

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Riemann Uzay, Lie Türevi ve Uyg.

Yüksek Lisans Tezi

Barış C. Aydoğmuşoğlu

2006

R 209
273

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RIEMANN UZAYINDA LIE TÜREVİ VE
UYGULAMALARI**

Matematikçi Barış C. AYDOĞMUŞOĞLU

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Filiz KANBAY (YTÜ)

İSTANBUL, 2006

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC): R 209/273

Kayıt No

3302

Geldiği Yer

Don Bilen Enst

Tarih

14.11.06

Fiyat

1.80

Fatura No

Ayniyat No

1-14

Ek

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



V-23

**RIEMANN UZAYINDA LIE TÜREVİ VE
UYGULAMALARI**

Matematikçi Barış C. AYDOĞMUŞOĞLU

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Prof. Dr. Leylâ ZERİEN AKAOĞU

Zeren

Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK

Ziya

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Filiz KANBAY (YTÜ)

Yrd. Doç. Dr. Filiz Kanbay

Filiz

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1 RIEMANN UZAYINDA LIE TÜREVİ VE UYGULAMALARI	1
1.1 Giriş	1
2 AFİN UZAYDA HAREKET	9
2.1 L Konneksiyonunun Bir Tensör Olarak Lie Türevi	12
2.2 t_k^{ij} Tensörünün Lie Türevi	14
2.3 (u, v) Tipinden $t_{i_1 i_2 \dots i_v}^{j_1 j_2 \dots j_u}$ Tensörünün Lie Türevi	15
2.3.1 (u, v) Tipinden $t_{i_1 i_2 \dots i_v}^{j_1 j_2 \dots j_u}$ Tensörünün Lie Türevinin Diğer Bir İfadesi	17
KAYNAKLAR	22
ÖZGEÇMİŞ	23

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli Hocam Yrd. Doç. Dr. Filiz KANBAY' a saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada sonsuz küçük nokta dönüşümü altında Lie türevi ve Lie diferansiyeli incelenmiştir. Riemann uzayında kovaryant, kontravaryant ve genel bir tensörün Lie diferansiyelleri ve Lie türevleri hesaplanarak, geometrik objelerin Lie türevi ve Lie diferansiyeli üzerinde durulmuştur.

L konneksiyonun kısmi türeve ve tensorel türeve göre Lie türevleri hesaplanmıştır. Genel bir (u,v) tipindeki tensörün Lie türevinin değişik ifadeleri üzerinde durulmuş ve Riemann uzayında hareket kavramı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Riemann uzayı, kovaryant ve kontravaryant vektör, Lie türevi, Lie diferansiyeli, izometri.

ABSTRACT

In this presentation we consider the Lie differential and Lie derivative with respect to infinitesimal deformation. Lie differentials and Lie derivatives of covariant, contravariant and general tensor are calculated in Riemannian space and Lie derivative and Lie differential of geometric object are mentioned in Riemannian space.

Lie derivative of L connection is calculated with respect to covariant derivative and partial derivative. Lie derivative of general (u,v) tensor is considered with its different expression and the concept of motion in Riemannian space is examined.

Keywords: Riemannian space, covariant and contravariant derivative, Lie derivative, Lie differential, isometri.

1. RIEMANN UZAYINDA LIE TÜREVİ VE UYGULAMALARI

1.1 GİRİŞ

Genel bir U_n uzayında (x^i) koordinat sisteminde, koordinatları ancak dx^i ler kadar fark eden herhangi $P(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ve $Q(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \dots, x^n + dx^n)$ nokta çiftine, $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ler sürekli fonksiyonlar ve $g_{ij} = g_{ji}$ olmak üzere

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1)$$

skaler invariantı karşı geliyor ve

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisi pozitif tanımlı ise veya buna denk olarak hepsi birden sıfır olmayan dx^i ler için $g_{ij} dx^i dx^j > 0$ ise U_n uzayına Riemann uzayı, (1.1) metriğine de Riemann metriği adı verilir.

Bu uzayı R^n ile göstereceğiz. Burada ds ye dx^i bileşenli diferansiyel vektörün uzunluğu denir. ds^2 bir skaler invariant, $g_{ij} = g_{ji}$ olup metrik tensördür.

R^n Riemann uzayında, R ve $\bar{R}$ bölgeleri arasında

$$f: x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \equiv (x^i) \rightarrow \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) \equiv (\bar{x}^i); \text{Det}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \quad (1.2)$$

nokta dönüşümü verilsin. Bu nokta dönüşümü R deki x^i noktasını $\bar{R}$ deki $\bar{x}^i$ noktasına;

R deki $x^i + dx^i$ noktasını $\bar{R}$ 'deki $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$ noktasına dönüştürsün.

Tanım 1.1 x^i ile $x^i + dx^i$ arasındaki uzunluk, $\bar{x}^i$ ile $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$ arasındaki uzunluğa eşitse

(1.2) nokta dönüşümüne Riemann uzayında hareket veya izometri denir.

Tanım 1.2 (1.2) de verilen nokta dönüşümü ε bir sonsuz küçük, $z^i \varepsilon$ kontravaryant bir vektör olmak üzere

$$\bar{x}^i = x^i + z^i(x^i) \varepsilon \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanmış ise, bu dönüşüme sonsuz küçük deformasyon; z^i vektörüne ise sonsuz küçük deformasyon vektörü adı verilir. $\bar{x}^i$, x^i noktasının deformasyonu adını alır.

Tanım 1.3 Yeni bir $x^i \rightarrow x^{i'}$ koordinat dönüşümü $\bar{R}$ deki $\bar{x}^i$ noktasının f^{-1} ters dönüşümü olan noktanın dönüşümünü versin. Yani bu yeni koordinat sisteminde x^i noktasının yeni koordinatı

$$x^{i'} = \bar{x}^i \quad (1.4)$$

olsun. Bu yeni koordinata $\bar{x}$ nin sürüklenmiş koordinatı denir.

