

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİNGÜLER STURM – LİOUVILLE OPERATÖRÜNÜN
NEGATİF ÖZDEĞERLERİNİN KARELERİNİN TOPLAMININ
ASİMTOTİK DAVRANIŞI**

Mazlum AKYOL

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV

İSTANBUL,2005

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
2.1 Mutlak Sürekli Fonksiyonlar.....	3
2.2 $L_p(a, b)$ Uzayları Hakkında.....	11
2.3 Lineer Operatörün Spektrumu.....	14
2.4 Eşlenik Operatör.....	18
2.5 Eşlenik Operatörün Genel Tanımı.....	23
2.6 Kendine Eş Operatörün Spektrumu.....	25
3. SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN NEGATİF ÖZDEĞERLERİNİN KARELERİNİN TOPLAMININ ASİMTOTİK DAVRANIŞI.....	37
3.1 Problemin Ortaya Konması ve Özdeğerlerle İlgili Bazı Bağıntılar.....	37
3.2 Negatif Özdeğerlerin Karelerinin Toplamı İçin Asimtotik Formüller.....	65
3.3 Örnekler.....	79
SONUÇ.....	81
KAYNAKLAR.....	82
ÖZGEÇMİŞ.....	83

SİMGE LİSTESİ

A^*	A operatörünün eşleniği
A^{-1}	A operatörünün tersi
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	A operatörünün değer kümesi
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana daima yol gösteren ve yardımcı olan danışman hocam Prof. Dr. Ehliman ADGÜZELOV ve Araştırma Görevlisi Serpil ŞENGÜL'e teşekkür ederim .

ÖZET

“Singüler Sturm- Liouville Operatörünün Negatif Özdeğerlerinin Toplamının Asimtotik Davranışı” adlı bu tez çalışmasında $L_2[0, \infty)$ uzayında

$l(y) = -y''(x) - q(x)y(x)$ diferansiyel ifadesi ve $y'(0) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan kendine eş L operatörünün negatif özdeğerlerinin karelerinin toplamı için asimtotik formüller bulunmuştur. $l(y)$ 'nin ifadesinde yer alan $q(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli, monoton azalan ve pozitif değerli bir fonksiyon olduğu varsayılmıştır.

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ L operatörünün negatif özdeğerleri olmak üzere $q(x)$ fonksiyonunun bazı koşulları sağladığı varsayılarak $\varepsilon \rightarrow +0$ iken

$$\sum_{-\lambda_i < -\varepsilon} \lambda_i^2 = (15\pi)^{-1} \left[1 + O(e^{-t_0}) \right] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \cdot [8q^2(x) + 4q(x) \cdot \varepsilon + 3\varepsilon^2] \cdot dx$$

ve

$$\sum_{-\lambda_i < -\varepsilon} \lambda_i^2 = (15\pi)^{-1} \left[1 + O(e^{-\varepsilon^{-\beta}}) \right] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \cdot [8q^2(x) + 4q(x) \cdot \varepsilon + 3\varepsilon^2] \cdot dx$$

asimtotik formüllerinin sağlandığı ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Kendine eş operatör, Özdeğer, Spektrum, Spektrumun ayırık kısmı

ABSTRACT

In this thesis, entitled "Asymptotic Behavior of The Sum of Squares of negative eigenvalues of The Singular Sturm - Liouville Operator", we find asymptotic formulas on the sum of squares negative eigenvalues of a self -adjoint operator L generated by the differential statement $l(y) = -y''(x) - q(x)y(x)$ and the boundary candidate

$y'(0) = 0$ in the space $L_2[0, \infty)$. We assume that the function $q(x)$, seen in the statement of $l(y)$, is continuous, decreasing and takes positive values in the interval

$[0, \infty)$. If $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ the negative eigenvalues of the operator L , then we prove that the asymptotic formulas, when $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\sum_{-\lambda_i < -\varepsilon} \lambda_i^2 = (15\pi)^{-1} \left[1 + O(e^{t_0}) \right] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \cdot [8q^2(x) + 4q(x) \cdot \varepsilon + 3\varepsilon^2] \cdot dx$$

$$\sum_{-\lambda_i < -\varepsilon} \lambda_i^2 = (15\pi)^{-1} \left[1 + O(e^{-\varepsilon^{-\beta}}) \right] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \cdot [8q^2(x) + 4q(x) \cdot \varepsilon + 3\varepsilon^2] \cdot dx$$

holds under some additional conditions on the function $q(x)$.

Keywords : Self - adjoint operator, Semi bounded operator, Eigenvalue, distinct not of spectrum.

GİRİŞ

Bu çalışmada $L_2[0, \infty)$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) - q(x)y(x) \quad (1.1)$$

diferansiyel ifadesi ve $y'(0) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan kendine eş L operatörünün negatif özdeğerlerinin karelerinin toplamı için asimptotik formüller bulunmuştur .

(1.1) ifadesinde yer alan $q(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılmıştır :

1) $q(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli , monoton azalan ve pozitif değerlidir .

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0 \quad (1.2)$$

L operatörünün tanım kümesi

1. $y'(x)$ her sonlu $[a, b] \subset [0, \infty)$ aralığında mutlak süreklidir .

$$2. y'(0) = 0 \quad (1.3)$$

$$3. l(y) = -y''(x) - q(x)y(x) \in L_2[0, \infty) \quad (1.4)$$

koşullarını sağlayan tüm $L_2[0, \infty)$ fonksiyonlarının kümesidir. L operatörünün alttan yarı sınırlı ve spektrumunun negatif kısmının ayrık olduğu bilinmektedir [1] .

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ L operatörünün negatif özdeğerleri olsun.

Ayrıca $\ln_j x$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) ile

$$\ln_0 x = x \quad (1.5)$$

$$\ln_j x = \ln(\ln_{j-1} x) \quad (1.6)$$

şeklinde fonksiyonları gösterelim . $q(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki iki koşuldan birini sağladığını varsayalım :

3) $k_0, \left(0, \frac{2}{5}\right)$ aralığına ait olan sabit bir sayı olmak üzere her $\eta > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x)x^{k_0-\eta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[q(x)x^{k_0+\eta} \right]^{-1} = 0 \quad (1.7)$$

4) Öyle bir $\xi > 0$ sayısı ve n doğal sayısı vardır ki $q(x) - (\ln_n x)^{-\xi}$ fonksiyonu bir $[a, \infty)$ ($a > 0$) aralığında negatif değerli değildir ve monoton azalmayandır .
Bu tez çalışmasında elde edilen temel sonuçlar aşağıdaki teoremlerden ibarettir .

Teorem 1.1 : 1) ve 3) koşulları sağlandığı takdirde $\varepsilon \rightarrow +0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j^2 = (15\pi)^{-1} [1 + O(e^{t_0})] \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \cdot [8q^2(x) + 4\varepsilon q(x) + 3\varepsilon^2] \cdot dx \quad (1.8)$$

asimtotik formülü sağlanır. Burada t_0 pozitif bir sabittir.

Teorem 1.2. $q(x)$ fonksiyonu 1), 2) ve 4) koşullarını sağladığı takdirde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j^2 = (15\pi)^{-1} [1 + O(e^{-\varepsilon^{-\beta}})] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \cdot [8q^2(x) + 4q(x)\varepsilon + 3\varepsilon^2] \cdot dx \quad (1.9)$$

asimtotik formülü sağlanır. Burada β pozitif bir sabittir .

[2] çalışmasında L operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formüller bulunmuştur. [5] çalışmasında $q(x)$ 'in bazı koşulları sağladığı varsayılarak $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j^2 = (3\pi)^{-1} [1 + O(e^{t_0})] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} [2q(x) + \varepsilon] \cdot \sqrt{q(x) - \varepsilon} dx \quad (1.10)$$

asimtotik formülünün sağlandığı gösterilmiştir . Burada t_0 pozitif bir sabittir .

[3] çalışmasında yarı eksende verilmiş operatör katsayılı Sturm - Liouville operatörünün negatif özdeğer sayısının asimtotik davranışı incelenmiştir .

[4] çalışmasında yüksek mertebeden sınırsız operatör katsayılı bir diferansiyel operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formüller bulunmuştur .

2. ÖN BİLGİLER

2.1 . Mutlak Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 2. 1. 1 : f , sonlu bir $[a , b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun . Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a , b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

koşulunu sağlayan her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ topluluğu için

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı varsa f fonksiyonuna $[a , b]$ aralığında mutlak süreklidir denir.

Bu tanımdan yola çıkarak her mutlak sürekli fonksiyonun düzgün sürekli olduğu görülmektedir. Oysa her düzgün sürekli fonksiyon mutlak sürekli fonksiyon olmak zorunda değildir. $[a , b]$ aralığında Lipshitz koşulunu sağlayan her fonksiyonun bu aralıkta mutlak sürekli olduğu açıktır.

Teorem 2.1.1: Bir f fonksiyonunun $[a , b]$ aralığında mutlak sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a , b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayan her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ topluluğu için

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \varepsilon \quad (2.2)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının var olmasıdır .

İspat :

Gereklik : $\left| \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)|$ olduğundan gereklik açıktır.

Yeterlilik : Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a, b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ koşulunu sağlayan $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ topluluğu için

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olacak şekilde bir } \delta = \delta(\varepsilon) \text{ sayısının var olduğunu kabul edelim}$$

.

$f(b_i) - f(a_i) \geq 0$ olacak şekilde (a_i, b_i) aralıklarının topluluğu A , geri kalan aralıkların topluluğu da B olsun .

$$\sum_A (b_i - a_i) < \delta \text{ ve } \sum_B (b_i - a_i) < \delta \text{ olduğundan ;}$$

$$\sum_A |f(b_i) - f(a_i)| = \left| \sum_A [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.3)$$

$$\sum_B |f(b_i) - f(a_i)| = \left| \sum_B [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.4)$$

olduğu açıktır.

Buradan $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ elde edilir.

Teorem 2.1.2 : f ve g sonlu bir $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli herhangi iki fonksiyon ise ; $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonları da $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.

İspat : $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının mutlak sürekliliği ,

$$|[f(b_i) \pm g(b_i)] - [f(a_i) \pm g(a_i)]| \leq |f(b_i) - f(a_i)| + |g(b_i) - g(a_i)| \quad (2.5)$$

eşitsizliğinden çıkar .

$$A = \max_{[a,b]} |f(x)| \quad (2.6)$$

$$B = \max_{[a,b]} |g(x)| \quad \text{ise} \quad (2.7)$$

$$|f(b_i) \cdot g(b_i) - f(a_i) \cdot g(a_i)| = |[f(b_i) \cdot g(b_i) - f(b_i) \cdot g(a_i)] + [f(b_i) \cdot g(a_i) - f(a_i) \cdot g(a_i)]| \leq$$

$$|f(b_i)| \cdot |g(b_i) - g(a_i)| + |g(a_i)| \cdot |f(b_i) - f(a_i)| \leq A |g(b_i) - g(a_i)| + B |f(b_i) - f(a_i)| \quad (2.8)$$

dir.

Buradan da $f \cdot g$ fonksiyonunun mutlak sürekliliği elde edilir .

f ve g sonlu bir $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli herhangi iki fonksiyon ise , $\frac{f}{g}$

fonksiyonu mutlak süreklidir. (Her $x \in [a, b]$ için , $g(x) \neq 0$)

Eğer her $x \in [a, b]$ için $g(x) \neq 0$ ise , $|g(x)| \geq C > 0$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Dolayısıyla

$$\left| \frac{1}{g(b_i)} - \frac{1}{g(a_i)} \right| = \left| \frac{g(b_i) - g(a_i)}{g(b_i) \cdot g(a_i)} \right| = \frac{|g(b_i) - g(a_i)|}{|g(b_i) \cdot g(a_i)|} \leq \frac{|g(b_i) - g(a_i)|}{C^2} \quad (2.9)$$

dir.

Bu bağıntıdan $\frac{1}{g}$ fonksiyonun mutlak sürekliliği çıkar . O takdirde $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da f ile $\frac{1}{g}$ fonksiyonlarının çarpımı olarak mutlak süreklidir .

Teorem 2.1.3 : $f, [a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve değerleri $[A, B]$ aralığına ait olan bir fonksiyon olsun . Eğer $F(y), [A, B]$ aralığında Lipschitz koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise $F[f(x)]$ bileşke fonksiyonu $[a, b]$ 'de mutlak süreklidir.

İspat : F fonksiyonu $[A, B]$ aralığında Lipschitz koşulunu sağladığından her $y', y'' \in [A, B]$ için $|F(y'') - F(y')| \leq K \cdot |y'' - y'|$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. Dolayısıyla $[a, b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ topluluğu için

$$\sum_{i=1}^n |F[f(b_i)] - F[f(a_i)]| \leq K \cdot \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \quad (2.10)$$

Bu eşitsizlikten ve f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olmasından , $F[f(x)]$ fonksiyonunun da $[a, b]$ aralığında mutlak sürekliliği elde edilir.

Teorem 2 . 1 . 4 : $f, [a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve artan bir fonksiyon olsun . Eğer $F, [f(a), f(b)]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ise $F[f(x)]$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.

İspat : F fonksiyonu $[f(a), f(b)]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan her $\epsilon > 0$ verildiğinde $[f(a), f(b)]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$$\sum_{i=1}^n (B_i - A_i) < \delta \text{ koşulunu sağlayan her sonlu } \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^n \text{ topluluğu için}$$

$\sum_{i=1}^n |F(B_i) - F(A_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Öte yandan f de

$[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, $[a, b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \eta$ koşulunu sağlayan her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^m$ topluluğu için

$\sum_{i=1}^m |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ ($\eta = \eta(\varepsilon)$) vardır. $\{f(a_i), f(b_i)\}_{i=1}^m$, $[f(a), f(b)]$

aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$\sum_{i=1}^m |f(b_i) - f(a_i)| < \delta$ koşulunu sağlayan sonlu bir topluluğu olduğundan

$$\sum_{i=1}^m |F[f(b_i)] - F[f(a_i)]| < \varepsilon \quad (2.11)$$

olur.

Böylece her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a, b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \eta$ koşulunu sağlayan her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^m$ topluluğu için (2.9) koşulunu

sağlayan bir $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ sayısının var olduğunu gösterdik. Bu da tanım gereği

$F[f(x)]$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.2 : E herhangi bir reel kümesi olsun. $\{(a_n, b_n)\}$ E kümesinin örten açık aralıklarının sayılabilir topluluğu ve Ω da bu tür mümkün olan topluluklarının kümesi olmak üzere ,

$$m^*E = \inf_{\{(a_n, b_n)\} \in \Omega} \sum_n (b_n - a_n) \quad (2.12)$$

değerine , E kümesinin dış ölçümü denir .

Bu tanımdan $m^*E \geq 0$ olduğu görülmektedir.

Tanım 2. 1. 3 : E herhangi bir reel sayı kümesi olsun . Her A reel sayı kümesi için

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (R \setminus E)) \quad (2.13)$$

ise E kümesine Lebesque anlamında ölçülebilirdir denir .

Tanım 2. 1. 4 : Lebesque anlamında ölçülebilir bir $E \subset R$ kümesinin m^*E dış ölçümüne , E 'nin Lebesque anlamında ölçümü denir ve mE ile gösterilir.

Tanım 2. 1. 5 : f bir E kümesinde tanımlı ve genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer E kümesi ve her $c \in R$ için

$$E(f > c) = \{x \in E : f(x) > c\} \quad (2.14)$$

kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonuna E kümesinde ölçülebilir bir fonksiyon denir.

f bir E kümesinde tanımlı ve genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki fonksiyonları göz önüne alalım .

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) \leq 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.16)$$

f_+ ve f_- E kümesinde negatif olmayan ve her $x \in E$ için ,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad (2.17)$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Ayrıca f fonksiyonu E 'de ölçülebilir ise f_+ ve f_- fonksiyonlarının da E 'de ölçülebilir oldukları kolaylıkla gösterilebilir .

