

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİRLEŞİK ANALİZDE
STIRLING SAYILARI VE UYGULAMALARI**

Matematikçi Birol İBİŞ

**F.B.E. Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. E. Mehmet ÖZKAN

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÇİZELGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Bir Kümenin Parçalanışı	1
1.2 Azalan Faktoriyel Fonksiyonu	2
1.3 Artan Faktoriyel Fonksiyonu	3
1.4 Permütasyon	4
2. BİRİNCİ TİP STIRLING SAYILARI	5
2.1 Genelleştirilmiş Birinci Tip Stirling Sayıları	14
3. İKİNCİ TİP STIRLING SAYILARI	18
3.1 Genelleştirilmiş İkinci Tip Stirling Sayıları	28
4. p-STIRLING SAYILARI	31
4.1 Birinci Tip p-Stirling Sayıları	31
4.2 İkinci Tip p-Stirling Sayıları	37
KAYNAKLAR	43
EKLER	44
Ek1 Teorem 2.3'e göre Birinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB Programı	44
Ek2 Teorem 2.1.4'e göre Birinci Tip Stirling Sayıları Hesaplayan MATLAB Programı	45
Ek3 Teorem 2.1.5'e göre Birinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB Programı ..	46
Ek4 Teorem 3.10'a göre İkinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB Programı	47
Ek5 Teorem 3.1.1'e göre İkinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB programı	48
Ek6 Teorem 3.1.1'e göre İkinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB programı	49
Ek7 Teorem 4.1.5'e göre Birinci Tip p-Stirling Sayıları Hesaplayan MATLAB programı ..	50
Ek8 Teorem 4.2.5'e göre İkinci Tip p-Stirling Sayıları Hesaplayan MATLAB programı	51
ÖZGEÇMİŞ	52

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1 Tanım 2.1' e göre birinci tip stirling sayıları	7
Çizelge 2.2 Tanım 2.8' e göre birinci tip stirling sayıları	12
Çizelge 2.3 Tanım 2.8' e göre genelleştirilmiş birinci tip stirling sayıları	17
Çizelge 3.1 İkinci tip stirling sayıları	21
Çizelge 4.1 $p = 1$ için birinci tip p-stirling sayıları	34
Çizelge 4.2 $p = 2$ için birinci tip p-stirling sayıları	35
Çizelge 4.3 $p = 3$ için birinci tip p-stirling sayıları	35
Çizelge 4.4 $p = 1$ için ikinci tip p-stirling sayıları	40
Çizelge 4.5 $p = 2$ için ikinci tip p-stirling sayıları	40
Çizelge 4.6 $p = 3$ için ikinci tip p-stirling sayıları	41

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Stirling Sayılarını inceliyoruz. Stirling Sayıları ilk olarak 1730’ da ünlü Matematikçi James Stirling tarafından tanımlanmıştır.Daha sonraki yıllarda matematiğin diğer dallarında ve mühendislik uygulamalarında bu sayılar üzerinde çalışılmıştır.Biz bu çalışmada Stirling Sayılarını ve bu sayıların bazı özelliklerini ele alacağız. Uygulama kısmında ise MATLAB programı yardımıyla Stirling Sayılarını hesaplayan programlar geliştireceğiz.Bu çalışmam sırasında bana yol gösteren, tez çalışmamı yöneten,Yrd.Doç.Dr. E. Mehmet ÖZKAN’ a; tezin yazım aşamasında yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Arş.Gör.Ebru YENİ’ ye yardımlarından ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca benim bugünlere gelmemde desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman maddi ve manevi olarak benim yanımda olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, Stirling Sayıları ve bu sayıların sahip oldukları özellikler üzerinde çalışılmıştır. Birinci bölümde ileriiki bölümlere temel teşkil eden bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, Birinci Tip Stirling Sayıları tanımlanıp, bu sayıların sahip oldukları özellikler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, İkinci Tip Stirling Sayıları tanımlanıp bu sayıların sahip oldukları özellikler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Birinci ve İkinci Tip p-Stirling Sayıları tanımlanıp bu sayıların sahip oldukları özellikler incelenmiştir.

Son olarak incelemiş olduğumuz Stirling Sayılarını hesaplayan MATLAB programları geliştirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Birinci ve İkinci Tip Stirling Sayıları, p-Stirling Sayıları, Artan Faktoriyel Fonksiyonu, Azalan Faktoriyel Fonksiyonu.

ABSTRACT

In this study, Stirling Numbers and the properties of these numbers were studied. The first chapter involves knowledge that will form a basis for the next parts.

In the second chapter, Stirling numbers of the first kind were defined and their properties were discussed.

In the third chapter, Stirling numbers of the second kind were defined and their properties were discussed.

In the fourth chapter, p-Stirling numbers of the first and second kinds were defined and their properties were discussed.

Finally, MATLAB programs that calculate the studied Stirling numbers, were developed.

Keywords: Stirling numbers of the first and second kinds, p-Stirling Numbers of the first and second kinds, Rising Factorial, Falling Factorial.

1. GİRİŞ

Bu çalışmamızda 1730 yılında James Stirling tarafından tanımlanan Stirling Sayıları ve bu sayıların özellikleri incelenmiştir. Giriş bölümünde Stirling Sayılarına temel teşkil edecek tanımlar, özellikler ve teoremlere yer verilmiştir. Bu çalışma sırasında incelenen kaynaklarda Stirling Sayıları için notasyon farklılıkları olduğu görülmüştür. Birinci Tip Stirling Sayıları

için, $s(n, k)$, $S_1(n, k)$, s_k^n ve $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$; İkinci Tip Stirling Sayıları için ise, $S(n, k)$, $S_2(n, k)$, S_k^n

ve $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ notasyonları kullanılmıştır. Bu çalışmada ise Birinci Tip Stirling Sayıları için $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$,

İkinci Tip Stirling Sayıları için de $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ notasyonları tercih edilmiştir.

1.1. Bir Kümenin Parçalanışı (Bölüntüsü)

Tanım 1.1.1. (Karakaş, 1998) I indeks kümesi olmak üzere A kümesinin boş olmayan altkümelerinin bir ailesi $\langle A \rangle = \{A_i \mid i \in I, I \neq \emptyset\}$ olsun. $\langle A \rangle$ kümesi için

$$i) A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

$$ii) A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

şartları sağlanıyorsa $\langle A \rangle$ kümesine A 'nın bir parçalanışı (bölüntüsü) denir.

Tanım 1.1.2. (Karakaş, 1998) A bir küme ve $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer,

$$i) \forall x \in A \text{ için } (x, x) \in \beta \text{ (yansıma özelliği)}$$

$$ii) (x, y) \in \beta \Rightarrow (y, x) \in \beta \text{ (simetri özelliği)}$$

$$iii) (x, y) \in \beta, (y, z) \in \beta \Rightarrow (x, z) \in \beta \text{ (geçişme özelliği)}$$

sağlanıyorsa, β 'ya A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Tanım 1.1.3. (Karakaş, 1998) β , A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $x \in A$ için

$$[x]_\beta = \{y \in A : y\beta x\}$$

kümesine A 'nın β bağıntısına göre bir denklik sınıfı ve x elemanına

da denklik sınıfının bir temsilcisi denir. A 'nın β bağıntısına göre denklik sınıflarından oluşan küme A/β ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 1.1.4. (Karakaş, 1998) β, A kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı ve $x, z \in A$ olsun. Bu takdirde,

i) $x \in [x]_\beta$

ii) $x\beta z \Leftrightarrow [x]_\beta = [z]_\beta$

Teorem 1.1.5. (Karakaş, 1998) β, A kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı ise A içinde iki denklik sınıfı ya ayrık yada özdeşirler.

Sonuç 1.1.6. (Karakaş, 1998) β, A kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı ise,

i) $\bigcup_{x \in A} [x]_\beta = A$

ii) $\forall x, z \in A$ için ya $[x]_\beta = [z]_\beta$ yada $[x]_\beta \cap [z]_\beta = \emptyset$ dır.

Bu sonuç, A kümesi üzerindeki bir denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının A 'nın bir parçalanışını oluşturduklarını ifade eder.

Sonuç 1.1.7. (Karakaş, 1998) $\langle A \rangle = \{A_i : i \in I\}$, A kümesinin bir parçalanışdır ancak ve ancak A kümesi üzerinde tanımlı bir β denklik bağıntısı için $\langle A \rangle$ kümesinin elemanları denklik sınıfıdır.

1.2. Azalan Faktoriyel Fonksiyonu

Tanım 1.2.1. (Mond ve Kramer, 2004) $x \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$$(x)^n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) & ; n > 0 \\ 1 & ; n = 0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlanan $(x)^n$ fonksiyonuna “ Azalan Faktoriyel Fonksiyonu ” denir. Azalan faktoriyel fonksiyonu negatif tamsayılar için şu şekilde tanımlanır, $n \in Z^+$ olmak üzere

$$(x)^{-n} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (1.2.2)$$

Özellik 1.2.2. (Mond ve Kramer, 2004) $n \in N$ olmak üzere Azalan Faktoriyel Fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{i) } (x)^{\overline{n+1}} = (x-n) \cdot (x)^{\overline{n}} \quad (1.2.3)$$

$$\text{ii) } (x+1)^{\overline{n}} - (x)^{\overline{n}} = n \cdot (x)^{\overline{n-1}} \quad (1.2.4)$$

$$\text{iii) } (x)^{\overline{n}} = \frac{x!}{(x-n)!} \quad (1.2.5)$$

$$\text{iv) } (n)^{\overline{n}} = n! \quad (1.2.6)$$

1.3. Artan Faktoriyel Fonksiyonu

Tanım 1.3.1. (Mond ve Kramer, 2004) $x \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$$(x)^{\overline{n}} = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) & ; n > 0 \\ 1 & ; n = 0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

şeklinde tanımlanan $(x)^{\overline{n}}$ fonksiyonuna “ Artan Faktoriyel Fonksiyonu ” denir. Artan faktoriyel fonksiyonu negatif tamsayıları için şu şekilde tanımlanır, $n \in Z^+$ olmak üzere

$$(x)^{\overline{-n}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} \quad (1.3.2)$$

Özellik 1.3.2. (Mond ve Kramer, 2004) $n \in N$ olmak üzere Artan Faktoriyel Fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{i) } (x)^{\overline{n+1}} = (x+n) \cdot (x)^{\overline{n}} \quad (1.3.3)$$

$$\text{ii) } (x)^{\overline{n}} - (x-1)^{\overline{n}} = n \cdot (x)^{\overline{n-1}} \quad (1.3.4)$$

$$\text{iii) } (x)^{\bar{n}} = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!} = \binom{x+n-1}{n} \cdot n! \quad (1.3.5)$$

1.4. Permütasyon

Tanım 1.4.1. (Karakaş, 1998) A boştan farklı bir küme olsun. Eğer bir $f: A \rightarrow A$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise f fonksiyonuna A kümesi üzerinde bir “Permütasyon” denir. A kümesi üzerindeki tüm permütasyonlardan oluşan küme $S(A)$ ile gösterilir. Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe A kümesi $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ olarak alınacaktır.