Tanım 1.4 (1.3) deki sonsuz küçük bükülmede

$$x^{i'} = \bar{x}^i = x^i + z^i(x^1, x^2, \dots, x^n)\varepsilon \quad (1.5)$$

koordinat dönüşümüne $z^i \varepsilon$ tarafından sürüklenme denir.

$x = (x^i) \in R_N$ olmak üzere $A(x^i)$ ile temsil ettiğimiz A geometrik objesini ele alalım.

Tanım 1.5 (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile

$$\bar{A}(x^{i'}) = A(\bar{x}^i) \quad (1.6)$$

olsun. Yani Eğer $\bar{A}(x^{i'})$ geometrik objesinin i' koordinat sisteminin x noktasındaki değeri A geometrik objesinin i koordinat sistemindeki $\bar{x}$ noktasındaki değerine eşitse; $\bar{A}(x^{i'})$ geometrik objesine $A(x^i)$ nin deformasyonu denir.

Tanım 1.6 $\bar{A}$; (1.3) e göre A geometrik objesinin deforme olmuş hali olmak üzere;

$$\oint_z A \varepsilon = \bar{A}(x^{i'}) - A(x^i) \quad (1.7)$$

$A(x^i)$ nin Lie diferansiyeli denir.

$z = z^i(x^j)$ olmak üzere

$$\oint_z A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{A}(x^{i'}) - A(x^i)}{\varepsilon} \quad (1.8)$$

limit değerine ise $A(x^i)$ nin Lie türevi denir.

Tanım 1.7 (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile

$$\bar{g}_{i'j'}(x) = g_{ij}(\bar{x}) \quad (1.9)$$

olacak şekilde dönüşen $\bar{g}_{ij}(x)$ metrik tensörüne $g_{ij}(x)$ metrik tensörünün deformasyonu adı verilir.

Tanım 1.8 $\bar{g}_{ij}(x) - g_{ij}(x)$ farkına g_{ij} metrik tensörünün z^i kontravaryant vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir .

$$\mathcal{L}_z g_{ij}(x)\varepsilon = \bar{g}_{ij}(x) - g_{ij}(x) \quad (1.10)$$

ile gösterilir.

Şimdi g_{ij} metrik tensörünün Lie diferansiyelini inceleyelim. $\bar{g}_{ij}(x)$ metrik tensörünün yeni ve eski koordinat sistemi arasında

$$\bar{g}_{mn}(x) = \bar{g}_{i'j'}(x) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^n} \quad (1.11)$$

bağıntısı vardır. (1.9) dan ,

$$\bar{g}_{mn}(x) = g_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial x^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^j}{\partial x^n} \quad (1.12)$$

elde edilir. Burada, $g_{ij}(\bar{x})$ Taylor serisi ile

$$g_{ij}(\bar{x}) = g_{ij}(x + \varepsilon z) = g_{ij}(x) + \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k} \varepsilon z^k + \dots \quad (1.13)$$

bulunur. (1.5) den türev alarak

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^m} = \delta_m^i + \varepsilon \frac{\partial z^i}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial x^j}{\partial x^n} = \delta_n^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^n} \quad (1.14)$$

elde edilir. (1.13) ve (1.14) kullanılarak (1.12) dan

$$\bar{g}_{mn}(x) = (\delta_m^i + \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \varepsilon)(\delta_n^j + \frac{\partial z^j}{\partial x^n} \varepsilon)(g_{ij}(x) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k \varepsilon) \quad (1.15)$$

bulunur.

Buradan,

$$\bar{g}_{mn}(x) = (\delta_m^i + \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \varepsilon)(\delta_n^j + \frac{\partial z^j}{\partial x^n} \varepsilon)(g_{ij}(x) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k \varepsilon) \quad (1.16)$$

$$\bar{g}_{mn}(x) = \delta_m^i \delta_n^j g_{ij}(x) + (\delta_m^i \delta_n^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k + \delta_m^i \frac{\partial z^j}{\partial x^n} g_{ij} + \delta_n^j \frac{\partial z^i}{\partial x^m} g_{ij}) \varepsilon \quad (1.17)$$

$$\bar{g}_{mn}(x) = g_{mn}(x) + (g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k) \varepsilon \quad (1.18)$$

elde edilir. O halde g_{mn} nin Lie diferansiyeli

$$\mathcal{L}_z g_{mn} \varepsilon = \bar{g}_{mn} - g_{mn} = \left[g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k \right] \varepsilon \quad (1.19)$$

dır. Tanım (1.1) den x^i ile $x^i + dx^i$ arasındaki uzaklık

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.20)$$

ve $\bar{x}^i$ ile $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$ arasındaki uzaklık ise

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{mn} d\bar{x}^m d\bar{x}^n \quad (1.21)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (1.19) gereğince aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 1.1 (1.2) dönüşümünün R^n de bir hareket olması için gerek ve yeter şart

$$(g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k) = 0 \text{ olmasıdır.}$$

$$(g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k) = 0 \text{ ifadesini inceleyelim.}$$