Tanım 2.1.6 : f bir E kümesinde ölçülebilir negatif olmayan bir fonksiyon olsun. E kümesini sonlu sayıda ikişerli ayrık ölçülebilir $E_1, E_2, \dots, E_n$ alt kümelerine bölüp $u_i = \inf_{E_i} f(x)$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n u_i mE_i \quad (2.17)$$

toplamını göz önüne alalım . E kümesinin bu şekilde mümkün olan tüm bölüntüleri üzerinde alınmış

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n u_i mE_i \right\} \quad (2.18)$$

değerine f fonksiyonunun E kümesinde Lebesgue integrali denir ve

$$\int_E f(x) dm \quad (2.19)$$

ile gösterilir.

$$\int_E f(x) dm < \infty \quad (2.20)$$

ise f fonksiyonuna E kümesinde Lebesgue anlamında integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.1.7 : f bir E kümesinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun . Eğer

$$\int_E f_+(x) dm \quad (2.21)$$

ve

$$\int_E f_-(x) dm \quad (2.22)$$

integrallerinden en az biri sonlu ise f fonksiyonun E kümesinde Lebesgue anlamında integrali vardır denir. Bu durumda

$$\int_E f(x) dm = \int_E f_+(x) dm - \int_E f_-(x) dm \quad (2.23)$$

ifadesine f fonksiyonunun E kümesinde Lebesgue integrali denir. Eğer $\int_E f(x) dm$

sonlu ise yani $\int_E f_+(x) dm < \infty$ ve $\int_E f_-(x) dm < \infty$ ise f fonksiyonuna E kümesinde

Lebesgue anlamında integreedilebilirdir denir.

Tanım 2.1.8 : Verilen bir özellik ölçülebilir ise ve E kümesinin sıfır ölçümlü bir alt kümesinin dışında her noktasında sağlanıyorsa, bu özellik E kümesinde hemen hemen her yerde (hhhy) sağlanıyor denir.

Örneğin ölçülebilir bir E kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için,

$$E(f = \pm\infty) = \{x \in E : f(x) = \infty\} \cup \{x \in E : f(x) = -\infty\} \quad (2.24)$$

kümesinin ölçümü sıfır ise f fonksiyonuna E kümesinde hhhy sonludur denir.

Tanım 2.1.9 : f ve g ölçülebilir bir E kümesinde tanımlı herhangi iki fonksiyon olsun. Eğer E kümesinde hhhy $f = g$ ise bu fonksiyonlara E kümesinde denktir denir ve $f \sim g$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.5 : $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli bir f fonksiyonunun hemen hemen her $x \in [a, b]$ noktasında sonlu türevi vardır ve $f'(x)$ $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integreedilebilirdir.

Teorem 2.1.6 : $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli bir f fonksiyonunun hhhy türevi sıfır ise, bu fonksiyon sabittir.

Teorem 2.1.6)'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.1 : f ve g $[a, b]$ aralığında $f' \sim g'$ olacak şekilde herhangi iki mutlak sürekli fonksiyon ise $f - g$ sabittir.

2.2 $L_p(a, b)$ Uzayları Hakkında

f bir (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$ aralığında tanımlı, reel veya kompleks değerli bir fonksiyon ve $p \in [1, \infty)$ bir sabit olsun. $\text{Re}(f)$ ve $\text{Im}(f)$ fonksiyonları (a, b) aralığında ölçülebilir ise f fonksiyonuna (a, b) aralığında ölçülebilirdir denir.

Her $C \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$\{x \in (a, b) : |f(x)|^p > C\} = \begin{cases} (a, b), & C < 0 \text{ ise} \\ x \in (a, b) : |f(x)| > C^{\frac{1}{p}}, C \geq 0 & \text{ise} \end{cases} \quad (2.25)$$

dir.

Bu formülden görülüyor ki, $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında ölçülebilir ise $|f(x)|^p$ fonksiyonu da (a, b) 'de ölçülebilirdir. $|f(x)|^p$ fonksiyonunun (a, b) aralığında integreedilebilir olduğunu yani

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \quad (2.26)$$

koşulunu sağladığını varsayalım. (2.26) koşulunu sağlayan ve kendi aralarında denk olan tüm fonksiyonlar bir denklik sınıfı oluşturur. Bu denklik sınıflarının kümesi $L_p(a, b)$ ile gösterilir. Aynı denklik sınıfına ait olan fonksiyonlar eşit sayılırlar. Bir f fonksiyonunun $L_p(a, b)$ kümesine ait olduğu söylendiğinde f 'in yukarıda sözü edilen denklik sınıflarından birine ait olduğu ifade edilmiş olur.

$\alpha \geq 0$ ve $\beta \geq 0$ herhangi iki sayı ve $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$ olsun. O takdirde

$(\alpha + \beta)^p \leq (2\gamma)^p = 2^p \cdot \gamma^p$ ve $\gamma^p = \max\{\alpha^p, \beta^p\} \leq \alpha^p + \beta^p$ 'dir. Dolayısıyla her $\alpha \geq 0$ ve $\beta \geq 0$ sayıları için ,

$$(\alpha + \beta)^p \leq 2^p \cdot (\alpha^p + \beta^p) \quad (2.27)$$

dir.

f ve $g \in L_p(a,b)$ uzayının herhangi iki sonlu değerli fonksiyonu olsun . (2.27)

eşitsizliğinden yararlanarak

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \int_a^b [|f(x)| + |g(x)|]^p dx \leq 2^p \int_a^b |f(x)|^p dx + 2^p \int_a^b |g(x)|^p dx < \infty \quad (2.28)$$

elde edilir.

Dolayısıyla $f + g \in L_p(a,b)$ 'dir .

Bu kez $L_p(a,b)$ 'nin herhangi iki fonksiyonu olsun .

Reel Analiz'den f ve g fonksiyonlarının (a,b) aralığında hhhhy sonlu oldukları bilinmektedir. Bundan dolayı (a,b) aralığında $f \sim f_1$ ve $g \sim g_1$ olacak şekilde sonlu değerli f_1 ve g_1 fonksiyonları vardır. Örneğin f_1 ve g_1 fonksiyonları

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , |f(x)| < \infty \quad \text{ise} \\ 0 & , |f(x)| = \infty \quad \text{ise} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & , |g(x)| < \infty \quad \text{ise} \\ 0 & , |g(x)| = \infty \quad \text{ise} \end{cases} \quad (2.30)$$

şeklinde alınabilir. $f_1 \in L_p(a,b)$ ve $g_1 \in L_p(a,b)$ 'dir. O halde yukarıda gösteriliği gibi $f_1 + g_1 \in L_p(a,b)$ 'dir. Öte yandan $f + g \sim f_1 + g_1$ olduğu göz önüne alınırsa $L_p(a,b)$ elemanı olarak $f + g = f_1 + g_1$ 'dir . Dolayısıyla her $f, g \in L_p(a,b)$ fonksiyonları için

$f + g$ fonksiyonunun (a,b) aralığında tanımlı , ölçülebilir olduğu kabul edilebilir ve $f + g \in L_p(a,b)$ 'dir.

Ayrıca her $\lambda \in K$ sayısı ve her $f \in L_p(a,b)$ için

$$\int_a^b |\lambda f(x)|^p dx = |\lambda|^p \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \quad (2.31)$$

dır .

Yani $\lambda f \in L_p(a,b)$ 'dir . Burada lineer uzayın tüm aksiyomlarının sağlandığı gösterilebilir. Sonuç olarak $L_p(a,b)$ bir lineer uzaydır. $L_p(a,b)$ uzayının

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f = f(x) \in L_p(a,b)) \quad (2.32)$$

fonksiyonu ile bir tam normlu lineer uzay olduğu yani bir Banach Uzayı olduğu bilinmektedir. Özel olarak $L_2(a,b)$ uzayının

$$(f,g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (f = f(x) , g = g(x) \in L_2(a,b)) \quad (2.33)$$

fonksiyonu ile bir Hilbert Uzayı olduğu bilinmektedir .

2.3 Lineer Operatörün Spektrumu

Tanım 2.3.1 : X bir lineer uzay ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun . $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x_0 \in D(A)$ (x_0 vektörü) ve λ_0 sayısı varsa , λ_0 'a A operatörünü bir özdeğeri ve x_0 'a da bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü denir .

Teorem 2.3.1: A herhangi bir lineer operatör olsun. Bir λ sayısı için $A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersinin var olması için gerek ve yeter koşul λ 'nın A operatörünün bir özdeğeri olmamasıdır .

Tanım 2.3.2 : X bir kompleks Banach Uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun . Bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersi var, sınırlı ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} = X$ ise bu λ sayısına A operatörünün bir regüler değeri veya regüler noktası denir . A operatörünün tüm regüler değerlerinin kümesine A operatörünün rezolvent kümesi denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. $\rho(A)$ kümesinde tanımlı $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatör fonksiyonuna A 'nın rezolventi denir .

Tanım 2.3.3: X bir kompleks Banach Uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün spektrumu denir.

Teorem 2.3.1, Tanım 2.3.2 ve Tanım 2.3.3'den bir A lineer operatörünün özdeğerlerinin A 'nın spektrumuna ait olduğu görülmektedir. Sonlu boyutlu uzaylarda her lineer operatörün spektrumu sadece özdeğerlerden ibarettir.

Tanım 2.3.4: X kompleks bir Banach Uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun. A operatörünün tüm özdeğerlerinden oluşan kümeye bir başka deyişle $A - \lambda I$ operatörünün tersinin var olmadığı tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine A 'nın spektrumunun noktasal kısmı denir.

$A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersi var, sınırsız ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} = X$ olduğu tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine A 'nın spektrumunun sürekli kısmı denir.

$A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersi var ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} \neq X$ olduğu tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine A operatörünün kalan kısmı denir.

Örnek 1 : H sonsuz boyutlu bir Hilbert Uzayı ve $f_1 \neq 0, f_2 \neq 0$ bu uzayın herhangi iki ortogonal $((f_1, f_2) = 0)$ elemanı olsun.

$A: H \rightarrow H$, $Ax = (x, f_1)f_1 - (x, f_2)f_2$ operatörünün spektrumunu bulunuz.

Çözüm : $\lambda_0 = 0$ A 'nın bir öz değeri ve $(x, f_1) = (x, f_2) = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı her $x \in H$ elemanı bir öz vektördür. H sonsuz boyutlu uzay olduğundan $(x, f_1) = (x, f_2) = 0$ koşulunu sağlayan tüm $x \in H$ elemanlarının N_0 lineer manifoldu da sonsuz boyutludur. Bu durumda $\lambda_0 = 0$ öz değerinin katlılığı sonsuzdur denir. Ayrıca

$$Af_1 = \|f_1\|^2 \cdot f_1, \quad Af_2 = -\|f_2\|^2 \cdot f_2$$

bağıntılarından görülüyor ki $\lambda_1 = \|f_1\|^2$ ve $\lambda_2 = -\|f_2\|^2$ sayıları da A 'nın öz değerleridir. $\lambda \notin \{0, \|f_1\|^2, -\|f_2\|^2\}$ herhangi bir kompleks sayı ve $y \in H$ 'nin herhangi elemanı olmak üzere

$$(A - \lambda I)x = y$$

ya da

$$(x, f_1)f_1 - (x, f_2)f_2 - \lambda x = y \tag{1}$$

denklemini göz önüne alalım. Buradan

$$(x, f_1)\|f_1\|^2 - \lambda(x, f_1) = (y, f_1)$$

$$(x, f_1) = \frac{(y, f_1)}{\|f_1\|^2 - \lambda} \tag{2}$$

Benzer şekilde yine (1)'den

$$-(x, f_2)\|f_2\|^2 - \lambda(x, f_2) = (y, f_2);$$

$$(x, f_2) = -\frac{(y, f_2)}{\|f_2\|^2 + \lambda} \quad (3)$$

elde edilir. (1) , (2) ve (3)'den

$$x = \frac{(x, f_1)f_1}{\lambda} - \frac{(x, f_2)}{\lambda} - \frac{y}{\lambda}$$

$$x = \frac{(y, f_1)f_1}{(\|f_1\|^2 - \lambda) \cdot \lambda} + \frac{(y, f_2)f_2}{(\|f_2\|^2 + \lambda) \cdot \lambda} - \frac{y}{\lambda}$$

bulunur . Dolayısıyla

$$(A - \lambda I)^{-1} y = \frac{(y, f_1)f_1}{(\|f_1\|^2 - \lambda) \cdot \lambda} + \frac{(y, f_2)f_2}{(\|f_2\|^2 + \lambda) \cdot \lambda} - \frac{y}{\lambda}, \text{dır.}$$

Görüldüğü gibi $A - \lambda I$ operatörü tüm H uzayında tanımlı , $(A - \lambda I)^{-1}$ vardır ve

$$\|(A - \lambda I)^{-1} y\| \leq \frac{\|y\| \cdot \|f_1\|^2}{|(\|f_1\|^2 - \lambda) \cdot \lambda|} + \frac{\|y\| \cdot \|f_2\|^2}{|(\|f_2\|^2 + \lambda) \cdot \lambda|} + \frac{\|y\|}{|\lambda|}$$

$$= \left[\frac{\|f_1\|^2}{|(\|f_1\|^2 - \lambda) \cdot \lambda|} + \frac{\|f_2\|^2}{|(\|f_2\|^2 + \lambda) \cdot \lambda|} + \frac{1}{|\lambda|} \right] \cdot \|y\|$$

dir.

Yani $(A - \lambda I)^{-1} : H \rightarrow H$ operatörü sınırlıdır. Dolayısıyla her $\lambda \notin \{0, \|f_1\|^2, -\|f_2\|^2\}$ sayısı

A 'nın bir regüler değeridir. Sonuç olarak

$$\sigma(A) = \{0, \|f_1\|^2, -\|f_2\|^2\}$$

dir .

Örnek 2: $A : L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds$ operatörünün spektrumunu

bulunuz.

Çözüm: $(Ax)(t) = \cos(t) \int_0^\pi \cos(s)x(s)ds - \sin(t) \int_0^\pi \sin(s)x(s)ds$ dir .

$f_1(t) = \cos(t)$ ve $f_2(t) = \sin(t)$ olsun.

O halde $Ax = (x, f_1)f_1 - (x, f_2)f_2$ 'dir .

Ayrıca $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ ve

$$(f_1, f_2) = \int_0^\pi \cos t \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt = -\frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^\pi = 0 \text{ dir.}$$

Bu durumda Örnek 1'de gösterildiği gibi

$$\sigma(A) = \{0, \|f_1\|^2, \|f_2\|^2\}$$

dir .

$$\|f_1\|^2 = \int_0^\pi \cos^2 t dt = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$-\|f_2\|^2 = -\int_0^\pi \sin^2 t dt = -\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -\frac{\pi}{2}$$

olduğundan

$$\sigma(A) = \left\{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\} \text{ dir}$$

2.4. Eşlenik Operatör

Teorem 2.4.1 (F. Riesz): H bir Hilbert uzayı ve $f \in H'$ de tanımlı sınırlı lineer bir fonksiyonel olsun. O takdirde öyle bir $u \in H$ vardır ki her $x \in H$ için

$$f(x) = (x, u)$$

ve

$$\|f\| = \|u\| \quad (2.34)$$

dir.

Tanım 2.4.1 : H bir Hilbert uzayı ve $A : H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör olsun. y , H 'nin herhangi bir elemanı olmak üzere H de tanımlı

$$f_y(x) = (Ax, y) \quad (x \in H)$$

fonksiyoneli göz önüne alalım. A 'nın H 'den H 'ye sınırlı lineer operatör olmasından yararlanarak kolayca görülebilir ki, her $y \in H$ için f_y sınırlı lineer bir fonksiyoneldir.

Teorem 2.4.1 gereğince her $y \in H$ için

$$f_y(x) = (Ax, y) = (x, y^*) \quad (x \in H) \quad (2.35)$$

olacak şekilde bir tek $y^* \in H$ elemanı vardır. Burada her $y \in H$ elemanına

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad (x \in H)$$

koşulunu sağlayan ve bir $y^* \in H$ karşılık getiren bir $A^* : H \rightarrow H$ operatörünün tanımlandığı görülmektedir. Dolayısıyla

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (x, y \in H) \quad (2.36)$$

dir.

Bu A^* operatörüne A 'nın eşlenik operatörü denir.

Teorem 2.4.1: H bir Hilbert Uzayı ve $A : H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör olsun. O takdirde A 'nın eşleniği olan A^* operatörü de sınırlı lineer operatördür ve

$$\|A\| = \|A^*\| \quad (2.37)$$

dir.

İspat : Önce A^* operatörünün lineer olduğunu gösterelim. Her $y_1, y_2 \in H$ ve her $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ($K \in \{R, C\}$) için

$$\begin{aligned} (Ax, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= (Ax, \lambda_1 y_1) + (Ax, \lambda_2 y_2) \\ &= \overline{\lambda_1} (Ax, y_1) + \overline{\lambda_2} (Ax, y_2) \\ &= \overline{\lambda_1} (x, A^* y_1) + \overline{\lambda_2} (x, A^* y_2) = (x, \lambda_1 A^* y_1) + (x, \lambda_2 A^* y_2) \\ &= (x, \lambda_1 A^* y_1 + \lambda_2 A^* y_2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

dir.

Buradan eşlenik operatör tanımı gereğince

$$A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A^* y_1 + \lambda_2 A^* y_2 \quad (2.39)$$

A 'nın sınırlı olduğunu gösterelim. Her $x, y \in H$ için ;

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (2.40)$$

dir.

