

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

139730

SİMETRİK OPERATÖRLERİN KENDİNE EŞ
GENİŞLETİLMELERİ ve BAZI DİFERANSİYEL
DENKLEMLERE UYGULANMASI

- 139730 -

Matematik Mühendisi Nihan TIRMIKÇIOĞLU

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet Bayramoğlu

M. Bayramoğlu

Prof. Tahik Sisman

T. Sisman

Prof. Dr. Akin Tasdizen

A. Tasdizen

İSTANBUL, 2003



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
1. GİRİŞ	1
2. DEFEKT İNDİSLERİ VE CAYLEY DÖNÜŞÜMLERİ	2
3. KENDİNE EŞ GENİŞLETİLMELERİN OLUŞTURULMASI.....	10
4. SİMETRİK OPERATÖRLERİN KENDİNE EŞ GENİŞLETİLMELERİNİN OLUŞTURULMASI.....	16
5. İKİNCİ DERECE ADI DİFERANSİYEL OPERATÖRLER.....	20
6. UYGULAMALAR.....	34
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	40

ÖNSÖZ

2001 yılında başlamış olduğum akademik kariyerimin ilk ciddi sınavını vermekteyim. Çalışmalarım esnasında büyük bir sabır ve özveriyle bana yardımcı olan, sevgi ve anlayışını esirgemeyen, desteğiyle yanımda olan saygıdeğer büyüğüm, çok değerli hocam Prof.Dr.Mehmet Bayramoğlu'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bana bu bölümde yüksek lisans ve akademik kariyer yapma olanağını sağlayan, üniversite hayatımın başlangıcından bu yana asla boşa çıkartmayacağım inancını ve güvenini daima hissettiğim, çok değerli hocam Prof.Tahir Şişman'a; sağlamış oldukları olanaklarla beni en iyi koşullarda yetiştiren ve bugün bulunduğum konuma getiren, haklarını asla ödeyemeyeceğim sevgili annem ve babam Nurhan&Erdoğan Tırmıkçioğlu'na; büyük bir özveriyle her daim yanımda olan,sonsuz sevgisiyle bana güç veren teyzem Tenzile Kandemirer'e ve hayatımdaki en kadim dostlarım, sırdaşlarım,en büyük manevi destekçilerim kısacası herşeyim olan, kızkardeşlerim Evrim&Zeynep Tırmıkçioğlu'na teşekkürler.



ÖZET

Bu çalışmada Hilbert uzayında tanımlı simetrik operatörlerin defekt indislerinin eşit olması halinde kendine eş genişletilmeleri incelenmiş ve çeşitli adi diferansiyel denklemlere uygulamaları verilmiştir.

Anahtar kelimeler : simetrik operatörler, kendine eş genişletme, defekt indisleri, Von Neumann formülleri



ABSTRACT

In this work, self-adjoint extensions of symmetric operators in Hilbert spaces with equal defect indices and its applications to various differential equations have been studied.

Keywords : symmetric operators, self-adjoint extensions, defect indices, Von Neumann Formulas



1.GİRİŞ

Hilbert uzayında tanımlı Kendine Eş Operatörler teorisi Fonksiyonel Analiz'in en önemli dallarından birisidir. Bu konu, başta M.S.Birman ve M.Z .Solonyak'a ait olan, 1987 yılına ait, Spectral Theory of Self-Adjoint Operators olmak üzere, birçok kitapta detaylı bir şekilde işlenmiştir. Bu çalışmamızda defekt sayıları aynı olan simetrik operatörlerin kendine eş genişletilmelerini ve teorisinin bazı diferansiyel operatörlere uygulamalarını inceledik. Belirtelim ki, defekt indisleri sonlu ve eşit olan simetrik operatörlerin bütün kendine eş genişletilmeleri Von Neumann tarafından ortaya konmuştur. Sınır koşulları aracılığı ile simetrik adi diferansiyel denklemlerin bütün kendine eş genişletilmeleri yazılabilir. Sonsuz boyutlu Hilbert uzayında tanımlı kendine eş operatör katsayılı diferansiyel denklemlerde çoğu kez defekt sayıları sonsuz olur. O nedenle, Neumann Teorisinin yardımıyla operatörün kendine eş genişletilmeleri yazılamayabilmektedir. Bu durum için, "binar ilişki" denilen kavramın yardımı ile, operatör katsayılı diferansiyel denklemlerin kendine eş genişletilmeleri yazılmıştır. Bu konuya ait güncel çalışmalar, çalışmamızın kaynaklar kısmı belirtilmiştir. Ayrıca simetrik operatörlerin kendine eş genişletilmeleri teorisi kuantum mekaniğinde de önemli uygulamalara sahiptir.

2. DEFEKT İNDİSLERİ VE CAYLEY DÖNÜŞÜMLERİ :

T , H Hilbert uzayında herhangi lineer operatör olsun. $z \in K$ olmak üzere tüm $f \in D(T)$ için $\|(z - T)f\| \geq k(z)\|f\|$ olacak şekilde bir $k(z) > 0$ vardır şeklinde tanımlanan $\Gamma(T)$ kümesine T 'nin regüler kümesi denir.

Önermeler :

1) Ancak ve ancak $(z - T)$ sürekli terse çevrilebilir ise $z \in \Gamma(T)$ 'dir.

Bu durumda $\|(z - T)^{-1}\| \leq k(z)^{-1}$ dir.

2) H kompleks ve T Hermitian ise $C/\Re \subset \Gamma(T)$ dir.

3) T izometrik bir lineer operatör ise $K / \{z \in K : z = 1\} \subset \Gamma(T)$ dir.

4) $\Gamma(T)$ açık kümedir.

İspat :

1) $f \in D(T)$ olmak üzere $\|(z - T)f\| \geq k(z)\|f\|$ eşitsizliğinden $(z - T)$ 'nin injektif $\|(z - T)^{-1}\| \leq k(z)^{-1}$ olduğu görülmektedir. $(z - T)$ injektif ve $(z - T)^{-1}$ sınırlı ise bu durumda

$$\|(z - T)f\| \geq \|(z - T)^{-1}\|^{-1} \|(z - T)^{-1}(z - T)f\| = \|(z - T)^{-1}\|^{-1} \|f\| \quad (2.1)$$

elde edilecektir. Netice itibariyle, $z \in \Gamma(T)$ 'dir ve $k(z) = \|(z - T)^{-1}\|^{-1}$ şeklinde seçilebilir.

2) $z = a + ib$ ve $f \in D(T)$ için

$$\|(z - T)f\|^2 = \|(a - T)f\|^2 + b^2 \|f\|^2 \geq b^2 \|f\|^2 \quad (2.2)$$

olup, $z \in \Gamma(T)$ ve $k(z) = |b|$ şeklinde seçilebilir.

3) $|z| \neq 1$ ise bu durumda :

$$\|(z - T)f\| \geq \|If\| - |z| \|f\| = |1 - |z|| \|f\| \quad (2.3)$$

olacaktır. Burada $z \in \Gamma(T)$, $k(z) = |1 - |z||$ şeklinde seçilebilir.

4) $z_0 \in \Gamma(T)$ olsun. $|z - z_0| < k(z_0)$ olacak şekilde $z \in K$ varsa, tüm $f \in D(T)$ için:

$$\|(z - T)f\| \geq \|(z_0 - T)f\| - |z - z_0| \|f\| \geq (k(z_0) - |z - z_0|) \|f\| \quad (2.4)$$

olacaktır. Bu nedenle, $z \in \Gamma(T)$ 'dir, bir başka deyişle $\Gamma(T)$ açıktır. $R(z - T)^\perp$ altuzayı, T ve z in defekt uzayı olarak adlandırılır. $\beta(T, z) = \dim R(z - T)^\perp$ kardinal sayısı ise, T ve z in defekt indisi olarak adlandırılır.

2.1 Teorem

$\beta(T, z)$ defekt indeksi , $\Gamma(T)$ 'nin her bağlantılı alt kümesinde sabittir.

T Hermitian ise, defect indisi üst ve alt yarı düzlemlerde sabittir.

İspat

$\beta(T, z)$ 'in, $\Gamma(T)$ yerel olarak sabit olduğunu, bir başka ifadeyle her $z_0 \in \Gamma(T)$ ve tüm $z \in \Gamma(T)$ için , $|z - z_0| < \varepsilon$ iken $\beta(T, z) = \beta(T, z_0)$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ 'ın varlığını göstermemiz yeterlidir. İlgili yardımcı teoremden, A yerine $z_0 - T$; B yerine I yazalım. $R(z - T)$ üzerine ortogonal projeksiyon için, $\theta(z)$ diyelim. Buradan, $z \rightarrow z_0$ olmak üzere, $\|\theta_z - \theta_{z_0}\| \rightarrow 0$ 'dır. $P_z, R(z - T)^\perp$ üzerine ortogonal projeksiyon ve $z \rightarrow z_0$ olmak üzere, $\|P_z - P_{z_0}\| = \|\theta_z - \theta_{z_0}\|$ 'dır. $|z - z_0| < \varepsilon$ iken, $\|P_z - P_{z_0}\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ varsa, $\beta(T, z) = \beta(T, z_0)$ 'dır. T Hermitian ise, üst ve alt yarı düzlemler, $\Gamma(T)$ 'nin bağlantılı alt kümeleridir. Bu nedenle de defekt indisi sabittir. T , H kompleks Hilbert uzayında bir simetrik operatör olsun T 'nin Cayley dönüşümü, $R(-i - T)$ den $R(i - T)$ üzerine bir izometrik eşlemedir. $R(I - V)$ H 'de yoğunudur ve

$$T = i(I + V)(I + V)^{-1} \quad (2.5)$$

Özel olarak T operatörü, V ile tanımlanmaktadır. Bu ifademizi, şu şekilde ispatlamaya çalışalım. Her $g = (-i - T)f \in R(-i - T) = D(V)$ için :

$$\|Vg\|^2 = \|(i-T)(i-T)^{-1}g\|^2 = \|(i-T)f\|^2 = \|f\|^2 + \|Tf\|^2 = \|(-i-T)f\|^2 = \|g\|^2 \quad (2.6)$$

dir. Bu ise V 'nin izometrik olduğunu göstermektedir. $(-i-T)^{-1}$, $D(V) = R(-i-T)$ 'yi $D(T)$ üzerine ; $(i-T)$ ise $D(T)$ 'yi $R(i-T)$ üzerine dönüştürdüğünden

$R(V) = R(i-T)$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} I-V &= I + (i-T)(i+T)^{-1} \\ I-V &= [(i+T) + (i-T)](i+T)^{-1} = 2i(i+T)^{-1} \\ I+V &= I - (i-T)(i+T)^{-1} = 2T(i+T)^{-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

dir. Özel olarak, $R(I-V) = D(T)$ yoğundur. $I-V$ injektif, $T = i(I+V)(I-V)^{-1}$ 'dir

Genelleştirilmiş Cayley dönüşümünü tanımlayalım. Her $z \in C$ ve tüm $z \succ 0$ iken

$$V_z = (z-T)(z^* - T)^{-1} \quad (2.8)$$

dir. Dolayısıyla, $V_z, R(z^* - T)$ 'nin, $R(z-T)$ üzerine izometrik eşlemesidir ve

$$T = (z - z^* V_z)(I - V_z)^{-1} \quad (2.9)$$

şeklindedir.