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} = \nabla_k g_{mn} + g_{mj} \left\{ \begin{matrix} j \\ nk \end{matrix} \right\} + g_{jn} \left\{ \begin{matrix} j \\ mk \end{matrix} \right\} \quad z^k \text{ ile çarpalım}$$

$$\frac{\partial z^k}{\partial x^m} = \nabla_m z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ im \end{matrix} \right\} \quad g_{kn} \text{ ile çarpalım}$$

$$\frac{\partial z^k}{\partial x^n} = \nabla_n z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ in \end{matrix} \right\} \quad g_{mk} \text{ ile çarpalım}$$

$$z^k \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} = z^k \nabla_k g_{mn} + g_{mj} \left\{ \begin{matrix} j \\ nk \end{matrix} \right\} z^k + g_{jn} \left\{ \begin{matrix} j \\ mk \end{matrix} \right\} z^k$$

$$g_{kn} \frac{\partial z^k}{\partial x^m} = g_{kn} \nabla_m z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ im \end{matrix} \right\} g_{kn}$$

$$g_{mk} \frac{\partial z^k}{\partial x^n} = g_{mk} \nabla_n z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ in \end{matrix} \right\} g_{mk}$$

olup, bu ifadelerin taraf tarafa toplanması sonucunda

$$g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k = g_{mk} \nabla_n z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ in \end{matrix} \right\} g_{mk} + g_{kn} \nabla_m z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ im \end{matrix} \right\} g_{kn} + (1.22)$$

$$+ z^k \nabla_k g_{mn} + g_{mj} \left\{ \begin{matrix} j \\ nk \end{matrix} \right\} z^k + g_{jn} \left\{ \begin{matrix} j \\ mk \end{matrix} \right\} z^k$$

bulunur ve gerekli düzenlemelerle

$$g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k = g_{kn} \nabla_m z^k + g_{mk} \nabla_n z^k \quad (1.23)$$

$$= \nabla_m z_n + \nabla_n z_m$$

$$= 2\nabla_{(m} z_{n)}$$

sonucu elde edilir.

$$\mathcal{L}_z g_{mn} = 2\nabla_{(m} z_{n)} \quad (1.24)$$

dır. Buradan teorem 1.1 in bir diğer ifadesini verebiliriz.

Teorem 1.2 (1.2) dönüşümün R^n de bir hareket olması için gerek ve yeter şart

$$2\nabla_{(m} z_{n)} = 0 \quad (1.25)$$

olmasıdır.

Tanım 1.9 (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile $\bar{u}^i(x) = u^i(\bar{x})$ olacak şekilde dönüşen $u^i(\bar{x})$ kontravaryant vektörüne $u^i(x)$ kontravaryant vektörünün deformasyonu adı verilir.

Tanım 1.10 $u^i(\bar{x}) - u^i(x)$ farkına u^i kontravaryant vektörünün z^i kontravaryant vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir.

$$\mathcal{L}_z u^i(x) \varepsilon = \bar{u}^i(x) - u^i(x) \quad (1.26)$$

ile gösterilir. Şimdi u^i kontravaryant vektörünün Lie diferansiyelini inceleyelim.

$$\bar{u}^\alpha(x) = \bar{u}^{i'}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \quad (1.27)$$

$x^{\alpha'} = x^\alpha + \varepsilon z^\alpha$ (1.3) sonsuz küçük deformasyonu kullanalım.

$x^\alpha = x^{\alpha'} - \varepsilon z^\alpha$ olup $x^{i'}$ ye göre türev alarak

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i'}} - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^{\alpha'} - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \quad (1.28)$$

ve

$x^m = x^{m'} - \varepsilon z^m$ den $x^{i'}$ ye göre türev alarak

$$\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} = \delta_i^{m'} - \varepsilon \frac{\partial z^m}{\partial x^{i'}} \quad \text{bulunur ve (1.28) de yerine yazılarak}$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} = \delta_i^{\alpha'} - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} (\delta_i^{m'} - \varepsilon \frac{\partial z^m}{\partial x^{i'}})$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} = \delta_i^{\alpha'} - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \delta_i^{m'}$$

elde edilir. $\delta_i^{\alpha'} = \delta_i^\alpha$ ve $\delta_i^{m'} = \delta_i^m$ olduğundan;

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} = \delta_i^\alpha - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \delta_i^m \quad (1.29)$$

dır. (1.29) u (1.27) de yerine yazarak;

$$\bar{u}^\alpha(x) = u^i(\bar{x}) (\delta_i^\alpha - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \delta_i^m)$$

bulunan eşitliği Taylor serisine açalım.

$$u^i(\bar{x}) = u^i(x + \varepsilon z) = u^i(x) + \frac{\partial u^i(x)}{\partial x^c} \varepsilon z^c + \varepsilon^2 \dots + \dots$$

Buradan

$$\bar{u}^\alpha(x) = (u^i(x) + \frac{\partial u^i(x)}{\partial x^c} \varepsilon z^c) (\delta_i^\alpha - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \delta_i^m)$$

$$\bar{u}^\alpha(x) = u^\alpha(x) - u^m(x) \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} + \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^c} \varepsilon z^c$$

$$\bar{u}^\alpha(x) = u^\alpha(x) + \left[\frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^c} z^c - u^m(x) \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \right] \varepsilon$$

$$\bar{u}^\alpha(x) - u^\alpha(x) = \left[\frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^c} z^c - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} u^m \right] \varepsilon$$

olup u^α nın Lie diferansiyeli

$$\mathcal{L}_z u^\alpha(x) \varepsilon = \bar{u}^\alpha(x) - u^\alpha(x) = \left[\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^c} z^c - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} u^m \right] \varepsilon \quad (1.30)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 1.11 (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile $\bar{u}_i(x) = u_i(\bar{x})$ olacak şekilde dönüşen $u_i(\bar{x})$ kovaryant vektörüne $u_i(x)$ kovaryant vektörünün deformasyonu verilir.

Tanım 1.12 $u_i(\bar{x}) - u_i(x)$ farkına u_i kovaryant vektörünün z^i kontravaryant vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir.

$$\mathcal{L}_z u_i(x) \varepsilon = \bar{u}_i(x) - u_i(x) \quad (1.31)$$

ile gösterilir. Şimdi u_i kovaryant vektörünün Lie diferansiyelini inceleyelim.

$$\bar{u}_\alpha(x) = \bar{u}_{j'}(x) \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\alpha}$$

$x^{j'} = x^j + \varepsilon z^j$ (1.3) sonsuz küçük deformasyonun kullanalım. x^α ya göre türev alalım.