Burada $x = A^* y$ alınırsa

$$(AA^* y, y) = (A^* y, A^* y) = \|A^* y\|^2$$

elde edilir. Cauchy- Schwartz eşitsizliğinden yararlanarak buradan

$$\|A^*y\|^2 = (AA^*y, y) \leq \|AA^*y\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|A^*y\| \cdot \|y\| \quad \text{ya da}$$

$$\|A^*y\| \leq \|A\| \cdot \|y\| \quad (y \in H) \quad (2.41)$$

bulunur.

Bu eşitsizlikten $A^* : H \rightarrow H$ operatörünün sınırlı olduğu ve

$$\|A^*\| \leq \|A\| \quad (2.42)$$

elde edilir. (2.40)'de $y = Ax$ alınırsa

$$\|Ax\|^2 = (x, A^*Ax) \leq \|x\| \cdot \|A^*Ax\| \leq \|x\| \cdot \|A^*\| \cdot \|Ax\|$$

$$\|Ax\| \leq \|x\| \cdot \|A^*\| \quad (x \in H) \quad (2.43)$$

bulunur. Buradan da

$$\|A\| \leq \|A^*\| \quad (2.44)$$

elde edilir. (2.42) ve (2.44)'den

$$\|A\| = \|A^*\| \quad (2.45)$$

elde edilir.

Kolayca gösterilebilir ki, eşlenik operatörler aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$1) (A + B)^* = A^* + B^* \quad (2.46)$$

$$2) (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* \quad (2.47)$$

$$3) (AB)^* = B^* A^* \quad (2.48)$$

$$4) (A^*)^* = A^* \quad (2.49)$$

Tanım 2.4.2 : H bir Hilbert Uzayı ve $A : H \rightarrow H$ sınırlı bir lineer operatör olsun .

$A = A^*$ ise yani her $x, y \in H$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (2.50)$$

ise A 'ya kendine eş operatör denir.

Örnek 1 : $K(t, s) \in [a, b] \times [a, b] \quad (-\infty < a < b < \infty)$ karesinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$A : L_2[a, b] \rightarrow [a, b] ,$$

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds \quad (x = x(t) \in L_2[a, b])$$

operatörünü göz önüne alalım .

$\forall x, y \in L_2[a, b]$ için

$$(Ax, y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s)x(s)ds \right) \overline{y(t)}dt = \int_a^b x(s) \left(\int_a^b K(t, s)\overline{y(t)}dt \right) ds$$

$$= \int_a^b x(s) \left(\overline{\int_a^b K(t, s)y(t)dt} \right) ds = (x, A^*y)$$

dir .

$$\text{Burada } (A^*y)(s) = \int_a^b \overline{K(t, s)}y(t)dt \text{ 'dir.}$$

Görüldüğü gibi $K(t, s)$ fonksiyonu ,

$\overline{K(t, s)} = K(s, t)$ koşulunu sağlıyorsa A operatörü kendine eştir.

Örnek 2 : H sonsuz boyutlu bir Hilbert Uzayı ve $\{e_i\}_1^\infty$, $\{g_i\}_1^\infty$ H de herhangi iki ortonormal dizi olsun . $\{\lambda_i\}_1^\infty$ sınırlı bir sayı dizisi olmak üzere

$A : H \rightarrow H$,

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) g_i$$

lineer operatörünü göz önüne alalım . $\{\lambda_i\}$ sayı dizisinin sınırlı olmasından ve her $x \in H$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

Bessel Eşitsizliğinden yararlanarak ,

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \cdot |(x, e_i)|^2 \leq c^2 \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leq c^2 \|x\|^2 \quad \text{ya da}$$

$$\|Ax\| \leq c \|x\| \quad (c > 0)$$

bulunur .

Görüldüğü gibi A operatörü sınırlıdır . A^* operatörünü bulalım . Her $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) g_i, y \right) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i (x, e_i) g_i, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) (g_i, y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (x, \overline{\lambda_i} (y, g_i) e_i) = \left(x, \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda_i} (y, g_i) e_i \right) \end{aligned}$$

Eşlenik operatör tanımı gereğince buradan

$$A^*y = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda_i}(y, g_i)e_i \quad \text{bulunur.}$$

Buradan da

$$\lambda_i = \overline{\lambda_i}, \quad e_i = g_i \quad (i = 1, 2, \dots, \dots)$$

koşulları sağlandığı takdirde A operatörünün kendine eş olduğu görülmektedir.

2.5. Eşlenik Operatörün Genel Tanımı

Teorem 2.5.1: Bir H Hilbert Uzayının bir M manifoldunun H de yoğun olması için gerekli ve yeter koşul H 'nin M 'ye ortogonal olan sıfırdan farklı elemana sahip olmamasıdır .

Tanım 2.5.1 : H bir Hilbert Uzayı ve $A, \overline{D(A)} = H$ olmak üzere $D(A)$ 'dan H 'ye bir lineer operatör olsun . $x \in D(A)$ ve $y \in H$ olmak üzere (Ax, y) iç çarpımını göz önüne alalım. Öyle $y \in H$ elemanları vardır ki , tüm $x \in D(A)$ 'lar için (Ax, y) ifadesi

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad (x \in D(A)) \quad (2.51)$$

şeklinde gösterilebilir . Burada y^* , H 'nin bir elemanıdır .Örneğin $y = 0$ ise tüm $x \in D(A)$ 'lar için

$$(Ax, 0) = (x, 0) \quad (x \in D(A)) \quad (2.52)$$

dir . (2.51) bağıntısı bir $y \in H$ için sağlanıyorsa bu bağıntıdaki $y^* \in H$ tektir .

Gerçekten bir $y \in H$ için

$$(Ax, y) = (x, y_1^*) \quad (x \in D(A)) \quad (2.53)$$

$$(Ax, y) = (x, y_2^*) \quad (x \in D(A)) \quad (2.54)$$

olsaydı tüm $x \in D(A)$ 'lar için

$$(x, y_1^*) = (x, y_2^*) \quad (x \in D(A)) \quad (2.55)$$

ya da

$$(y_1^* - y_2^*, x) = 0 \quad (x \in D(A)) \quad (2.56)$$

olurdu. $\overline{D(A)} = H$ olduğundan (2.56)'den $y_1^* - y_2^* = 0$ ya da $y_1^* = y_2^*$ bulunur.

(2.51) bağıntısını sağlayan $y \in H$ elemanlarının kümesini l^* ile gösterelim ve l^* dan H 'ye

$$A^* y = y^* \quad (2.57)$$

operatörünü göz önüne alalım. (2.45) bağıntısı

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (x \in D(A)) \quad (2.58)$$

şeklinde yazılabilir. $y_1, y_2 \in l^*$ kümesinin herhangi iki elemanı ve α_1, α_2 herhangi iki sayı ise

$$(Ax, \alpha_1 y_1) = (x, \alpha_1 A^* y_1) \quad (x \in D(A)) \quad (2.59)$$

$$(Ax, \alpha_2 y_2) = (x, \alpha_2 A^* y_2) \quad (x \in D(A)) \quad (2.60)$$

dır. Bu bağıntılardan

$$(Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2) \quad (x \in D(A)) \quad (2.61)$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in l^*$ ve $A^* : l^* \rightarrow H$ operatörünün tanımı gereğince

$$A^* (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2 \quad (2.62)$$

dır . Yani A^* operatörü lineerdir . A^* operatörüne A operatörünün eşlenik operatörü denir . $A : H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör ise bu tanımla önceki tanımın aynı olduğu görülmektedir. Eğer $A = A^*$ ise A 'ya kendine eş operatör denir .

Tanım 2.5.2 : $A^* = A$ ise A 'ya kendine eş operatör denir . A kendine eş bir operatör ise her $x \in D(A)$ için (Ax, Ax) bir reel sayıdır . Gerçekten

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(x, Ax)} \quad (2.63)$$

dir.

2.6 Kendine Eş Operatörlerin Spektrumu

Teorem 2.6.1 : Her kendine eş operatörün özdeğerleri reel sayılardır ve farklı özdeğerlere karşılık gelen öz vektörleri ortogonaldır .

İspat : λ kendine eş bir A operatörünün bir özdeğeri olsun .

$$Ax = \lambda x \quad (x \in D(A), x \neq 0) \quad (2.64)$$

Buradan

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2 \quad (2.65)$$

ya da

$$\lambda = \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \quad (2.66)$$

bulunur .

(Ax, x) reel bir sayı ve $\|x\|^2 > 0$ olduğundan λ 'nın reel bir sayı olduğu elde edilir.

λ_1, λ_2 A 'nın farklı özdeğerleri ve x_1, x_2 sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri olsun .

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad (x_1, x_2 \in D(A), x_1 \neq 0, x_2 \neq 0) \quad (2.67)$$

Bu eşitliklerden

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2) \quad (2.68)$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \overline{\lambda_2} (x_1, x_2) \quad (2.69)$$

bulunur . $(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$ olduğu göz önüne alınırsa (2.68) ve (2.69)'den

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$$

elde edilir . $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ olduğundan , buradan $(x_1, x_2) = 0$ bulunur .

Teorem 2 . 6. 2 : H bir Hilbert Uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A:D(A) \rightarrow H$

kendine eş bir operatör olsun . Bir λ sayısının A 'nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul sayısının $\overline{R(A - \lambda I)} \neq H$ olmasıdır .

İspat :

Gereklilik : λ A 'nın bir özdeğeri olsun . $(A - \lambda I)x = 0$ ($x \in D(A)$, $x \neq 0$) dır.

Buradan her $y \in D(A)$ için

$$((A - \lambda I)x, y) = 0$$

ya da

$$(x, (A - \lambda I)y) = 0 \text{ bulunur .}$$

Görüldüğü gibi $x \perp R(A - \lambda I)$ 'dir . $x \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa buradan

Teorem 2 . 5 .1 gereğince $\overline{R(A - \lambda I)} \neq H$ elde edilir .

Yeterlilik : $\overline{R(A - \lambda I)} \neq H$ olsun . Bu durumda Teorem 2 . 5 .1 gereğince $y \perp R(A - \lambda I)$

olacak şekilde bir $y \in H, y \neq 0$ elemanı vardır . Dolayısıyla

$$((A - \lambda I)x, y) = 0 = (x, 0) \text{ 'dır.}$$

Buradan eşlenik operatör tanımı gereğince

$$y \in D((A - \lambda I)^*) = D(A - \lambda I) \text{ ve}$$

$$(A - \lambda I)y = 0 \text{ ya da } Ay = \lambda y, (y \neq 0)$$

elde edilir .

Yani λ A'nın bir özdeğeridir .

Teorem 2.6.2'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir .

Sonuç 2 . 6 . 1 : Kendine eş bir A operatörünün spektrumunun kalan kısmı boştur .

İspat : Aksini varsayıp bir λ sayısının A operatörünün kalan kısmına ait olduğunu kabul edelim .O zaman tanım gereğince $A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ var ve $R(A - \lambda I) = \overline{D((A - \lambda I)^{-1})} \neq H$ 'dir . Bu durumda Teorem 2 . 6 . 2 gereğince λ A'nın bir özdeğeridir . Bu çelişki A'nın spektrumunun kalan kısmının boş olduğunu göstermektedir .

Teorem 2 . 6 . 3 : Bir λ sayısının kendine eş bir $A: D(A) \rightarrow H$ operatörünün regüler değeri olması için gerek ve yeter koşul her $x \in D(A)$ için

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq c \cdot \|x\| \tag{2.70}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ ($c=c(\lambda)$) sabitinin var olmasıdır .

İspat :

Gereklilik : $\lambda \in \rho(A)$ olsun . O halde $A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ var ve sınırlıdır. Bu durumda Fonksiyonel Analizden her $x \in D(A)$ için

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq c \cdot \|x\| \text{ olacak şekilde bir } c > 0 \text{ var olduğu bilinmektedir .}$$

Yeterlilik : Her $x \in D(A)$ için $\|(A - \lambda I)x\| \geq c \cdot \|x\|$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısının var olduğunu kabul edelim . Bu durumda sınırlı $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörünün var olduğu bilinmektedir . Dolayısıyla λ kendine eş A operatörünün bir özdeğeri değildir . O halde Teorem 2 . 6 . 2’den $\overline{R(A - \lambda I)} = H$ elde edilir . Sonuç olarak λ A operatörünün bir regüler değeridir .

Teorem 2 . 6 . 4 : Bir λ sayısının kendine eş bir A operatörünün spektrumuna ait olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)e_n\| = 0 \text{ olacak şekilde bir } \{e_n\} \subset D(A) \quad (\|e_n\| = 1; n = 1, 2, \dots, \dots)$$

dizisinin var olmasıdır .

Gereklilik : $\lambda \in \sigma(A)$ olsun . O halde Teorem 2 . 6 . 3’ten her n doğal sayısı için

$$\|(A - \lambda I)x_n\| < \frac{1}{n} \|x_n\|$$

olacak şekilde bir $x_n \in D(A), x_n \neq 0$ elemanının varlığı elde edilir . Bu eşitsizlikten

$$\left\| (A - \lambda I) \left(\frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| < \frac{1}{n} \quad \text{ya da}$$

$$e_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \text{ olmak üzere}$$

$$\|(A - \lambda I)e_n\| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots, \dots)$$

bulunur .

Buradan da $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)e_n\| = 0 \quad (\|e_n\| = 1; n = 1, 2, \dots, \dots)$ elde edilir.

Yeterlilik : Bu kez $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)e_n\| = 0$ olacak şekilde bir $\{e_n\} \subset D(A)$

$(\|e_n\| = 1; n = 1, 2, \dots, \dots)$ dizisinin var olduğunu kabul edip $\lambda \in \sigma(A)$ gösterelim. Aksini

varsayıp $\lambda \in \rho(A)$ olduğunu kabul edelim. O halde Teorem 2.6.3 gereğince her $x \in D(A)$ için

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. $x = e_n$ yazarsak

$$\|(A - \lambda I)e_n\| \geq c\|e_n\| \quad \text{veya}$$

$$\|(A - \lambda I)e_n\| \geq c \quad (n = 1, 2, \dots, \dots) \quad \text{elde edilir. Bu son bağıntı}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)e_n\| = 0$ eşitliğine aykırıdır. Dolayısıyla $\lambda \in \sigma(A)$ olmalıdır.

Teorem 2.6.5 : Reel olmayan bir $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) sayısı kendine eş bir A operatörünün bir regüler değeridir.

İspat : Her $x \in D(A)$ için

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = ((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) \quad (2.71)$$

$$= (Ax - \lambda x, Ax - \lambda x) = (Ax, Ax) - \bar{\lambda}(Ax, x) - \lambda(x, Ax) + |\lambda|^2(x, x)$$

$$= \|Ax\|^2 - \bar{\lambda}(Ax, x) - \lambda(Ax, x) + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \|x\|^2$$

$$= \|Ax\|^2 - 2\alpha(Ax, x) + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \|x\|^2 \geq \|Ax\|^2 - 2|\alpha| \cdot \|Ax\| \cdot \|x\| + \alpha^2 \|x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2$$

$$= (\|Ax\| - \alpha\|x\|)^2 + \beta^2 \|x\|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2 \quad \text{elde edilir.}$$

Bu bağıntıdan $\|(A - \lambda I)x\| \geq |\beta| \cdot \|x\|$ bulunur. Burada $|\beta| > 0$ olduğundan Teorem 2.6.3 gereğince λ, A 'nın bir regüler değeridir.

Teorem 2.6.5'ten şöyle bir sonuç elde edilir.

Sonuç 2.6.2 : A kendine eş bir operatör ise $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ 'dir.

Teorem 2 . 6 . 6 : Bir λ sayısının kendine eş bir A operatörünün regüler değeri olması için gerek ve yeter koşul $R(A-\lambda I) = H$ olmasıdır .

İspat :

Gereklilik : $\lambda \in \rho(A)$ olsun .O halde tanım gereği $(A-\lambda I)$ operatörünün tersi var , sınırlı ve

$$\overline{R(A-\lambda I)} = \overline{D((A-\lambda I)^{-1})} = H \quad (2.72)$$

dir . $R(A-\lambda I)$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim . $\{y_n\} \subset R(A-\lambda I)$ herhangi bir yakınsak dizi , $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ ve $(A-\lambda I)x_n = y_n$, $(\{x_n\} \subset D(A))$ olsun .