Teorem 1.4.2. (Karakaş, 1998) $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bütün permütasyonların sayısı $|S(A)| = n!$

Tanım 1.4.3. (Karakaş, 1998) $\alpha \in S(A)$ permütasyonu A kümesinin $i_1, i_2, \dots, i_r$ gibi birtakım elemanlarını ardı ardına değiştirip geri kalan elemanlarını sabit bırakıyorsa, yani,

$$\alpha(i_1) = i_2, \quad \alpha(i_2) = i_3, \quad \dots, \quad \alpha(i_{r-1}) = i_r, \quad \alpha(i_r) = i_1$$

ve her $j \in A - \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ için $\alpha(j) = j$ ise α ya bir devir (çevrim) denir. Bu tanımdaki bir devir $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ ile gösterilir. Bununla beraber,

$$\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_r) = (i_2, i_3, \dots, i_r, i_1) = \dots = (i_r, i_1, \dots, i_{r-1})$$

yazılabileceği açıktır.

Tanım 1.4.4. (Karakaş, 1998) $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $\delta = (j_1, j_2, \dots, j_s)$ iki devir olmak üzere eğer, $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_s\} = \emptyset$ şartı sağlanıyorsa bu iki devire “Ayrık Devirler” denir.

Teorem 1.4.5. (Karakaş, 1998) Her permütasyon ya bir devirdir yada sonlu sayıda ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabilir.

2. BİRİNCİ TİP STİRLİNG SAYILARI

Tanım 2.1. n, k negatif olmayan tamsayılar ve $k < n$ olmak üzere, n elemanlı bir küme üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısına “Birinci Tip Stirling Sayıları” denir ve $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ şeklinde gösterilir.

Bu çalışmada n elemanlı küme olarak $A = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ kümesi alınacaktır.

Örnek 2.2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı 2 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonlar,

$$\alpha_1 = (12)(34), \alpha_2 = (13)(24), \alpha_3 = (14)(23), \alpha_4 = (1)(234), \alpha_5 = (1)(324), \alpha_6 = (2)(134), \\ \alpha_7 = (2)(314), \alpha_8 = (3)(124), \alpha_9 = (3)(214), \alpha_{10} = (4)(123), \alpha_{11} = (4)(213)$$

şeklindedir.

Böylece 4 elemanlı A kümesi üzerinde tanımlı 2 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısı, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$ olur.

Özellik 2.3. n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere Birinci Tip Stirling Sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{i) } \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{n0} \quad (2.1)$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0, (k > n) \quad (2.2)$$

$$\text{iii) } \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \quad (2.3)$$

$$\text{iv) } \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \quad (2.4)$$

Teorem 2.4. (Mond ve Krammer, 2004) n, k pozitif tamsayılar olmak üzere Birinci Tip Stirling Sayıları için aşağıdaki rekürans bağıntısı sağlanır.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

İspat. $A = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ n -elemanlı kümesi üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonlar iki aşamada elde edilir. İlk olarak, $A^* = A - \{n\}$ (n elemanı yerine A kümesinin herhangi bir elemanı da alınabilir) elemanlı kümesi üzerinde tanımlı $k-1$ tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonlar $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$ ayrık devirler olmak üzere) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{k-1}$ şeklindedir ve bu permütasyonların sayısı $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ dir.

$\alpha_k = (n)$ deviri bu permütasyonların her birine çarpım olarak ilave edilirse A kümesi üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{k-1} \cdot \alpha_k$ şeklindeki permütasyonların $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ tanesi elde edilmiş olur. İkinci olarak da A^* kümesi üzerinde tanımlı $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ ayrık devirler olmak üzere) k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonlar $\delta_1 \cdot \delta_2 \cdots \delta_k$ şeklindedir. Bu şekilde $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ tane permütasyon vardır. ‘ n ’ elemanı, sırasıyla $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ devirlerinin her birinin içine eleman olarak yerleştirilirse (bu yerleştirme işlemi $n-1$ farklı şekilde yapılabilir) A kümesi üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların $(n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ tanesi elde edilmiş olur. Her iki aşamada elde edilen permütasyonlar A kümesi üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonlardır. Böylece (2.5) eşitliği sağlanmış olur.

Teorem 2.5. (Mond ve Krammer, 2004) n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n! \quad (2.6)$$

İspat. Teorem 1.4.2 den $\{A = 1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesi üzerinde tanımlı tüm permütasyonların sayısı $n!$ dir. Teorem 1.4.5’ den her permütasyon sonlu sayıda ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabileceğinden (2.6) eşitliği sağlanmış olacaktır.

Çizelge 2.1 Tanım 2.1'e göre birinci tip stirling sayıları

n	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 8 \end{bmatrix}$	$\sum_{k=1}^8 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1!
2	1	1	0	0	0	0	0	0	2!
3	2	3	1	0	0	0	0	0	3!
4	6	11	6	1	0	0	0	0	4!
5	24	50	35	10	1	0	0	0	5!
6	120	274	225	85	15	1	0	0	6!
7	720	1764	1624	735	175	21	1	0	7!
8	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	8!

Teorem 2.6. (Mond ve Krammer, 2004) $x \in R$ ve $n \geq 2$ tamsayı olmak üzere

$$(x)^{\bar{n}} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot x^k \quad (2.7)$$

İspat. Tümevarım yönteminden,

$n = 2$ değeri için (2.7) eşitliği doğrudur.

$n - 1$ tamsayı değeri için (2.7) eşitliği doğru olsun.

n tamsayı değeri için (2.7) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

Özellik 1.11 (i) ve (2.5) den

$$\begin{aligned}
 (x)^{\bar{n}} &= (x)^{\overline{n-1}} \cdot (x + n - 1) \\
 &= (x + n - 1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \cdot x^k \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \cdot (n-1) \cdot x^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \cdot x^k + \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \cdot (n-1) \cdot x^k \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right\} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot x^k
\end{aligned}$$

Teorem 2.7. (Merris, 2000) $n \geq k > 0$ tamsayıları olmak üzere Birinci Tip Stirling Sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot x^n = \frac{[-\ln(1-x)]^k}{k!} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-x} \right)^z &= e^{z[-\ln(1-x)]} \\
&= 1 + z \cdot [-\ln(1-x)] + \frac{1}{2!} \cdot z^2 \cdot [-\ln(1-x)]^2 + \frac{1}{3!} \cdot z^3 \cdot [-\ln(1-x)]^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [-\ln(1-x)]^n \cdot z^n
\end{aligned} \quad (2.9)$$

(1.3.5) ve (2.7) den

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-x} \right)^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} z+n-1 \\ n \end{pmatrix} \cdot x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)^{\bar{n}}}{n!} \cdot x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot \left(\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot z^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot \frac{x^n}{n!}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

(2.9) ve (2.10) dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [-\ln(1-x)]^k \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot \frac{x^n}{n!} \tag{2.11}$$

eşitliği elde edilir. (2.11) açıldığında z^k 'lı terimlerin katsayıları eşitlenince (2.8) eşitliği sağlanmış olur.

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında Birinci Tip Stirling Sayıları için yapılan bir diğer tanım ve bu tanımdan yola çıkılarak elde edilen özellikler, teoremler ve sonuçlar incelenecektir.

Tanım 2.8. n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $(x)^n$, Azalan Faktoriyel Fonksiyonunun açılımındaki x^k lı terimlerin katsayılarına “Birinci Tip Stirling Sayıları” denir.

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ Birinci Tip Stirling Sayılarını göstermek üzere Tanım 2.8’ in matematiksel gösterimi ,

$$(x)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \tag{2.12}$$

şeklinde olacaktır.

Özellik 2.9. $k, n \in N$ olmak üzere Birinci Tip Stirling Sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{i) } \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \delta_{0,k} \text{ , } (\delta \text{ Kroniker Deltası}) \tag{2.13}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0, (k > n) \quad (2.14)$$

$$\text{iii)} \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \quad (2.15)$$

$$\text{iv)} \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad (2.16)$$

$$\text{v)} \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = -\binom{n}{2}, (n \geq 2) \quad (2.17)$$

İspat. i) (2.12)' de $n = 0$ için ispat açıktır.

ii) Tanım 2.8' den ispat açıktır.

iii) (2.12) deki eşitlik açılırsa,

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}x^2 + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}x^n \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.18)' den x^n li terimin katsayısı 1'e eşit olacaktır.

iv) $(x)^n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ açılımının sağ tarafındaki $(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ çarpanın sabit terimi $(-1)(-2)\cdots(-n+1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ 'dir. Dolayısıyla azalan faktoriyel fonksiyonunda x 'li terimin katsayısı bu sabit terim olacaktır. Buradan (2.16) eşitliği sağlanır.

v) Tümevarım yönteminden,

$n = 2$ değeri için (2.17) eşitliği sağlanır.

$n-1$ tamsayı değeri için (2.17) doğru olsun. Yani,

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} = -\binom{n-1}{2} \quad (2.19)$$

n tamsayı değeri için (2.17) eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. (1.2.3)' den

$$(x)^n = (x-n+1) \cdot (x)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[x^{n-1} - \binom{n-1}{2} \cdot x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot x \right] \cdot (x-n+1) \\
&= x^n + (n-1) \cdot x^{n-1} - \binom{n-1}{2} \cdot x^{n-1} - (-n+1) \cdot \binom{n-1}{2} \cdot x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x \cdot (n-1)!
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (2.12)'de yerine yazılırsa x^{n-1} teriminin katsayısı

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = (-n+1) - \binom{n-1}{2} = -\frac{n^2-n}{2} \text{ olur. } n \text{ tamsayı değeri için (2.17) eşitliği sağlanır.}$$

Teorem 2.10. (Michaels ve Rosen, 1991) $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere Birinci Tip Stirling Sayıları için aşağıdaki rekürans bağıntısı sağlanır.