2.2 Teorem

H kompleks Hilbert uzayındaki bir V operatörü, $D(V)$ 'nin $R(V)$ üzerine bir izometrik eşlemesi ise; $R(I-V)$, H 'de yoğun ise, bu durumda V operatörü, $T = i(I+V)(I-V)^{-1}$ şeklinde tanımlanan simetrik operatörün Cayley dönüşümüdür.

İspat :

Eğer V operatörü, T 'nin Cayley dönüşümü ise, teoremden verdiğimiz özelliklere sahiptir.

Bunun yanısıra

$$T = i(I + V)(I - V)^{-1}$$

olarak tanımlanıyor. Buna göre,,tüm $f \in D(V)$ için, $Vg = g$ eşitliği

$$\langle g, f - Vf \rangle = \langle g, f \rangle - \langle g, Vf \rangle = \langle g, f \rangle - \langle Vg, Vf \rangle = \langle g, f \rangle - \langle g, f \rangle = 0 \quad (2.10)$$

eşitliğini sağladığından $I - V$ injektiftir. O halde, $T = i(I + V)(I - V)^{-1}$ şeklinde bir T operatörü tanımlayabiliriz. . Kabulumuzden, $D(T) = R(I - V)$ yoğundur ve bundan tüm $f = (I - V)f_1$ ve $g = (I - V)g_1$ için :

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= -i \langle (I + V)(I - V)^{-1} f, g \rangle = -i \langle (I + V)f_1, (I - V)g_1 \rangle \\ \langle Tf, g \rangle &= -i \{ \langle f_1, g_1 \rangle + \langle Vf_1, g_1 \rangle - \langle f_1, Vg_1 \rangle - \langle Vf_1, Vg_1 \rangle \} \\ \langle Tf, g \rangle &= -i \{ \langle Vf_1, Vg_1 \rangle + \langle Vf_1, g_1 \rangle - \langle f_1, Vg_1 \rangle - \langle f_1, g_1 \rangle \} = \langle f, Tg \rangle \\ \langle Tf, g \rangle &= i \langle (I - V)f_1, (I + V)g_1 \rangle = i \langle f, (I + V)(I - V)^{-1} g \rangle = \langle f, Tg \rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

olduğunu görmekteyiz. Bunun sonucu olarak T simetriktir. V 'nin, T 'nin Cayley dönüşümü olduğunu gösterelim:

$$(i - T) = i - i(I + V)(I - V)^{-1} = i[(I - V) - (I + V)](I - V)^{-1} = -2i(I - V)^{-1} \quad (2.12)$$

$$(-i - T) = -i[(I - V) + (I + V)](I - V)^{-1} = -2i(I - V)^{-1} \quad (2.13)$$

2.3 Teorem

T , kompleks Hilbert uzayında simetrik operatör ve V bu operatörün Cayley dönüşümü olsun:

1 . Aşağıdaki durumlar birbirlerine eşittir

- A) T kapalıdır.
- B) V kapalıdır
- C) $D(V) = R(i + T)$ kapalıdır
- D) $R(V) = R(i - T)$ kapalıdır.

2 . Eğer V unitary ise, T kendine eştir.

İspat :

1 . A ve C, D' e eşittir. T sadece ve sadece $(\pm i - T)^{-1}$ kapalı ise kapalıdır. $(\pm i - T)^{-1}$ sınırlı operatörü, sadece ve sadece

$$D((i - T)^{-1}) = R(i - T) = R(V) \text{ veya } D((-i - T)^{-1}) = R(i + T) = D(V) \quad (2.14)$$

kapalı ise kapalıdır.

B, C'e eşittir.: V sınırlı operatörü, sadece ve sadece tanım bölgesi (domain) kapalı olduğunda kapalıdır.

2 . T, sadece ve sadece $R(i - T) = R(-i - T) = H$ iken yani sadece ve sadece $D(V) = R(V) = H$ iken kendine eşittir. T_1, T_2 kompleks Hilbert uzayında simetrik operatörler ve V_1, V_2 Cayley dönüşümleri olsun. Sadece ve sadece $V_1 \subset V_2$ ise $T_1 \subset T_2$ 'dir. Sonuç olarak, kapalı özelliğe sahip T'nin V Cayley dönüşümünün tüm V' genişletilmelerini belirlersek , bir T simetrik operatörünün tüm simetrik genişletilmelerini elde edebiliriz ve dolayısıyla bunlara karşılık gelen $T' = i(I + V')(I - V')^{-1}$ operatörlerini hesaplayabiliriz. Tüm V' unitary belirlediğimiz takdirde, tüm kendine eş genişletilmeleri elde edebiliriz. Özel olarak, T, sadece ve sadece V unitary genişletilmelere sahip iken kendine eş genişletilmelere sahiptir. Şimdi V 'nin V' genişletilmelerini oluşturmaya çalışalım

2.4 Teorem

T kompleks Hilbert uzayında simetrik operatör ve V Cayley Dönüşümü olsun.

1) $R(i - T)^{\perp}$ 'nin F_- kapalı alt uzayı ve $R(-i - T)^{\perp}$ 'nin F_+ kapalı alt uzayları varsa , F_+ 'de

F_- 'e bir $\tilde{V}$ izometrik eşlemesi sözkonusu ise,

$$D(V') = R(-i - T') = R(-i - T) \oplus F_+ , \quad (2.15)$$

$$R(V') = R(i - T') = R(i - T) \oplus F \quad (2.16)$$

eşitlikleri mevcut ise, V' T'nin bir simetrik genişletilmesinin Cayley dönüşümüdür.

İspat

V' , verilmiş form ise, V' açıkça $R(-i-T) \oplus F_+$ 'ın, $R(i-T) \oplus F_-$ üzerine bir izometrik eşlemesidir. V' , 2.2 konu başlığındaki teoremden sözü edilen ilk koşulu sağlamaktadır. $R(I-V)$ yoğun olduğundan, $R(I-V')$ de yoğundur. Bunun sonucunda, V' , T 'nin bir simetrik genişletilmesinin Cayley dönüşümüdür. $\tilde{V}$, F_+ 'ın F_- üzerine bir izomorfizmi olduğundan $\dim F_+ = \dim F_-$ 'dir.

3) T , ancak ve ancak defekt indisleri birbirine eşitse, kendine eş genişletilmeleri mevcuttur.

İspat

İlk şıktan anlaşılacağı gibi, $R(-i-T)^\perp$ 'nin $R(i-T)^\perp$ üzerine bir $\tilde{V}$ izometrik eşlemesi varsa, V üniter bir genişletilme içermektedir. Bu da sadece ve sadece $\dim R(-i-T)^\perp = \dim R(i-T)^\perp$ iken mümkün olmaktadır.

2.5 Teorem

T kompleks Hilbert uzayında simetrik operatör olsun.

- 1) $\Gamma(T) \cap R \neq \{ \}$ olduğunda, T 'nin kendine eş genişletilmeleri vardır.
- 2) Eğer T yarı sınırlı ise, kendine eş genişletilmeleri vardır.

İspat :

- 1) $\Gamma(T) \cap R \neq \{ \}$ olduğunda $\Gamma(T)$ bağlantılıdır. 2.1 Teoreminden $\gamma_+(T) = \gamma_-(T)$ 'dir.
- 2) T alttan sınırlı olsun ve c , T 'nin en alt sınırı olsun. Buradan $\lambda < c$ ve tüm sıfırdan farklı $f \in D(T)$ için

$$\|(\lambda - T)f\| \geq \langle f, (T - \lambda)f \rangle \|f\|^{-1} \geq (c - \lambda)\|f\| \quad (2.17)$$

dir. Sonuç olarak, bu durumda da $\Gamma(T) \cap R \neq \{ \}$ olur.

H , kompleks Hilbert uzayı olsun. H 'yi H 'ye dönüştüren bir K eşlemesi şu özellikleri sağlıyorsa bir **eşleniktir** denir.

$$1) \quad f, g \in H; a, b \in C \quad \text{için} \quad K(af + bg) = a^* Kf + b^* Kg$$

$$2) \quad K^2 = I$$

$$3) \quad f, g \in H \quad \text{için} \quad \langle Kf, Kg \rangle = \langle g, f \rangle$$

H'de bir T operatörü, $KD(T) \subset D(T)$ ve $f \in D(T)$ için $TKf = KTf$ ise, K-reeldir.

2.6 Teorem

H bir kompleks Hilbert uzayı ve K, H'de bir konjügasyon olsun. Eğer T, H'de bir K reel simetrik operatör ise, T'nin kendine eş genişletmesi mevcuttur.

İspat :

$D(T) \supset KD(T) \supset K^2 D(T) = D(T)$ olduğundan $KD(T) = D(T)$ dir. $f \in R(i - T)^\perp$ ise tüm $g \in D(T)$ için

$$\langle Kf, (-i - T)g \rangle = \langle Kf, K(i - T)g \rangle = \langle (i - T)g, f \rangle = 0. \quad (2.18)$$

Buradan $Kf \in R(i - T)^\perp$ dir. Benzer şekilde, $f \in R(-i - T)^\perp$ olmak üzere $Kf \in R(i - T)^\perp$ dir. $K^2 = I$ olduğundan, $R(-i - T)^\perp = KR(i - T)^\perp$ dir. $\dim R(-i - T)^\perp = \dim R(i - T)^\perp$ eşitliğinden yola çıkarak, sadece ve sadece $\{Ke_\alpha : \alpha \in A\}$ $R(-i - T)^\perp$ nin bir ortonormal bazı olduğunda, $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ $R(i - T)^\perp$ nin bir ortonormal bazı olduğu söylenebilir.

2.7 Teorem

H kompleks Hilbert uzayı ve T bu uzayda sonlu (m,m) defect indisli bir kapalı simetrik operatör olsun. Eğer T_1, T_2 T'nin kendine eş genişletilmeleri ise o zaman $\forall z \in p(T_1) \cap p(T_2)$ için her $(z - T_1)^{-1} - (z - T_2)^{-1}$ operatörünün boyutu m'den küçük veya m'ye eşittir.

İspat

Her $z \in p(T_1) \cap p(T_2)$, $\Gamma(T)$ 'ye aittir. Sonuç olarak, $R(z - T)^\perp$ m boyutludur.

$f \in R(z - T)^\perp$ için

olduğundan

$$(z - T_1)^{-1} f = (z - T_2)^{-1} f = (z - T)^{-1} F \quad (2.19)$$

$$(z - T_1)^{-1} - (z - T_2)^{-1} = ((z - T_1)^{-1} - (z - T_2)^{-1})p \quad (2.20)$$

$p, R(z - T)^\perp$ üzerine projeksiyon ve $\dim R((z - T_1)^{-1} - (z - T_2)^{-1}) \leq m$ 'dir.