Teorem 2 . 6 . 3 gereğince her $x \in D(A)$ için

$\|(A-\lambda I)x\| \geq c\|x\|$ olacak şekilde bir $c>0$ sabiti vardır .Dolayısıyla

$$\|y_n - y_m\| = \|(A-\lambda I) \cdot (x_n - x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\| \text{ 'dir.}$$

Bu bağıntıdan $\{x_n\}$ 'in bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir .H tam uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olacaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad (x_0 \in H) \text{ olsun .}$$

Her $x \in D(A)$ için

$$((A-\lambda I)x, x_n) = (Ax, x_n) - (\lambda x, x_n) \quad (2.73)$$

$$= (x, Ax_n) - (x, \lambda x_n) = (x, (A-\lambda I)x_n) = (x, y_n)$$

$$= (x, y_n) \text{ 'dir .}$$

Bu bağıntıdan $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse her $x \in D(A)$ için

$$((A-\lambda I)x, x_0) = (x, y_0) \text{ elde edilir .}$$

Buradan eşlenik operatörün tanımı gereğince $x_0 \in (A - \bar{\lambda}I)^* = A^* - \lambda I = A - \lambda I$ ve $(A - \lambda I)x_0 = y_0$ bulunur. Sonuç olarak $y_0 \in R(A - \lambda I)$ 'dir. Her yakınsak $\{y_n\} \subset R(A - \lambda I)$ dizinin limiti $R(A - \lambda I)$ kümesine ait olduğundan

$$\overline{R(A - \lambda I)} = R(A - \lambda I) \quad (2.74)$$

dir .

(2.73) ve (2.74)'den $R(A - \lambda I) = H$ elde edilir

Yeterlilik : $R(A - \lambda I) = H$ olsun .O halde Teorem 2 . 6 . 1 gereğince λ , A 'nın bir özdeğeri değildir ve bu nedenle $(A - \lambda I)$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersi vardır . Ayrıca

$$D((A - \lambda I)^{-1}) = R(A - \lambda I) = H \text{ dir.}$$

Eğer λ sayısı reel değilse teorem 2 . 6 . 4'den $\lambda \in \rho(A)$ 'dir .

λ sayısının reel olduğunu varsayalım . x ve y H 'nin iki elemanı ve

$$(A - \lambda I)f = x, (A - \lambda I)g = y \text{ olsun .}$$

O halde her $x, y \in H$ için

$$((A - \lambda I)^{-1}x, y) = (f, (A - \lambda I)g) = ((A - \lambda I)f, g) = (x, (A - \lambda I)^{-1}y)$$

dir .

Bu durumda $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörünün sınırlı olduğu bilinmektedir, [8]. Sonuç olarak λ , A operatörünün bir regüler değeridir .

H bir Hilbert Uzayı $A : H \rightarrow H$ sınırlı , kendine eş bir operatör olsun . H 'nin $\|x\| = 1$ koşulunu sağlayan her x elemanı için ,

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|x\| = \|A\| \quad (2.75)$$

dır .

Görüldüğü gibi reel değerli (Ax, x) fonksiyonu $\{x \in H : \|x\| = 1\}$ kümesinde sınırlıdır .

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) \quad (2.76)$$

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) \quad (2.77)$$

olsun .

Bu m ve M reel sayılarına , kendine eş A operatörünün sırasıyla alt ve üst sınırı denir .

Teorem 2 . 6 . 7 : H bir Hilbert Uzayı ve $A : H \rightarrow H$ sınırlı , kendine eş bir operatör ise

$$\sigma(A) \subset [m, M] \quad (2.78)$$

dir .

İspat : Sonuç 2 . 6 . 2 gereğince $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ 'dir . Dolayısıyla teoremi ispatlamak için her $\lambda \in (-\infty, m) \cup (M, \infty)$ sayısının A operatörünün bir regüler değeri olduğunu göstermek yeterlidir . $\lambda \in (-\infty, \infty)$ olsun .

Her $x \in H$ için

$$((A - \lambda I)x, x) = (Ax, x) - \lambda(x, x) = (Ax, x) - m\|x\|^2 + (m - \lambda)\|x\|^2 \quad (2.79)$$

dir .

$$(Ax, x) \geq m\|x\|^2 \text{ olduğu göz önüne alınırsa (2.73)'dan}$$

$$((A - \lambda I)x, x) \geq (m - \lambda)\|x\|^2 \quad (2.80)$$

bulunur .Öte yandan

$$\left| \left((A - \lambda I)x, x \right) \right| \leq \| (A - \lambda I)x \| \cdot \| x \| \quad (2.81)$$

dir .

Son iki eşitsizlikten

$$\| (A - \lambda I)x \| \cdot \| x \| \geq (m - \lambda) \cdot \| x \|^2$$

ya da

$$\| (A - \lambda I)x \| \geq (m - \lambda) \cdot \| x \| \quad (x \in H) \quad (2.82)$$

elde edilir . $m - \lambda > 0$ olduğu dikkate alınır (2.82)'den teorem gereğince $\lambda \in \rho(A)$ bulunur . Benzer şekilde $\lambda \in (M, \infty)$ ise $\lambda \in \rho(A)$ olduğu gösterilebilir .

Teorem 2 . 6 . 8 : H bir Hilbert Uzayı ve $A : H \rightarrow H$ sınırlı kendine eş bir operatör ise

$$\| A \| = \sup_{\| x \| = 1} |(Ax, x)| = \max\{|m|, |M|\} \text{ 'dir.} \quad (2.83)$$

Teorem 2 . 6 . 9 : Sınırlı kendine eş $A : H \rightarrow H$ operatörünün alt ve üst sınırı A 'nın spektrumuna aittir .

İspat : Önce $m = M$ olduğunu kabul edelim . O halde

$$m \cdot \| x \|^2 \leq (Ax, x) \leq M \cdot \| x \|^2 \quad , \quad (x \in H) \quad (2.84)$$

bağıntısından

$$((A - MI)x, x) = 0 \quad , \quad (x \in H) \quad (2.85)$$

bulunur .

Teorem 2 . 6 . 8'den ve (2.79)'den yararlanarak

$$\|A - MI\| = \sup_{\|x\|=1} |(A - MI)x, x| = 0 \quad (2.86)$$

ya da

$A=MI$ elde edilir . Görüldüğü gibi $m=M$ halinde M sayısı A 'nın bir özdeğeridir.

Bu kez $m < M$ olduğunu varsayalım . Önce $M \in \sigma(A)$ olduğunu gösterelim.

Bunun için $A_1 = A - mI : H \rightarrow H$ sınırlı , kendine eş operatörünü göz önüne alalım .

A_1 operatörünün alt sınırı m_1 , üst sınırı da M_1 olsun .

$$\begin{aligned} m_1 &= \inf_{\|x\|=1} (A_1 x, x) = \inf_{\|x\|=1} ((A - mI)x, x) \\ &= \inf_{\|x\|=1} [(Ax, x) - m\|x\|^2] \\ &= \inf_{\|x\|=1} [(Ax, x) - m] = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) - m = 0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

dır.

Benzer şekilde $M_1 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = M - m$ olduğu gösterilebilir . $\{\delta_n\}$ pozitif sayılardan

oluşan ve limiti sıfır olan bir sayı dizisi olsun . En küçük üst sınırın tanımından

$$(A_1 e_n, e_n) > M_1 - \delta_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.88)$$

koşulunu sağlayan bir $\{e_n\} \subset H$ ($\|e_n\| = 1; n = 1, 2, \dots$)

dizisinin varlığı elde edilir .

Öte yandan

$$\begin{aligned} \|(A_1 - M_1 I)e_n\|^2 &= (A_1 e_n - M_1 e_n, A_1 e_n - M_1 e_n) \\ &= \|A_1 e_n\|^2 - M_1 (A_1 e_n, e_n) - M_1 (e_n, A_1 e_n) + M_1^2 \|e_n\|^2 \end{aligned}$$

$$= \|A_1 e_n\|^2 - 2M_1(A_1 e_n, e_n) + M_1^2 \quad (2.89)$$

dır .Teorem 2.6.8'den dolayı

$$M_1 = \|A_1\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_1 x\| \quad (2.90)$$

dir .(2.90)'dan

$$\|A_1 e_n\|^2 \leq M_1^2 \quad (2.91)$$

elde edilir .(2.88) , (2.89) ve (2.91)'den

$$\|(A_1 - M_1 I)e_n\|^2 \leq 2M_1^2 - 2M_1(M_1 - \delta_n) = 2M_1 \delta_n \text{ bulunur .}$$

Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_1 - M_1 I)e_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - mI - (M - m)I)e_n\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - MI)e_n\| = 0 \quad (\|e_n\| = 1; n = 1, 2, \dots)$$

elde edilir .Bu bağıntıdan ve Teorem 2 . 6 . 4'den $M \in \sigma(A)$ bulunur .Benzer şekilde $m \in \sigma(A)$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 2 . 6 . 9'dan aşağıdaki sonuç elde edilir .

Sonuç 2 . 6 . 3 : $A : H \rightarrow H$ sınırlı , kendine eş bir operatör ise $\sigma(A) \neq \emptyset$ 'dir .

Teorem 2.6.10 : Her kendine eş operatörün spektrumu boş olmayan bir kümedir .

İspat : Aksini varsayıp kendine eş bir $A : D(A) \rightarrow H$ operatörünün spektrumunun boş küme olduğunu kabul edelim .O halde her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$

Tersi var , sınırlı ve $D((A - \lambda I)^{-1}) = R(A - \lambda I) = H$ 'dir.Her $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\lambda^{-1}(A - \lambda I)A^{-1} = \lambda^{-1}I - A^{-1} \quad (2.92)$$

dir .

$R(A - \lambda I) = H$ olduğundan

$R(\lambda^{-1}(A - \lambda I)A^{-1}) = H$ 'dir. O halde (2.86)'dan

$$R(\lambda^{-1}I - A^{-1}) = R(A^{-1} - \lambda^{-1}I) = H, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.93)$$

elde edilir. Öte yandan varsayım gereği $A^{-1} : H \rightarrow H$ sınırlı , kendine eş bir operatördür. Teorem 2.6.6 gereğince ve (2.93)'den her $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sayısının sınırlı kendine eş $A^{-1} : H \rightarrow H$ operatörünün bir regüler değeri olduğu elde edilir . Dolayısıyla $\sigma(A^{-1}) \subset \{0\}$ 'dir. Eğer $\sigma(A^{-1}) = \{0\}$ olsaydı Teorem 2.6.9'dan dolayı $A^{-1} = 0$ olurdu. Bu çelişkiden $\sigma(A^{-1}) = \emptyset$ elde edilir. Öte yandan Sonuç 2.6.3 gereğince $\sigma(A^{-1}) \neq \emptyset$ 'dir . Ortaya çıkan bu son çelişki $\sigma(A) \neq \emptyset$ olduğunu gösterir .

3.SİNGÜLER STURM-LİOUVILLE OPERATÖRÜNÜN NEGATİF ÖZDEĞERLERİNİN KARELERİNİN TOPLAMININ ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

3.1 Problemin Ortaya Konması Ve Özdeğerlerle İlgili Bazı Bağntılar

$L_2[0, \infty)$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) - q(x)y(x) \quad (3.1)$$

diferansiyel ifadesini göz önüne alalım .Bu ifadelerde yer alan $q(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını varsayacağız .

1. $q(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli , monoton azalan ve pozitif değerlidir .
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$.

$D(L)$ ile $L_2[0, \infty)$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan tüm fonksiyonlarının kümesini gösterelim :

1. $y'(x)$ her sonlu $[a, b] \subset [0, \infty)$ aralığında mutlak sürekli ,
2. $y'(0) = 0$
3. $l(y) = -y''(x) - q(x)y(x) \in L_2[0, \infty)$

$D(L)$ 'den $L_2[0, \infty)$ 'a $Ly = l(y)$

şeklinde tanımlı operatör L olsun .

$L : D(L) \rightarrow L_2[0, \infty)$ operatörü kendine eştir .

Ayrıca L operatörünün alttan yarı sınırlı ve spektrumunun negatif kısmının ayırık olduğu bilinmektedir .[1]

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq K \leq \lambda_n \leq K \quad (3.2)$$

L operatörünün negatif özdeğerleri olsun . Bu çalışmadaki amacımız

$$\sum_{\lambda_i < -\epsilon} \lambda_i^2 \quad (\epsilon > 0) \quad (3.3)$$

toplamının $\epsilon \rightarrow 0$ iken asimtotik davranışını incelemektir .

q fonksiyonunun ters fonksiyonu p olsun . $\epsilon \in (0, q(0))$ olmak üzere aşağıdaki operatörleri göz önüne alalım .

1 . $L_2[p(\epsilon), \infty)$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) - q(x)y(x) \quad (1)$$

ifadesi ve $y'(p(\epsilon)) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan operatör L^1 olsun .

2. $L_2[0, p(\epsilon)]$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) - q(x)y(x) \quad \text{ifadesi ve}$$

$$y(0) = y(p(\epsilon)) = 0$$

$$y'(0) = y'(p(\epsilon)) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörler sırasıyla L_0 ve L_1 olsun .

3. $L_2[x_{i-1}, x_i]$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) - q(x)y(x) \quad (1)$$

ifadesi ve

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0 \quad (2)$$

$$y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0 \quad (3)$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörler sırasıyla L_{0i} ve L_{1i} olsun .

4. $L_2[x_{i-1}, x_i]$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) - q(x_i)y(x)$$

ifadesi ve (2) sınır koşulu ile oluşturulan operatör $\bar{L}_{0i}$,

$$l(y) = -y''(x) - q(x_{i-1})y(x)$$

ifadesi ve (3) sınır koşulu ile oluşturulan operatör $\bar{L}_{1i}$ olsun .

Teorem 3.1.1 : $q(x)$ fonksiyonu 1) koşulunu sağlıyorsa her $y \in D(L^1)$ için

$$(L^1 y, y) \geq -\varepsilon(y, y) \quad (3.4)$$

dir.

İspat : Her $y \in D(L^1)$ için

$$\begin{aligned} (L^1 y, y) &= \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} [-y''(x) - y(x)q(x)] \overline{y(x)} \cdot dx = - \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} y''(x) \overline{y(x)} \cdot dx - \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} q(x) y(x) \overline{y(x)} \cdot dx \\ &= -y'(x) \overline{y(x)} \Big|_{p(\varepsilon)}^{\infty} + \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} y'(x) (\overline{y(x)})' dx - \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} q(x) |y(x)|^2 dx = \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} |y'(x)|^2 dx - \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} q(x) |y(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

dir . $q(x)$ fonksiyonu monoton azaldığından $[p(\varepsilon), \infty)$ aralığında

$$q(x) \leq q(p(\varepsilon)) = \varepsilon \quad (3.6)$$

dir . (3.5) ve (3.6)'den her $y \in D(L^1)$ için

$$(L^1 y, y) \geq -\varepsilon(y, y)$$

elde edilir .

$\alpha \in (0, \infty)$ bir değişken olmak üzere $N(\alpha)$, $N_0(\alpha)$ ve $N_1(\alpha)$ sırasıyla L , L_0 , L_1 operatörlerinin $-\alpha$ 'dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı olsun .Ayrıca L operatörünün $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleri sırasıyla $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ olsun . Aşağıdaki operatörleri göz önüne alalım :

$$T = L + \alpha I, T_0 = L_0 + \alpha I, T_1 = L_1 + \alpha I$$

Burada T 'nin ifadesindeki I , $L_2[0, \infty)$ uzayında ; T_0 ve T_1 'in ifadesindeki I da $L_2[p(\varepsilon), \infty)$ uzayındaki birim operatörleridir .

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_{N(\alpha)} < -\alpha, \lambda_{N(\alpha)+1} \geq -\alpha \quad (3.7)$$

dir . T operatörünün özdeğerleri

$$\mu_i = \lambda_i + \alpha \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

olduğundan (3.7)'den

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{N(\alpha)} < 0, \mu_{N(\alpha)+1} \geq 0 \quad (3.8)$$

bulunur .Buradan görülüyor ki , T operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısı $N(\alpha)$ 'dır.

Benzer şekilde T_0 operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısı $N_0(\alpha)$ ve T_1 operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısını da $N_1(\alpha)$ ile gösterelim . T_0 ve T_1 operatörlerinin negatif özdeğerleri sırasıyla

$$\mu_{(0)1} \leq \mu_{(0)2} \leq \dots \leq \mu_{(0)N_0(\alpha)} \quad (3.9)$$

ve

$$\mu_{(1)1} \leq \mu_{(1)2} \leq \dots \leq \mu_{(1)N_1(\alpha)} \quad (3.10)$$

bunlara karşılık gelen ortonormal özvektörleri de sırasıyla

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_0(\alpha)} \quad (3.11)$$

ve

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_1(\alpha)} \quad (3.12)$$

olsun .

Teorem 3.1.2 : 1) ve 2) koşulları sağlanıyorsa her $\alpha \in (0, \infty)$ için

$$N(\alpha) \geq N_0(\alpha) \quad (3.13)$$

dır .