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] - n \cdot \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \quad (2.20)$$

İspat. (2.12) ve (1.2.3) den,

$$(x)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] \cdot x^k$$

$$(x-n) \cdot (x)^n = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] \cdot x^k$$

$$(x-n) \cdot \sum_{k=1}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \cdot x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] \cdot x^k$$

$$\sum_{k=1}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \cdot x^{k+1} - \sum_{k=1}^n n \cdot \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \cdot x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] \cdot x^k$$

ifadesinde toplamalar açılır ve x^k lı terimlerin katsayıları eşitlenirse (2.20) eşitliği elde edilir.

Teorem 2.11. (Michaels ve Rosen, 1991) $n \geq 1, x$ bir tamsayı ve $x < n$ için

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = 0 \quad (2.21)$$

İspat: Tümevarım yönteminden,

$n = 1$ değeri için (2.21) eşitliği doğrudur.

n tamsayı değeri için (2.21) eşitliği doğru olsun.

$n + 1$ tamsayı değeri için (2.21) eşitliğinin sağlandığını gösterelim. (2.20) den,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} - n \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \right\} - n \cdot \left\{ \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} - n \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = 0 - n \cdot 0 - n \cdot 0 = 0$$

Çizelge 2.2. Tanım 2.8' e göre birinci tip stirling sayıları

n	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 8 \end{bmatrix}$	$\sum_{k=1}^8 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	2	-3	1	0	0	0	0	0	0
4	-6	11	-6	1	0	0	0	0	0
5	24	-50	35	-10	1	0	0	0	0
6	-120	274	-225	85	-15	1	0	0	0
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	0	0
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	0

Teorem 2.12. n, k pozitif tamsayılar olmak üzere, [2]

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=k}^n n^{j-k} \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ j+1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

İspat: (2.20) deki rekürans bağıntısından,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} + n \cdot \left\{ \begin{bmatrix} n+1 \\ k+2 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ k+2 \end{bmatrix} + n^2 \cdot \begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ k+2 \end{bmatrix} + n^2 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} n+1 \\ k+3 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k+3 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ k+2 \end{bmatrix} + n^2 \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ k+3 \end{bmatrix} + n^3 \cdot \begin{bmatrix} n \\ k+3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

benzer şekilde (2.20) deki rekürans bağıntısı $n - k + 1$ defa uygulanırsa ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ k+2 \end{bmatrix} + n^2 \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ k+3 \end{bmatrix} + n^3 \cdot \begin{bmatrix} n \\ k+4 \end{bmatrix} + \cdots + n^{n-k} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+(n-k+1) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=k}^n n^{j-k} \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ j+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Buradan (2.22) eşitliği sağlanmış olur.

2.1. Genelleştirilmiş Birinci Tip Stirling Sayıları

Tanım 2.8 de Birinci Tip Stirling Sayılarını n, k negatif olmayan tamsayıları için tanımlandı. Bu bölümde ise herhangi n, k tamsayıları için birinci tip stirling sayılarının tanımını genişletmeye çalışacağız.

Teorem 2.1.1. (*Scurr ve Olive, 1998*) $k \geq 1, n \geq 0$ tamsayıları için,

$$\begin{bmatrix} n \\ -k \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.1)$$

İspat: $n \geq 0$ ve $k \geq 1$ tamsayı değerleri için (2.12) eşitliği

$$(x)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ -k \end{bmatrix} \cdot x^{-k} \text{ şeklinde olacaktır. } n \geq 0 \text{ tamsayı değeri için Azalan Faktoriyel}$$

Fonksiyonunun açılımında x^{-k} lı terim bulunmayacağından bu terimlerin katsayıları sıfır olacaktır. Buda (2.1.1) eşitliğini verir.

Teorem 2.1.1 yardımıyla $n \geq 0, k < 0$ tamsayı değerleri için birinci tip stirling sayılarını tanımlamış olduk. Bundan sonraki kısımda verilecek olan tanım ve teoremler yardımıyla herhangi k ve $n \leq -1$ tamsayı değerleri için birinci tip stirling sayılarını tanımlamaya çalışacağız.

Azalan Faktoriyel Fonksiyonunu negatif tamsayılar için $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere ,

$$(x)^{-n} = \prod_{j=1}^n (x + j)^{-1} \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlamıştık. (2.1.2) eşitliğini,

$$(x)^{-n} = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1} = x^{-n} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{j}{x}\right)^{-1} \quad (2.1.3)$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Ayrıca,

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j u^j, \quad |u| < 1 \quad (2.1.4)$$

Tanım 2.1.2. (*Scurr ve Olive, 1998*) $n \geq 1$ olmak üzere,

$$\text{a) } (x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} \cdot x^k, \quad |x| < 1 \quad (2.1.5)$$

$$\text{b) } (x)^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} \cdot x^{-k}, \quad |x| > n \quad (2.1.6)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.3. (*Scurr ve Olive, 1998*) $n \geq 1, n > k \geq 0$ tamsayı değerleri için

$$\begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.7)$$

İspat. (2.1.6) ve (2.1.3) den

$$|x| > n \Rightarrow \left| \frac{n}{x} \right| < 1 \text{ için}$$

$$(x)^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} \cdot x^{-k} = x^{-n} \cdot \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{j}{x} \right)^{-1}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} \cdot x^{-k} = x^{-n} \cdot \prod_{j=1}^n \sum_{k_j=0}^{\infty} (-j)^{k_j} \cdot (x)^{-k_j}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} \cdot x^{-k} = x^{-n} \cdot \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1} \cdot (x)^{-k_1} \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} (-2)^{k_2} \cdot (x)^{-k_2} \cdot \dots \cdot \sum_{k_n=0}^{\infty} (-n)^{k_n} \cdot (x)^{-k_n}$$

eşitliğin sağ tarafı $0 \leq k < n$ değerleri için x^{-k} lı terim bulundurmayacaktır. Buradan $0 \leq k < n$ tamsayı değerleri için x^{-k} lı terimlerin katsayıları sıfırdır. Böylece (2.1.7) eşitliği sağlanmış olur.

Teorem 2.1.4. (*Scurr ve Olive, 1998*) $n \geq 1$ ve $k \geq 0$ tamsayıları için

$$\begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(-1)^k}{n!} \sum_{*} \left(\prod_{j=1}^n j^{-k_j} \right), \quad (* \quad k_j \geq 0, \sum_{j=1}^n k_j = k) \quad (2.1.8)$$

İspat: Tanım 2.1.2 (a) , (2.1.3) ve (2.1.4) den

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} \cdot x^k &= \frac{1}{n!} \prod_{l=1}^n (x+l)^{-1} \\
 &= \frac{1}{n!} \cdot \prod_{l=1}^n \left(\sum_{k_l=0}^{\infty} (-1)^{k_l} \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^{k_l} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!} \cdot \left(\sum_{*} x^k \cdot \prod_{l=1}^n l^{-k_l} \right) , \quad (* k_l \geq 0 , \sum_{l=1}^n k_l = k)
 \end{aligned}$$

(2.1.8) eşitliği $|x| < 1$ şartına bağlı olarak yazılabilir. O halde $k \geq 0$, $n \geq 1$ tamsayıları için

$\begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}$ birinci tip stirling sayılarını Teorem 2.1.4 yardımıyla tanımlamış olduk.

Teorem 2.1.5. (*Scurr ve Olive, 1998*) $k \geq n \geq 1$ tamsayıları için,

$$\begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = (-1)^{k-n} \sum_{*} \left(\prod_{l=1}^n l^{k_l} \right) , \quad (* k_l \geq 0 , \sum_{l=1}^n k_l = k - n) \quad (2.1.9)$$

İspat: Tanım 2.1.2 (b) , (2.1.3) ve (2.1.4) den

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} \cdot x^{-k} &= x^{-n} \cdot \prod_{l=1}^n \left(1 + \frac{l}{x} \right)^{-1} \\
 &= x^{-n} \cdot \prod_{l=1}^n \left(\sum_{k_l=0}^{\infty} (-1)^{k_l} \cdot \left(\frac{l}{x} \right)^{k_l} \right) \\
 &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(x^{-k} \cdot (-1)^{k-n} \cdot \sum_{*} \left(\prod_{l=1}^n l^{k_l} \right) \right)
 \end{aligned}$$

(2.1.9) eşitliği $|x| > n \geq 1$ şartına bağlı olarak yazılabilir. Böylece $k \geq n \geq 1$ tamsayı

değerleri için $\begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix}$ birinci tip stirling sayılarını Teorem 2.1.5 yardımıyla tanımlamış olduk.

Çizelge 2.3. Tanım 2.8'e göre genelleştirilmiş birinci tip stirling sayıları

n	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ -4 \end{bmatrix}$
4	1	-6	11	-6	0	0	0	0	0
3	0	1	-3	2	0	0	0	0	0
2	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
-2	0,9688	-0,9375	0,8750	-0,7500	0,5000	0	1	-3	7
-3	0,4708	-0,4437	0,3935	-0,3056	0,1667	0	0	1	-6
-4	0,1529	-0,1409	0,1201	-0,0868	0,0470	0	0	0	1

3. İKİNCİ TİP STİRLİNG SAYILARI

Tanım 3.1. n ve k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, n elemanlı bir kümenin k elemanlı parçalanışlarının sayısına “İkinci Tip Stirling Sayıları” denir ve $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dört elemanlı kümesinin iki elemanlı parçalanışları,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{ \{1\}, \{2, 3, 4\} \}, & Q_2 &= \{ \{2\}, \{1, 3, 4\} \}, & Q_3 &= \{ \{3\}, \{1, 2, 4\} \}, & Q_4 &= \{ \{4\}, \{1, 2, 3\} \}, \\ Q_5 &= \{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}, & Q_6 &= \{ \{2, 3\}, \{1, 4\} \}, & Q_7 &= \{ \{1, 3\}, \{2, 4\} \} \end{aligned}$$

kümeleridir. Buradan A kümesinin iki elemanlı parçalanışlarının sayısı $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$ dir.