3. KENDİNE EŞ GENİŞLETİLMELERİN OLUŞTURULMASI

H Hilbert kompleks Hilbert uzayında, kapalı bir T simetrik operatörü için şu ifadeleri oluşturalım.

$$\begin{aligned} N_+ &= N(i - T^*) = R(-i - T)^\perp \\ N_- &= N(-i - T^*) = R(i - T)^\perp \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1. Teorem - Von Neumann'ın 1. Formülü

T , kompleks Hilbert uzayında kapalı simetrik operatör olsun. O zaman $D(T^*)$ direkt toplamı

$$D(T^*) = D(T) + N_+ + N_- \quad (3.2)$$

şeklindedir ve

$$T^*(f_0 + g_+ + g_-) = Tf_0 + ig_+ - ig_- \quad (3.3)$$

İspat

$N_+ \subset D(T^*)$ ve $N_- \subset D(T^*)$ olduğundan, $D(T) + N_+ + N_- \subset D(T^*)$ dır. Her $f \in D(T^*)$ 'in;
 $f_0 \in D(T), g_+ \in N_+, g_- \in N_-$ olmak üzere

$$f = f_0 + g_+ + g_- \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilirliğini gösterelim. Bunun için, $f \in D(T^*)$ olduğunu varsayalım. Bilinen izdüşüm teoreminden, $(-i - T^*)f, N_+$ ve $N_+^\perp = R(-i - T)$ da bileşenlerine ayrılabilir. $(-i - T)f_0 \in R(-i - T), g \in N_+$ olmak üzere

$(-i - T^*)f = (-i - T)f_0 + g$ olsun. $T^*f_0 = Tf_0$ ve $T^*g = ig$ olmak üzere ($g_+ = ig/2$):

$$T^*(f - f_0 - g_+) = T^*f - Tf_0 + \frac{1}{2}g = -if + if_0 - \frac{1}{2}g = -i(f - f_0) + ig_+ = -i(f - f_0 - g_+)$$

şeklindeki eşitlik elde edilecektir. $g_- = f - f_0 - g_+$ dersek, o zaman $g \in N_-$ ve $f = f_0 + g_+ + g_-$ olacaktır.

Geriye $f = f_0 + g_+ + g_-$ toplamının, direkt toplam olduğunu göstermek kalıyor yani $f_0 \in D(T), g_+ \in N_+, g_- \in N_-$ iken, $f_0 = g_+ = g_- = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $0 = f_0 + g_+ + g_-$ eşitliğinden

$$0 = T^*(f_0 + g_+ + g_-) = Tf_0 + ig_+ - ig_- \quad (3.5)$$

olacaktır. Buradan

$$(i - T)f_0 = -i(g_+ + g_-) + i(g_+ - g_-) = -2ig_- \quad \text{ve} \quad (-i - T)f_0 = 2ig_+ \quad (3.6)$$

olur. Sonuç olarak, $g_- \in N_- \cap R(i - T) = \{0\}$ ve $g_+ \in N_+ \cap R(-i - T) = \{0\}$ elde edilmektedir. Bundan dolayıdır ki, $g_- = g_+ = 0$ ve dolayısıyla $f_0 = 0$ 'dır.

3.2 Teorem - Von Neumann'ın 2. Formülü :

T kompleks Hilbert uzayında kapalı simetrik operatör olsun. T' 'nün T 'nin bir kapalı simetrik genişletilmesi olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerek ve yeterlidir. F_+ N_+ 'nin ve F_- N_- 'nin kapalı alt uzayları olsun. $f_0 \in D(T), g \in F_+$ için

$$D(T') = D(T) + \{g + \hat{V}g : g \in F_+\}; \quad T'(f_0 + g + \hat{V}g) = Tf_0 + ig - i\hat{V}g = T^*(f_0 + g + \hat{V}g) \quad (3.7)$$

olacak şekilde F_+ 'nün F_- üzerine izometrik $\hat{V}$ eşlemeleri varsa, T' T 'nin bir kapalı simetrik genişletilmesidir ve ancak ve ancak $F_+ = N_+$ ve $F_- = N_-$ olduğunda T' operatörü kendine eşittir.

İspat

İspatımız, Teorem 2.4 'te bahsedilen T' operatörünün aşağıdaki şekilde ifade edilmesiyle elde edilir.

$$\begin{aligned} D(T') &= R(I - V') = (I - V')D(V') = (I - V')(D(V) + F_+) \\ D(T') &= (I - V)D(V) + (I - \hat{V})F_+ = D(T) + \{g - \hat{V}g : g \in F_+\} \end{aligned}$$

$T' \subset T$ olmak üzere, tüm $f_0 \in D(T)$, $g \in F_+$ için

$$T'(f_0 + g - \hat{V}g) = T^*(f_0 + g - \hat{V}g) = Tf_0 + ig + i\hat{V}g, \quad (3.8)$$

$\hat{V} = -\hat{V}$ alınırsa iddiamız doğrulanmış olur. T, T' lineer operatörler olmak üzere, $T \subset T'$ olsun. Eğer $D(T') / D(T)$ bölüm uzayı sonlu boyutlu ise (m boyutlu ise), o zaman T', T 'nin **sonlu boyutlu (m boyutlu) genişlemesidir** denir. Ayrıca T', T 'nin sonlu boyutlu (m boyutlu) kısıtlamasıdır.

3.3 Teorem

T , kompleks Hilbert uzayında kapalı simetrik operatör ve T', T 'nin simetrik genişletilmesi olsun.

- 1) T' sadece ve sadece F_+ 'in m boyutlu olması durumunda, T 'nin bir m boyutlu genişletilmesidir.
- 2) (m, m) T 'nin defekt indisleri olmak üzere, T' simetrik genişletilmesi sadece ve sadece T 'nin m boyutlu genişletilmesi halinde kendine eşittir.

İspat

$$1) \quad D(T') = D(I + \hat{V})F_+ + D(T),$$

$$\dim D(T') / D(T) = \dim(I + \hat{V})F_+ \text{ 'dir.}$$

$$\hat{V}F_+, F_- \subset N_-, F_+ \subset N_+ \text{ ve } N_- \cap N_+ = \{0\} \text{ olduğundan } \dim(I + V)F_+ = \dim F_+ \text{ 'dir.}$$

- 2) T' sadece ve sadece $\dim F_+ = \dim F_- = m$ olduğunda, T 'nin m boyutlu bir genişlemesidir. $F_+ \subset N_+, F_- \subset N_-$ olduğundan, bu, sadece ve sadece $F_+ = N_+$ ve $F_- = N_-$ olması ile mümkündür

T , H Hilbert uzayında bir operatör olsun. A keyfi bir simetrik operatör ve $T \subset A$ olsun. $T=A$ ise o zaman T 'ye **maksimal simetrik operatör** denir . Simetrik operatörün kapanışı da simetrik olduğundan her maksimal simetrik operatör de kapalıdır.

3.4 Teorem

- 1) Kapalı bir T operatörü, en az bir defect indisi 0 iken maksimal simetriktir.
- 2) Her kendine eş operatör maksimal simetriktir.
- 3) T , sonlu defect indislere sahip bir kapalı simetrik operatör olsun. Bu durumda, T 'nin her maksimal genişletmesi kendine eştir.

İspat

- 1) 3.2 başlığı altında ifade edilen teoreme göre, sadece ve sadece iki tane defect indisi sıfırdan farklı olduğunda özel simetrik genişletmeler oluşturabiliriz.
- 2) İlk şıktan da görüldüğü üzere, her kendine eş operatör için, her iki defekt indisi de sıfır olduğundan her kendine eş operatör maksimal simetriktir.
- 3) Bir T ' dağılımı, $F_+ = N_+$ veya $F_- = N_-$ olmak üzere, sadece ve sadece, Teorem 1.12 (1)'deki forma sahip olduğu takdirde maksimal simetriktir. Bu da gösteriyor ki, $F_+ = N_+$ ve $F_- = N_-$ iken T kendine eştir.

3.5 Teorem

T , H kompleks Hilbert uzayında bir K -reel simetrik operatör olsun. T 'nin her $T'K$ -reel kendine eş genişletilmesi için N_+ 'nın bir $\{e_\alpha = \alpha \in A\}$ ortonormal bazı vardır ki, V' T 'nin Cayley dönüşümü olmak üzere,

$$\sum |c_\alpha|^2 < \infty \text{ için } V'(\sum c_\alpha e_\alpha) = \sum c_\alpha K e_\alpha \quad \sum |c_\alpha|^2 < \infty \quad (3.9)$$

'dır. Eğer $\{e_\alpha = \alpha \in A\}$, N_+ 'ın herhangi ortonormal bazı ise, o halde **üniter operatör**

$$\sum |c_\alpha|^2 < \infty \text{ için}$$

$$\hat{V} = N_+ \longrightarrow N_-, \hat{V} = (\sum c_\alpha e_\alpha) = \sum c_\alpha K e_\alpha \quad (3.10)$$

T 'nin bir K reel kendine eş genişletilmesini meydana getirmektedir.

İspat

Eğer $\{e_\alpha = \alpha \in A\}$ N_+ bir ortonormal bazı ise, $\hat{V}$ teoremdaki gibi tanımlıdır ve T' , $\hat{V}$ tarafından tanımlanan T 'nin kendine eş genişletilmesidir. Dolayısıyla:

$$K(f_0 + \sum c_\alpha(e_\alpha + Ke_\alpha)) = Kf_0 + \sum c_\alpha^*(e_\alpha + Ke_\alpha) \in D(T') \quad (3.11)$$

ve tüm $f_0 + \sum c_\alpha(e_\alpha + Ke_\alpha) \in D(T')$ için

$$\begin{aligned} T'K(f_0 + \sum c_\alpha(e_\alpha + Ke_\alpha)) &= TKf_0 + \sum c_\alpha^*(ie_\alpha - iKe_\alpha) = K(Tf_0 + \sum c_\alpha(-iKe_\alpha + ie_\alpha)) \\ TK(f_0 + \sum c_\alpha(e_\alpha + Ke_\alpha)) &= KT'(f_0 + \sum c_\alpha(e_\alpha + Ke_\alpha)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

dır. Sonuç olarak $T'K$ reeldir.