İspat : Aksini varsayıp $N(\alpha) < N_0(\alpha)$ olduğunu kabul edelim . O halde $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_0(\alpha)}$ fonksiyonlarının

$$(u_i, \varphi) = \int_0^{p(\varepsilon)} u_i(x) \overline{\varphi(x)} dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N(\alpha)) \quad (3.14)$$

olacak şekilde bir

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \quad (3.15)$$

lineer kombinasyonu vardır .

$$(T_0 \varphi, \varphi) = \left(T_0 \left(\sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right), \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \mu_{(0)i} \varphi_i, \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \mu_{(0)i} |\beta_i|^2 = \gamma < 0 \quad (3.16)$$

[6] 'den aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $\tilde{\Phi}$ fonksiyonunun var olduğu bilinmektedir .

1) $\tilde{\Phi}$ fonksiyonu $[0, p(\epsilon)]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türeve sahiptir .

2) Öyle bir $[a, b] \subset (0, p(\epsilon))$ aralığı vardır ki , bu aralığın dışında $\tilde{\Phi}(x)$ sıfırdır .

$$3) |(T_0 \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}) - (T_0 \Phi, \Phi)| < -\frac{\gamma}{2} \quad (3.17)$$

$$4) (u_i, \tilde{\Phi}) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N(\alpha) \quad (3.18)$$

Bilindiği gibi

$$\inf_{y \in D(T), \|y\|=1, y \perp u_i \ (i=1,2,\dots,N(\alpha))} (Ty, y) = \mu_{N(\alpha)+1} \quad (3.19)$$

dir. Dolayısıyla

$$\left(T_0 \left(\frac{\tilde{\Phi}}{\|\tilde{\Phi}\|}, \frac{\tilde{\Phi}}{\|\tilde{\Phi}\|} \right) = \left(T \left(\frac{\tilde{\Phi}}{\|\tilde{\Phi}\|}, \frac{\tilde{\Phi}}{\|\tilde{\Phi}\|} \right) \geq \mu_{N(\alpha)+1} \geq 0 \quad (3.20)$$

'dır . Buradan

$$(T_0 \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}) \geq 0 \quad (3.21)$$

bulunur. (3.16) ve (3.21)'den

$(T_0 \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}) - (T_0 \Phi, \Phi) = (T_0 \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}) - \gamma \geq -\gamma$ elde edilir .Diğer taraftan yukarıda

$|(T_0 \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}) - (T_0 \Phi, \Phi)| < -\frac{\gamma}{2}$ idi. Bu son iki bağıntı birbiri ile çelişmektedir .Dolayısıyla

$N(\alpha) \geq N_0(\alpha)$ olmalıdır .

Teorem 3.1.3 : 1) ve 2) koşulları sağlanıyorsa her $\alpha \in [\epsilon, \infty)$ için

$$N(\alpha) \leq N_1(\alpha) \quad (3.22)$$

dır .

İspat : Aksini varsayıp $N(\alpha) \leq N_1(\alpha)$ olduğunu kabul edelim. O halde $u_1, u_2, \dots, u_{N(\alpha)}$ fonksiyonlarının

$$(\psi_i, u) = \int_0^{p(\epsilon)} \psi_i \overline{u(x)} dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N_1(\alpha)) \quad (3.23)$$

koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir

$$u = \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i u_i \quad (3.24)$$

lineer kombinasyonu vardır .

$$(Tu, u) = \left(T \left(\sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i u_i \right), \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i u_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i \mu_i u_i, \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i u_i \right) = \sum_{i=1}^{N(\alpha)} \mu_i |d_i|^2 < 0 \quad (3.25)$$

dır .Bu ifade

$$(Tu, u) = \int_0^{p(\epsilon)} T(u(x)) \overline{u(x)} dx + \int_{p(\epsilon)}^{\infty} T(u(x)) \overline{u(x)} dx < 0 \quad (3.26)$$

şeklinde yazılabilir . Aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını gösterelim .

$$\int_{p(\epsilon)}^{\infty} T(u(x)) \overline{u(x)} dx \geq 0 \quad (3.27)$$

$$\int_{p(\epsilon)}^{\infty} |u(x)|^2 dx = 0 \quad (3.28)$$

ise

$$\left| \int_{p(\epsilon)}^{\infty} T(u(x)) \overline{u(x)} dx \right| \leq \int_{p(\epsilon)}^{\infty} |T(u(x)) \overline{u(x)}| dx \leq \left[\int_{p(\epsilon)}^{\infty} |T(u(x))|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{p(\epsilon)}^{\infty} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.29)$$

dır. Buradan

$$\int_{p(\epsilon)}^{\infty} T(u(x)) \overline{u(x)} dx = 0 \quad (3.31)$$

bulunur . (3.27) eşitsizliğini $\int_{p(\epsilon)}^{\infty} |u(x)|^2 dx > 0$ halinde de ispatlayalım .Yine aksini

varsayıp

$$\int_{p(\epsilon)}^{\infty} T(u(x)) \overline{u(x)} dx < 0 \quad (3.32)$$

olduğunu kabul edelim . $y \in L_2[0, \infty)$ için

$$\|y\|_1^2 = \int_{p(\epsilon)}^{\infty} |y(x)|^2 dx \quad (3.33)$$

olsun . (3.32)'den

$$\inf_{y \in D(T), \|y\|_1=1} \int_{p(\epsilon)}^{\infty} T(y(x)) \overline{y(x)} dx < 0 \quad (3.34)$$

elde edilir .Öte yandan

$$\inf_{y \in D(T), y'(p(\epsilon))=0, \|y\|_1=1} \int_{p(\epsilon)}^{\infty} T(y(x)) \overline{y(x)} \cdot dx =$$

$$\inf_{y \in D(T), \|y\|_1=1} \int_{p(\epsilon)}^{\infty} T(y(x)) \overline{y(x)} \cdot dx \quad (3.35)$$

eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir . (3,34) ve (3.35)'ten

$$\inf_{y \in D(L^1), \|y\|=1} \left((L^1 + \alpha I)y, y \right) < 0 \quad (3.36)$$

ya da

$$\inf_{y \in D(L^1), \|y\|=1} \left(L^1 y, y \right) < -\alpha \leq -\epsilon \quad (3.37)$$

bulunur .Bu sonuç Teorem 3 . 1 . 1'e aykırıdır .Dolayısıyla (3.27) eşitsizliği sağlanmalıdır.

(3.26) ve (3.27)'den

$$\int_0^{p(\epsilon)} T(u(x)) \overline{u(x)} dx < 0 \quad (3.38)$$

elde edilir .

$$(u, \psi_i) = \int_0^{p(\epsilon)} u(x) \overline{\psi_i(x)} dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_1(\alpha)) \quad (3.39)$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.38)'den

$$\inf_{y \in D(T), \|y\|_2 = 1, y \perp \psi_i \ (i=1,2,\dots,N_1(\alpha))} \int_0^{p(\epsilon)} T(y(x)) \overline{y(x)} \cdot dx < 0 \quad (3.40)$$

bulunur. Burada

$$\|y\|_2 = \left[\int_0^{p(\epsilon)} |y(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

dir .(3.40)'dan

$$\inf_{y \in D(T), \|y\|_2 = 1, y'(0) = y'(p(\epsilon)) = 0, y \perp \psi_i \ (i=1,2,\dots,N_1(\alpha))} \int_0^{p(\epsilon)} T(y(x)) \overline{y(x)} \cdot dx < 0$$

elde edilir .Buradan

$$\inf_{y \in D(T_1), \|y\| = 1, y \perp \psi_i \ (i=1,2,\dots,N_1(\alpha))} \int_0^{p(\epsilon)} T_1(y(x)) \cdot \overline{y(x)} \cdot dx < 0 \quad (3.42)$$

bulunur .Öte yandan

$$\inf_{y \in D(T_1), \|y\| = 1, y \perp \psi_i \ (i=1,2,\dots,N_1(\alpha))} \int_0^{p(\epsilon)} T_1(y(x)) \overline{y(x)} dx = \mu_{(1)}(N_1(\alpha)+1) \geq 0 \quad (3.43)$$

dır .

Ortaya çıkan bu çelişkiden dolayı

$$N(\alpha) > N_1(\alpha) \quad (\alpha \in [\varepsilon, \infty)) \quad (3.44)$$

eşitsizliği sağlanamaz. Yani her $\alpha \in [\varepsilon, \infty)$ için

$$N(\alpha) \leq N_1(\alpha) \quad (3.45)$$

olmalıdır .

$[0, p(\varepsilon)]$ aralığını uzunlukları

$$\delta = \frac{p(\varepsilon)}{\left[p^k(\varepsilon) \right] + 1} \quad (3.46)$$

olan parçalara bölelim. Burada $k, (0, 1)$ aralığına ait olan sabit bir sayı ve ε da

$$\varepsilon \in (0, q(0)), p^k(\varepsilon) \geq 2 \quad (3.47)$$

koşullarını sağlayan bir sabittir .

$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = p(\varepsilon)$, $[0, p(\varepsilon)]$ aralığının bölüntü noktaları olsun .

Yardımcı Teorem 3.1.1 : $\{-a_1, -a_2, \dots, -a_n\}$ ve $\{-b_1, -b_2, \dots, -b_m\}$, $m \geq n$ olmak üzere negatif sayıların azalmayan herhangi iki sonlu dizisi ve $c \in (0, \infty)$

$$-a_n < -c \quad , \quad -b_m < -c$$

koşullarını sağlayan bir sabit olsun . Eğer her $\alpha \geq c$ için

$$\sum_{-a_i < -\alpha} 1 \leq \sum_{-b_i < -\alpha} 1 \quad (3.48)$$

ise

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^m b_i^2 \quad (3.49)$$

dir.

İspat : Önce

$$-a_i \geq -b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.50)$$

olduğunu gösterelim . Aksini varsayalım . O halde

$$-a_{i_0} < -b_{i_0} \quad (3.51)$$

olacak şekilde bir $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ sayısı vardır.

Bu durumda

$$\sum_{-b_i < -b_{i_0}} 1 \leq i_0 - 1 \quad (3.52)$$

$$\sum_{-a_i < -b_{i_0}} 1 \geq i_0 \quad (3.53)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülmektedir . Dolayısıyla

$$\sum_{-a_i < -b_{i_0}} 1 > \sum_{-b_i < -b_{i_0}} 1 \quad (3.54)$$

dir . Bu bağıntı (3.47) koşuluna aykırıdır ve bu nedenle

$$-a_i \geq -b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olmalıdır. Buradan

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^m b_i^2 \quad (3.55)$$

elde edilir .

Teorem 3.1.4 : $q(x)$ fonksiyonu 1) koşulunu sağlıyorsa

$$L_{0i} < \overline{L_{0i}} \quad (3.56)$$

ve

$$L_{1i} > \overline{L_{1i}} \quad (3.57)$$

dir .

İspat : $y \in D(\overline{L_{0i}})$ olsun . O zaman $y'(x)$ fonksiyonu $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında mutlak süreklidir,

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0 \quad (3.58)$$

ve

$$-y''(x) - q(x)y(x) \in L_2[x_{i-1}, x_i] \quad (3.59)$$

dir . $q(x)y(x) \in L_2[x_{i-1}, x_i]$ olduğundan (3.59)'den $-y''(x) \in L_2[x_{i-1}, x_i]$ elde edilir.

Ayrıca

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |q(x)y(x)|^2 dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} [q(x)]^2 \cdot |y(x)|^2 dx \leq [q(x_{i-1})]^2 \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} |y(x)|^2 dx < \infty \quad (3.60)$$

dir . Yani $q(x)y(x) \in L_2[x_{i-1}, x_i]$ dir. Dolayısıyla

$$-y''(x) - q(x)y(x) \in L_2[x_{i-1}, x_i]$$

dir . Sonuç olarak $y \in D(L_{0i})$ 'dir. Benzer şekilde $y \in D(L_{0i})$ ise $y \in D(\overline{L_{0i}})$ olduğu gösterilebilir . Bu nedenle $D(L_{0i}) = D(\overline{L_{0i}})$ 'dir.

Her $y \in L_{0i}, y \neq 0$ için

$$\begin{aligned}
(L_{0i}y, y) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-y''(x) - q(x)y(x)] \cdot \overline{y(x)} dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} y''(x) \overline{y(x)} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) |y(x)|^2 dx \\
&= -y'(x) \overline{y(x)} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} y'(x) \overline{y'(x)} \cdot dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) |y(x)|^2 \cdot dx \\
&< \int_{x_{i-1}}^{x_i} y'(x) \overline{y'(x)} \cdot dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x_i) |y(x)|^2 \cdot dx \\
&= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} y''(x) \overline{y(x)} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) |y(x)|^2 dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-y''(x) - q(x_i)y(x)] \cdot \overline{y(x)} \cdot dx = (\overline{L}_{0i}y, y)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

dir. Dolayısıyla $L_{0i} < \overline{L}_{0i}$ 'dir. Buna benzer şekilde $L_{1i} > \overline{L}_{1i}$ olduğu gösterilebilir .

L_{0i} ve $\overline{L}_{0i}$ operatörlerinin $-\alpha$ 'dan ($\alpha \in (0, \infty)$) küçük özdeğerlerinin sayısı sırasıyla $n_{0i}(\alpha)$ ve $\overline{n}_{0i}(\alpha)$ olsun . Yazılışın basitliği için

$n_{0i}(\epsilon) = n_{0i}$, $\overline{n}_{0i}(\epsilon) = \overline{n}_{0i}$ şeklinde alalım . Ayrıca $\overline{L}_{0i}$ operatörünün özdeğerleri

$$\mu_{i(1)} \leq \mu_{i(2)} \leq \mu_{i(3)} \leq \dots \leq \dots \tag{3.62}$$

olsun .

Teorem 3 . 1 . 4 gereğince $L_{0i} < \overline{L}_{0i}$ 'dir . Bu durumda [7]'den

$$n_{0i}(\alpha) \geq \overline{n}_{0i}(\alpha) \tag{3.62}$$

olduğu bilinmektedir. R . Courantın varyasyon prensiplerinden dolayı

$$N_0(\alpha) \geq \sum_{i=1}^M n_{0i}(\alpha) \quad (3.64)$$

dir [8] . Teorem 3.1.2'den ve (3.63) , (3.64) eşitsizliklerinden her $\alpha \in (0, \infty)$ için

$$N(\alpha) \geq \sum_{i=1}^M \bar{n}_{0i}(\alpha) \quad (3.65)$$

bulunur .Yardımcı teorem 3.1.1'den ve (3.65) bağıntısından yararlanarak

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \lambda_j^2 \geq \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \mu_{i(m)}^2 \quad (3.66)$$

elde edilir.

$\bar{L}_{0i}$ operatörünün özdeğerlerini bulalım . Bunun için önce $\bar{L}_{0i} + q(x_i)I$ operatörünün veya bir başka deyişle

$$-y''(x) = \mu y(x) \quad (3.67)$$

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (3.68)$$

sınır değer probleminin özdeğerlerini bulalım . Burada basit olsun diye $x_{i-1} = a$ ve $x_i = b$ alınmıştır . (3.66) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = k_1 \cos \sqrt{\mu} x + k_2 \sin \sqrt{\mu} x \quad (3.69)$$

şeklindedir .Burada k_1 ve k_2 herhangi sabitlerdir .y'nin özfonksiyon olması için (23) sınır koşullarının sağlanması yani k_1 ve k_2 'nin

$$k_1 \cos \sqrt{\mu} a + k_2 \sin \sqrt{\mu} a = 0 \quad (3.70)$$

$$k_1 \cos \sqrt{\mu} b + k_2 \sin \sqrt{\mu} b = 0 \quad (3.71)$$

denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü olması gerekir . (3.69)-(3.70) denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için

$$\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\mu}a & \sin \sqrt{\mu}a \\ \cos \sqrt{\mu}b & \sin \sqrt{\mu}b \end{vmatrix} = 0 \quad (3.72)$$

ya da

$$\cos \sqrt{\mu}a \cdot \sin \sqrt{\mu}b - \sin \sqrt{\mu}a \cdot \cos \sqrt{\mu}b = 0 \quad (3.72)$$

olmalıdır .Buradan

$$\sin \sqrt{\mu}(b-a) = 0 \quad (3.74)$$

veya

$$\sqrt{\mu}(b-a) = n\pi \quad ; n \in \mathbb{Z} \quad (3.75)$$

bulunur. Buradan da

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2 \quad (3.76)$$

elde edilir . μ 'nün bu ifadesi (3.69)-(3.70) denklem sisteminin birinci denkleminde yerine konursa

$$k_1 \cos \frac{n\pi}{b-a}a + k_2 \sin \frac{n\pi}{b-a}a = 0 \quad (3.77)$$

ya da

$$k_1 = -k_2 \frac{\sin \frac{n\pi}{b-a}a}{\cos \frac{n\pi}{b-a}a} \quad (3.78)$$

bulunur . (3.69) , (3.75) ve (3.78)'den

$$\begin{aligned}
 y(x) &= -k_2 \frac{\sin \frac{n\pi}{b-a} a}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \cos \frac{n\pi}{b-a} x + k_2 \sin \frac{n\pi}{b-a} x \\
 &= -\frac{k_2}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \left(\sin \frac{n\pi}{b-a} a \cdot \cos \frac{n\pi}{b-a} x - \sin \frac{n\pi}{b-a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b-a} a \right) \\
 &= \frac{k_2}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \left(\sin \frac{n\pi}{b-a} (x-a) \right)
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

elde edilir .