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}$$

$$\bar{u}_\alpha(x) = u_j(\bar{x}) (\delta_\alpha^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}) \quad [\bar{u}_i(x) = u_i(\bar{x})]$$

$u_j(\bar{x})$ yi seriye açalım:

$$u_j(\bar{x}) = u_j(x + \varepsilon z) = (u_j(x) + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x^m} \varepsilon z^m + \varepsilon^2 \dots + \dots)$$

$$\bar{u}_\alpha(x) = (u_j(x) + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x^m} \varepsilon z^m) (\delta_\alpha^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha})$$

$$\bar{u}_\alpha(x) = u_\alpha(x) + (u_j \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha} + z^m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^m}) \varepsilon$$

Buradan u_α nın Lie diferansiyeli:

$$\oint_z u_\alpha(x) \varepsilon = \bar{u}_\alpha(x) - u_\alpha(x) = \left[u_j \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha} + z^m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^m} \right] \varepsilon \quad (1.32)$$

şeklinde bulunur.

2. AFİN UZAYDA HAREKET

L_{jk}^i simetrik olmayan afin konneksiyona ve

$$T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i = 2L_{[jk]}^i$$

burulma tensörüne sahip n boyutlu L_n uzayını düşünelim.

Tanım 2.1 u^i ve $u^i + du^i$ sırası ile x^i ve $x^i + dx^i$ noktasındaki iki vektör olmak üzere bu vektörler arasındaki paralellik koşulu

$$\delta u^i = du^i + \Gamma_{jk}^i u^k dx^j = 0$$

ile tanımlıdır. Burada δu^i , u^i vektörünün kovaryant diferansiyelidir.

Tanım 2.2 (1.2) nokta dönüşümü tanım 2.1 de ifade edilen paralel vektör çiftlerini yine paralel olan vektör çiftlerine dönüştürüyor ise bu dönüşüme L_n de bir afin hareket denir.

Tanım 2.3 (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile $\bar{L}_{j'k'}^i(x) = L_{jk}^i(\bar{x})$ olacak şekilde dönüşen $\bar{L}_{jk}^i$ lineer konneksiyonuna L_{jk}^i nın deformasyonu adı verilir.

Tanım 2.4 $\bar{L}_{jk}^i - L_{jk}^i$ farkına L_{jk}^i lineer konneksiyonunun z^i kontravaryant vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir.

$$\mathcal{L}_z L_{jk}^i(x) = \bar{L}_{jk}^i(x) - L_{jk}^i(x) \quad (2.1)$$

ile gösterilir.

Şimdi L_{jk}^i lineer konneksiyonunun Lie diferansiyelini inceleyelim.

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^\sigma(x) = \bar{L}_{j'k'}^i(x) \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} \quad (2.2)$$

olup (1.3) den x^α ya göre türev alarak;

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}$$

(1.3) den x^β ya göre türev alarak;

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^k}{\partial x^\beta} + \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^\beta}$$

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^k + \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^\beta}$$

bulunur. (1.3) den $x^{\sigma'} = x^\sigma + \varepsilon z^\sigma$ yazarak

$x^\sigma = x^{\sigma'} - \varepsilon z^\sigma$ nin $x^{i'}$ ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{i'}} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^{i'}} = \delta_{i'}^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{t'}}{\partial x^{i'}}$$

dir. $x^{t'} = x^t - \varepsilon z^t$ olduğundan; benzer olarak

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} = \delta_{i'}^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^{t'}} \frac{\partial x^{t'}}{\partial x^{i'}} = \delta_{i'}^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^{t'}} (\delta_{i'}^{t'} - \varepsilon \frac{\partial z^{t'}}{\partial x^{i'}})$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} = \delta_{i'}^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^{t'}} \delta_{i'}^{t'}$$

elde edilir.

$x^{i'} = x^i + \varepsilon z^i$ nin x^α ya göre türevi ise

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}$$

olup burada x^β ya göre tekrar türev alınırsa

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

bulunur. Bu ifadesini $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}}$ ile çarpımı ise

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} = \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta_{i'}^{\sigma'}$$

$$\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} = \delta_{i'}^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^{t'}} \delta_{i'}^{t'} \right)$$

dir. Şimdi bulduğumuz bu sonuçları (2.2) de yerine yazalım.

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = \bar{L}_{jk}^i(x) \left[\delta_{\alpha}^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] \left[\delta_{\beta}^k + \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} \right] \left[\delta_i^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} \delta_i^t \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma'}$$

$$\bar{L}_{jk}^i(x) = L_{jk}^i(\bar{x})$$

ve

$$\delta_i^{\sigma'} = \delta_i^{\sigma}, \delta_i^t = \delta_i^t$$

olduğundan;

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = L_{jk}^i(\bar{x}) \left[\delta_{\alpha}^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] \left[\delta_{\beta}^k + \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} \right] \left[\delta_i^{\sigma} - \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} \delta_i^t \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma}$$

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = L_{jk}^i(\bar{x}) \left[\delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k + \delta_{\alpha}^j \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + \delta_{\beta}^k \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] \left[\delta_i^{\sigma} - \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} \delta_i^t \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma}$$

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = L_{jk}^i(\bar{x}) \left[\delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k \delta_i^{\sigma} - \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k \delta_i^t \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} + \delta_i^{\sigma} \delta_{\alpha}^j \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + \delta_i^{\sigma} \delta_{\beta}^k \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma}$$

yazılabilir. Burada $L_{jk}^i(\bar{x})$ ifadesinin Taylor serisine açılımı

$$L_{jk}^i(\bar{x}) = L_{jk}^i(x + \varepsilon z) = L_{jk}^i(x) + \frac{\partial L_{jk}^i}{\partial x^b} \varepsilon z^b + \varepsilon^2 \dots + \dots$$

olup

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = \left[L_{jk}^i(x) + \frac{\partial L_{jk}^i}{\partial x^b} \varepsilon z^b \right] \left[\delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k \delta_i^{\sigma} - \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k \delta_i^t \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} + \delta_i^{\sigma} \delta_{\alpha}^j \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + \delta_i^{\sigma} \delta_{\beta}^k \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma}$$