T' , T 'nin K reel kendine eş genişletilmesi olsun ve V' de T' 'nin Cayley dönüşümü olsun. Zorn Lemma'sı yardımıyla ve $\sum |c_\alpha|^2 < \infty$ iken

$$V'(\sum c_\alpha e_\alpha) = \sum c_\alpha Ke_\alpha \quad (3.13)$$

olduğunu gözönünde bulundurarak, $\sum |c_\alpha|^2 < \infty$ için

$$V'(\sum c_\alpha e_\alpha) = \sum c_\alpha Ke_\alpha \quad (3.14)$$

özellği ile N_+ 'da bir $\{e_\alpha = \alpha \in A\}$ maksimal ortonormal sistemin varlığını gösterebiliriz. Dolayısıyla :

$$D(S) = D(T) + \left\{ \sum c_\alpha(e_\alpha + Ke_\alpha) : \sum |c_\alpha|^2 < \infty \right\} \quad (3.15)$$

$f \in D(S)$ için $Sf = T'f$ formülü, T 'nin bir K reel simetrik genişletilmesini tanımlar. Eğer $\{e_\alpha = \alpha \in A\}$ 'nin N_+ 'ın bir ortonormal bazı olmadığını kabul edersek, $R(i-S)^\perp$ 'nin sıfırdan farklı bir f elemanı vardır. Buradan, $V'f \in R(i-S)^\perp$, $Kf \in R(i-S)^\perp$, $KV'f \in R(-i-S)^\perp$ 'dir. Sonuç olarak, $f + KV'f \in R(-i-S)^\perp$ 'dir. Eğer $f + KV'f = 0$ ise, $\{e_\alpha = \alpha \in A\}$ ortonormal

sistemi, $e = \|f\|^{-1} f$ alınarak genişletilebilir. Böylece $Kf = -V'f$ ve dolayısıyla $Ke = V'e$ olacaktır. $f + KV'f \neq 0$ iken

$$V'(f + KV'f) = V'f + V'KV'f = V'f + Kf = K(f + KV'f) \quad (3.16)$$

iken

$$e = \|f + KV'f\|^{-1} (f + KV'f) \quad (3.17)$$

seçebiliriz. Burada :

$$\begin{aligned} V' &= (i - T')(i - T)^{-1}, \\ K(i - T') &= (-i - T')K \\ K(-i - T')^{-1} &= (-i - T')^{-1}(i - T')K(-i - T')(-i - T')^{-1} = (i - T)^{-1}K \\ V'KV' &= K \end{aligned} \quad (3.18)$$

eşitlikleri kullanılmaktadır. Bunun sonucunda, $\{e_\alpha = \alpha \in A\}$ sisteminin maksimalitesine aykırılığını elde ediyoruz.

4. BİR SİMETRİK OPERATÖRÜN KENDİNE EŞ GENİŞLETİLMELERİNİN SPEKTRUMU

4.1 Teorem

T' T 'nin m boyutlu genişletilmesi olmak üzere $\dim(N(\lambda - T') \ominus N(\lambda - T)) \leq m$ 'dir. Eğer sonuç olarak, $n(T, \lambda) < \infty$ ise o zaman $n(T', \lambda) - N(T, \lambda) \leq m$ 'dir.

İspat

$$N(\lambda - T) \subset N(\lambda - T') \text{ d\u00fcr. } (N(\lambda - T') \ominus N(\lambda - T)) \cap D(T) = \{0\}$$

$$(N(\lambda - T') \ominus N(\lambda - T)) + D(T) \subset D(T')$$

olduğunu ifade etmektedir. Buradan

$$\dim(N(\lambda - T') \ominus N(\lambda - T)) \leq \dim D(T') / D(T) = m \quad (4.1)$$

dir. $\forall z \in K$ için $H_z = N(z - T)^\perp$ olsun. T operat\u00f6r\u00fc, a\u00e7ık\u00e7a, $N(z - T)$ 'yi kendi i\u00e7ine e\u0157lemektedir. T\u00fcm $f \in H_z \cap D(T)$ ve $g \in N(z - T)$ i\u00e7in

$$\langle g, Tf \rangle = \langle Tg, f \rangle = z^* \langle g, f \rangle = 0 \quad (4.2)$$

oldu\u011fundan $T(H_z \cap D(T)) \subset H_z$ 'dir yani $Tf \in N(z - T)^\perp = H_z$ dir. Sonu\u00e7 olarak H_z , T 'nin indirgenmi\u015f alt uzayıdır. T_z ise T 'nin H_z 'e kısıtlamasıdır yani $f \in D(T)$ i\u00e7in

$$D(T_z) = H_z \cap D(T) \text{ ve } T_z f = Tf \quad (4.3)$$

A\u00e7ıktır ki, $z - T_z$ injektiftir. Bir simetrik operat\u00f6r\u00fcn kısıtı olarak T_z Hermitiandir. $D(T_z)$ 'e ortogonal olan herhangi $f \in H_z$, $D(T) = D(T_z) + N(z - T)$ 'e ortogonal olan oldu\u011fundan, $D(T_z)$ H_z 'de yo\u011fundur. T_z, H_z \u00fczerinde bir simetrik operat\u00f6rd\u00fcr. T_z operat\u00f6r\u00fc kapalıdır. Bunun sonucu olarak :

$$S(T) = K - \Gamma(T) \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanan $S(T)$, T 'nin spektral kernelidir.

$S_e(T) = \{z \in K: (z - T_z)^{-1} \text{ sınırsız ya da } n(T, z) = \infty\}$ kümesi T 'nin esas spektral kernelidir.

4.2 Teorem

T , kapalı simetrik operatör olsun.

- a) $S_e(T) \subset S(T) \subset R$ ve $S(T) \subset \sigma(T)$ 'dir.
- b) Eğer T' kapalı simetrik genişletilmesi ise $S(T) \subset S(T')$ ve $S_e(T) \subset S_e(T')$ dür.
- c) Eğer T' , T 'nin sonlu boyutlu simetrik genişletilmesi ise $S_e(T') \subset S_e(T)$ 'dir.

İspat

- a) Eğer $\lambda \in S_e(T)$ ise $\dim N(\lambda - T) = \infty$ veya $(\lambda - T_\lambda)^{-1}$ sınırsızdır. Açıktır ki her iki durumda da $\lambda \in S(T)$ dir. $\Gamma(T)$ üst ve alt yarı düzlemleri içerdiğinden $S(T) \subset R$ 'olduğu aşıkardır. $(\lambda - T)$, $\lambda \in S(T)$ için sürekli ters çevrilebilir değildir. Dolayısıyla $S(T) \subset \sigma(T)$ dir.
- b) $\Gamma(T)$ 'nin tanımından $\Gamma(T') \subset \Gamma(T)$ dir ve dolayısıyla $S(T) \subset S(T')$ dür. $S_e(T) \subset S_e(T')$ olduğunu gösterelim. $\lambda \in S_e(T)$ olsun. $n(T', \lambda) = \infty$ ise, $\lambda \in S_e(T')$ dür. Bunun sonucu olarak, $n(T, \lambda) \leq n(T', \lambda) < \infty$ bir başka deyişle $(\lambda - T_\lambda)^{-1}$ in sınırsız olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, $\|f_n\| = 1$ ve $(\lambda - T_\lambda)f_n \rightarrow 0$ olacak şekilde $D(T_\lambda)$ da bir (f_n) serisi içerecektir. $f_{n_k} \rightarrow f, \|f\| = 1, T_\lambda f_{n_k} \rightarrow \lambda f$ yakınsak olmayan alt seri içerecektir. Yani, $f \in D(T_\lambda)$ belirttiğinden $(\lambda - T_\lambda)f = 0$ 'dır. Bu da, $(\lambda - T_\lambda)$ nın injektivitesi ile çelişecektir.

P , sonlu boyutlu $N(\lambda - T')$ alt uzayının üzerine ortogonal projeksiyon ve

$$g_n = (I - P)f_n$$

olsun. P kompakt olduğundan, (f_n) 'in bir (f_{n_k}) alt serisi vardır ve $Pf_{n_k} \rightarrow h$ için bir $h \in H$ mevcuttur. Burada $g_{n_k} = (I - P)f_{n_k}$ serisi yakınsaktır.

$$(\lambda - T'_\lambda)g_{n_k} = (\lambda - T')f_{n_k} - (\lambda - T')Pf_{n_k} = (\lambda - T)f_{n_k} \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

$(\lambda - T'_\lambda)^{-1}$ sınırsız ve böylece $\lambda \in S_e(T')$ dür.

c) Burada $S_e(T') \subset S_e(T)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $S_e(T) \subset S_e(T')$ olduğunu bilmekteyiz. $\lambda \notin S_e(T)$ olduğunu kabul edelim ve $\lambda \notin S_e(T')$ 'yi ispatlayalım. (3.3) no'lu Teorem'den $n(T', \lambda) \leq n(T, \lambda) + m < \infty$ dur. $(\lambda - T'_\lambda)^{-1}$ operatörü sürekli ve kapalıdır

Dolayısıyla,

$$R(\lambda - T) = R(\lambda - T'_\lambda) = D((\lambda - T'_\lambda)^{-1}) \quad (4.6)$$

kapalıdır. T' , T 'nin sonlu boyutlu bir genişlemesi olmak üzere, sonlu

$$R(\lambda - T') = R(\lambda - T) + L\{f_1, \dots, f_l\} \quad (4.7)$$

olacak şekilde sonlu $f_1, \dots, f_l$ elemanları mevcuttur.

Bu yüzden, $D(\lambda - T'_\lambda)^{-1} = R(\lambda - T'_\lambda) = R(\lambda - T')$ kapalıdır ve bunun için $(\lambda - T'_\lambda)^{-1}$ kapalı operatörü süreklidir. Dolayısıyla, $\lambda \notin S_e(T')$ dür.

4.3 Teorem

T , kompleks Hilbert uzayında sonlu eşit defect indislere sahip kapalı simetrik operatör olsun. T 'nin tüm kendine eşlenik genişletilmeleri aynı esas spektruma sahiptir. Eğer T 'nin herhangi kendine eş genişletilmesi bir saf ayrık spektruma sahipse, T 'nin tüm kendine eş genişletilmeleri de sahiptir.

İlk iddiamız bir önceki teoremden rahatlıkla görülebilir. İkinci iddiamız ise, ancak ve ancak temel spektrum boş iken, spektrumun ayrık olduğu görüşünden teyitlenebilir.

4.4 Teorem

T kompleks Hilbert uzayında sonlu ve eşit defect indislerine sahip kapalı simetrik operatör olsun ve herhangi $\lambda \in R, c > 0$ ve tüm $f \in D(T)$ için $\|(\lambda - T)f\| \geq c\|f\|$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T 'nin kendine eş her T' genişletilmesi şu özelliğe sahiptir :

$\sigma(T') \cap (\lambda - c, \lambda + c)$ sadece toplam katsayıları m 'den küçük olan, **isolated (izole)** özdeğerler içerir.

İspat

T' , E spektral ailesi için, $\dim R(E(\lambda + c-) - E(\lambda - c)) \leq m$ olduğunu ispat edelim. $\dim R(E(\lambda + c-) - E(\lambda - c)) > m$ olduğunu kabul edelim. $\dim D(T') / D(T) = m$ ve $R(E(\lambda + c-) - E(\lambda - c)) \subset D(T')$ iken, $f \neq 0$ olmak üzere bir $f \in R(E(\lambda + c-) - E(\lambda - c)) \cap D(T)$ vardır. Aynı zamanda bu f için :

$$c\|f\| \leq \|(\lambda - T)f\| = \left\{ \int_{|\lambda - t| < c} |\lambda - t|^2 d\|E(t)f\|^2 \right\}^{1/2} < c\|f\| \quad (4.8)$$

dir ki bu da bir çelişkidir.