Bu

$$y(x) = \frac{k_2}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \left(\sin \frac{n\pi}{b-a} (x-a) \right) \tag{3.80}$$

fonksiyonu , $k_2 \neq 0$ bir sabit olmak üzere (3.66) ,(3.67) sınır değer probleminin

$$\mu_n^* = \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2 , \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.81}$$

özdeğerine karşılık gelen bir bir özfonksiyonudur .

Böylece (3.66) , (3.67) sınır değer probleminin yani $\bar{L}_{0i} + q(x_i) I$ operatörünün özdeğerlerinin (3.80) şeklinde veya $a = x_{i-1}$ ve $b = x_i$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\mu_n^* = \left(\frac{n\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 , \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde olduğunu gördük . O halde $\bar{L}_{0i}$ operatörünün $\mu_{i(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$)

özdeğerlerinin

$$\mu_{i(m)} = \left(\frac{m\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - q(x_i) \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.82)$$

şeklinde olacağı açıktır .

Teorem 3.1.5 : $\bar{L}_{0i}$ operatörünün $-\epsilon$ 'dan küçük özdeğerleri için

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \mu_{i(m)}^2 > \frac{\delta}{15\pi} \sqrt{q(x_i) - \epsilon} \left[8q^2(x_i) + 4q(x_i)\epsilon + 3\epsilon^2 \right] - 2q^2(x_i) \quad (3.83)$$

eşitsizliği sağlanır .

İspat : $\bar{L}_{0i}$ operatörünün özdeğerleri (3.82) şeklinde olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \mu_{i(m)}^2 &= \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \left\{ \left(\frac{m\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - q(x_i) \right\}^2 = \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \left\{ \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 - q(x_i) \right\}^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \left\{ q(x_i) - \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

dir .

$$\left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 \leq \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \quad (m \leq t \leq m+1) \quad (3.85)$$

bağıntısından

$$\left[q(x_i) - \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 \geq \left[q(x_i) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 \quad (m \leq t \leq m+1; 1 \leq m \leq \bar{n}_{0i}) \quad (3.86)$$

bulunur .Buradan

$$\int_m^{m+1} \left[q(x_i) - \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 \right] dt > \int_m^{m+1} \left[q(x_i) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right] dt \quad (3.87)$$

ya da

$$\left[q(x_i) - \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt > \int_m^{m+1} \left[q(x_i) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt \quad (1 \leq m \leq \bar{n}_{0i} - 1) \quad (3.88)$$

elde edilir.

Bu eşitsizliklerden ve (3.84) bağıntısından yararlanarak

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \mu_{i(m)}^2 &= \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \left[q(x_i) - \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 \geq \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}-1} \left[q(x_i) - \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 \\ &> \sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}-1} \cdot \int_m^{m+1} \left[q(x_i) - \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 \right] \cdot dt \\ &= \int_1^{\bar{n}_{0i}} \left[q(x_i) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt \geq \int_1^{\bar{n}_{0i}} \left[q(x_i) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt - q^2(x_i) \end{aligned} \quad (3.89)$$

bulunur . Ayrıca

$$\left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 - q(x_i) < -\varepsilon \quad (3.90)$$

eşitsizliğinden

$$\frac{\delta}{\pi} \sqrt{q(x_i) - \varepsilon} - 1 \leq \bar{n}_{0i} < \frac{\delta}{\pi} \sqrt{q(x_i) - \varepsilon} \quad (3.91)$$

elde edilir .

(3.89) ve (3.91)'den

$$a = \frac{\delta}{\pi} \sqrt{q(x_i) - \varepsilon} \quad (3.92)$$

olmak üzere

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \mu_{i(m)}^2 > \int_0^{a-1} \left[q(x_i) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt - q^2(x_i) > \int_0^a \left[q(x_i) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt - 2q^2(x_i) \quad (3.93)$$

bulunur. Bu ifadenin sonundaki integrali hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \int_0^a \left[q(x_i) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt &= \int_0^a \left[q^2(x_i) - 2q(x_i)\pi^2\delta^{-2}t^2 + \pi^4\delta^{-4}t^4 \right] dt \\ &= \int_0^a \left[q^2(x_i)t - 2q(x_i)\pi^2\delta^{-2}\frac{t^3}{3} + \pi^4\delta^{-4}\frac{t^5}{5} \right] dt \Big|_0^a = q^2(x_i)a - 2q(x_i)\pi^2\delta^{-2}\frac{a^3}{3} + \pi^4\delta^{-4}\frac{a^5}{5} \\ &= q^2(x_i)\delta\pi^{-1}\sqrt{q(x_i) - \varepsilon} - \frac{2}{3}q(x_i)\pi^2\delta^{-2}\pi^{-3}\delta^3[q(x_i) - \varepsilon]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}\pi^4\delta^{-4}\pi^{-5}\delta^5[q(x_i) - \varepsilon]^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{\delta}{\pi}\sqrt{q(x_i) - \varepsilon} \left\{ q^2(x_i) - \frac{2}{3}q(x_i)[q(x_i) - \varepsilon] + \frac{1}{5}[q(x_i) - \varepsilon]^2 \right\} \\ &= \frac{\delta}{\pi}\sqrt{q(x_i) - \varepsilon} \left\{ q^2(x_i) - \frac{2}{3}q^2(x_i) + \frac{2}{3}q(x_i)\varepsilon + \frac{1}{5}q^2(x_i) - \frac{2}{5}q(x_i)\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{5} \right\} \\ &= \frac{\delta}{\pi}\sqrt{q(x_i) - \varepsilon} \left[\frac{8}{15}q^2(x_i) + \frac{4}{15}q(x_i)\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{5} \right] = \frac{\delta}{15\pi}\sqrt{q(x_i) - \varepsilon} [8q^2(x_i) + 4q(x_i)\varepsilon + 3\varepsilon^2] \quad (3.94) \end{aligned}$$

dir . (3.93) ve (3.94)'den

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \mu_{i(m)}^2 > \frac{\delta}{15\pi} \sqrt{q(x_i) - \varepsilon} [8q^2(x_i) + 4q(x_i)\varepsilon + 3\varepsilon^2] - 2q^2(x_i) \quad (3.95)$$

elde edilir .

Teorem 3.1.6: q fonksiyonu 1) ve 2) koşullarını sağlıyorsa ε 'nın küçük pozitif değerleri için

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2 > \frac{1}{15} \int_{\delta}^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx - c p^k(\varepsilon) \quad (3.96)$$

dir. Burada

$$f(x, \varepsilon) = \sqrt{q(x_i) - \varepsilon} [8q^2(x_i) + 4q(x_i)\varepsilon + 3\varepsilon^2] \quad (3.97)$$

ve c bir pozitif sabittir.

İspat : q fonksiyonu monoton azalan varsayıldığından $f(x, \varepsilon)$ da

$$\varepsilon \in (0, q(0)), p^k(\varepsilon) \geq 2 \quad (3.98)$$

koşullarını sağlayan her ε için x 'e göre monoton azalan bir fonksiyon olacaktır .

Dolayısıyla

$$\delta f(x_i, \varepsilon) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, \varepsilon) dx > \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, \varepsilon) dx \quad (1 \leq i \leq M-1) \quad (3.99)$$

dir.

Teorem 3.1.5'den ve (3.99)'den

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{0i}} \mu_{i(m)}^2 > \frac{1}{15\pi} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, \varepsilon) dx - 2q^2(0) \quad (3.100)$$

bulunur . (3.65) ve (3.98)'den

$$\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \lambda_j^2 > \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{1}{15\pi} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, \epsilon) dx - 2q^2(0) \right] > \frac{1}{15\pi} \int_{x_1}^x f(x, \epsilon) dx - 2q^2(0)M \quad (3.101)$$

elde edilir . (3.46)'dan ϵ 'nın küçük pozitif değerleri için

$$M = \frac{p(\epsilon)}{\delta} = \left[p^k(\epsilon) \right] + 1 < 2p^k(\epsilon) \quad (3.102)$$

bulunur . $x_1 = \delta$ ve $x_M = p(\epsilon)$ olduğu göz önüne alınırsa (3.101) ve (3.102)'den

$$\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \lambda_j^2 > \frac{1}{15} \int_{\delta}^{p(\epsilon)} f(x, \epsilon) dx - cp^k(\epsilon) \quad (3.103)$$

elde edilir .

$\gamma_{i1} \leq \gamma_{i2} \leq \dots$ ve $\bar{\gamma}_{i1} \leq \bar{\gamma}_{i2} \leq \dots$ sırasıyla L_{li} ve $\bar{L}_{li}$ operatörlerinin özdeğerleri ve

$$n_{li(\alpha)} = \sum_{\gamma_{im} < -\alpha} 1 \quad (3.104)$$

$$\bar{n}_{li(\alpha)} = \sum_{\gamma_{im} < -\alpha} 1 \quad (3.105)$$

$$n_{li}(\epsilon) = n_{li} \quad (3.106)$$

$$\bar{n}_{li}(\epsilon) = \bar{n}_{li} \quad (3.107)$$

olsun .

Teorem 3.1.7 : $\bar{L}_{li}$ operatörünün $-\epsilon$ 'dan küçük olan özdeğerleri için

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{li}} (\tilde{\gamma}_{im})^2 < \frac{\delta}{15\pi} f(x_{i-1}, \epsilon) + q^2(x_{i-1}) \quad (3.108)$$

eşitsizliği sağlanır .

İspat : $\bar{L}_{0i}$ operatörüne benzer şekilde $\bar{L}_{li}$ operatörünün özdeğerlerinin

$$\bar{\gamma}_{im} = \left[\frac{(m-1)\pi}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 - q(x_{i-1}) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.109)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir .

$$\left[\frac{(m-1)\pi}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 \geq \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \quad (m-2 \leq t \leq m-1 ; m = 2, 3, \dots) \quad (3.110)$$

bağıntısından

$$\left\{ q(x_{i-1}) - \left[\frac{(m-1)\pi}{\delta} \right]^2 \right\}^2 \leq \left[q(x_{i-1}) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 \quad (m-2 \leq t \leq m-1 ; 2 \leq m \leq \bar{n}_{li}) \quad (3.111)$$

elde edilir . Buradan

$$\int_{m-2}^{m-1} \left\{ q(x_{i-1}) - \left[\frac{(m-1)\pi}{\delta} \right]^2 \right\}^2 dt < \int_{m-2}^{m-1} \left\{ q(x_{i-1}) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right\}^2 dt \quad (3.112)$$

ya da

$$\left\{ q(x_{i-1}) - \left[\frac{(m-1)\pi}{\delta} \right]^2 \right\}^2 < \int_{m-2}^{m-1} \left\{ q(x_{i-1}) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right\}^2 dt \quad (2 \leq m \leq \bar{n}_{li}) \quad (3.113)$$

elde edilir . (3.109) ve (3.113)'den yararlanarak

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{li}} (\bar{\gamma}_{im})^2 = \sum_{m=1}^{\bar{n}_{li}} \left\{ q(x_{i-1}) - \left[\frac{(m-1)\pi}{\delta} \right]^2 \right\}^2 = q^2(0) + \sum_{m=2}^{\bar{n}_{li}} \left\{ q(x_{i-1}) - \left[\frac{(m-1)\pi}{\delta} \right]^2 \right\}^2$$

$$< q^2(x_{i-1}) + \sum_{m=2}^{\bar{n}_{li}} \cdot \int_{m-2}^{m-1} \left[q(x_{i-1}) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt = q^2(x_{i-1}) + \int_0^{\bar{n}_{li}-1} \left[q(x_{i-1}) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt \quad (3.114)$$

elde edilir .

$$\left[\frac{(m-1)\pi}{\delta} \right]^2 - q(x_{i-1}) < -\varepsilon \quad (3.115)$$

eşitsizliğinden

$$\bar{n}_{li} < \frac{\delta}{\pi} \sqrt{q(x_{i-1}) - \varepsilon} + 1 \quad (3.116)$$

bulunur .(3.114) ve (3.116)'dan

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{li}} (\bar{\gamma}_{im})^2 < \int_0^b \left[q(x_{i-1}) - \left(\frac{t\pi}{\delta} \right)^2 \right]^2 dt + q^2(x_{i-1}) \quad (3.117)$$

elde edilir. Burada

$$b = \frac{\delta}{\pi} \sqrt{q(x_{i-1}) - \varepsilon} \quad (3.118)$$

alınmıştır .(3.94) ve (3.117)'den yararlanarak

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{li}} (\bar{\gamma}_{im})^2 < \frac{\delta}{15\pi} \sqrt{q(x_{i-1}) - \varepsilon} \left[8q^2(x_{i-1}) + 4q(x_{i-1})\varepsilon + 3\varepsilon^2 \right] + q^2(x_{i-1}) \quad (3.119)$$

ya da

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{li}} (\bar{\gamma}_{im})^2 < \frac{\delta}{15\pi} f(x_{i-1}, \varepsilon) + q^2(x_{i-1}) \quad (3.120)$$

bulunur .

Teorem 3.1.8 : $q(x)$ fonksiyonu 1) ve 2)koşullarını sağlıyorsa ε 'nın küçük pozitif değerleri için

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2 < \sum_{m=1}^{n_{11}} \gamma_{1m}^2 + \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx + \delta^{-1} p(\varepsilon) q^2(0) \quad (3.121)$$

dır .

İspat : Teorem 3.1.4 gereğince $L_{li} > \bar{L}_{li}$ 'dir . Bu durumda [8]'den

$$n_{li}(\alpha) \leq \bar{n}_{li}(\alpha) \quad (3.122)$$

olduğu bilinmektedir .R. Courantın varyasyon prensibinden dolayı

$$N_1(\alpha) \leq \sum_{i=1}^M n_{li}(\alpha) \quad (3.123)$$

dır .[8] Teorem 3.1.3'den ve (3.122) , (3.123) eşitsizliklerinden her $\alpha \in [\varepsilon, \infty)$ için

$$N(\alpha) \leq \sum_{i=2}^M \bar{n}_{li}(\alpha) + n_{11}(\alpha) \quad (3.124)$$

bulunur. Yardımcı teorem 3.1.1 ve (3.124)'den

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_i^2 \leq \sum_{i=2}^M \sum_{m=1}^{\bar{n}_{li}} (\bar{\gamma}_{im})^2 + \sum_{m=1}^{n_{11}} \gamma_{1m}^2 \quad (3.125)$$

elde edilir . $f(x, \varepsilon)$

$$\varepsilon \in (0, q(0)), p^k(\varepsilon) \geq 2 \quad (3.126)$$

koşulunu sağlayan her ε için x 'e göre monoton azalan bir fonksiyon olduğundan

$$\delta f(x_{i-1}, \varepsilon) = \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x_{i-1}, \varepsilon) dx < \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x, \varepsilon) dx \quad (2 \leq i \leq M) \quad (3.127)$$

dir . Teorem 3.1.7'den ve (3.127) bağıntısından

$$\sum_{m=1}^{\bar{n}_{li}} (\bar{\gamma}_{im})^2 < \frac{1}{15\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x, \varepsilon) dx + q^2(0) \quad (3.128)$$

bulunur . (3.125) ve (3.128)'den

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2 < \sum_{m=1}^{n_{11}} \gamma_{1m}^2 + \sum_{i=2}^M \left[\frac{1}{15\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x, \varepsilon) dx + q^2(0) \right] =$$

$$\frac{1}{15\pi} \int_0^x f(x, \varepsilon) dx + (M-1)q^2(0) < \sum_{m=1}^{n_{11}} \gamma_{1m}^2 + \frac{1}{15\pi} \int_0^x f(x, \varepsilon) dx + Mq(0) \quad (3.129)$$

dir .

$x_M = p(\varepsilon)$ ve $M = \frac{p(\varepsilon)}{\delta}$ olduğu dikkate alınırsa (3.129)'dan

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2 < \sum_{m=1}^{n_{11}} \gamma_{1m}^2 + \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx + \delta^{-1} p(\varepsilon) q^2(0) \quad (3.130)$$

elde edilir .