Özellik 3.3. İkinci Tip Stirling Sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{i) } \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{n,0}, \quad (n \geq 0) \quad (3.1)$$

$$\text{ii) } \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1, \quad (n \geq 1) \quad (3.2)$$

$$\text{iii) } \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad (k > n) \quad (3.3)$$

$$\text{iv) } \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad (n > 0) \quad (3.4)$$

$$\text{v) } \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}, \quad (n > 0) \quad (3.5)$$

İspat. (i) , (ii) ve (iii) ün ispatı Tanım 3.1’ den açıktır.

iv) $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ kümesinin iki elemanlı parçalanışı,

$P(A) = \{A_1, A_2 : A_1, A_2 \neq \emptyset, A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cup A_2 = A\}$ şeklinde olacaktır.

$A_1 = \{a_n\}$ olarak tanımlayalım. $A - \{a_n\}$, $n-1$ elemanlı kümesinin 2^{n-1} tane altkümesi vardır. A_2 altkümesini bu 2^{n-1} tane altküme arasından seçelim. $A_2 \neq \emptyset$ olduğundan A_2 kümesi için $2^{n-1} - 1$ ihtimal vardır. O halde A kümesinin iki elemanlı parçalanışlarının sayısı $2^{n-1} - 1$ olur.

v) $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ kümesinin $n-1$ elemanlı parçalanışı,

$$P(A) = \left\{ A_1, A_2, \dots, A_{n-1} : A_i \neq \emptyset \ (i = 1, 2, \dots, n-1), \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i = \emptyset, \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = A \right\} \text{ şeklindedir.}$$

$\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i = \emptyset$ ve $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = A$ olduğundan A_i altkümelerinden bir tanesinde mutlaka iki eleman

olmak zorundadır. Bu iki eleman n eleman arasından $\binom{n}{2}$ farklı şekilde seçilebilir. Bu iki

elemanı A_1 altkümesine, geri kalan $n-2$ tane elemanın her birini A_i ($i = 2, 3, \dots, n-1$)

altkümelerine bu altkümeler tek elemanlı olacak şekilde dağıtılsa A kümesinin $P(A)$

parçalanışı elde edilir. Bu şekilde elde edilen parçalanışların sayısı $\binom{n}{2}$ olacaktır. Böylece

n elemanlı A kümesinin $n-1$ elemanlı parçalanışlarının sayısı $\binom{n}{2}$ olur.

Teorem 3.4. (Mond ve Krammer, 2004) $n \in N$ ve $k \in N^+$ olmak üzere ikinci tip stirling sayıları için aşağıdaki rekürans bağıntısı sağlanır.

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \quad (3.6)$$

İspat. $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}\}$, $n+1$ elemanlı kümesinin k elemanlı parçalanışı,

$$P_t = \left\{ A_1, A_2, A_3, \dots, A_k : (i = 1, 2, \dots, k) \ \emptyset \neq A_i \subseteq A, A_i \bigcap_{i \neq j} A_j = \emptyset, \bigcup_{i=1}^k A_i = A \right\}$$

şeklindedir. Bu şekilde A kümesi $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}$ tane parçalanışa sahiptir. $a_m \in A$ olsun ve

$A^* = A - \{a_m\}$ olarak tanımlansın.

$$P_\lambda = \left\{ B_1, B_2, \dots, B_{k-1} : (i = 1, 2, \dots, k-1) \ \phi \neq B_i \subseteq A^*, \ B_i \cap_{i \neq j} B_j = \phi, \ \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i = A^* \right\},$$

kümesi A^* kümesinin $k-1$ elemanlı parçalanışıdır. Bu şekilde A^* kümesinin $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ tane parçalanışı vardır.

İlk olarak her $i \in I = \{1, 2, \dots, k-1\}$ için $a_m \notin B_i, \{a_m\} \cap B_i = \phi$ ve $\{a_m\} \bigcup_{i=1}^k B_i = A$ olduğundan

$\{a_m\}$ altkümesi $P_\lambda \left(\lambda = 1, 2, 3, \dots, \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \right)$ parçalanışlarının her birine eleman olarak ilave edilirse A kümesinin parçalanışlarından $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ tanesi elde edilir.

İkinci olarak ,

$$P_\mu = \left\{ B_1, B_2, \dots, B_k : (i = 1, 2, \dots, k) \ \phi \neq B_i \subseteq_{i \in I} A^*, \ B_i \cap_{i \neq j} B_j = \phi, \ \bigcup_{i=1}^k B_i = A^* \right\},$$

kümesi A^* kümesinin k elemanlı parçalanışıdır. Bu şekilde A^* kümesinin $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ parçalanışı vardır. Her $i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ için $a_m \notin B_i$ dir. Eğer a_m elemanı sırasıyla B_i altkümelerinin her birine eleman olarak yerleştirilirse (ki bu yerleştirme işlemi her bir parçalanış için k farklı şekilde yapılabilir) A kümesinin $k \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ tane parçalanışı elde edilir. Her iki aşamada elde edilen parçalanışlar A kümesinin k elemanlı parçalanışlarıdır. Buda (3.6) eşitliğini verir.

Örnek 3.5. Teorem 3.4' ün ispatını $N = \{a, b, c, d\}$ kümesi için uygulayalım.

N kümesinin üç elemanlı parçalanışları,

$$P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}, \ P_2 = \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}, \ P_3 = \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$$

$$P_4 = \{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\}, \ P_5 = \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\}, \ P_6 = \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}$$

kümeleridir. Buradan N kümesinin üç elemanlı parçalanışlarının sayısı $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 6$ dır.

$N^* = N - \{a\} = \{b, c, d\}$ olarak tanımlayalım. İlk olarak N^* kümesinin iki elemanlı parçalanışlarını elde edelim. Bu parçalanışlar;

$$P_1^* = \{\{b\}, \{c, d\}\}, P_2^* = \{\{c\}, \{b, d\}\}, P_3^* = \{\{d\}, \{b, c\}\}$$

kümeleridir. N^* kümesinin bu parçalanışlarına $\{a\}$ altkümesini ilave edersek;

$$P_1^* \cup \{a\} = P_1, P_2^* \cup \{a\} = P_2, P_3^* \cup \{a\} = P_3$$

N kümesinin üç elemanlı parçalanışlarından P_1, P_2 ve P_3 kümelerini elde ederiz.

İkinci olarak, N^* kümesinin üç elemanlı parçalanışlarını elde edelim. N^* kümesinin bu şekilde tek parçalanışı vardır. Bu parçalanış $Q = \{\{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ kümesidir. Bu kümenin elemanları olan $\{b\}, \{c\}, \{d\}$ altkümelerin her birine 'a' elemanını ilave edersek;

$$Q_1 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\} = P_6, Q_2 = \{\{b\}, \{a, c\}, \{d\}\} = P_5, Q_3 = \{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\} = P_4$$

N kümesinin üç elemanlı parçalanışlarından P_4, P_5 ve P_6 kümelerini elde ederiz. Böylece N kümesinin üç elemanlı parçalanışlarını iki adımda elde etmiş olduk. Böylece $n = 4$ ve $k = 3$ tamsayı değerleri için (3.6) daki rekürans bağıntısı sağlanmış olur.

Çizelge 3.1. İkinci tip stirling sayıları

n	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 6 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 7 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 8 \end{matrix} \right\}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Teorem 3.6. (Saxl, 1995) n ve k pozitif tamsayılar olmak üzere

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot (x)^{\underline{k}} \quad (3.7)$$

İspat. Tümevarım yönteminden,

$n = 1$ değeri için (3.7) eşitliği sağlanır.

n tamsayı değeri için (3.7) eşitliği doğru olsun.

$n + 1$ tamsayı değeri için (3.7) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x \cdot \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot (x)^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^n (x)^{\underline{k}} \cdot x \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n (x)^{\underline{k}} \cdot (x - k + k) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[(x)^{\underline{k}} \cdot (x - k) + k \cdot (x)^{\underline{k}} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[(x)^{\underline{k+1}} + k \cdot (x)^{\underline{k}} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n (x)^{\underline{k+1}} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} + \sum_{k=1}^n k \cdot (x)^{\underline{k}} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \\ &= \left[\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \cdot (x)^{\underline{1}} + \left[\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \cdot (x)^{\underline{2}} + \cdots + \left[\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} + (n+1) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix} \right\} \right] \cdot (x)^{\underline{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \cdot \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \right] \cdot (x)^{\bar{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix} \cdot (x)^{\bar{k}}
\end{aligned}$$

Buradan $n+1$ tamsayı değeri için (3.7) eşitliği sağlanmış olur.

Teorem 3.7. (*Mond ve Krammer, 2004*) $x \in R$ ve $n \in Z$ olmak üzere,

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \cdot (x)^{\bar{k}} \quad (3.8)$$

İspat. Tümevarım yönteminden,

$n = 0$ değeri için (3.8) eşitliği doğrudur.

$n-1$ tamsayı değeri için (3.8) eşitliği sağlansın.

n tamsayı değeri için (3.8) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
x^n &= x \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \cdot (x)^{\bar{k}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \cdot x \cdot (x)^{\bar{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \cdot \left[(x)^{\overline{k+1}} - k \cdot (x)^{\bar{k}} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \cdot (x)^{\overline{k+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot (-1)^{n-k-1} \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \cdot (x)^{\bar{k}} \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \cdot (x)^{\bar{k}} + \sum_{k=1}^n k \cdot (-1)^{n-k} \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \cdot (x)^{\bar{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) \cdot (x)^{\bar{k}} \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot (x)^{\bar{k}}
\end{aligned}$$

Buradan n tamsayı değeri için (3.8) eşitliği sağlanmış olur.

Teorem 3.8. (Cameron, 1994) $A_1, A_2, \dots, A_n$ sonlu kümeler olsun.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| \quad (3.9)$$

İspat. Tümevarım yönteminden,

$n = 2$ için

$$\left| A_1 \cup A_2 \right| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1, 2\}} (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

(3.9) eşitliği doğrudur.