5. İKİNCİ DERECE ADI DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

$(a,b), R$ 'de sınırlı veya sınırsız bir aralık olsun ve $r:(a,b) \rightarrow R$ her yerde lokal olarak integre edilebilir, pozitif ölçülebilir fonksiyon olsun, bir başka deyişle, (a,b) 'nin her kompakt alt aralığında integre edilebilir olsun.

$L_2(a,b,r)$ Hilbert uzayını gözönüne alalım. Bu uzay

$$\int_a^b |f(x)|^2 r(x) dx < \infty \quad (5.1)$$

olacak şekilde (a,b) 'de tanımlı, ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır. $L_2(a,b,r)$ 'de skaler çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)^* g(x) r(x) dx \quad (5.2)$$

olup, buna karşılık gelen norm $\| \cdot \|$ şeklindedir.

$U_r: L_2(a,b,r) \rightarrow L_2(a,b), U_r f = r^{1/2} f$ formülü, $L_2(a,b,r)$ 'nin $L_2(a,b)$ üzerine bir izomorfizmini tanımlamaktadır. Özel olarak, $L_2(a,b,r)$ bir Hilbert uzayıdır. Öncelikle

$$Lf = \frac{1}{r} \left\{ -(pf')' + isf' + i(sf)' + qf \right\} \quad (5.3)$$

şeklinde L diferansiyel formlarını ele alalım. Bu formda p,q,r ve s katsayıları (a,b) de tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar olup, aynı zamanda p ve s sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. Tüm $x \in (a,b)$ için $p(x) > 0, r(x) > 0$ 'dır.

$a > -\infty$ ve $p(a) > 0, r(a) > 0$ olacak şekilde p,q,r ve s katsayıları $[a,b)$ 'de sürekli genişletilebiliyorsa, L regülerdir. L, a ve b' de regüler ise regülerdir denir. Eğer a' da, b' de veya a veya b' de regular değilse **singülerdir** denir.

(5.3) formu ile tanımlanan L ile $L_2(a,b,r)$ operatörlerini tanımlayalım. L tarafından indirgenen T maksimal operatörü,

$$D(T) = \left\{ f \in L_2(a,b,r), \quad f \text{ sürekli türevlenebilir, } f' \text{ (a,b)'de mutlak sürekli ve } Lf \in L_2(a,b,r) \right\}$$

ve $f \in D(T)$ için $Tf = Lf$ şeklinde tanımlanır. L tarafından indirgenmiş T_0 minimal operatörü ise

$$D(T_0) = \left\{ f \in D(T): f \text{ (a,b)'de kompakt} \right\}$$

ve

$f \in D(T_0)$ için $T_0 f = Tf$ formülü ile tanımlanır.

5.1 Teorem

L , (5.3)'deki gibi tanımlanan T_0 operatörü simetriktir. $s = 0$ iken, T_0 eşit defect indislerine sahiptir bir başka deyişle T_0 kendine eş genişletilmelere sahiptir.

İspat

$D(T_0)$ yoğundur çünkü $C_0^\infty(a,b) \subset D(T_0)$ dır. Bu yüzden T_0 simetriktir. $s = 0$ olduğu durumda, T_0 , $L_2(a,b,r)$ üzerinde doğal konjügasyon için K-reeldir.

$z \in C$ ve $g:(a,b) \rightarrow C$ lokal integrallenebilir fonksiyon olmak üzere, $f:(a,b) \rightarrow C$ şeklinde tanımlanmış fonksiyon, sürekli türevlenebilir özelliğine sahipse, türevi de mutlak sürekli ise ve (a,b) 'nin hemen her yerinde $(L - z)f(x) = g(x)$ varsa, $(L - z)f = g$ denkleminin bir çözümü vardır.

$(L - z)f = 0$ homojen denkleminin her f çözümü, $(pf)'$ sürekli olduğundan, iki defa sürekli türevlenebilir.

$(L - z)f = 0$ homojen denkleminin u_1, u_2 çözümleri, iki boyutlu kompleks vektör uzayı oluşturmaktadır. u_1, u_2 çözümleri; Wronskien determinantının değeri, herhangi $x \in (a,b)$ için sıfırdan farklı olduğunda, temel sistem oluşturmaktadır bir başka deyişle lineer bağımsızdırlar.

$(L - z)f = 0$ homojen denkleminin u_1, u_2 çözümleri, iki boyutlu kompleks vektör uzayı oluşturmaktadır. u_1, u_2 çözümleri; Wronskien determinantının değeri, herhangi $x \in (a, b)$ için sıfırdan farklı olduğunda, temel sistem oluşturmaktadır bir başka deyişle lineer bağımsızdırlar.

$$W(u_1, u_2, x) = p(x) \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} = p(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)) \quad (5.4)$$

Eğer $g: (a, b) \rightarrow C$ lokal integrallenebilir fonksiyon ve $u_1, u_2, (L - z)U = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri iseler, $(L - z)h = g$ denkleminin h çözümleri, $c \in (a, b); c_1, c_2 \in C$ olmak üzere

$$h(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + u_1(x) \int_c^x W(u_1, u_2, y)^{-1} u_2(y) g(y) r(y) dy - u_2(x) \int_c^x W(u_1, u_2, y)^{-1} u_1(y) g(y) r(y) dy \quad (5.5)$$

şeklinde olacaktır. $f, g: (a, b) \rightarrow C$ sürekli türevlenebilir fonksiyonları için, $x \in (a, b)$ olmak üzere:

$$[f, g]_x = p(x)(f'(x)^* g(x) - f(x)^* g'(x)) + 2is(x)f(x)^* g(x) \quad (5.6)$$

tanımlayalım. f', g' mutlak sürekli iseler, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ için

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{f(x)^* Lg(x) - (Lf(x))^* r(x)\} r(x) dx = [f, g]_{\beta} - [f, g]_{\alpha} \quad (5.7)$$

olacaktır. Bu ifadeden açıktır ki $f, g \in D(T)$ için

$$[f, g]_a = \lim_{x \rightarrow a^+} [f, g]_x \text{ ve } [f, g]_b = \lim_{x \rightarrow b^-} [f, g]_x \quad (5.8)$$

mevcuttur ve

$$\langle f, Tg \rangle - \langle Tf, g \rangle = [f, g]_b - [f, g]_a \quad (5.9)$$

5.2 Teorem

$L_{2,0}(a,b,r)$, bu fonksiyonların, $L_2(a,b,r)$ de alt uzayı olsun ve a,b yakınında her yerde sıfır olsun. Bu durumda $Lu = 0$ denkleminin her u çözümü için, $k \in L_{2,0}(a,b,r)$ olmak üzere

$$R(T_0) = \int_a^b u(x)^* k(x) r(x) dx = 0 \quad (5.10)$$

İspat

Sağ taraftaki alt uzayı R ile gösterelim. $f \in D(T_0)$ ve $Lu = 0$ denkleminin her u çözümü için, aşağıdaki kısmi integrasyonu elde ederiz :

$$\int_a^b u(x)^* (T_0 f)(x) r(x) dx = \int_a^b (Lu)(x)^* f(x) r(x) dx = 0 \quad (5.11)$$

Buradan $R(T_0) \subset R$ 'dir. $[\alpha, \beta]$, (a,b) de bir kompakt alt aralık ve, $[\alpha, \beta]$ dışında sıfır değerini almak üzere, $k \in R$ olsun. h , $Lh = k$ denkleminin bir çözümü olsun. $Lu = 0$ denkleminin her u çözümü ve $x_0 \in (a, \alpha), x \in (\beta, b)$ için :

$$[u, h]_x = [u, h]_x - [u, h]_{x_0} = \int_{x_0}^x \{u(y)^* k(y) - (Lu(y))^* h(y)\} r(y) dy = 0 \quad (5.12)$$

dır. Bu ise, $Lu = 0$ denkleminin her u çözümü için sağlandığından, tüm $x \in (\beta, b)$ için $h(x) = 0$ dır. Dolayısıyla, $h \in D(T_0)$ ve $T_0 h = k$ 'dir.

5.3 Teorem

$T_0^* = T$ olsun. Sadece ve sadece T simetrik ise, T_0 operatörü kendine eşleniktir. Buradan $\overline{T_0} = T$ dir.

İspat

Kısmi integrasyon, T ve T_0 'ın birbirlerinin formal eşlenikleri olduğunu göstermektedir..

$T_0^* = T$ olduğunu ispatlamak için, $D(T_0^*) \subset D(T)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$f \in D(T_0^*)$ olsun. Dolayısıyla $T_0^* f = g$ lokal olarak integrallenebilir. h ,

$Lh = g$ denkleminin bir çözümü olmak üzere, tüm $k \in D(T_0)$ için :

$$\int_a^b (f(x) - h(x))^* (T_0 k)(x) r(x) dx = \int_a^b (T_0^* f)(x) - (Lh)(x))^* k(x) r(x) dx = 0 \quad (5.13)$$

dir. $F: L_{2,0}(a,b,r) \rightarrow C, l \mapsto \int_a^b (f(x) - h(x))^* l(x) r(x) dx$ fonksiyoneli için, $N(F) \supset R(T_0)$ dir.

Sonuç olarak, $c_1, c_2 \in C$ olmak üzere $F = c_1 F_1 + c_2 F_2$ olup, u_1, u_2 $Lu = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere:

$$F_j: L_{2,0}(a,b,r) \rightarrow C ; l \mapsto \int_a^b u_j(x)^* l(x) r(x) dx \quad (5.14)$$

tir. Bu da, (a,b) 'nin hemen her yerinde

$$f(x) - h(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \quad (5.15)$$

olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, f , $Lf = g$ denkleminin bir çözümüdür ve $f \in L_2(a,b,r)$ olmak üzere, $f \in D(T)$ dir.

5.4 Teorem

$\gamma_+ = \gamma_+(T_0)$ ($\gamma_- = \gamma_-(T_0)$) defect indisi $(L+i) = 0$ ($(L-i)u = 0$) denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısına eşittir. L düzgün ise, T_0 'ın hata indisleri $(2,2)$ 'e eşittir

İspat

$$R(i - T_0)^\perp = N(i + T) \text{ ve } R(-i - T_0)^\perp = N(-i + T)$$

dir. Ayrıca, $N(\pm i + T)$, $(L \pm i)u = 0$ denkleminin çözümlerinin kümesine eşittir. Eğer L regüler ise, $(L \pm i)u = 0$ denkleminin her çözümü $L_2(a, b, r)$ dedir. Sonuç olarak, $\dim N(\pm i + T) = 2$ olacaktır. T_0 'ın γ_+, γ_- 'in defect indisleri için sadece 3 tane mümkün değer bulunmaktadır. : 0, 1 ve 2.

Eğer hata indisleri $(0, 0)$ ise, $T_0 = T$ kendine eştir. Eğer defect indisleri eşit ve sıfırdan farklı ise $(\gamma_+ = \gamma_-) = (\gamma, \gamma) = (1, 1)$ veya $(\gamma_+, \gamma_-) = (\gamma, \gamma) = (2, 2)$ olacaktır. Sonuç olarak, 2.3(2) teoreminden $\bar{T}_0$ 'ın her γ boyutlu simetrik genişletilmesi, kendine eştir.

