Doğum yeri Erzurum

Lise 1989-1995

Bakırköy İ. H. Lisesi

Lisans 1996-2000

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2000-2003

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri

Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Geometri Programı