$n-1$ tamsayı değeri için (3.9) eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}} (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| \quad \text{olsun.}$$

n tamsayı değeri için (3.9) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$A^* = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ olarak tanımlayalım. O halde,

$$\left| A^* \right| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}} (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \left| A^* \cup A_n \right| = \left| A^* \right| + |A_n| - |A^* \cap A_n|$$

$$A^* \cap A_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)$$

$$|A^* \cap A_n| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}} (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} (A_i \cap A_n) \right|$$

$$|A_n| - |A^* \cap A_n| = |A_n| - \sum_{n \in K \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}} (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} (A_i \cap A_n) \right|$$

$$= |A_n| - \sum_{n \in K, K \neq \{n\}} (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|$$

$$= \sum_{n \in K \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|$$

Teorem 3.9. (Cameron, 1994) n elemanlı bir kümeden k elemanlı bir kümeye tanımlı örten fonksiyon sayısı,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n \quad (3.10)$$

İspat. $X, A = \{1,2,3,\dots,n\}$ kümesinden $B = \{1,2,3,\dots,k\}$ kümesine tanımlı fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda $|X| = k^n$ dir.

$i = 1,2,\dots,k$ için $A_i = \{f \mid f : A \rightarrow B, i \in B, i \notin f(A)\}$ olarak tanımlayalım.

$f \in A_i$ için $f(x), i$ hariç geri kalan $k-1$ elemandan biri ile eşleşebilir. Öyleyse ,

$|A_i| = (k-1)^n$ olur. Bu durumu genelleştirecek olursak ,

$A_I = \{f \mid f : A \rightarrow B, I \subseteq B, I \neq f(A)\}$ ve $|A_I| = (k-|I|)^n$ dir.

f örtendir ancak ve ancak $f \notin A_i$ dir. Teorem 3.8 den örten fonksiyonların sayısı

$$\sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,k\}} (-1)^{|I|} \cdot |A_I| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,k\}} (-1)^{|I|} \cdot (k-|I|)^n \quad (3.11)$$

I , boş küme ise (3.11) deki toplam $(-1)^{|I|} \cdot (k - |I|)^n = (-1)^0 (k - 0)^n$ olur.

I , tek elemanlı bir küme ise bu eleman $\binom{k}{1}$ farklı şekilde seçilebileceğinden (3.11) deki toplam tek elemanlı I kümeleri için $\binom{k}{1} \cdot (-1)^1 \cdot (k - 1)^n$ olur.

I , iki elemanlı bir küme ise bu elemanlar $\binom{k}{2}$ farklı şekilde seçilebileceğinden (3.11) deki toplam iki elemanlı I kümeleri için $\binom{k}{2} \cdot (-1)^2 \cdot (k - 2)^n$ olur.

I , $k - 1$ elemanlı bir küme ise bu elemanlar $\binom{k}{k-1}$ farklı şekilde seçilebileceğinden (3.11) deki toplam $k - 1$ elemanlı I kümeleri için $\binom{k}{k-1} \cdot (-1)^{k-1} \cdot (k - k + 1)^n$ olur.

I , k elemanlı bir küme ise bu elemanlar $\binom{k}{k}$ farklı şekilde seçilebileceğinden (3.11) deki toplam k elemanlı I kümeleri için $\binom{k}{k} \cdot (-1)^k \cdot (k - k)^n$ olur.

I kümesinin alabileceği bütün bu ihtimallerin toplamı ise ;

$$\sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \cdot (k - |I|)^n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k - i)^n \quad (3.12)$$

olur. Böylece (3.10) eşitliği ispatlanmış olur.

Teorem 3.10. (Cameron, 1994) n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot (k - j)^n \quad (3.13)$$

İspat. $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $B = \{1, 2, \dots, k\}$ kümelerini ele alalım. Teorem 3.9' dan A kümesinden B kümesine tanımlı örten fonksiyon sayısı ,

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot (k-j)^n$$

$f : A \rightarrow B$ örten bir fonksiyon ise $f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(k)$ kümeleri A kümesinin herhangi bir parçalanışının elemanlarıdır.

$S_i = \{x \in A \mid f(x) = i, f : A \rightarrow B \text{ örten}, i = 1, 2, \dots, k\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$f^{-1}(1) = S_1, f^{-1}(2) = S_2, \dots, f^{-1}(k) = S_k$ olur.

$S_1, S_2, \dots, S_k$ kümelerinin A kümesinin parçalanışını oluşturduğunu gösterelim. Bunun için

$\bigcap_{i=1}^k S_i = \emptyset$ ve $\bigcup_{i=1}^k S_i = A$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$\bigcap_{i=1}^k S_i \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. $x \in \bigcap_{i=1}^k S_i$ alalım. Bu durumda her $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için

$x \in S_i$ olacaktır. $x \in S_i$ ise $f(x) = i$ dir. Bu ise f fonksiyonunun örten olması ile çelişir.

O halde $\bigcap_{i=1}^k S_i = \emptyset$ olmak zorundadır.

$\bigcup_{i=1}^k S_i \neq A$ olduğunu varsayalım. $x \in \bigcup_{i=1}^k S_i$ ve $x \notin A$ olsun.

$x \in \bigcup_{i=1}^k S_i$ ise $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $x \in S_i$ ve $f(x) = i$ dir. Buradan $x = f^{-1}(i) \in A$ olur ki

bu bir çelişkidir. O halde $\bigcup_{i=1}^k S_i = A$ olmak zorundadır. Bu durumda $S_1, S_2, \dots, S_k$ kümeleri

A kümesinin bir parçalanışını oluşturmaktadır.

Şimdi, $\mathcal{Q} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, A kümesinin k elemanlı parçalanışlarından bir tanesi olsun.

$g : \mathcal{Q} \rightarrow B$, $g(S_i) = i$, ($i = 1, 2, \dots, k$) fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon bire-birdir ve bu bire-bir fonksiyonların sayısı $k!$ dir.

$f : A \rightarrow B$ örten fonksiyonunu $f(x) = i \Leftrightarrow x \in S_i$ olarak tanımlarsak A kümesinden B

kümesine tanımlı örten fonksiyon sayısı $k! \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ olacaktır. Teorem 3.9 dan (3.13) eşitliği

sağlanmış olur.

Teorem 3.11. (Cameron, 1994) $n \geq k \geq 0$ tamsayıları olmak üzere ikinci tip stirling sayıları için tanımlı üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot t^n = \frac{(e^t - 1)^k}{k!} \quad (3.14)$$

İspat. Teorem 3.10' dan

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot t^n &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot (k-j)^n \right) \cdot \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \cdot \binom{k}{j} \cdot j^n \right) \cdot \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \cdot \binom{k}{j} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(t \cdot j)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \cdot \binom{k}{j} \cdot e^{jt} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot (e^t - 1)^k \end{aligned}$$

3.1. Genelleştirilmiş İkinci Tip Stirling Sayıları

Teorem 3.1.1.(Stirling Dualite Kanunu) (Scurr ve Olive, 1998) n, k herhangi iki tamsayı olmak üzere

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = (-1)^{n+k} \cdot \left[\begin{matrix} -k \\ -n \end{matrix} \right] \quad (3.1.1)$$

İspat. $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$ alalım ve

$$H(n, k) = (-1)^{n+k} \cdot \left[\begin{matrix} -k \\ -n \end{matrix} \right] \quad (3.1.2)$$

olarak tanımlayalım.

$H(n, k)$ nın (3.6) deki rekürans bağıntısını sağladığını gösterelim.

$$H(n, 0) = (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -n \end{bmatrix} = \delta_{n0}, \quad H(0, n) = (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} -n \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{n0} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} H(n-1, k-1) + k \cdot H(n-1, k) &= (-1)^{n+k-2} \cdot \begin{bmatrix} -k+1 \\ -n+1 \end{bmatrix} + k \cdot (-1)^{n+k-1} \cdot \begin{bmatrix} -k \\ -n+1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{n+k-2} \left(\begin{bmatrix} -k+1 \\ -n+1 \end{bmatrix} - k \cdot \begin{bmatrix} -k \\ -n+1 \end{bmatrix} \right) \\ &= (-1)^{n+k} \cdot \begin{bmatrix} -k \\ -n \end{bmatrix} \\ &= H(n, k) \end{aligned}$$

Böylece,

$$H(n-1, k-1) + k \cdot H(n-1, k) = H(n, k) \quad (3.1.4)$$

eşitliği elde edilir

(3.1.3) ve (3.1.4) den $H(n, k)$, (3.6) daki rekürans bağıntısını sağlar. Bu ise $H(n, k) = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ olduğunu gösterir. Böylece, (3.1.1) eşitliği sağlanmış olur.

Sonuç 3.1.2. (Cameron, 1994) A ve B , $n \times n$ boyutlu ve $(a_{ij}) = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$, $(b_{ij}) = \begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix}$ şeklinde tanımlı iki matris olsunlar. Bu durumda,

$$A = B^{-1} \quad (3.1.5)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.12) eşitliğinin matris gösterimi

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} (x)^1 \\ (x)^2 \\ (x)^3 \\ \vdots \\ (x)^{n-2} \\ (x)^{n-1} \\ (x)^n \end{bmatrix}}_{T_2} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-2} \\ x^{n-1} \\ x^n \end{bmatrix}}_{T_1} \Rightarrow T_2 = A \cdot T_1
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

(3.1.6) dan,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-2} \\ x^{n-1} \\ x^n \end{bmatrix}}_{T_1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} (x)^1 \\ (x)^2 \\ (x)^3 \\ \vdots \\ (x)^{n-2} \\ (x)^{n-1} \\ (x)^n \end{bmatrix}}_{T_2} \Rightarrow T_1 = A^{-1} \cdot T_2
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

(3.7) eşitliğinin matris gösterimi,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-2} \\ x^{n-1} \\ x^n \end{bmatrix}}_{T_1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} & \dots & \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} (x)^1 \\ (x)^2 \\ (x)^3 \\ \vdots \\ (x)^{n-2} \\ (x)^{n-1} \\ (x)^n \end{bmatrix}}_{T_2} \Rightarrow T_1 = B \cdot T_2
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

(3.1.7) ve (3.1.8) den (3.1.5) eşitliği sağlanır.

4. p-STİRLİNG SAYILARI

4.1. Birinci Tip p-Stirling Sayıları

Tanım 4.1.1. (Merris, 2000) $n, k, p \in \mathbb{N}$ olsun. $n + p$ elemanlı A kümesinin herhangi bir p elemanlı altkümesi B olsun. B kümesinin her bir elemanı farklı devirlere ait olacak şekilde, A kümesi üzerinde tanımlı $k + p$ tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısına “Birinci Tip p-Stirling Sayısı” denir ve $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_p$ şeklinde gösterilir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe A kümesi olarak $A = \{1, 2, 3, \dots, p, p+1, \dots, p+n\}$, $n + p$ elemanlı kümesi ve B altkümesi olarak da $B = \{1, 2, \dots, p\}$ kümesi alınacaktır.