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = L_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) + \left[-L_{\alpha\beta}^t \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} + L_{\alpha k}^{\sigma} \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + L_{j\beta}^{\sigma} \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial L_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^b} z^b + \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \varepsilon$$

bulunur. O halde $L_{\alpha\beta}^{\sigma}$ nin Lie diferansiyeli

$$\mathfrak{L}_z L_{\alpha\beta}^{\sigma} \varepsilon = \bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) - L_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = \left[L_{\alpha k}^{\sigma} \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + L_{j\beta}^{\sigma} \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} - L_{\alpha\beta}^t \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} + \frac{\partial L_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^b} z^b + \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \varepsilon$$

Yani

$$\mathfrak{L}_z L_{\alpha\beta}^{\sigma} = L_{\alpha k}^{\sigma} z_{,\beta}^k + L_{j\beta}^{\sigma} z_{,\alpha}^j - L_{\alpha\beta}^t z_{,t}^{\sigma} - L_{\alpha\beta,b}^{\sigma} z^b + z_{,\alpha\beta}^{\sigma} \quad (2.3)$$

dir. Buradan şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.1 (1.2) nokta dönüşümünün L_n de bir hareket olması için gerek ve yeter şart

$$L_{\alpha k}^{\sigma} \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + L_{j\beta}^{\sigma} \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} - L_{\alpha\beta}^t \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} + \frac{\partial L_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^b} z^b + \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = 0 \quad (2.4)$$

olmasıdır.

2.1 L Konneksiyonunun Bir Tensör Olarak Lie Türevi

Buraya kadar Lie türevini kısmi türeve göre ifade etmiştik. Şimdi Lie türevinin kovaryant türeve göre ifadesine araştıralım.

Daha önceki hesaplamalarda, L_{jk}^i nin Lie türevinin

$$\mathcal{L}_z L_{jk}^i = z_{,jk}^i + L_{jk,p}^i z^p - z_{,p}^i L_{jk}^p + z_{,j}^p L_{pk}^i + z_{,k}^p L_{jp}^i \quad (2.5)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz.

$z_{,jk}^i$ nin kovaryant türevi cinsinden ifadesini elde ederek

(2.5) de yerine yazalım.

$z_{,jk}^i$ ifadesini hesaplayalım,

z^i sonsuz küçük bükülme vektörünün z^j ye göre kovaryant türevi

$$z_{|j}^i = z_{,j}^i + z^p L_{pj}^i \quad (2.6)$$

dir. (2.6) da x^k ya göre kovaryant türevi ise

$$(z_{|j}^i)_{|k} = (z_{,j}^i)_{,k} + z_{|j}^k L_{pk}^i - z_{|p}^i L_{jk}^p$$

dir

$$(z_{|j}^i)_{|k} = (z_{,j}^i + z^p L_{pj}^i)_{,k} + (z_{,j}^p + z^s L_{sj}^i) L_{pk}^i - (z_{,p}^i + z^s L_{ps}^i) L_{jk}^p$$

$$z_{|jk}^i = z_{,jk}^i + z_{,k}^p L_{pj}^i + z^p L_{pj,k}^i + z_{,j}^p L_{pk}^i + z^s L_{sj}^i L_{pk}^i - z_{,p}^i L_{jk}^p - z^s L_{ps}^i L_{jk}^p$$

$$z_{,jk}^i = z_{|jk}^i - z_{,k}^p L_{pj}^i - z^p L_{pj,k}^i - z_{,j}^p L_{pk}^i - z^s L_{sj}^i L_{pk}^i + z_{,p}^i L_{jk}^p + z^s L_{ps}^i L_{jk}^p$$

Burada $z_{|jk}^i$ z^i nin j ve k ya göre kovaryant türevidir.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z L_{jk}^i = & z_{|jk}^i - L_{pj,k}^i z^p - L_{pj}^i z_{,k}^p - L_{pk}^i L_{sj}^p z^s + L_{jk,p}^i \\ & - L_{pk}^i z_{,j}^p + L_{jk}^p L_{sp}^i z^s + L_{jk,p}^i z^p - z_{,p}^i L_{jk}^p + z_{,j}^p L_{pk}^i + z_{,k}^p L_{jp}^i \end{aligned}$$

Bu ifadede 5. terim ile 9. terim ; 6. terim ile 10. terim sadeleşmektedir.

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i - L_{pj,k}^i z^p - L_{pj}^i z_{,k}^p - L_{pk}^i L_{sj}^p z^s + L_{jk}^p L_{sp}^i z^s + L_{jk,p}^i z^p + z_{,k}^p L_{jp}^i$$

$z_{,k}^p$ parantezine alıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + z_{,k}^p (L_{jp}^i - L_{pj}^i) - L_{pj,k}^i z^p + L_{jk,p}^i z^p - L_{pk}^i L_{sj}^p z^s + L_{jk}^p L_{sp}^i z^s$$

elde edilir. Son iki terim de $p \rightarrow s$ indis değişimi yapılarak Riemann eğrilik tensörünü elde etmek amacı ile

