

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Hemen Hem, F-Ceb, ve D-Ceb,
Sır, İkl, Duali

Yüksek Lisans Tezi

Selami Can

2005

2 209
269

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HEMEN HEMEN F-CEBİRLERİ VE D-CEBİRLERİNİN
SIRALI İKİNCİ DUALİ**

Matematikçi Selami CAN

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ömer GÖK

İSTANBUL, 2005

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VI-31

HEMEN HEMEN F-CEBİRLERİ VE D-CEBİRLERİNİN
SIRALI İKİNCİ DUALI

Matematikçi Selami CAN

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yrd. Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yrd. Doç. Dr. İbrahim ZİNGİROĞLU

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ömer GÖK

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC): R209/269

Kayıt No

3127

Geldiği Yer

Fen Bilim Enst

Tarih

05.06.06

Fiyat

1.50

Fatura No

Ayniyat No

1-6

Ek

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
3. HEMEN HEMEN F-CEBİRLERİNİN SIRALI İKİNCİ DUALİ.....	11
4. F-CEBİRLERİNİN SIRALI İKİNCİ DUALİ.....	20
5. D-CEBİRLERİNİN SIRALI SÜREKLİ SIRALI İKİNCİ DUALİ.....	25
6. SONUÇLAR	29
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ.....	31

SİMGE LİSTESİ

A^d	A kümesinin ayrık tümleyeni
A'	A vektör örgüsünün sıralı birinci duali
A''	A vektör örgüsünün sıralı ikinci duali
$(A')'_n$	A' üzerindeki tüm sıralı sınırlı sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin bandı
$(A')'_s$	A' üzerindeki tüm sıralı sınırlı tekil fonksiyonellerin bandı
C_F	F fonksiyonelinin taşıyıcısı
E^+	E sıralı vektör uzayının pozitif konisi
E'_n	E vektör uzayının sıralı sürekli duali
$I(\sigma(A))$	$\sigma(A)$ ile üretilen sıralı ideal
L_x	x ile tanımlı sol çarpım
L'_x	L_x örgü homomorfizmasının birinci adjointi
L''_x	L_x örgü homomorfizmasının ikinci adjointi
N_F	F fonksiyonelinin sıfır ideali
N_H^{dd}	N_H sıfır idealinin ikinci ayrık tümleyeni
R	Reel sayılar kümesi
R_x	x ile tanımlı sağ çarpım
R'_x	R_x örgü homomorfizmasının birinci adjointi
R''_x	R_x örgü homomorfizmasının ikinci adjointi
T'_f	T_f örgü homomorfizmasının birinci adjointi
x^+	x elemanın pozitif kısmı
x^-	x elemanın negatif kısmı
$ x $	x elemanın mutlak değeri
$\sigma(A)$	A vektör örgüsünün A'' 'deki görüntüsü
∞	Sonsuz
$\sqrt{\quad}$	Karekök
$\sum$	Toplam sembolü
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük veya eşittir
$<$	Küçüktür
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\vee$	Supremum
$\wedge$	İnfimum
$\perp$	Diktir
$\subset$	Özalt küme
$\uparrow$	Yukarı yönlü
$\downarrow$	Aşağı yönlü
$\xrightarrow{0}$	Sıralı yakınsama
$\oplus$	Direkt toplam
$[\quad , \quad]$	Sıralı aralık

ÖNSÖZ

Değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ömer GÖK ' e saygılarımı sunar, yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteklerini esirgemeyen eşime ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İkinci sıralı dual $(A')_2$ ' nın yine bir hemmen hemmen f -cebiri olduğu ve ayrıca A' ' nın ikinci sıralı dual A'' ' nın bir hemmen hemmen f -cebiri olduğu gösterilmiştir.

Bir Archimedean f -cebiri A' ' nın sıralı sürekli sıralı ikinci dual $(A')_2$ ' nın ve A' ' nın ikinci sıralı dual A'' ' nın Arens çarpımına göre yine bir f -cebiri olduğu ispatlanmıştır.

Bir Archimedean d -cebiri A' ' nın sıralı sürekli sıralı ikinci dual $(A')_2$ ' nın Arens çarpımına göre bir d -cebiri olduğu elde edilmiştir. Eğer d -cebiri A değişmeli ise veya pozitif karelere sahipse 0 zannat ikinci sıralı dual A'' ' nın Arens çarpımına göre yine bir d -cebiri olduğu ve A' ' nın değişmeli ve karelerinin pozitif olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemmen hemmen f -cebiri, f -cebiri, d -cebiri, ikinci sıralı dual, sıralı sürekli sıralı ikinci dual.

ÖZET

Bir örgü sıralı cebir A' 'nın ikinci sıralı duali A'' 'nün cebirsel yapısı üzerinde çalışılmıştır.

Arens çarpımı ile donatılmış bir Archimedean hemen hemen f -cebiri A' 'nın sıralı sürekli sıralı ikinci duali $(A')'_n$ 'in yine bir hemen hemen f -cebiri olduğu ve ayrıca A' 'nın ikinci sıralı duali A'' 'nün bir hemen hemen f -cebiri olduğu gösterilmiştir.

Bir Archimedean f -cebiri A' 'nın sıralı sürekli sıralı ikinci duali $(A')'_n$ 'in ve A' 'nın ikinci sıralı duali A'' 'nün Arens çarpımına göre yine bir f -cebiri olduğu ispatlanmıştır.