Örnek 4.1.2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{1, 2, 3\} \subset A$ kümelerini ele alalım. B kümesinin her bir elemanı farklı devirlere ait olacak şekilde A kümesi üzerinde tanımlı 4 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısı $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]_3$ dir. Bu permütasyonları bulmak için öncelikle A kümesi üzerinde tanımlı 4 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonları elde edelim. Tanım 2.1 den A kümesi üzerinde bu şekilde tanımlı $\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$ adet permütasyon vardır. Bu permütasyonların arasından $B = \{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanlarının her birinin farklı devirlere ait olduğu permütasyonları seçerek $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]_3$ tanımını sağlayan permütasyonlar elde edilir.

A kümesi üzerinde tanımlı 4 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonlar,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1)(2)(3)(45) & \alpha_2 &= (1)(2)(35)(4) & \alpha_3 &= (1)(25)(3)(4) & \alpha_4 &= (15)(2)(3)(4) \\ \alpha_5 &= (1)(2)(34)(5) & \alpha_6 &= (1)(24)(3)(5) & \alpha_7 &= (14)(2)(3)(5) & \alpha_8 &= (1)(23)(4)(5) \\ \alpha_9 &= (13)(2)(4)(5) & \alpha_{10} &= (12)(3)(4)(5) \end{aligned}$$

Bu permütasyonlar arasından $B = \{1, 2, 3\}$ altkümesinin elemanlarının aynı devirde yer aldığı

$\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$ permütasyonları çıkarıldığında geriye kalan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ permütasyon-

ları $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_3$ tanımını sağlayan permütasyonlardır.

Özellik 4.1.3. Birinci Tip p-Stirling Sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{i) } p = 0 \text{ ise } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_p = 1, n \geq 0 \quad (4.1.2)$$

$$\text{iii) } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p = 0, n < k \quad (4.1.3)$$

İspat. Tanım 4.1.1 den (i) , (ii) ve (iii) ün ispatı açıktır.

Teorem 4.1.4. (Merris, 2000) $p \neq 0$ ve $n \geq k \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_p + (n+p) \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \quad (4.1.4)$$

İspat. $A = \{1, 2, 3, \dots, n, (n+1), (n+1)+1, \dots, (n+1)+p\}$ ve $B = \{1, 2, 3, \dots, p\} \subset A$ olsun. B kümesinin elemanlarının her biri farklı devirlere ait olacak şekilde A kümesi üzerinde tanımlı $k+p$ tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısı $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_p$ dir. A kümesi üzerinde tanımlı bu permütasyonları iki aşamada elde edebiliriz.

İlk olarak $\{1, 2, 3, \dots, n, (n+1), (n+1)+1, \dots, (n+1)+p\}$ kümesinden ' $n+1$ ' elemanını çıkartarak $A^* = A - \{n+1\} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+2, \dots, (n+1)+p\}$, $n+p$ elemanlı kümesini oluşturalım. B kümesinin elemanlarının her biri farklı devirlere ait olacak şekilde A^* kümesi üzerinde tanımlı $k+p-1$ tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısı $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_p$ dir. Bu permütasyonların her birine sadece ' $n+1$ ' elemanından oluşan $(n+1)$

devrini her bir permütasyona çarpım olarak ilave edersek A kümesi üzerinde tanımlı permütasyonların $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_p$ tanesini elde etmiş oluruz.

İkinci olarak, B kümesinin elemanlarının her biri farklı devirlere ait olacak şekilde A^* kümesi üzerinde tanımlı $k+p$ tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonları elde edelim.

Bu permütasyonların sayısı $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_p$ dir. ' $n+1$ ' elemanını bu permütasyonları oluşturan

devirlerinin her birine elaman olarak ilave edelim. Bu durum bir permütasyon için $n+p$

farklı şekilde yapılabilir. Dolayısıyla $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_p$ tane permütasyon için bu durum $(p+n) \cdot \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_p$

farklı şekilde olacaktır. Böylece A kümesi üzerinde $\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_p$ tanımını sağlayan permütas-

yonların $(p+n) \cdot \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_p$ tanesini elde etmiş oluruz. Her iki aşamada elde edilen

permütasyonlar, B kümesinin elemanlarının her biri farklı devirlere ait olacak şekilde A kümesi üzerinde tanımlı $k+p$ tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonları verecektir. Böylece (4.1.4) eşitliği sağlanmış olur.

Teorem 4.1.5. (Merris, 2000) $p \neq 0$, $m \geq n \geq 1$ olmak üzere,

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_p = \sum_{j=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right]_p \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k} \quad (4.1.5)$$

İspat. (4.1.5) eşitliğinin (4.1.4) deki rekürans bağıntısını sağladığını göstermemiz yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_p &= \left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_p + (p+n) \cdot \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_p \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right]_p \cdot \binom{j}{k-1} \cdot p^{j-k+1} \right\} + (p+n) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right]_p \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \cdot p^{j-k+1} \cdot \left\{ \binom{j}{k-1} + \binom{j}{k} \right\} + \sum_{j=1}^n n \cdot \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k} \\
&= \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \cdot \binom{j+1}{k} \cdot p^{j-k+1} + \sum_{j=1}^n n \cdot \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{k} \cdot p^{n+1-k} + \sum_{j=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \cdot \binom{j+1}{k} p^{j-k+1} + \sum_{j=1}^n n \cdot \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k} \\
&= \binom{n+1}{k} \cdot p^{n+1-k} + \sum_{j=2}^n \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} \cdot \binom{j}{k} p^{j-k} + \sum_{j=2}^n n \cdot \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \binom{1}{k} \cdot p^{1-k} \\
&= \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{k} \cdot p^{n+1-k} + \sum_{j=2}^n \left\{ \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \right\} \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \binom{1}{k} \cdot p^{1-k} \\
&= \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{k} \cdot p^{n+1-k} + \sum_{j=2}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k} + \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \binom{1}{k} \cdot p^{1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} \cdot \binom{j}{k} \cdot p^{j-k}
\end{aligned}$$

Çizelge 4.1 $p = 1$ için birinci tip p-stirling sayıları

n	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_1$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_1$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_1$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}_1$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}_1$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}_1$
1	1	0	0	0	0	0
2	3	1	0	0	0	0
3	11	6	1	0	0	0
4	50	35	10	1	0	0
5	274	225	85	15	1	0
6	1764	1624	735	175	21	1

Çizelge 4.2. $p = 2$ için birinci tip p-stirling sayıları

n	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_2$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_2$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_2$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}_2$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}_2$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}_2$
1	1	0	0	0	0	0
2	5	1	0	0	0	0
3	26	9	1	0	0	0
4	154	71	14	1	0	0
5	1044	580	155	20	1	0
6	8028	5104	1665	295	27	1

Çizelge 4.3. $p = 3$ için birinci tip p-stirling sayıları

n	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_3$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_3$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_3$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}_3$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}_3$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}_3$
1	1	0	0	0	0	0
2	7	1	0	0	0	0
3	47	12	1	0	0	0
4	342	119	18	1	0	0
5	2754	1175	245	25	1	0
6	24552	12154	3135	445	33	1

Teorem 4.1.7. (Carlitz, 1980) $x \in R, p \in N, n \geq k \geq 0$ tamsayıları için

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^k = (p+x)^{\bar{n}} \quad (4.1.6)$$

İspat. Tümevarım yönteminden,

$n = 0$ değeri için (4.1.6) eşitliği doğrudur.

n tamsayısı için (4.1.6) eşitliği doğru olsun.

$n+1$ tamsayısı için (4.1.6) eşitliğinin sol tarafına (4.1.4) rekürans bağıntısı uygulanırsa,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_p \cdot x^k + \sum_{k=0}^{n+1} (p+n) \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^{k+1} + (p+n) \cdot \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^k \\
&= x \cdot \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^k + (p+n) \cdot \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^k \\
&= [x + (p+n)] \cdot \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^k \\
&= (x + p + n) \cdot (p + x)^{\overline{n}} \\
&= (p + x)^{\overline{n+1}}
\end{aligned}$$

Böylece $n+1$ tamsayı değeri için (4.1.6) eşitliği sağlanmış olur.

Yardımcı Teorem 4.1.8. (Merris, 2000) $p \neq 0$ ve $n \geq j \geq k > 0$ tamsayıları için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \cdot \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \cdot p^{n-j} \quad (4.1.7)$$

Teorem 4.1.9. (Merris, 2000) $p \geq 0$ ve $n \geq k \geq 1$ tamsayıları için Birinci Tip p-Stirling Sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^n = \frac{(-\ln(1-x))^k}{(1-x)^p \cdot k!} \quad (4.1.8)$$

şeklindedir.

İspat. (4.1.7) ve (2.8) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \cdot x^n &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n!} \cdot \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \cdot \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \cdot (p)^{\overline{n-j}} \right) \cdot x^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \cdot \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \cdot \frac{(p)^{\overline{n-j}}}{(n-j)!} \right) \cdot x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \left[\begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right] \cdot x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(p)^{\bar{n}}}{n!} \cdot x^n \right) \\
&= \frac{1}{k!} \cdot [-\ln(1-x)]^k \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{p+n-1}{n} \cdot x^n \\
&= \frac{1}{k!} \cdot [-\ln(1-x)]^k \cdot (1-x)^{-p} \\
&= \frac{[-\ln(1-x)]^k}{k! \cdot (1-x)^p}
\end{aligned}$$

4.2. İkinci Tip p-Stirling Sayıları

Tanım 4.2.1. (Merris, 2000) $n, k, p \in N$ ve $n+p$ elemanlı A kümesinin herhangi p elemanlı altkümesi B olsun. B kümesinin her bir elemanı A nın farklı ayırık altkümelerinde olacak şekilde, A kümesinin $k+p$ elemanlı parçalanışlarının sayısına “İkinci Tip p-Stirling Sayısı” denir ve $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p$ şeklinde gösterilir.

Aksi belirtilmedikçe A kümesi olarak, $A = \{1, 2, 3, \dots, p, p+1, \dots, p+n\}$ kümesi ve B altkümesi olarak da $B = \{1, 2, \dots, p\} \subset A$ kümesi alınacaktır.