$$+ L_{sk}^i L_{pj}^s z^p - L_{jk}^s L_{ps}^i z^p + L_{jp,k}^i z^p$$

$$- L_{sk}^i L_{pj}^s z^p + L_{jk}^s L_{ps}^i z^p - L_{jp,k}^i z^p$$

terimlerini ekleyelim. Buradan

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z L_{jk}^i = & z_{|jk}^i + z_{,k}^p (L_{jp}^i - L_{pj}^i) - L_{pj,k}^i z^p + L_{jk,p}^i z^p - L_{sk}^i L_{pj}^s z^p + L_{jk}^s L_{ps}^i z^p \\ & + L_{sk}^i L_{jp}^s z^p - L_{jk}^s L_{sp}^i z^p + L_{jp,k}^i z^p \\ & - L_{sk}^i L_{jp}^s z^p + L_{jk}^s L_{sp}^i z^p - L_{jp,k}^i z^p \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z L_{jk}^i = & z_{|jk}^i + z_{,k}^p (L_{jp}^i - L_{pj}^i) z^p + L_{sk}^i (L_{jp}^s - L_{pj}^s) z^p \\ & + L_{jk}^s (L_{sp}^i - L_{ps}^i) z^p + (L_{jp,k}^i - L_{pj,k}^i) z^p + \\ & + L_{jk,p}^i z^p - L_{jp}^s L_{sk}^i z^p + L_{jk}^s L_{sp}^i z^p - L_{jp,k}^i z^p \end{aligned}$$

$$T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i$$

ve

$$R_{jkp}^i = L_{jk,p}^i - L_{jp}^s L_{sk}^i + L_{jk}^s L_{sp}^i - L_{jp,k}^i$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + z_{,k}^p T_{jp}^i + L_{sk}^i T_{jp}^s z^p + L_{jk}^s T_{ps}^i z^p + T_{jp,k}^i z^p + R_{jkp}^i z^p$$

dır. 4. terimdeki T karışık tensöründe $p \rightarrow s$ indis değişimi yapılır ve $-L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + L_{sk}^p T_{jp}^i z^s$ terimleri eklenirse ifade

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + z_{,k}^p T_{jp}^i + L_{sk}^i T_{jp}^s z^p - L_{jk}^s T_{sp}^i z^p + T_{jp,k}^i z^p - L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + R_{jkp}^i z^p$$

haline gelir; elde ettiğimiz bu ifadede 6. terimde $p \rightarrow s$ indis değişimi yapılır

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + z_{,k}^p T_{jp}^i + L_{sk}^i T_{jp}^s z^p - L_{jk}^s T_{sp}^i z^p + T_{jp,k}^i z^p - L_{pk}^s T_{js}^i z^p + L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + R_{jkp}^i z^p$$

ve bulunan bu ifadede

$$T_{jp|k}^i z^p = T_{jp,k}^i z^p + L_{sk}^i T_{jp}^s z^p - L_{jk}^s T_{sp}^i z^p - L_{pk}^s T_{js}^i z^p$$

eşitliği kullanılırsa

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + T_{jp|k}^i z^p + T_{jp}^i z_{,k}^p + T_{jp}^i L_{sk}^p z^s + R_{jkp}^i z^p$$

elde edilir.

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + T_{jp|s}^i z^p + z_{|k}^p T_{jp}^i - L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + T_{jp}^i L_{sk}^p z^s + R_{jkp}^i z^p$$

4. ve 5. terimler sadeleşirse

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + T_{jp|s}^i z^p + z_{|k}^p T_{jp}^i + R_{jkp}^i z^p$$

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + (T_{jp}^i z^p)_{|k} + R_{jkp}^i z^p$$

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|j|k}^i + R_{jkp}^i z^p$$

bulunur.

2.2 t_k^{ij} Tensörünün Lie Türevi

z^i ve t_k^{ij} nin kovariant türevleri sırası ile aşağıdaki şekildedir:

$$z_{,m}^i = z_{,m}^i + z^p L_{pm}^i$$

$$t_{k,m}^{ij} = t_{k,m}^{ij} + t_k^{pj} L_{pm}^i + t_k^{ip} L_{pm}^j - t_p^{ij} L_{km}^p$$

t_k^{ij} nin Lie türevi:

$$\mathcal{L}_z t_k^{ij} = t_{k,p}^{ij} z^p + t_p^{ij} z_{,k}^p - t_k^{pj} z_{,p}^i - t_k^{ip} z_{,p}^j \quad (2.7)$$

şeklindedir.

$$t_{k,p}^{ij} = t_{k|p}^{ij} - t_k^{hj} L_{hp}^i - t_k^{ih} L_{hp}^j + t_h^{ij} L_{kp}^h$$

$$z_{,k}^p = z_{|k}^p - z^h L_{hk}^p$$

$$z_{,p}^i = z_{|p}^i - z^h L_{hp}^i$$

$$z_{,p}^j = z_{|p}^j - z^h L_{hp}^j$$

eşitliklerini (2.4) de yerine yazarak

$$\mathcal{L}_z t_k^{ij} = (t_{k,p}^{ij} - t_k^{hj} L_{hp}^i - t_k^{ih} L_{hp}^j + t_h^{ij} L_{kp}^h) z^p + t_p^{ij} (z_{,k}^p - z^h L_{hk}^p) - t_k^{pj} (z_{,p}^i - z^h L_{hp}^i) - t_k^{ip} (z_{,p}^j - z^h L_{hp}^j)$$

ifade düzenlenirse;

$$\mathcal{L}_z t_k^{ij} = t_{k,p}^{ij} z^p + t_p^{ij} z_{,k}^p - t_k^{pj} z_{,p}^i - t_k^{ip} z_{,p}^j + t_p^{ij} z^h T_{hk}^p + t_k^{hj} z^h T_{ph}^i + t_k^{ih} z^h T_{ph}^j \quad (2.8)$$

elde edilir.

2.3 (u, v) Tipinden $t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}$ Tensörünün Lie Türevi

(u, v) Tipinden $t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}$ Tensörünün Lie Türevi

$$\mathcal{L}_z t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u} = (t_{j_1 j_2 \dots j_v, p}^{i_1 i_2 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{,p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{,j_\beta}^p \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}) \varepsilon \quad (2.9)$$

şeklinde olup burada $\binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u} = t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_{\alpha-1} p i_{\alpha+1} \dots i_u}$ ve $\binom{j_\beta}{p} t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_{\beta-1} p j_{\beta+1} \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}$ dir.