5.5 Teorem

L , (5.1)'deki gibi tanımlansın. T_0 'ın tüm kendine eş genişletilmesi, aynı spektruma sahiptir. Eğer T_0 yarı sınırlı ise, T_0 'ın kendine eşlenik tüm genişletilmeleri de yarı sınırlıdır.

5.6 Teorem

L , (5.3) tipinde düzgün bir diferansiyel form olsun. O halde

a) Her $f \in D(T)$ için, f ve f' fonksiyonları $[a, b]$ 'ye genişletilebilir sürekli fonksiyonlardır. $f, g \in D(T)$ için, olmak üzere:

$$[f, g]_x = p(x)(f'(x)^* g(x) - f(x)^* g'(x)) + 2isf(x)^* \cdot g(x) \quad (5.16)$$

$$b) D(\bar{T}_0) = \{f \in D(T) : f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\} \quad (5.17)$$

İspat

Eğer $f \in D(T)$ ve $g = Tf$ ise, f $Lu = 0$ denkleminin u_1, u_2 temel sistemi ile gösterilebilir. u_j, u_j' fonksiyonları $[a, b]$ 'ye sürekli genişletilebilir fonksiyonlardır.

a) $\psi(a) = 0, \psi'(a) = 1$ ve b 'nin yakınında bir x için $\psi(x) = 0$ olacak şekilde bir $\psi \in D(T)$ vardır. Her $f \in D(\bar{T}_0)$ için (a) şikkından

$$0 = \langle \psi, \bar{T}_0 f \rangle - \langle T\psi, f \rangle = [\psi, f]_b - [\psi, f]_a = -p(a)f(a) \quad (5.18)$$

dır. $f(a)=0$ 'dır. Eğer $\psi(a)=0, \psi'(a)=0$ olacak şekilde ψ 'yi seçersek, bu durumda $f'(a)=0$ olacaktır.

Benzer şekilde, $f(b)=f'(b)$ olduğunu gösterebiliriz. $\bar{T}_0 \subset T$ olmak üzere

$$D(\bar{T}_0) \subset D_0 = \{f \in D(T): f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\} \quad (5.19)$$

dır. $\tilde{T}_0$, $D(\tilde{T}_0) = D_0$ ile tanımlansın ve $f \in D(T_0)$ için $\tilde{T}_0 f = Tf$ olsun. (a)'dan, tüm

$f \in D(\tilde{T}_0), g \in D(T)$ için :

$$\langle f, Tg \rangle - \langle \tilde{T}_0 f, g \rangle = [f, g]_b - [f, g]_a = 0 \quad (5.20)$$

s=0 iken Sturm-Liouville diferansiyel formunu ele alalım :

$$Lf = \frac{1}{r} \{ (-pf')' + qf \} \quad (5.21)$$

$(L - z)u$ denkleminin u_1, u_2 çözümleri için $(\frac{d}{dx})W(u_1, u_2, x) = 0$ olup. $W(u_1, u_2, x)$, (a,b) 'de sabittir. O nedenle, bu değer için kısaca $W(u_1, u_2)$ yazabiliriz. Herhangi iki türevlenebilir sürekli $f, g: (a, b) \rightarrow C$ fonksiyonları ve $x \in (a, b)$ için :

$$[f, g]_x = p(x)(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) = -W(f, g, x) \quad (5.22)$$

5.7 Teorem

$L, (V)$ 'teki gibi bir Sturm-Liouville diferansiyel formu olsun :

$$a) \quad D(T_{\alpha, \beta}) = \left\{ \begin{array}{l} f \in D(T): f(a)\cos\alpha - f'(a)\sin\alpha = 0 \\ f \in D(T): f(b)\cos\beta - f'(b)\sin\beta = 0 \end{array} \right\} \quad (5.23)$$

$$T_{\alpha, \beta} f = Tf, \quad f \in D(T_{\alpha, \beta})$$

formülü, keyfi $\alpha, \beta \in [0, \Pi)$ için T_0 'ın bir kendine eşlenik genişletilmesi tanımlamaktadır.

b) Her $z \in D(T_{\alpha,\beta})$ için $R_z = (z - T_{\alpha,\beta})^{-1}$ rezolventi

$$R_z g(x) = W(u_a, u_b)^{-1} \left\{ u_b(x) \int_a^x u_a(y) g(y) r(y) dy + u_a(x) \int_x^b u_b(y) g(y) r(y) dy \right\} \quad (5.24)$$

dir. u_a, u_b , a ve b'de sınır koşullarını sağlayan $(L - z)u = 0$ denkleminin non-trivial çözümleridir.

c) $T_{\alpha,\beta}$ operatörlerinin saf ayırık spektrumu vardır. Her özdeğer basittir.

İspat

a) $T_{\alpha,\beta}$ 'nin simetrik olduğunu kolaylıkla doğrulayabiliriz. Böylece, $T_{\alpha,\beta}$ 'in $\bar{T}_0$ 'in en az iki boyutlu bir genişletilmesi olduğunu gösterebiliriz. Bunun için $D(T)$ 'den, $\psi(a), \psi(b)$ 'yi, sırasıyla a ve b noktaları yakınında, aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde seçelim :

$$\begin{aligned} \psi_a(a) = \sin \alpha \quad \psi'_a(a) = \cos \alpha \quad \psi_a(x) &= 0 \\ \psi_b(b) = \sin \beta \quad \psi'_b(b) = \cos \beta \quad \psi_b(x) &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

b) u_a, u_b fonksiyonları lineer bağımsızdırlar başka bir deyişle u_a , a ve b'de sınır koşullarını yerine getirebilir ve z de $T_{\alpha,\beta}$ 'nin bir özdeğeri olabilir ki bu da $z \in D(T_{\alpha,\beta})$ ile çelişecektir.

Buradan $W(u_a, u_b) \neq 0$ dir.

K integral operatörü olsun. U_r 'i en baştaki gibi tanımlarsak $U_r K U_r^{-1}, L_2(a, b)$ de aşağıdaki

kernelle tanımlanan bir integral operatörüdür :

$$K(x, y) = \begin{cases} W(u_a, u_b)^{-1} r^{\frac{1}{2}}(x) u_b(x) u_a(y) r^{\frac{1}{2}}(y) & x \geq y \\ W(u_a, u_b)^{-1} r^{\frac{1}{2}}(x) u_a(x) u_b(y) r^{\frac{1}{2}}(y) & x < y \end{cases}, \quad (5.26)$$

K fonksiyonu $L_2[(a, b) \times (a, b)]$ 'e aittir yani K bir Hilbert Schmidt operatörüdür. Dolayısıyla

K, $B_2(L_2(a, b, r))$ 'e aittir. Tüm $g \in L_2(a, b, r)$ için :

$$Kg(x) = cu_a(x) + W(u_a, u_b)^{-1} \left\{ u_b(x) \int_a^x u_a(y)g(y)r(y)dy - u_a(x) \int_a^x u_b(y)g(y)r(y)dy \right\}$$

$$c = W(u_a, u_b)^{-1} \int_a^b u_b(y)g(y)r(y)dy \quad (5.27)$$

şeklindedir. (5.2)'den, $Kg(z-L)u = g$ denkleminin bir çözümüdür. (5.7)'den $g \in L_{2,0}(a,b,r)$ için, Kg fonksiyonu, a 'nın bir komşuluğunda u_a 'nın bir katı ; b 'nin bir komşuluğunda ise u_b nin bir katıdır. Sonuç olarak $Kg \in D(T_{\alpha,\beta})$ dir. Buradan, K operatörü $L_{2,0}(a,b,r)$ 'de R_z ile çakışmaktadır. $L_{2,0}(a,b,r)$ yoğun ve K ile R_z operatörleri sürekli olduğundan, $K = R_z$ 'dir.

c) R_z normal ve injektif bir Hilbert-Schmidt operatörüdür. Sonuç olarak, $L_2(a,b,r)$ 'de bir $\{f_n : n \in N\}$ ortonormal bazı ve (z_n) sıfır serisi vardır ve tüm $f \in L_2(a,b,r)$ için :

$$R_z f = \sum_{n \in N} z_n \langle f_n, f \rangle f_n \text{ 'dir.} \quad (5.28)$$

Buradan da tüm $f \in D(T_{\alpha,\beta})$ için

$$R_z f = \sum_{n \in N} (z - z_n^{-1}) \prec f_n, f \succ f_n \text{ dir.} \quad (5.29)$$

Sonuç olarak, $\sigma(T_{\alpha,\beta}) = \{z - z_n^{-1} : n \in N\}$ dir. $(\lambda - T_{\alpha,\beta})u = 0$ denkleminin her çözümü, bir sınır noktasındaki sınır koşulu ile belirlendiği için her özdeğer basittir..

5.8 Weyl Alternativi

L , (a,b) 'de tanımlı bir Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi ve $c \in (a,b)$ olsun. Eğer her $z \in C$ iken $(L - z)u = 0$ denkleminin her u çözümü, $L_2(c,b,r)$ 'dedir .O zaman her $z \in C$ için $(L - z)u = 0$ denkleminin her çözümü $L_2(c,b,r)$ 'e aittir.

İkinci durumda, her $z \in C - R$ için, $u \in L_2(c,b,r)$ iken $(L - z)u = 0$ denkleminin tam olarak bir u çözümü vardır.

İspat

$(L - z_0) = 0$ denkleminin, her $u \in L_2(c, b, r)$ olacak şekilde bir z_0 varsa, bu tüm $z \in C$ için geçerlidir. v_1, v_2 $(L - z_0)v = 0$ denklemini esas sistemi olsun. O halde, $(L - z)u = 0$ denklemini her u çözümü için $(L - z_0)u = (z - z_0)u$ dur. (5.2) den :

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + (z - z_0) \int_c^x \{v_1(x)v_2(y) - v_2(x)v_1(y)\} u(y) r(y) dy$$

$$v = |v_1| + |v_2|$$

$$c = \max\{|c_1|, |c_2|\}$$

$$M = 2|z - z_0|^2 \int_c^b v^2(y) r(y) dy \quad (5.30)$$

$$|u(x)|^2 \leq 2c^2 v^2(x) + 2|z - z_0|^2 v^2(x) \int_c^x v^2(y) r(y) dy \int_c^x |u(y)|^2 r(y) dy = A$$

$$A \leq 2c^2 v^2(x) + M v^2(x) \int_c^x |u(y)|^2 r(y) dy$$

$v \in L_2(c, b, r)$ iken, bir $d \in (c, b)$ vardır öyle ki $\int_d^b v^2(x) r(x) dx \leq (2M)^{-1}$ 'dir. Sonuç olarak,

tüm $x_1 \in (d, b)$ için :

$$\int_d^{x_1} |u(x)|^2 r(x) dx \leq 2c^2 \int_d^{x_1} v^2(x) r(x) dx + M \int_d^{x_1} v^2(x) r(x) \left\{ \int_c^{x_1} |u(y)|^2 r(y) dy \right\} dx = B$$

$$B \leq 2c^2 \int_d^b v^2(x) r(x) dx + \frac{1}{2} \int_c^{x_1} |u(y)|^2 r(y) dy \quad (5.31)$$

$$\int_d^{x_1} |u(x)|^2 r(x) dx \leq 4c^2 \int_d^b v^2(x) r(x) dx + \int_c^d |u(y)|^2 r(y) dy$$

dir. Buradan da görülmektedir ki, u (a, b) 'de sürekli olduğunda, $u \in L_2(d, b, r), u \in L_2(c, b, r)$ 'dir.