Örnek 4.2.2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{1, 2\} \subset A$ kümelerini ele alalım. B kümesinin her bir elemanı A kümesinin farklı altkümelerinde olacak şekilde A kümesinin dört elemanlı parçalanışlarının sayısı $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}_2$ dir. Bu parçalanışları bulmak için öncelikle A kümesinin 4

elemanlı parçalanışlarını bulalım. Bu şekilde $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 10$ tane parçalanış vardır. Bu parçalanışlar,

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4,5\}\}, & Q_2 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{5\}\}, & Q_3 &= \{\{1\}, \{2,4\}, \{3\}, \{5\}\}, \\
Q_4 &= \{\{1,4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}\}, & Q_5 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3,5\}, \{4\}\}, & Q_6 &= \{\{1\}, \{2,5\}, \{3\}, \{4\}\}, \\
Q_7 &= \{\{1,5\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, & Q_8 &= \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\}\}, & Q_9 &= \{\{1,3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\},
\end{aligned}$$

$$Q_{10} = \{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$$

kümeleridir. $B = \{1, 2\} \subset A$ kümesinin elemanları $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9$ parçalanışlarının farklı elemanlarına ait olduklarından $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}_2 = 9$ olacaktır. Böylece A kümesinin

$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}_2$ tanımına uyan parçalanışları $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9$ kümeleridir.

Özellik 4.2.3. İkinci Tip p-Stirling Sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$i) \ p = 0 \text{ için } \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \quad (4.2.1)$$

$$ii) \ \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}_p = 1, \ n \geq 0 \quad (4.2.2)$$

$$iii) \ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p = 0, \ n < k \quad (4.2.3)$$

$$iv) \ \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}_p = p^n, \ p > 0 \quad (4.2.4)$$

İspat. Tanım 4.2.1 den (i) , (ii) ve (iii) ün ispatı açıktır.

iv) $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}_p$, $A = \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+p\}$, $n+p$ elemanlı kümesinin p elemanlı parçalanışlarının sayısıdır. $Q = \{B_1, B_2, \dots, B_p\}$, A kümesinin p elemanlı parçalanışı olsun. Tanım 4.2.1 den $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ kümesinin elemanları sırasıyla $B_1, B_2, \dots, B_p$ altkümelerine yerleştirelim. Bu yerleştirme işleminden sonra A kümesinin geri kalan n elemanı ise $B_1, B_2, \dots, B_p$ kümelerine p^n farklı şekilde yerleştirilebilir. Böylece (4.2.4) eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.4. (Merris, 2000) $p \neq 0$, $n \geq k \geq 1$ olmak üzere,

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_p = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_p + (p+k) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \quad (4.2.5)$$

İspat. $A = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, n+p, n+1+p\}$ kümesinin $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_p$ tanımını sağlayan parçalanışlarını iki aşamada elde edebiliriz. Bunun için öncelikle A kümesinden ' $n+1$ ' elemanı çıkartılarak $A^* = A - \{n+1\} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+2, \dots, n+p, n+1+p\}$, $n+p$ elemanlı kümesi elde edelim. İlk olarak A^* kümesi için $\left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_p$ tanımını sağlayan parçalanışları bulunur ve bu parçalanışlara $\{n+1\}$ altkümesi eleman olarak ilave edilirse A kümesinin istenen parçalanışlarından $\left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_p$ tanesi elde edilir.

İkinci olarak, A^* kümesinin $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p$ tanımını sağlayan parçalanışları bulunur. Bu parçalanışlar $k+p$ elemanlıdır ve bu elemanlar A kümesinin altkümeleridir. ' $n+1$ ' elemanı sırasıyla bu altkümelerin her birine eleman olarak yerleştirilirse A kümesinin $(k+p) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p$ parçalanışı elde edilir. Bu iki aşama sonucunda A kümesinin tüm parçalanışlarını elde etmiş oluruz. Böylece (4.2.5) eşitliği sağlanmış olur.

Teorem 4.2.5. (Merris, 2000) $p \neq 0$, $n \geq k \geq 1$ olmak üzere

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \cdot \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p^{n-j} \quad (4.2.6)$$

İspat. (4.2.6) eşitliğinin (4.2.5) rekürans bağıntısını sağladığını göstermemiz yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_p &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_p + (p+k) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \cdot \left\{ \begin{matrix} j \\ k-1 \end{matrix} \right\} \cdot p^{n-j} + (p+k) \cdot \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \cdot \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p^{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\left\{ \begin{matrix} j \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \right] \cdot \binom{n}{j} \cdot p^{n-j} + \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \cdot \binom{n}{j} \cdot p^{n-j+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot \binom{n}{j} \cdot p^{n-j} + \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \cdot \binom{n}{j} \cdot p^{n-j+1} \\
&= \binom{n}{1} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} 2 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p^{n-1} + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p + \binom{n}{n} \cdot \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} \\
&= \binom{n+1}{1} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p^n + \binom{n+1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} 2 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p^{n-1} + \cdots + \binom{n+1}{n} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p + \binom{n+1}{n+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \cdot \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p^{n+1-j}
\end{aligned}$$

Çizelge 4.4. $p = 1$ için ikinci tip p-stirling sayıları

n	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}_1$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}_1$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}_1$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}_1$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}_1$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 6 \end{matrix} \right\}_1$
1	1	0	0	0	0	0
2	3	1	0	0	0	0
3	7	6	1	0	0	0
4	15	25	10	1	0	0
5	31	90	65	15	1	0
6	63	301	350	140	21	1

Çizelge 4.5. $p = 2$ için ikinci tip p-stirling sayıları

n	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}_2$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}_2$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}_2$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}_2$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}_2$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 6 \end{matrix} \right\}_2$
1	1	0	0	0	0	0
2	5	1	0	0	0	0
3	19	9	1	0	0	0
4	65	55	14	1	0	0
5	211	285	125	20	1	0
6	665	1351	910	245	27	1

Çizelge 4.6. $p = 3$ için ikinci tip p-stirling sayıları

n	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}_3$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}_3$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}_3$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}_3$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}_3$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 6 \end{matrix} \right\}_3$
1	1	0	0	0	0	0
2	7	1	0	0	0	0
3	37	12	1	0	0	0
4	175	97	18	1	0	0
5	781	660	205	25	1	0
6	3367	4081	1890	380	33	1

Teorem 4.2.6. (Merris, 2000) $p \geq 0$ ve $n \geq k \geq 1$ tamsayıları için İkinci Tip p-Stirling Sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot x^n = \frac{e^{px} (e^x - 1)^k}{k!} \quad (4.2.7)$$

İspat: (4.2.6) ve (3.14) den,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^n &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \left[\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \cdot \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \cdot p^{n-j} \right] \cdot x^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \cdot \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \cdot \frac{p^{n-j}}{(n-j)!} \right] \cdot x^n \\
 &= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \frac{p^n}{n!} \cdot x^n \right) \\
 &= \frac{(e^x - 1)^k}{k!} \cdot e^{xp} \\
 &= \frac{e^{xp} \cdot (e^x - 1)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Teorem 4.2.7. (Carlitz, 1980) $n \geq k \geq 0$ tamsayıları olmak üzere,

$$(x + p)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^k \quad (4.2.8)$$

İspat. Tümevarım yönteminden,

$n = 0$ değeri için (4.2.8) eşitliği doğrudur.

n tamsayısı için (4.2.8) eşitliği doğru olsun.

$n + 1$ tamsayısı için (4.2.8) eşitliğinin sol tarafına (4.2.5) rekürans bağıntısı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^k &= \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^k + \sum_{k=0}^{n+1} (p+k) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^{k+1} + \sum_{k=0}^n (p+k) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x-k) \cdot (x)^k + \sum_{k=0}^n (p+k) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (p+x) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^k \\ &= (p+x) \cdot \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p \cdot (x)^k \\ &= (p+x) \cdot (x+p)^n \\ &= (x+p)^{n+1} \end{aligned}$$

Böylece (4.2.8) eşitliği $n + 1$ tamsayısı için sağlanmış olur.

KAYNAKLAR

Broder, A.Z. (1984), “The r-Stirling Numbers”, Department of Computer Science Stanford University , STAN-CS-82-949

Cameron, P.J. (1994), Combinatorics:Topics,Techniques,Algorithms, Cambridge University Press

Karakaş, H.İ. (1998), Soyut Cebire Giriş, Matematik Vakfı

L.Carlitz, (1980), “Weighted Stirling Numbers of The First and Second Kind-I”, The Fibonacci Quarterly, 18(1980) 147-162

Merris, R., (2000), “The p-Stirling Numbers”, Turkish Journal of Mathematics, 24(2000) 379-399

Michaels, J.G. ve Rosen, K.H, (1991) , Applications of Discrete Mathematics, McGraw-Hill

Mond, D. ve Krammer, D., (2004), MA241 Combinatorics Lecture Notes, Warwick Mathematics Institute

Saxl, J. (1995), Discrete Mathematics, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge University

Scurr, R. ve Olive, G., (1998), “Stirling Numbers Revisited”, Elsevier, Discrete Mathematics 189 (1998) 209-219

İNTERNET KAYNAKLARI

[1] <http://www.andrew.cmu.edu/course/21-228/lec5.pdf>

[2] <http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheFirstKind.html>

EKLER**Ek1: Teorem 2.3' e göre Birinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB Programı**

```

clc
clear all
n=input('n>=0 tamsayı değeri...:');
k=input('k>=0 tamsayı değeri...:');
if n>=0 & k>=0 & n>=k
    for i=2:n+2;
        s1(2,i)=0;s1(i,i)=1;
        s1(1,i)=i-2;s1(i,1)=i-2;
    end
    for i=4:n+2;
        for j=3:i-1;
            s1(i,j)=s1(i-1,j-1)+(i-3)*s1(i-1,j);
        end
    end
    disp('  n/k')
    disp(s1)
    fprintf('Girilen değerler için Birinci Tip Stirling Sayısı , s(%d,%d)= %d \n',n,k,s1(n+2,k+2));
elseif n<0 | k<0
    disp(' n ve k için negatif olmayan tamsayı değerleri girerek')
    disp(' programı tekrar çalıştırınız!!!!')
else
    fprintf('Girilen değerler için Birinci Tip Stirling Sayısı , s(%d,%d) = %d \n',n,k,0);
end