(3.130) eşitsizliğinde yer alan $\sum_{m=1}^{n_{11}} \gamma_{1m}^2$ toplamını kesin sınırlandırmaya çalışalım .Bu

toplamda $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1m}, \dots$ ile $L_2[0, \delta]$ uzayında (1) ifadesi ve $y'(0) = y'(\delta) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan L_{11} operatörünün özdeğerlerinin ve n_{11} ile $-\varepsilon$ 'dan küçük olan özdeğerlerin gösterildiğini hatırlatalım . $[0, \delta]$ aralığını uzunlukları

$$\delta_1 = \frac{\delta_0}{\left\lceil \delta_0 p^{2k-1}(\epsilon) \right\rceil + 1} \quad (\delta_0 = \delta) \quad (3.131)$$

olan parçalara bölelim .R. Courantın varyasyon prensiplerinden ve yardımcı teorem 3.1.1'den yararlanarak Teorem 3.1.8'in ispatına benzer şekilde

$$\sum_{m=1}^{n_{11}} \gamma_{1m}^2 < \sum_{m=1}^{n_{11(1)}} \gamma_{1m(1)}^2 + \frac{1}{15\pi} \int_0^{\delta_0} f(x, \epsilon) dx + \delta_1^{-1} \delta_0 \cdot q^2(0) \quad (3.132)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir . Burada

$\gamma_{11(1)} \leq \gamma_{12(1)} \leq \dots \leq \gamma_{1n(1)} \leq \dots$ ile $L_2[0, \delta_1]$ uzayında (1) ifadesi ve $y'(0) = y'(\delta_1) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan $L_{11(1)}$ operatörünün özdeğerleri ve $n_{11(1)}$ ile $-\epsilon$ 'dan küçük olan özdeğerlerin sayısı gösterilmiştir . (3.132) eşitsizliği $\delta_{-1} = p(\epsilon)$ olmak üzere

$$\delta_n = \frac{\delta_{n-1}}{\left\lceil \delta_{n-1} p^{(n+1)k-1}(\epsilon) \right\rceil + 1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.133)$$

olmak üzere her $L_2[0, \delta_r]$ uzayında (1) ifadesi ve $y'(0) = y'(\delta_r) = 0$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) sınır koşuluyla oluşturulan $L_{11(r)}$ ($r = 0, 1, 2, \dots$; $L_{11(0)} = L_{11}$) operatörlerinin $-\epsilon$ 'dan küçük olan özdeğerlerine uygulanırsa

$$\sum_{m=1}^{n_{11(r)}} \gamma_{1m(r)}^2 \leq \sum_{m=1}^{n_{11(r+1)}} \gamma_{1m(r+1)}^2 + \frac{1}{15\pi} \int_0^{\delta_r} f(x, \epsilon) dx + \delta_{r+1}^{-1} \cdot \delta_r q^2(0) \quad (r=0,1,2,\dots) \quad (3.134)$$

elde edilir. Burada $\gamma_{1m(0)} = \gamma_{1m}$ ve $n_{11(0)} = n_{11}$ 'dir. $\delta_{r+1}^{-1} \cdot \delta_r$ ($r = 0, 1, 2, \dots$)

ifadelerini sınırlandıralım .(3.133)'dan yararlanarak

$$\delta_{r+1}^{-1} \cdot \delta_r = \left\lceil \delta_{r-1} p^{(r+1)k-1}(\epsilon) \right\rceil + 1 < \delta_{r-1} p^{(r+1)k-1}(\epsilon) + 2 = \frac{\delta_{r-2}}{\left\lceil \delta_{r-2} p^{rk-1}(\epsilon) \right\rceil + 1} p^{(r+1)k-1}(\epsilon) + 2 <$$

$$\frac{\delta_{r-2} p^{(r+1)k-1}(\varepsilon)}{\delta_{r-2} p^{rk-1}(\varepsilon)} + 2 = p^k(\varepsilon) + 2 \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.135)$$

bulunur. Buradan ε 'nın $p^k(\varepsilon) > 2$ eşitsizliğini sağlayan değerleri için

$$\delta_{r+1}^{-1} \cdot \delta_r < 2p^k(\varepsilon) \quad (3.136)$$

elde edilir . (3.134) ve (3.136)'den

$$\sum_{m=1}^{n_{11}(r)} \gamma_{1m(r)}^2 < \sum_{m=1}^{n_{11}(r)} \gamma_{1m(r+1)}^2 + \frac{1}{15\pi} \int_0^{\delta_r} f(x, \varepsilon) dx + 2p^k(\varepsilon) q^2(0) \quad (3.137)$$

$$\sum_{m=1}^{n_{11}(r_0+1)} \gamma_{1m(r_0+1)}^2 < C_1$$

olacak şekilde bir $C_1 \in (0, \infty)$ sabitinin varlığı elde edilir. Teorem 3.1.8 ve (3.132), (3.134), (3.137) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2 &< \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx + \frac{1}{15\pi} \sum_{r=0}^{r_0} \int_0^{\delta_r} f(x, \varepsilon) dx + 2p^k(\varepsilon) q^2(0) (r_0 + 2) < \\ &< \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx + C_2 \int_0^{\delta} f(x, \varepsilon) dx + C_2 p^k(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.138)$$

bulunur .

3.2. Negatif Özdeğerlerin Karelerinin Toplamı için Asimtotik Formüller

Bu kısımda , $\varepsilon \rightarrow +0$ iken $\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j^2$ toplamı için formüller bulacağız. Önce $q(x)$

fonksiyonunun aşağıdaki koşulu sağladığını varsayalım :

3) $k_0, \left(0, \frac{2}{5}\right)$ aralığına ait olan bir sabit olmak üzere her $\eta > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) x^{k_0 - \eta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[q(x) x^{k_0 + \eta} \right]^{-1} = 0$$

dır .

Teorem 3.2.1 : 1) , 2) , 3) koşulları sağlandığı takdirde $\varepsilon \rightarrow +0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j^2 = (15\pi)^{-1} \left[1 + O\left(\varepsilon^{t_0}\right) \right] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \left[8q^2(x) + 4q(x)\varepsilon + 3\varepsilon^2 \right] \cdot dx \quad (3.139)$$

asimtotik formülü sağlanır. Burada t_0 pozitif bir sabittir.

İspat : Teorem 3.1.6 gereğince ε un küçük pozitif değerleri için

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2 > \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx - \frac{1}{15\pi} \int_0^{\delta} f(x, \varepsilon) dx - c p^k(\varepsilon) \quad (3.140)$$

dir. İspat için (3.137) eşitsizliğinin ikinci tarafındaki terimleri sınırlandıracağız. $f(x, \varepsilon) > 0$ ve $p(\varepsilon)$ monoton azalan olduğundan

$$\int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx > \int_0^{p(2\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx = \int_0^{p(2\varepsilon)} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \left[8q^2(x) + 4q(x)\varepsilon + 3\varepsilon^2 \right] \cdot dx >$$

$$\int_0^{p(2\varepsilon)} \sqrt{q(x)-\varepsilon} (8\varepsilon^2 + 4\varepsilon^2 + 3\varepsilon^2) \cdot dx = 15\varepsilon^2 \int_0^{p(2\varepsilon)} \sqrt{q(x)-\varepsilon} \cdot dx \quad (3.141)$$

dir . $[0, p(2\varepsilon)]$ aralığında

$q(x) \geq q[p(2\varepsilon)] = 2\varepsilon$ olduğundan (3.141)'den

$$\int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx > \varepsilon^{\frac{5}{2}} p(2\varepsilon) \quad (3.142)$$

bulunur . $q(x)$ fonksiyonunun 3) koşulunu sağladığı ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} p(\varepsilon) = \infty$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[q(p(\varepsilon)) (p(\varepsilon))^{k_0 + \eta} \right]^{-1} = 0$$

dır . Buradan ε 'nin küçük pozitif değerleri için

$$p(\varepsilon) > \varepsilon^{-\frac{1}{k_0 + \eta}} \quad (3.143)$$

elde edilir .(3.142) ve (3.143)'dan

$$\int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx > c_3 \varepsilon^{\frac{5}{2} - \frac{1}{k_0 + \eta}} \quad (3.144)$$

bulunur .Burada c_3 pozitif bir sabittir . $q(x)$ 'in 3) koşulunu sağlamasından yararlanarak

$$\int_0^{\delta} f(x, \varepsilon) dx = \int_0^{\delta} \sqrt{q(x)-\varepsilon} [8q^2(x) + 4\varepsilon q(x) + 3\varepsilon^2] \cdot dx < \int_0^{\delta} \sqrt{q(x)} [8q^2(x) + 4q^2(x) + 3q^2(x)] \cdot dx =$$

$$15 \int_0^1 q^{\frac{5}{2}}(x) dx + 15 \int_1^\delta q^{\frac{5}{2}}(x) dx < c_4 + c_4 \int_1^\delta x^{\frac{5(\eta-k_0)}{2}} dx < c_4 + c_4 \delta^{\frac{5(\eta-k_0)}{2}+1} \quad (3.145)$$

elde edilir .Öte yandan (3.46)'dan ε 'nın küçük pozitif değerleri için

$$\delta < p^{1-k}(\varepsilon) \quad (k \in (0,1)) \quad (3.146)$$

bulunur .(3.145) ve (3.146)'den

$$\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx < c_4 + c_4 \left(p^{1-k}(\varepsilon) \right)^{\frac{5(\eta-k_0)+2}{2}} < c_5 (p(\varepsilon))^{\frac{[5 \cdot (\eta-k_0)+2] \cdot (1-k)}{2}} \quad (3.147)$$

bulunur .Tekrar $q(x)$ 'in 3) koşulunu sağlamasından yararlanarak

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q(p(\varepsilon)) \cdot (p(\varepsilon))^{k_0-\eta} = 0 \quad (3.148)$$

elde edilir . Buradan

$$\varepsilon(p(\varepsilon))^{k_0-\eta} < 1 \quad (3.149)$$

ya da

$$p(\varepsilon) < \varepsilon^{\frac{1}{k_0-\eta}} \quad (3.150)$$

bulunur .(3.147) ve (3.150)'dan

$$\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx < c_5 \cdot \varepsilon^{-\frac{[5(\eta-k_0)+2] \cdot (1-k)}{2(k_0-\eta)}} \quad (3.151)$$

elde edilir . Ayrıca (3.150)'dan

$$p^k(\varepsilon) < \varepsilon^{-\frac{k}{k_0 - \eta}} \quad (3.152)$$

bulunur . (3.144) , (3.151) ve (3.152)'den

$$\frac{\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx}{p(\varepsilon)} < c_6 \cdot \varepsilon^{-\frac{[5 \cdot (\eta - k_0) + 2] \cdot (1 - k)}{2(k_0 - \eta)} - \frac{5}{2} + \frac{1}{k_0 + \eta}} \quad (3.153)$$

$$\frac{p^k(\varepsilon)}{p(\varepsilon)} < c_6 \cdot \varepsilon^{-\frac{k}{k_0 + \eta} - \frac{5}{2} + \frac{1}{k_0 + \eta}} \quad (3.154)$$

elde edilir . $k_0 > 0$ olduğundan

$$-\frac{[5 \cdot (\eta - k_0) + 2] \cdot (1 - k)}{2(k_0 - \eta)} - \frac{5}{2} + \frac{1}{k_0 + \eta} \quad \text{ve} \quad -\frac{k}{k_0 - \eta} - \frac{5}{2} + \frac{1}{k_0 + \eta} \quad \text{fonksiyonları } \eta \text{'ya}$$

göre $\eta=0$ noktasında dolayısıyla her $t > 0$ için $0 < \eta < \omega$ iken

$$-\frac{[5 \cdot (\eta - k_0) + 2] \cdot (1 - k)}{2 \cdot (k_0 - \eta)} - \frac{5}{2} + \frac{1}{k_0 + \eta} > \frac{k(2 - 5k_0)}{2k_0} - t \quad (3.155)$$

$$-\frac{k}{k_0 - \eta} - \frac{5}{2} + \frac{1}{k_0 + \eta} > \frac{2 - 5k_0 - 2k}{2k_0} - t \quad (3.156)$$

olacak şekilde bir $\omega = \omega(t) > 0$ sayısı vardır . Buraya kadar yapılan işlemlerde $k, (0, 1)$ aralığına ait olan sabit bir sayıdır. Burada

$$k = \frac{2 - 5k_0}{4}, t = t_0 = \min \left\{ \frac{(2 - 5k_0)^2}{16k_0}, \frac{2 - 5k_0}{8k_0} \right\} \quad \text{alınırsa (3.154) ve (3.156)'den}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{[5 \cdot (\eta - k_0) + 2] \cdot (1 - k)}{2(k_0 - \eta)} - \frac{5}{2} + \frac{1}{k_0 + \eta} > \frac{(2 - 5k_0)^2}{8k_0} - t_0 \geq \frac{(2 - 5k_0)^2}{8k_0} - \frac{(2 - 5k_0)^2}{16k_0} = \\
& \frac{(2 - 5k_0)^2}{16k_0} = \frac{(2 - 5k_0)^2}{16k_0} \geq t_0
\end{aligned} \tag{3.157}$$

$$-\frac{k}{k_0 - \eta} - \frac{5}{2} + \frac{1}{k_0 + \eta} > \frac{2 - 5k_0}{4k_0} - t_0 \geq \frac{2 - 5k_0}{4k_0} - \frac{2 - 5k_0}{8k_0} = \frac{2 - 5k_0}{8k_0} \geq t_0 \tag{3.158}$$

elde edilir . (3.153) , (3.154) , (3.157) ve (3.158)'den

$$\frac{\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx}{p(\varepsilon)} < c_6 \cdot \varepsilon^{t_0} \tag{3.159}$$

$$\frac{\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx}{p(\varepsilon)} < c_6 \cdot t_0 \tag{3.160}$$

bulunur. (3.140) , (3.159) ve (3.160) den

$$\frac{\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2}{p(\varepsilon)} > 1 - c_7 \cdot \varepsilon^{t_0} \tag{3.161}$$

elde edilir .(3.137) , (3 .159) ve (3 .160)'dan

$$\frac{\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \lambda_j^2}{\frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\epsilon)} f(x, \epsilon) dx} < 1 + c_8 \cdot \epsilon^{t_0} \quad (3.162)$$

bulunur . (3.161) ve (3.162)'den $\epsilon \rightarrow 0$ iken

$$\frac{\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \lambda_j^2}{\frac{1}{15\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} f(x, \epsilon) dx} - 1 = O(\epsilon^{t_0}) \quad (3.163)$$

ya da

$$\sum_{-\lambda_j < -\epsilon} \lambda_j^2 = \frac{1}{15\pi} \left[1 + O(\epsilon^{t_0}) \right] \cdot \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{q(x) - \epsilon} \left[8q^2(x) + 4\epsilon q(x) + 3\epsilon^2 \right] \cdot dx$$

asimtotik formülü elde edilir .

$$\ln_j x \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \text{ ile } \ln_0 x = x, \quad \ln_j x = (\ln(\ln_{j-1} x))$$

şeklindeki fonksiyonları gösterelim ve $q(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulu sağladığını varsayalım :

4) Öyle bir $\xi > 0$ sayısı ve n doğal vardır ki $q(x) - (\ln_n x)^{-\xi}$ fonksiyonu bir $[a, \infty)$ ($a > 0$) aralığında negatif değerli değildir ve monoton artmayandır .

Teorem 3.2.2 : x 'in büyük değerleri için

$$\ln_n \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_n x - \ln^{1-n} x, \quad (n \geq 0) \quad (3.164)$$

İspat : $n = 0, 1$ değerleri için (3.164) eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir .

$n \geq 2$ değerleri için (3.164) eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım yöntemi ile ispatlayacağız .