Şimdi bir limit noktası durumunu varsayalım yani her $z \in C$ için, $u \in L_2(c, b, r)$ olmak üzere, $(L - z)u = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım. O zaman bize, her $z \in C - R$ için , en az bir tane çözüm olduğunu göstermek kalıyor. Bunun için (c, b) aralığında L diferansiyel

ifadesini gözününe alalım. L ifadesi, c 'de regülerdir. T_0 ve T sırasıyla, $L_2(c, b, r)$ 'de minimal ve maksimal operatörler olsun. T 'nin simetrik olmadığını, -ki bu da dolayısıyla T_0 'ın pozitif defect indisleri olduğunu gösterecektir-bir başka deyişle her $z \in C - R$ için $N(z - T) \neq \{0\}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için 2 tane, sürekli, iki defa türevlenebilir $\psi_1, \psi_2: [c, b) \rightarrow C$ fonksiyonlarını kullanacağız.

$$\begin{aligned} \psi_1(c) = 1 & \quad \psi_1'(c) = 0 & \quad \psi_1(x) = 0 \\ \psi_2(c) = 0 & \quad \psi_2'(c) = 1 & \quad \psi_2(x) = 0 \end{aligned} \quad (b\text{'nin yakınında}) \quad (5.32)$$

$\psi_1, \psi_2 \in D(T)$ 'dir ve

$$\langle \psi_1, T\psi_2 \rangle - \langle T\psi_1, \psi_2 \rangle = -[\psi_1, \psi_2]_c \neq 0 \quad (5.33)$$

dır. Yani T simetrik değildir.

5.8 Teorem

L , (a, b) 'de bir Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi olsun :

a) $f \in D(\bar{T}_0), g \in D(T)$ için $[f, g]_a = 0$ 'dır.

b) a'da limit çemberi olduğu durumu kabul edelim. Herhangi $z \in C$ için, u , $(L - z)u = 0$ denkleminin bir çözümü ise ; u_0 , (a, b) 'de iki defa sürekli türevlenebilir fonksiyondur ve a komşuluğunda $u_0(x) = u(x)$; b yakınında $u_0(x) = 0$ 'dır. Dolayısıyla $u_0 \in D(T) - D(\bar{T}_0)$ 'dır

c) a noktasında limit noktası durumu söz konusu ise, tüm $f, g \in D(T)$ için $[f, g]_a = 0$ 'dır.

İspat

a) $f \in D(\bar{T}_0), g \in D(T)$ olduğunu farzedelim. b noktası yakınında $g_0(x) = 0$ ve nyakınında $g_0(x) = g(x)$ olacak şekilde bir $g_0 \in D(T)$ mevcuttur.

$$[f, g]_a = [f, g_0]_a = -\{\langle f, Tg_0 \rangle - \langle \bar{T}_0 f, g_0 \rangle\} = 0 \quad (5.34)$$

b) u_0 , $D(T)$ 'de yer almaktadır. Eğer, v , $W(u, v) \neq 0$ olmak üzere, $(L - z)u = 0$ denkleminin ayrıca bir çözümü ise ve v_0 , u_0 'a benzer şekilde tanımlanmışsa $v_0^* \in D(T)$ dir ve

$$\left[u_0, v_0^* \right]_a = \left[u, v^* \right]_a = -W(u^*, v^*) = -W(u, v)^* \neq 0 \quad (5.35)$$

dir. Böylece (a) şikkından $u_0 \notin D(\bar{T}_0)$ 'dır.

L 'nin, b 'de **regüler** olduğunu kabul edelim. T_0 'ın defect indisleri $(1,1)$ 'dir. u_1, u_2 $Lu = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ; v_1, v_2 iki kez türevlenebilir sürekli fonksiyonlar olsun ve bu fonksiyonların b civarında $v_j(x) = u_j(x)$ ve a civarında $v_j(x) = 0$ olsun. (b) şikkından, v_1, v_2 elemanları $D(T)$ 'ye aittir ve $D(\bar{T}_0)$ lineer bağımsız modulodur...Sonuç olarak,

$$D(T) = D(\bar{T}_0) + L\{v_1, v_2\} \quad (5.36)$$

dir. Bu da gösteriyor ki, herhangi $f, g \in D(T)$ için a komşuluğunda bu fonksiyonlarla çakışan $f_0, g_0 \in D(\bar{T}_0)$ elemanları mevcuttur ve (a) şikkından $[f, g]_a = [f_0, g_0]_a = 0$ 'dır.

5.9 Teorem

L , (V) 'teki Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi olsun. Ayrıca $\lambda \in R$ olmak üzere v, w $(L - \lambda)u = 0$ denkleminin reel çözümleri olsun.

a) Aşağıdaki formülle verilmiş $T_{v,w}$ operatörü, sırasıyla a ve b 'de limit çemberi olduğu durumda, T_0 'ın kendine eş bir genişletilmesini tanımlamaktadır.:

$$D(T_{v,w}) = \left\{ f \in D(T) : \begin{cases} [v, f]_a = 0 \\ [v, f]_b = 0 \end{cases} \right. \quad (5.37)$$

$f \in D(T_{v,w})$ için $T_{v,w}f = Tf$

b) $z \in C - R$ için, $R_z = (z - T_{v,w})^{-1}$ rezolvent şu şekildedir :

$$R_z g(x) = W(u_a, u_b)^{-1} \left\{ u_b(x) \int_a^x u_a(y) g(y) r(y) dy + u_a(x) \int_x^b u_b(y) g(y) r(y) dy \right\} \quad (5.38)$$

$u_a, u_b, (L-z)u$ denkleminin aşağıdaki koşullarla tanımlanmış çözümleridir :

$u_a \in L_2(a, c, r)$, a noktasında limit noktası olmak üzere :

$[v, u_a]_a = 0$, a noktasında limit çemberi durumu varsa ;

$u_b \in L_2(c, b, r)$, b noktası limit noktası olmak üzere:

$[w, u_b]_b = 0$ b noktasında limit çemberi durumu varsa

c) a'da ve b'de çember durumu varsa, $T_{v,w}$ saf ayrık spektruma sahiptir.

d) $T_{v,w}$ 'nin tüm özdeğerleri basittir..

İspat :

İki sınır noktasında da limit noktası olma durumu mevcutsa, bunun sonucu olarak, tüm $f, g \in D(T)$ için

$$\langle f, Tg \rangle - \langle Tf, g \rangle = [f, g]_b - [f, g]_a = 0 \quad (5.39)$$

olacaktır. Sonuç olarak T simetriktir ve Teorem 1.22'ye göre kendine eşittir. a noktasında limit çemberi ve b noktasında limit noktası durumu sözkonusu olduğu durumda ise , defekt indisleri

$(1, 1)$ 'dir. a noktası civarında $v_0(x) = v(x)$ ve b noktasının civarında $v_0(x) = 0$ olmak üzere, v_0 iki defa türevlenebilir fonksiyon ise

$$v_0 \in D(T) - D(\bar{T}_0), D(\bar{T}_0) + L\{v_0\} \subset D(T_{v,w}) \quad (5.40)$$

olduğunu açıkça görebiliriz.

Eğer, u , v'den lineer bağımsız $(L - \lambda)u = 0$ denkleminin bir çözümü ise ve u_0, v_0 'a benzer şekilde tanımlanmışsa, bu durumda $u_0 \notin D(T_{v,w})$ dir. Dolayısıyla, $T_{v,w}$, T'nin özel kısıtlamasıdır.

Böylece, $D(T_{v,w}) = D(T_0) + L\{v_0\}$ dir ve $T_{v,w}$ 'nin simetrik olduğunu rahatlıkla görebilmekteyiz.

$T_{v,w}$, T_0 'ın bir boyutlu simetrik genişletilmesidir ve böylece kendine eştir.

b) a noktasında, limit noktası durumu sözkonusu olduğunda, u_a bir çarpan olarak belirlenir. Eğer a noktasında bir limit çemberi durumu sözkonusu ise ve $u_1, u_2; (L - z)u = 0$ denklemini temel sistemi ise,

$$[v, cu_1 + du_2]_a = c[v, u_1]_a + d[v, u_2]_a \quad (5.41)$$

eşitliğinden dolayı en az bir tane non-trivial $u_a = cu_1 + du_2$ lineer kombinasyonu mevcuttur.

$$(T_{v,w} - z)f = 0 \quad (5.42)$$

denkleminin bir non-trivial çözümü bulunmadığından $[v, u_1]_a = [v, u_2]_a = 0$ eşitliğine sahip değiliz.

d şıkkı için şu düşüncemizi dile getirebiliriz : En az bir sınır noktasında limit noktası durumunda, $(\lambda - t)u = 0$ denklemin çözüm uzayı en fazla bir boyutlu olduğunda, kabulümüz açıktır

Her iki sınır noktasında da limit çember durumu ve $\lambda = 2$ 'nin katı olan bir özdeğer olsun

u_1, u_2 lineer bağımsız özelemanlar ; $u_{j,a}, u_{j,b}$ iki defa sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar

olsun ve $j=1,2,\dots$ için aşağıdaki koşulları sağlasın :

$$\text{a civarında} \quad : \quad u_{j,a}(x) = u_j(x); u_{j,b}(x) = 0 \quad (5.43)$$

$$\text{b civarında:} \quad : \quad u_{j,a}(x) = 0, u_{j,b}(x) = u_j(x) \quad (5.44)$$

Bu dört eleman, $D(T_{v,w})$ ' e ait olup, $D(\bar{T}_0)$ lineer bağımsız modulodur. Bu da

$$\dim D(T_{v,w}) / D(\bar{T}_0) = 2 \quad (5.45)$$

ile çelişmektedir.