```

Ek2: Teorem 2.1.4'e göre $n < 0$ ve $10 > m \geq 0$ tamsayı değerleri için Birinci Tip Stirling Sayıları Hesaplayan MATLAB Programı

```

clear all
clc
carp=1;
carptop=0;
disp('n<0 ve 10>m>=0 tamsayıları için birinci tip stirling sayısı s(n,m) yi hesaplayan
program')
n1=input('n<0 tamsayı değeri...:');
m=input('m>=0 tamsayı değeri...:');
k=1;n=abs(n1);
if n1<0 & m>=0 & m<10
    if m~=0
        for i=1:m*10^(n-1)
            for j=n:-1:1
                diz(k,j)=mod(i,10);
                i=(i-diz(k,j))/10;
            end
            if sum(diz(k,:))==m
                k=k+1;
            end
        end
    else
        for i=1:n
            diz(1,i)=0; k=2;
        end
    end
    for i=1:k-1
        for j=1:n
            carp=carp*j^(-diz(i,j));
        end
        carptop=carp+carptop;
        carp=1;
    end
    strnk=carptop*(-1)^m/factorial(n);
    fprintf('Girilen değerler için Birinci Tip Stirling Sayısı , s(%d,%d)= %e \n',n1,m);
    format long
    disp(strnk)
else n>0 | m>9 | m<0
    clc
    disp('n<0 ve 10>m>=0 olacak şekilde tamsayı değerleri girip programı tekrar çalıştırınız');
end

```

Ek3: Teorem 2.1.5'e göre $m < n < 0$ tamsayı değerleri için Birinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB Programı

```

clear all
clc
format long
carp=1;
carptop=0;
disp('m<n<0 tamsayıları için birinci tip stirling sayısı s(n,m) yi hesaplayan program')
n1=input('n<0 tamsayı değeri...:');
m1=input('m<0 tamsayı değeri...:');
k=1;n=abs(n1);m=abs(m1);
if m1<0 & n1<0 & (m-n)<10
    if m>n
        for i=1:(m-n)*10^(n-1)
            for j=n:-1:1
                diz(k,j)=mod(i,10);
                i=(i-diz(k,j))/10;
            end
            if sum(diz(k,:))==m-n
                k=k+1;
            end
        end
    elseif m==n
        for i=1:n
            diz(1,i)=0;
        end
        k=2;
    else strnk=0;
    end
    for i=1:k-1
        for j=1:n
            carp=carp*j^(diz(i,j));
        end
        carptop=carp+carptop;
        carp=1;
    end
    strnk=carptop*(-1)^(m-n);
    fprintf('Girilen değerler için Birinci Tip Stirling Sayısı , s(%d,%d)= %e \n',n1,m1);
    disp(strnk)
else (m-n)>9 | m1>0 | n1>0
    clc
    disp('n ve m için negatif değerler giriniz programı tekrar çalıştırınız')
end

```

Ek4: Teorem 3.10'a göre İkinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB Programı

```

clc
clear all
n=input('n>0 tamsayı değeri...: ');
k1=input('k>0 tamsayı değeri...: ');
if n>0 & k1>0 & n>k1
for i=1:n+1
    for j=i+1:n+1
        s2(i,j)=0;
    end
end
s2(1,1)=1;
for i=2:n+1
    s2(i,1)=0;s2(1,i)=0;s2(i,i)=1;s2(i,2)=1;
end
for i=4:n+1
    for j=3:i-1
        top=0;
        for k=0:j-1
            top=top+((-1)^(k+j-1))*mfun('binomial',j-1,k)*k^(i-1);
        end
        s2(i,j)=(1/factorial(j-1))*top;
    end
end
disp(' ')
disp('  n/k')
disp(s2);
disp(' ');
fprintf('Girilen değerler için İkinci Tip Stirling Sayısı , S(%d,%d)= %d\n',n,k1,s2(n+1,k1+1));
elseif k1>n
fprintf('Girilen değerler için İkinci Tip Stirling Sayısı , S(%d,%d)= %d\n',n,k1,0);
else
disp(' n ve k için negatif olmayan tamsayı değerleri giriniz...')
end

```

Ek5: Teorem 3.1.1'e göre $n < 0$ ve $k < 0$ tamsayı değerleri için İkinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB programı

```

clc
clear all
disp('Bu program  $k < n < 0$  tamsayıları için İkinci Tip Stirling Sayılarını hesaplar') ;
disp(' ');
n1=input('n<0 için n tamsayı değeri..: ');
k1=input('k<0 için k tamsayı değeri....:');
n=abs(n1);
k=abs(k1);
if n1<0 & k1<0 & n1>=k1
    for i=1:k+1;
        s1(i,i)=1;
    end
    for i=3:k+1;
        for j=2:i-1;
            s1(i,j)=s1(i-1,j-1)-(i-2)*s1(i-1,j);
        end
    end
    for i=2:k+1;
        for j=2:k+1;
            s2(i,j)=((-1)^(i+j))*s1(j,i);
            s2(1,j)=(-1)*(j-1);
        end
        s2(i,1)=(-1)*(i-1);
    end
    disp(' ');
    disp(' ')
        disp('  n/k')
        disp(s2)

    fprintf('Girilen değerler için İkinci Tip Stirling Sayısı , S(%d,%d)= %d\n',n1,k1,s2(n+1,k+1));

else n1>=0 | k1>=0 | n1<k1

    clc
    disp(' n ve k için uygun değerler girerek programı tekrar çalıştırınız...')
end

```

Ek6: Teorem 3.1.1'e göre $n \leq 0$ ve $m > 0$ tamsayı değerleri için İkinci Tip Stirling Sayılarını Hesaplayan MATLAB programı

```

clear all
clc
format long
carp=1;
carptop=0;
disp('n<=0 ve m>0 tamsayıları için ikinci tip stirling sayısı S(n,m) yi hesaplayan program')
n1=input('n<=0 olacak şekilde n tamsayı değerini giriniz:');
m1=input('m>0 olacak şekilde m tamsayı değerini gir:');
k=1;
n=m1;
m=-n1;
if n1<=0 & m1>0
    if m~=0
        for i=1:m*10^(n-1)
            for j=n:-1:1
                diz(k,j)=mod(i,10);
                i=(i-diz(k,j))/10;
            end
            if sum(diz(k,:))==m
                k=k+1;
            end
        end
    elseif n1==0
        for i=1:n
            diz(1,i)=0;
        end
        k=2;
    end
    for i=1:k-1
        for j=1:n
            carp=carp*j^(-diz(i,j));
        end
        carptop=carp+carptop;
        carp=1;
    end
    strnk1=carptop*(-1)^m/factorial(n);
    strnk2=(-1)^(n+m)*strnk1;
    disp(' ');
    fprintf('Girilen değerler için Birinci Tip Stirling Sayısı , S(%d,%d)= %e \n',n1,m1);
    disp(strnk2)
else n1>0 | m1<=0
    clc
    disp('n<=0 ve m>0 olacak şekilde tamsayı değerleri girip programı tekrar çalıştırınız')
end

```

Ek7: Teorem 4.1.5'e göre Birinci Tip p-Stirling Sayıları Hesaplayan MATLAB programı

```

clear all
clc
disp(' Bu program n>k tamsayı değerleri için Birinci Tip p-Stirling Sayılarını Hesaplar.... ')
n=input('n>0 tamsayı değeri...:');
k=input('k>0 tamsayı değeri...:');
p=input('p>0 tamsayı değeri...:');

if p>0 & n>=k>=1 & p~=0
    for i=1:n+1;
        s1(i,i)=1;
    end
    for i=3:n+1;
        for j=2:i-1;
            s1(i,j)=s1(i-1,j-1)+(i-2)*s1(i-1,j);
        end
    end
    s1=s1';
    for j=n+1:-1:2
        for i=2:n+1
            sp(1,i)=i-1;sp(i,1)=i-1;
            sp(i,j)=0;
            for k=2:n+1
                sp(i,j)= sp(i,j)+s1(k,j)*mfun('binomial',k-1,i-1)*p^(k-i);
            end
        end
    end
    disp('Girilen n,k ve p değerleri için Birinci Tip p-Stirling Sayıları değer tablosu...');
    disp('      n \ k ')
    disp(sp')
elseif p<=0 | n<0 | k<0 | k>n
    disp('p,n,k için uygun değerler girmek için programı tekrar çalıştırınız ');
end

```

Ek8: Teorem 4.2.5'e göre İkinci Tip p-Stirling Sayıları Hesaplayan MATLAB programı

```

clear all
clc
disp(' Bu program  $n \geq k$  tamsayı değerleri için ikinci tip p-stirling sayılarını hesaplar.... ')
n=input('n>0 tamsayı değeri...:');
k=input('k>0 tamsayı değeri...:');
p=input('p>0 tamsayı değeri...:');

if n>=1 & p>0 & k>=1
    for i=1:n+1
        for j=1:n+1
            if j>i
                str2(i,j)=0;
            elseif i==j
                str2(i,j)=1;
            else
                if j-1==0
                    str2(i,j)=0;
                else
                    s(1,1)=0;
                    for k=1:i-1
                        s(1,1+k)=s(1,k)+mfun('binomial',i-2,k-1)*str2(k,j-1);
                    end
                    str2(i,j)=s(1,k+1);
                end
            end
        end
    end
    str2=str2';
    for j=n+1:-1:2
        for i=2:n+1
            sp2(i,j)=0;
            for k=2:n+1
                sp2(i,j)= sp2(i,j)+str2(i,k)*mfun('binomial',j-1,k-1)*p^(j-k);
            end
        end
    end
    for k=1:n
        sp2(1,k+1)=k;
        sp2(k+1,1)=k;
    end
    disp('Girilen n,k ve p değerleri için İkinci Tip p-Stirling Sayıları değerler tablosu...');
    disp('      n \ k ')
    disp(sp2')
elseif p<=0 | n<0 | k<0 | k>n
    disp('p,n,k için uygun değerler girmek için programı tekrar çalıştırınız ');
end

```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 01.04.1977

Doğum yeri Bandırma/Türkiye

Lise 1991-1994 Balıkesir 100.Yıl E.M.Lisesi

Lisans 1995-1999 Hacettepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2002-2005 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

Çalıştığı kurum

2001-Devam ediyor Hava Harp Okulu Dekanlığı Fen Bil.Böl.Bşk.lığı
Öğretim Elemanı