$t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}$ tensörünün Lie türevinin kovaryant türeve göre ifadesini bulalım:

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathfrak{L}_\theta z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v, P}^{i_1 \dots i_u} z^P - \sum_{\alpha=1}^u z_{,P}^{i_\alpha} \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{,J_\beta}^P \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \quad (2.10)$$

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \left[t_{j_1 \dots j_v|P}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u L_{ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta P}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \right] z^P -$$

$$\sum_{\alpha=1}^u (z_{|P}^{i_\alpha} - L_{ps}^{i_\alpha} z^s) \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v (z_{|j_\beta}^{i_\alpha} - L_{j_\beta P}^s z^s) \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v|P}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u z_{|P}^{i_\alpha} \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^{i_\alpha} \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

$$- \sum_{\alpha=1}^u L_{ps}^{i_\alpha} z^P \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u L_{ps}^{i_\alpha} z^s \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

$$+ \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta P}^s z^P \binom{J_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta P}^s z^s \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

5. ve 7. terimlerde

$p \rightarrow s$

$s \rightarrow p$

indis değişimi yapalım

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v|P}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u z_{|P}^{i_\alpha} \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^{i_\alpha} \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u (L_{sp}^{i_\alpha} - L_{ps}^{i_\alpha}) z^P \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

Burada

$$T_{sp}^{i_\alpha} = L_{sp}^{i_\alpha} - L_{ps}^{i_\alpha} \quad (2.11)$$

olduğundan, ifade

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v|P}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u z_{|P}^{i_\alpha} \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^{i_\alpha} \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u T_{sp}^{i_\alpha} z^P \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

şeklini alır. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.2: (u, v) tipinden karışık $t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$ tensörünün Lie türevi (u, v) tipinde bir tensördür ve

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v|P}^{i_1 \dots i_u} z^P - \sum_{\alpha=1}^u z_{|P}^{i_\alpha} \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^{i_\alpha} \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u T_{sp}^{i_\alpha} z^P \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_{\beta-1} P^j j_{\beta+1} \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

ve

$$\binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} P^i i_{\alpha+1} \dots i_u}$$

dır.

Önerme 2.1: L_N uzayı L_{jk}^i simetrik konneksiyona sahip burulmasız bir uzay ise ($T_{jk}^i = 0$)

$$\mathcal{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathcal{L}_z^0 t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \equiv t_{j_1 \dots j_v | P}^{i_1 \dots i_u} z^P - \sum_{\alpha=1}^u z_{|P}^{i_\alpha} \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^P \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

dır.

2.3.1 (u, v) Tipinden $t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}$ Tensörünün Lie Türevinin Diğer Bir İfadesi

L_{jk}^i simetrik olmayan afin konneksiyona ve

$$T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i = 2L_{[jk]}^i$$

burulma tensörüne sahip n boyutlu L_n uzayındaki Lie türevi için, L_{jk}^i konneksiyonunun

$$L_{jk}^i = \frac{1}{2}(L_{jk}^i - L_{kj}^i)$$

simetrik kısmını ele alarak işlemleri yeniden inceleyelim. Burada $T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i = 2L_{[jk]}^i$ olduğundan

$$L_{jk}^i = L_{jk}^i + \frac{1}{2}T_{jk}^i$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} t_{j_1 \dots j_v | P}^{i_1 \dots i_u} &= t_{j_1 \dots j_v, P}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u L_{Ps}^{i_\alpha} z^P \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta P}^s z^P \binom{J_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ t_{j_1 \dots j_v | P}^{i_1 \dots i_u} &= t_{j_1 \dots j_v, P}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u \left(L_{Ps}^{i_\alpha} + \frac{1}{2}T_{Ps}^{i_\alpha} \right) \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v \left(L_{j_\beta P}^s + \frac{1}{2}T_{j_\beta P}^s \right) \binom{J_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ t_{j_1 \dots j_v | P}^{i_1 \dots i_u} &= t_{j_1 \dots j_v, P}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u L_{Ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta P}^s \binom{J_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{Ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j_\beta P}^s \binom{J_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \end{aligned}$$

$$t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v, p}^{i_1 \dots i_u} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j_\beta p}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

dır ve

$$z_{|p}^{i_\alpha} = z_{,p}^{i_\alpha} + L_{ps}^{i_\alpha} z^s$$

$$z_{|p}^{i_\alpha} = z_{,p}^{i_\alpha} + (L_{ps}^{i_\alpha} + \frac{1}{2} T_{ps}^{i_\alpha}) z^s$$

$$z_{|p}^{i_\alpha} = z_{,p}^{i_\alpha} + L_{ps}^{i_\alpha} z^s + \frac{1}{2} T_{ps}^{i_\alpha} z^s$$

$$z_{|p}^{i_\alpha} = z_{,p}^{i_\alpha} \frac{1}{2} T_{ps}^{i_\alpha} z^s$$

dır. Burada (;), L_{jk}^i konneksiyonunun L_{jk}^i simetrik kısmına göre alınan kovaryant türevi

temsil etmektedir. Şimdi bulduğumuz ifadeleri Lie türevinde yerine yazalım.

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \equiv t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u z_{\theta | p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v z_{j_\beta}^{i_\alpha} \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \left[t_{j_1 \dots j_v, p}^{i_1 \dots i_u} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j_\beta p}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \right] z^p$$

$$- \sum_{\alpha=1}^u (z_{,p}^{i_\alpha} + \frac{1}{2} T_{ps}^{i_\alpha} z^s) \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v (z_{,j_\beta}^p + \frac{1}{2} T_{j_\beta}^p z^s) \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v, p}^{i_1 \dots i_u} z^p + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} z^p - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j_\beta p}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{,p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i_\alpha} z^s \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{,j_\beta}^p \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j_\beta}^p z^s \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} z^p$$

$p \leftrightarrow s$ indis değişimi yaptığımızda antisimetrik $T_{ps}^{i_\alpha}$ tensörünün

$$T_{ps}^{i_\alpha} = -T_{sp}^{i_\alpha}$$

şeklinde işaret değiştirdiğini belirtelim.