6. UYGULAMALAR

Weyl limit nokta ve limit çemberine ait örnekler ile Sturm-Liouville operatörünün kendine eş genişletilmelerine ait örnekler verelim:

Örnek 6.1

$H = L_2[0, \infty)$; $Ly = -y'' = iy$ olsun. Bir başka deyişle S-L formunda $r(x)=1$, $p(x)=1$, $q(x)=1$ olsun. $Ly = -y'' = iy$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerini yazalım.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cdot e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}x} \\ y_2(x) &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cdot e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}x} \\ |y_1(x)| &= e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}, |y_2(x)| = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \\ \int_0^\infty |y_1(x)|^2 dx &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{2}x} dx = -\frac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty \\ \int_0^\infty |y_2(x)|^2 dx &= \int_0^\infty e^{\sqrt{2}x} dx = \infty \end{aligned} \quad (6.1)$$

Böylece $Ly = -y'' = iy$ denkleminin ∞ civarında, $L_2[0, \infty)$ 'a ait tek çözümü vardır. Bu ise, ∞ noktasının limit nokta olduğu hali demektir. Sıfır civarında ise, $y_1(x), y_2(x)$ çözümleri L_2 'e aittir. Bu ise, sıfır noktasında limit çember durumu demektir. Eğer biz $y'' = iy$ denklemini gözönüne alırsak bu denklemin de sadece bir tane lineer bağımsız çözümünün $L_2[0, \infty)$ 'a ait olduğunu görürüz. Böylece, $y'' = iy, -y'' = iy$ denklemlerinin herbirisinin sadece bir çözümünün $L_2[0, \infty)$ 'a ait olduğunu gösterdik. Bu ise, tanım gereği, L operatörünün defekt indisinin $(1, 1)$ olduğunu gösterir. Buradan, $Ly = y''$ operatörünün bütün kendine eş genişletilmeleri yazılabilir. L 'nin her kendine eş genişletilmesi L_∞ aşağıdaki şekildedir :

$$D(L_\infty) = \{y(t) \in L_2[0, \infty): y'(x), [0, \infty) \text{ 'a ait her sonlu aralıkta mutlak sürekli, } y'' \in L_2[0, \infty), y(0) = \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0\}$$

$$y(x) \in D(L_\infty) \text{ iken } L_2 y = y''$$

Örnek 6.2

$H = L_2(-\infty, +\infty), Ly = -y''$ olsun. Şu halde, bir önceki örneğimize göre, $Ly = \pm iy$ denklemlerinin sıfırdan farklı hiçbir çözümünün $L_2(-\infty, \infty)$ 'a ait olmadığı görülür. Bu ise, L operatörünün defekt indisinin $(0, 0)$ olduğunu gösterir. Böylece $Ly = y''$ ifadesi ile oluşturulan maksimal operatör $\tilde{L}$ kendine eşittir. Ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$D(\tilde{L}) = \left\{ y(x) \in L_2(-\infty, \infty) : y'(x) \text{ reel eksenin her sonlu aralığında mutlak sürekli ve } y'' \in L_2(-\infty, \infty) \right\}$$

$$y \in D(\tilde{L}) \text{ iken } \tilde{L}y = -y'' \quad (6.2)$$

Örnek 6.3

$H = L_2(0, 1, x), Ly = \frac{1}{x} \{-(xy')'\}$ Bessel ifadesi olsun. Bunun lineer bağımsız çözümlerini bulalım. Buradan :

$$(x \cdot y')' = 0$$

$$xy' = c \quad c: \text{sabit} \quad (6.3)$$

$$y' = \frac{c}{x} \quad y_1 = c \ln x \quad (6.4)$$

$$xy' = 0 \quad y' = 0, y_2 = c_1 \quad c_1: \text{sabit} \quad (6.5)$$

Böylece, $y_1 = c \ln x$, $y_2(x) = c_1$ fonksiyonlarına, $Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleridir denir. Burada her iki çözümün $H = L_2(0, 1, x)$ uzayına ait olduğu görülmektedir.

Gerçekten:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x |y_1(x)|^2 dx &= c^2 \int_0^1 x \ln^2 x dx \\
\int_0^1 x |y_1(x)|^2 dx &= \frac{c^2}{2} \int_0^1 \ln^2 x dx^2 \\
\int_0^1 x |y_1(x)|^2 dx &= \frac{c^2 x^2 \ln^2 x}{2} \Big|_0^1 - c^2 \int_0^1 x \ln x dx \\
\int_0^1 x |y_1(x)|^2 dx &= -c^2 \int_0^1 x \ln x dx \\
\int_0^1 x |y_1(x)|^2 dx &= \frac{-c^2}{2} \int_0^1 \ln x dx \\
\int_0^1 x |y_1(x)|^2 dx &= \frac{-c^2}{2} x^2 \ln x \Big|_0^1 + \frac{c^2}{2} \int_0^1 x dx \\
\int_0^1 x |y_1(x)|^2 dx &= \frac{c^2 x^2}{4} x^2 \Big|_0^1 \\
\int_0^1 x |y_1(x)|^2 dx &= \frac{c^2}{4} < \infty
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Yani, $y_1(x) \in L_2(0,1,x), y_2(x) \in L_2(0,1,x)$ olduğu açıktır. Böylece $Ly = 0$ denkleminin iki lineer bağımsız çözümü, $L_2(0,1,x)$ uzayına aittir. Bu ise, hem 0 hem de 1 noktasının limit çember hali olduğu demektir. Buna göre L ifadesi ile oluşturulan L_0 minimal operatörünün defekt indisi $(2,2)$ 'dir. L_0 'ın bir kendine eş genişletilmesini $\tilde{L}$ ile ifade edelim.

$$D(\tilde{L}) = \left\{ y(x) \in L_2(0,1,x), y' [0,1]'e \text{ ait her kapalı alt aralıkta mutlak sürekli, } \frac{1}{x}(xy')' \in L_2(0,1,x), \lim_{x \rightarrow 0} xy(x) = 0 \right\}$$

$$y \in D(\tilde{L}_0) \text{ iken } \tilde{L}y = \frac{1}{x}(xy')' \tag{6.7}$$

Örnek 6.4

$H = L_2(0,1); Ly = -y'' + \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y$ Bessel ifadesi olsun. Burada $v \geq 0$ sabit bir sayıdır.

Görüldüğü gibi $x = 0$, bu ifadenin tekil noktasıdır. $\text{Im } \lambda > 0; 0 < x < 1$ olmak üzere,

$$-y'' + \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y = \lambda y$$

denklemini gözönüne alalım. Bilindiği gibi, bu, Bessel denklemdir ve $\sqrt{x}J_v(\sqrt{\lambda}x), \sqrt{x}H_v(\sqrt{\lambda}x)$ fonksiyonları bu denklemin lineer bağımsız çözümleridir. $J_v(\sqrt{\lambda}x)$ **Bessel fonksiyonu**, $H_v(\sqrt{\lambda}x)$ **Henkel fonksiyonu** adını alır. Bu fonksiyonların $x \rightarrow 0$ iken asimtotik ifadeleri, $(0 < \arg \sqrt{\lambda} < \frac{\pi}{2})$ aşağıdaki şekildedir. [Bazmen H., and Erdely a., Higher Transcendental Functions, New York : Mc Graw-Hill Book Comp. 1953]

$$\begin{aligned} J_v(\sqrt{\lambda}x) &\approx c_1 x^v & c_1 \neq 0 = \text{sabit} \\ H_v(\sqrt{\lambda}x) &\approx c_2 x^{-v} & c_2 \neq 0 = \text{sabit} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Böylece $x \rightarrow 0$ iken

$$\begin{aligned} \sqrt{x}J_v(\sqrt{\lambda}x) &\approx c_1 x^{v+\frac{1}{2}} \\ \sqrt{x}H_v(\sqrt{\lambda}x) &\approx c_2 x^{-v+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

olacaktır. Buradan her $v \geq 0$ iken $\sqrt{x}J_v(\sqrt{\lambda}x) \in L_2(0,1)$ olduğu açıkça görülür.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^{-v+\frac{1}{2}})^2 dx &= \int_0^1 x^{-2v+1} dx \\ \int_0^1 (x^{-v+\frac{1}{2}})^2 dx &= \frac{x^{-2v+2}}{-2v+2} \Big|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{-2v+2}, & 0 \leq v < 1 \\ \infty, & v \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.10)$$

olduğundan $\sqrt{x}H_v(\sqrt{\lambda}x)$ asimptotik ifadesine göre $0 \leq v < 1$ iken $\sqrt{x}H_v(\sqrt{\lambda}x) \in L_2(0,1)$; $v \geq 1$ iken ise $\sqrt{x}H_v(\sqrt{\lambda}x) \notin L_2(0,1)$ 'dir. Böylece, $0 \leq v < 1$ iken sıfır noktası limit çember hali; $v \geq 1$ iken ise limit nokta halidir. L 'nin defekt indisi $0 \leq v < 1$ iken $(2,2)$; $v \geq 1$ iken $(1,1)$ 'dir. Böylece L operatörünün kendine eş genişletilmeleri için, $0 \leq v < 1$ iken her iki uçnoktalarında da vermek gerekir. Bu halde L 'nin bütün kendine eş genişletilmeleri [Bayramoğlu M., Izv. AnAzSSR, ser. fiz. zex. imat. hauk, 1976, No:2, s:140-143] verilmiştir. $v \geq 1$ iken sadece ve sadece 1 noktasında sınır koşulu vermek gerekir. $v \geq 1$ iken L 'nin kendine eş genişletilmesi L_α aşağıdaki şekildedir :

YAZARIN KUTUPHANESİ

$D(L_\alpha) = \{y(x) \in L_2(0,1): y'(x) \text{ } [0,1]\text{'e ait her kapalı aralıkta mutlak sürekli,}$

$$Ly \in L_2(0,1), y(1)\cos\alpha + y'(1)\sin\alpha = 0 \}$$

$$y \in D(L_\alpha), L_\alpha y = -y'' + \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y \quad (6.11)$$

KAYNAKLAR

Alberios, Gesztesy F., Krohn R.H., Holden H., (1988), Solvable Models in Quantum Mechanics, New-York : Springer-Verlag

Amirov R.Ch., Guseynov I.M., (2002), Dif.Uravneniya, t.38, no:8, s.1120-1121

Bateman H., and Erdélyi A., Higher Transcendental Functions, New York: Mc-Graw-Hill Book Comp., 1953

Bayramoglu, M., Izv.An.Az.SSR, ser.fiz.zex.imat.hauk, (1976), No:2, s.140-143

Birman, M.S. and Solonyak, M.Z., (1987), Spectral Theory of Self-Adjoint Operators, D.Reidel Published co.Dordrecht

Gorbachuk V.I. and Gorbachuk M.L., (1991), Boundary Value Problems For The OpiDif.Equations, Kluwer, Acad.Publ., Dordrecht-Boston-London

Naimark, M.A., (1968), Linear Differential Operators, part 2, Harrep, London.

Savchuk, A.M., Shkalikov A.A., (1999), Matem Zamezki, t.66, no:6, s.897-912

Weidmann, Joachim, (1980), Linear Operators in Hilbert Spaces, New York : Springer-Verlag

Yosida, K., (1980), Functional Analysis, Berlin-Göttingen-Heidelberg : Springer-Verlag

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	23.05.1976	
Doğum yeri	Ankara	
Lise	1991-1994	İzmir Özel Saint-Joseph Fransız Lisesi
Lisans	1994-1998	Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2001-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programı

Çalıştığı kurumlar

2001-Devam ediyor	Y.T.Ü Matematik Mühendisliği Araştırma Görevlisi
-------------------	---