$j=2$ için

$$\begin{aligned}\ln_2\left(\frac{x}{\ln x}\right) &= \ln\left(\ln\frac{x}{\ln x}\right) = \ln(\ln x - \ln(\ln x)) \\ &= \ln\left((\ln x)\left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x}\right)\right) = \ln_2 x + \ln x\left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x}\right)\end{aligned}\quad (3.165)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln_2 x}{\ln x} = 0$ olduğundan $x \rightarrow \infty$ iken $\ln\left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x}\right) \sim -\frac{\ln_2 x}{\ln x}$ dir. Buradan x 'in büyük değerleri için

$$\ln\left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x}\right) < -\frac{\ln_2 x}{2 \ln x} \quad (3.166)$$

bulunur. (3.165) ve (3.166)'den

$$\ln_2\left(\frac{x}{\ln x}\right) < \ln_2 x - \frac{\ln_2 x}{2 \ln x} < \ln_2 x - \ln^{-1} x \quad (3.167)$$

ya da

$$\ln_2\left(\frac{x}{\ln x}\right) < \ln_2 x - \ln^{-1} x$$

elde edilir. Böylece $n=2$ için (3.164) eşitsizliğinin sağlandığını göstermiş olduk. Bu kez de $n=m$ ($m \geq 2$) için (3.164)'nin sağlandığını varsayalım .Yani x in büyük değerleri için

$$\ln_m\left(\frac{x}{\ln x}\right) < \ln_m x - \ln^{1-m} x \quad (3.168)$$

olsun . Bu durumda (3.164)'nin $n=m+1$ için de sağlandığını göstermek gerek . x in büyük değerleri için (3.168) eşitsizliği sağlandığından

$$\ln_{m+1}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \ln\left(\ln_m\left(\frac{x}{\ln x}\right)\right) < \ln(\ln_m x - \ln^{1-m} x)$$

$$= \ln \left((\ln_m x) \left(1 - \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x \right) \right) = \ln_{m+1} x + \ln \left(1 - \ln_m^{-1} x \cdot \ln^{1-m} x \right) \quad (3.169)$$

olur . Yukarıdakine benzer şekilde x in büyük değerleri için

$$\ln \left(1 - \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x \right) < -\frac{1}{2} \ln_m^{-1} x \cdot \ln^{1-m} x$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir . Bu eşitsizlik (3.169) de göz önüne alınırsa ,

$$\ln_{m+1} \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_{m+1} x - \frac{1}{2} \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x \quad (3.170)$$

bulunur . x in büyük değerleri için

$$\frac{\ln x}{2 \ln_m x} > 1 \quad , \quad (m \geq 2) \quad (3.171)$$

olduğundan , (3.170) dan

$$\ln_{m+1} \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_{m+1} x - \ln^{-m} x \quad (3.172)$$

bulunur .

Teorem 3.2.3 : $q(x)$ fonksiyonu 1) , 2) ve 4) koşullarını sağladığı takdirde ε 'nın küçük pozitif değerleri için

$$q \left(\frac{p(\varepsilon)}{\ln p(\varepsilon)} \right) - \varepsilon > (\ln p(\varepsilon))^{-(\xi+1)(n+1)} \quad (3.173)$$

dir.

İspat : k bir doğal sayı ($k \geq 1$) olmak üzere Teorem 3.2.2 yardımıyla x in büyük değerleri için

$$\ln_n^k \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \left(\ln_n x - \ln^{1-n} x \right)^k \leq \ln_n^k x - (\ln x)^{k(1-n)}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
 \ln_n^{-k} \left(\frac{x}{\ln x} \right) - \ln_n^{-k} x &> \frac{1}{\ln_n^k x - (\ln x)^{k(1-n)}} - \ln_n^{-k} x \\
 &= \frac{1}{\ln_n^k x \cdot (\ln x)^{k(n-1)} (\ln_n^k x - \ln^{k(1-n)} x)} \\
 &> \frac{1}{\ln_n^k x \ln^{k(n-1)} x \cdot \ln_n^k x} > (\ln x)^{-k(n+1)}
 \end{aligned} \tag{3.174}$$

elde edilir .

Varsayım gereği $q(x) - \ln_n^{-\xi} x$ ($\xi > 0$) fonksiyonu bir $[a, \infty)$ ($a > 0$) aralığında monoton artmayandır. Bu durumda her bir $k_1 > \xi$ sayısı için $q(x) - \ln_n^{-k_1} x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ ($b > 0$) aralığında monoton azalan fonksiyon olduğunu gösterelim . Bunun için $q(x) - \ln_n^{-k_1} x$ fonksiyonunu $u = q(x) - \ln_n^{-\xi} x$ ve $v = \ln_n^{-\xi} x - \ln_n^{-k_1} x$ olmak üzere

$$q(x) - \ln_n^{-k_1} x = u(x) + v(x) \tag{3.175}$$

şeklinde gösterelim . $v(x)$ fonksiyonu bir $[b, \infty)$ ($b > 0$) aralığında monoton azalandır . Gerçekten

$$\begin{aligned}
 v'(x) &= \left(\ln_n^{-\xi} x - \ln_n^{-k_1} x \right)' \\
 &= -\xi \ln_n^{-\xi-1} x \cdot (\ln_n x)' + k_1 \cdot \ln_n^{-k_1-1} x \cdot (\ln_n x)' \\
 &= (\ln_n x)' \left[\frac{k_1}{\ln_n^{k_1+1} x} - \frac{\xi}{\ln_n^{\xi+1} x} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\ln_n x)' \frac{k_1}{\ln_n^{k_1+1} x} \left[1 - \frac{\xi}{k_1 \cdot \ln_n^{\xi-k_1} x} \right] \\
&= (\ln_n x)' \frac{k_1}{\ln_n^{k_1+1} x} \left[1 - \frac{\xi \ln_n^{k_1-\xi} x}{k_1} \right]
\end{aligned} \tag{3.176}$$

dır. $k_1 > \xi$ ve x in büyük değerleri için $(\ln_n x)' > 0$ olduğundan (3.176)'den bir $[b, \infty)$ ($b > a$) aralığında $v'(x) < 0$ olduğu elde edilir. Böylece $v(x)$ fonksiyonunun $[b, \infty)$ aralığında monoton azalan olduğu ispatlanmış olur. Öte yandan $u(x)$ fonksiyonu $[b, \infty)$ aralığında monoton artmayan olduğundan, (3.175)'den $q(x) - \ln_n^{-k_1} x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ aralığında monoton azalan olduğu ortaya çıkar. (3.174) de $k = \llbracket \xi \rrbracket + 1$ alalım. Yukarıdaki açıklamalardan $q(x) - \ln_n^{-k} x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ ($b \geq a$) aralığında monoton azalan olduğu bulunur. Bu nedenle x in büyük değerleri için

$$q\left(\frac{x}{\ln x}\right) - \left(\ln_n\left(\frac{x}{\ln x}\right)\right)^{-k} > q(x) - \ln_n^{-k} x \tag{3.177}$$

dır. (3.174) ve (3.177)'den

$$q\left(\frac{x}{\ln x}\right) - q(x) > \left(\ln_n\left(\frac{x}{\ln x}\right)\right)^{-k} - \ln_n^{-k} x > (\ln x)^{-k(n+1)} \tag{3.178}$$

elde edilir. Varsayım gereği $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ olduğundan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} p(\varepsilon) = \infty \tag{3.179}$$

dir. Bu nedenle (3.178) de ε küçük pozitif sayı olmak üzere $x = p(\varepsilon)$ alınabilir.

$$q\left(\frac{p(\varepsilon)}{\ln p(\varepsilon)}\right) - q(p(\varepsilon)) > (\ln p(\varepsilon))^{-k(n+1)} \tag{3.180}$$

$k = \llbracket \xi \rrbracket + 1 \leq \xi + 1$ olduğundan ,

$$q\left(\frac{p(\varepsilon)}{\ln p(\varepsilon)}\right) - \varepsilon > (\ln p(\varepsilon))^{-(\xi+1)(n+1)}$$

elde edilir.

Böylece teorem ispatlanmış olur .

Teorem 3.2.4 : $q(x)$ fonksiyonu 1) , 2) ve 4) koşullarını sağladığı takdirde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j^2 = (15\pi)^{-1} \left[1 + O\left(e^{-\varepsilon^{-\beta}}\right) \right] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \left[8q^2(x) + 4\varepsilon q(x) + 3\varepsilon^2 \right] \cdot dx \quad (3.181)$$

asimtotik formülü sağlanır . Burada β pozitif bir sabittir .

İspat : Teorem 3.1.6'dan ε 'un küçük pozitif değerleri için

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2 > \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx - c_9 \delta - c p^k(\varepsilon) \quad (3.182)$$

elde edilir . $k = \frac{1}{2}$ olmak üzere (3.143) ve (3.182)'den

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j^2 > \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx - c_{10} p^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) \quad (3.183)$$

bulunur . Burada c_{10} pozitif bir sabittir . (3.183) eşitsizliğinin ikinci tarafında yer alan

$$\int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx \text{ integralini sınırlandıralım .}$$

$$\int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx = \int_0^{p(\varepsilon)} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \left[8q^2(x) + 4\varepsilon q(x) + 3\varepsilon^2 \right] \cdot dx >$$

$$15\varepsilon^2 \cdot \int_0^{p(\varepsilon)} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \cdot dx \quad (3.184)$$

dır . $f(\varepsilon) = p(\varepsilon) \ln^{-1} p(\varepsilon)$ olmak üzere ε un pozitif küçük değerleri için (3.180)'dan

$$\int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx > \varepsilon^2 \int_{\frac{1}{2}f(\varepsilon)}^{f(\varepsilon)} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \cdot dx > \frac{\varepsilon^2 f(\varepsilon)}{2} \sqrt{q(f(\varepsilon)) - \varepsilon} \quad (3.185)$$

bulunur. Teorem 3.2.3'ten ve (3.181)'den yararlanarak

$$\int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx > \frac{\varepsilon^2 p(\varepsilon)}{2 \ln p(\varepsilon)} (\ln p(\varepsilon))^{\frac{-1}{2}(\xi+1)(n+1)} > \varepsilon^2 p^{\frac{3}{4}}(\varepsilon) ,$$

$$\frac{\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)}}{p(\varepsilon)} < \varepsilon^{-2} p^{-\frac{1}{4}}(\varepsilon) \quad (3.186)$$

$$\int_0^{p(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx$$

elde edilir. $q(x)$ fonksiyonu 4) koşulunu sağladığından

$$\varepsilon = q(p(\varepsilon)) \geq (\ln_n p(\varepsilon))^{-\xi}$$

dır .

Buradan

$$p(\varepsilon) \geq e^{\varepsilon^{-\frac{1}{\xi}}} \quad (3.187)$$

bulunur . (3.183) ve (3.187) den

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}(\epsilon)}{p(\epsilon)} < \epsilon^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\epsilon^{-\frac{1}{5}}} < e^{-\epsilon^{-\beta}} \quad (3.188)$$

$$\int_0^{p(\epsilon)} f(x, \epsilon) dx$$

elde edilir .

(3.183) ve (3.188)'den

$$\frac{\sum_{-\lambda_j < -\epsilon} \lambda_j^2}{\frac{1}{15\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} f(x, \epsilon) dx} > 1 - c_{11} e^{-\epsilon^{-\beta}} \quad (3.189)$$

bulunur .

(3.137) eşitsizliğinden

$$\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \lambda_j^2 > \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\epsilon)} f(x, \epsilon) dx + c_{12} \delta + c_2 p^k(\epsilon) \quad (3.190)$$

elde edilir . Yine $k = \frac{1}{2}$ olmak üzere (3.143) ve (3.190)'dan

$$\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \lambda_j^2 > \frac{1}{15\pi} \int_0^{p(\epsilon)} f(x, \epsilon) dx + c_{13} p^{\frac{1}{2}}(\epsilon) \quad (3.191)$$

bulunur . (3.188) ve (3.191) den

$$\frac{\sum_{-\lambda_j < -\epsilon} \lambda_j^2}{\frac{1}{15\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} f(x, \epsilon) dx} > 1 + c_{14} e^{-\epsilon^{-\beta}} \quad (3.192)$$

elde edilir . (3.189)'den ve (3.192)'dan $\epsilon \rightarrow 0$ iken

$$\frac{\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j^2}{\frac{1}{15\pi} \int_{q(x) \geq \varepsilon} f(x, \varepsilon) dx} - 1 = O(e^{-\varepsilon^{-\beta}})$$

ya da

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j^2 = (15\pi)^{-1} \left[1 + O\left(e^{-\varepsilon^{-\beta}}\right) \right] \cdot \int_{q(x) \geq \varepsilon} \sqrt{q(x) - \varepsilon} \left[8q^2(x) + 4\varepsilon q(x) + 3\varepsilon^2 \right] \cdot dx$$

asimtotik formülü elde edilir .

3.3 Örnekler

Bu kısımda Teorem 3.2.1'deki 1), 3) koşullarını ve Teorem 3.2.4'deki 1), 2), 4) koşullarını sağlayan $q(x)$ fonksiyonuna örnekler vereceğiz .

1. Önce 1) ve 3) koşullarını sağlayan $q(x)$ fonksiyonuna bir örnek verelim .

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x+1}} \quad ; \quad 0 \leq x < \infty$$

olsun . Bu fonksiyonun 1) koşulunu sağladığı açıktır . $q(x)$ fonksiyonunun

$k_0 = \frac{1}{5}$ değeri için 3) koşulunu sağladığını gösterelim . Her $\eta > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x)x^{\frac{1}{5}-\eta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{5}-\eta}}{\sqrt[5]{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{x^\eta} = 0 \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[q(x)x^{\frac{1}{5}+\eta} \right]^{-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{x+1} \cdot x^{-\frac{1}{5}-\eta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{x^\eta} = 0$$

dır .

2. Bu kez 1) , 2) ve 4) koşullarını sağlayan $q(x)$ fonksiyonuna bir örnek verelim .

$a, a > e^3$ ve

$$\ln x > (\ln \ln x)^2 \quad ; \quad 0 \leq x < \infty \quad (1)$$

koşullarını sağlayan bir sabit olmak üzere

$$q(x) = \begin{cases} \frac{2}{\ln \ln a} - \frac{x}{a \ln \ln a}, & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{\ln \ln x}, & a \leq x < \infty \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun 1) ve 2) koşullarını sağladığı açıktır.

$n = 1$ ve $\xi = 1$ değerleri için 4) koşulunun sağlandığını gösterelim.

$x \in [a, \infty)$ iken

$$\left[q(x) - \frac{1}{\ln x} \right]' = \left(\frac{1}{\ln \ln x} - \frac{1}{\ln x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x}}{(\ln \ln x)^2} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x \ln x} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln \ln x)^2} \right] \quad (2)$$

dir . (1) ve (2) den

$$\left[q(x) - \frac{1}{\ln x} \right]' < 0 \quad ; \quad a \leq x < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla $q(x) - (\ln x)^{-1}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında azalandır. Ayrıca

$a > e^3$ olduğunu göz önüne alarak ve (1) bağıntısından yararlanarak her $x \in [a, \infty)$ için

$$q(x) - \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln \ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln x - \ln \ln x}{\ln x \cdot \ln \ln x} > 0$$

elde edilir . Böylece $n = 1$ ve $\xi = 1$ değerleri için $q(x)$ fonksiyonunun 4) koşulunun da sağlandığını göstermiş olduk .

SONUÇ

Bu tez çalışmasında $L_2[0, \infty)$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) - q(x)y(x)$$

ifadesi ve $y'(0) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan kendine eş L operatörünün negatif özdeğerlerinin karelerinin toplamı için asimtotik formüller bulunmuştur.

Burada $q(x)$ $[0, \infty)$ aralığında sürekli, pozitif değerli ve $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ koşulunu

sağlayan bir fonksiyondur.

KAYNAKLAR

1. Naimork , M . A . “Linear differantial operators” , part I , II , London , 1968
- 2 . Skaçek , B . Y . “Bir boyutlu diferansiyel operatörlerin spektrumunun negatif kısmının asimptodu” , Pribl . metodı reşemiya diffen. uraveniy , Kiev , 1963
3. Adıgüzelov , E . E . , “Operatör katsayılı Sturm- Liouville opertör probleminin negatif kısmının asimtotik davranışı hakkında” ,İzv . AN Az . SSR , Seriya fiz. – tekn.i mat. naok , No:6 , 1980 , 8-12
4. Maksudov , F.G. , Bayramoğlu , M and Adıgüzelov E.E. , “On asymptoties of spectrum and trace high order differantial operator coefficients” , Doğa-Turkish journal of mathematics, vol. 17 , No:2 ,1993
5. Adıgüzelov , E . E . , Oer , Z . “Yarı eksende verilmiş Sturm – Liouville oprtatörünün negatif özdeğerlerinin toplamının asimtotik ifadesi” , Y.T.Ü. Dergisi , 2000/1,26 -35
6. Glazman , I. M. , (1965) , “Direct methods qualitative spectral analysis of singular differantial operators” , Jerusalem , 1965
- 7 . Smirnov , V. I . , A course of Higher Mathematics , vol 5 , New York Pergamon Press , 1694
8. Courant , R and Hilbert , D . “Methods of Mathematical Physics” , vol 1 , New York ,1970

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi : 01 .02 .1972

Doğum Yeri :Karakoçan-Elazığ

Lise :1986-1989 İstanbul Sarıyer Vehbi Koç Vakfı Lisesi

Lisans :1990-1995 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurum

:1996-Devam ediyor M.E.B. İstanbul Ümraniye End. Ve Tek . Meslek
Lisesi Matematik Öğretmenliği