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathfrak{L}_0 z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \equiv t_{j_1 \dots j_v, p}^{i_1 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{,p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{,j_\beta}^p \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

Teorem 2.3: (u, v) tipinden karışık $t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$ tensörünün Lie türevi

$$\mathcal{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathcal{L}_0 z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \equiv t_{j_1 \dots j_v; p}^{i_1 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{; p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{; j_\beta}^p \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

şeklinde dir. Burada $(;)$, L_{jk}^i konneksiyonunun L_{jk}^i simetrik kısmına göre alınan kovaryant türevi temsil etmektedir.

Teorem 2.4 $z^i(x)$ vektör alanının R^n Riemann uzayında bir sonsuz küçük hareket tanımlaması için gerek ve yeter koşul z^i ile keyfi bir jeodeziğin teğet birim vektörünün bu jeodezik boyunca iç çarpımının sabit olmasıdır.

İspat:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

Riemann metriği ile verilen n boyutlu R^n Riemann uzayını düşünelim. Daha önce

$$\bar{x}^i = x^i + z^i(x') \varepsilon$$

nokta dönüşümünün R^n de bir hareket olması için gerek ve yeter şartın

$$\mathcal{L}_z g_{mn} = 2 \nabla_{(m} z_{n)}$$

olduğunu göstermiştik.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(g_{mn} z^m \frac{dx^n}{ds} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (g_{mn}) z^m \frac{dx^n}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} + g_{mn} z^m \frac{d^2 x^n}{ds^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{mn}) z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} + g_{mn} z^m \frac{d^2 x^n}{ds^2}$$

Burada jeodeziklerin diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2 x^n}{ds^2} + L_{ij}^n \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (2.13)$$

kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial s}(z_n \frac{dx^n}{ds}) = \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{mn})z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s}(z^m) \frac{dx^n}{ds} - g_{mn}z^m L_{ij}^n \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$$

elde edilir. Ve

$$g_{mn}L_{ij}^n = [ij, m] = \Gamma_{ijm} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}) \quad (2.14)$$

ifadeleri yerine yazılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(z_n \frac{dx^n}{ds}) &= \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{mn})z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s}(z^m) \frac{dx^n}{ds} - \frac{z^m}{2}(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \\ \frac{\partial}{\partial s}(z_n \frac{dx^n}{ds}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{mn})z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^n}(g_{mn})z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s}(z^m) \frac{dx^n}{ds} - \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m \end{aligned}$$

bulunur. Burada

4. terimde $i \rightarrow n$

$j \rightarrow k$

5. terimde $j \rightarrow n$

$i \rightarrow k$

indis değişimlerini yaptıktan sonra ifade düzenlenirse 1.-4. ve 2.-5. terimler sadeleşir

3 . terim iki eşit parça halinde yazılarak

$$\frac{\partial}{\partial s}(z_n \frac{dx^n}{ds}) = \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\partial}{\partial s}(z^m) \frac{dx^n}{ds} + \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\partial}{\partial s}(z^m) \frac{dx^n}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(z_n \frac{dx^n}{ds}) = \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\partial}{\partial x^k}(z^m) \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\partial}{\partial x^k}(z^m) \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m$$

1.terimde $n \rightarrow i$

$k \rightarrow j$

2.terimde $m \rightarrow n$

$n \rightarrow j$

$k \rightarrow i$

3.terimde $m \rightarrow k$

indislerini deđiřtirerek

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{1}{2} \left(g_{mi} \frac{\partial}{\partial x^j} z^m + g_{nj} \frac{\partial}{\partial x^j} z^n + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (2.16)$$

elde edilir $2\nabla_{(i} z_{j)} = \left(g_{mi} \frac{\partial}{\partial x^j} z^m + g_{nj} \frac{\partial}{\partial x^j} z^n + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k \right)$ dan

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{1}{2} (2\nabla_{(i} z_{j)}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (2.17)$$

ifadesi bulunur. Burada

$$2\nabla_{(i} z_{j)} = 0$$

olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{1}{2} (2\nabla_{(i} z_{j)}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

dır ve buradan da

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \nabla_{(i} z_{j)} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (2.18)$$

olup, bu i arpımın jeodezik boyunca sabit olduğu ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

Yano, K., (1957), The Theory of Lie Derivatives and Its Applications, N-Holland Publ.Co , Amsterdam.

Velimirovic, L.S., Mincic, S.M., Stankovic, M.S., (2003), "Infinitesimal Deformations and Lie Derivative of a Non-Symmetric Affine Connection Space", Acta Univ. Palacki. Olomouc., Fac. Rer. Nat., Mathematica, 42:111-121.

Velimirovic, L.S., Mincic, S.M., Stankovic, M.S., (2001), "Infinitesimal Deformations of Non-Symmetric Affine Connection Space", Filomat, 175-182.

Velimirovic, L.S., Mincic, S.M., (2004), "Infinitesimal Bending of a Subspace of a generalized Riemannian Space", Tensor, N.S. 65:212-224.

Velimirovic, L.S., Mincic, S.M., Stankovic, M.S., (2002), "Infinitesimal Deformations of Curvature Tensors At Non-Symmetric Affine Connection Space", Matematicki Vesnik, 54:219-226

Eisenhart, L.P., (1927), Non-Reimannien Geometry, Published by the American Mathematical Society, New York.

Weatherburn, C.E., (1966), An Introduction To Riemannian Geometry and The Tensor Calculus. Published by The Syndics of The Cambridge University Press, London.

Soyuçok Z., Soyuçok A., (2004), Tensör Analizi ve Uygulamaları, YTÜ Basım Yayın Merkezi, YTÜ.FE.DK-04.0713/Fakülte Yayın No:FE.Mat-04.001.