Bir Archimedean d -cebiri A' 'nın sıralı sürekli sıralı ikinci duali $(A')'_n$ 'in Arens çarpımına göre bir d -cebiri olduğu elde edilmiştir. Eğer d -cebiri A değişmeli ise veya pozitif karelere sahipse o zaman ikinci sıralı dual A'' 'nün Arens çarpımına göre yine bir d -cebiri olduğu ve A'' 'nün değişmeli ve karelerinin pozitif olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen f -cebiri, f -cebiri, d -cebiri, ikinci sıralı dual, sıralı sürekli sıralı ikinci dual.

ABSTRACT

The algebraic structure of the second order dual A'' of a lattice ordered algebra A is studied on.

It is shown that the order continuous order bidual $(A')'_n$ of an Archimedean almost f -algebra A equipped with respect to the Arens multiplication is again an almost f -algebra and the second order dual A'' of A is also an almost f -algebra.

It is proved that the order continuous order bidual $(A')'_n$ of an Archimedean f -algebra A is an f -algebra and the second order dual A'' of A is again an f -algebra with respect to the Arens multiplication.

It is obtained that the order continuous order bidual $(A')'_n$ of an Archimedean d -algebra A is a d -algebra with respect to the Arens multiplication. It is shown that if the d -algebra A is commutative or has positive squares then the second order dual A'' is again a d -algebra with respect to the Arens multiplication and A'' is commutative and its squares are positive.

Keywords: Almost f -algebra, f -algebra, d -algebra, the second order dual, order continuous order bidual.

1. GİRİŞ

Tezimizde örgü sıralı cebirlerin sıralı ikinci dualinin cebirsel yapısı üzerinde çalışılmıştır.

Şimdi örgü sıralı cebirlerin farklı türlerinin sıralı ikinci duali hakkında bilgi verelim. Bu yönde elde edilen ilk sonuçlardan birisi Archimedean f -ceberi A 'nın sıralı sürekli ikinci duali $(A')'_n$ Arens çarpımına göre bir Dedekind Tam f -cebiridir (Huijsmans ve De Pagter, 1984).

Tezimizin dördüncü bölümünde bu neticenin iki değişik ispatını vereceğiz. Huijsmans bir Archimedean f -ceberi A 'nın ikinci sıralı duali A'' 'nün , Arens çarpımına göre bir Archimedean f -ceberi olduğunu ispat etmiştir (Huijsmans , 1989). Banach f -cebirlerinin sınıfı için temsiller kullanılarak aynı netice Scheffold tarafından bağımsız olarak elde edilmiştir (Scheffold, 1993). Huijsmans şunu da göstermiştir : $F \in A'', G \in (A')'_s$ ise $F.G = G.F = 0$ dir. Özellikle bu her $F, G \in A''$ için $F.G \in (A')'_n$ olmasını gerektirir ve $(A')'_s$ deki Arens çarpımı aşıkardır (Huijsmans , 1989).

Bir Archimedean hemen hemen f -ceberi A 'nın (d -ceberi A) sıralı ikinci duali A'' 'nün , Arens çarpımına göre bir Archimedean hemen hemen f -ceberi (d -ceberi) olup olmadığı sorusu sorulmuştur (Huijsmans , 1991). Scheffold bir Banach hemen hemen f -ceberi A 'nın sıralı sürekli ikinci duali $(A')'_n$ 'nin aynı zamanda Arens çarpımına göre bir Banach hemen hemen f -ceberi olduğunu temsil teorisi vasıtasıyla gösterdi (Scheffold , 1993). Çalışmamızın üçüncü bölümünde bir örgü normu olmayan Archimedean hemen hemen f -cebirlerinin daha geniş bir sınıfı için bu neticenin temel ispatının geçerli olduğunu kanıtlayacağız. Gerçekten, Archimedean hemen hemen f -ceberi A 'nın sıralı ikinci duali A'' 'nün aynı zamanda bir Archimedean (bundan dolayı değişmeli) hemen hemen f -ceberi olduğunu göstereceğiz. Buna ilaveten f -cebirleri için söz ettiğimiz özelliklerin yanı sıra şu özellikte sağlanır : $F \in A''$, $G \in (A')'_s$ için $F.G = G.F = 0$ dir ve $F, G \in A''$ için $F.G \in (A')'_n$ dir.

Scheffold , bir Banach d -ceberi A 'nın sıralı sürekli sıralı ikinci duali $(A')'_n$ 'nin bir sol Banach d -ceberi olduğunu göstermiştir (Scheffold , 1994). Archimedean d -cebirleri değişmeli olmadığından d -cebirlerinin sınıfı için bunu ispat etmek zordur. Çalışmamızın beşinci bölümünde ; A , Archimedean d -ceberi olduğu zaman $(A')'_n$ 'nin de Archimedean d -ceberi olduğunu gösterdik (yani $(A')'_n$ hem sol hem de sağ d -cebiridir). Bir Archimedean d -ceberi A 'nın sıralı ikinci duali A'' 'nün tamamı için benzer neticeler elde edemeyiz. (Hemen hemen) f -cebirleri durumunda geliştirdiğimiz ispat yöntemini uygulayamayız.

Gereksiz tekrarlamalara karşı çalışmamız süresince tüm vektör örgülerin ve sıralı cebir örgülerin Archimedean olduğunu varsayacağız.

Tanım 2.1

E bir küme üzerindeki yansıma, ters simetrik ve geçişme özellikleri sıralama bağıntısı olarak olsun. Her A kümesi üzerindeki $\geq$ sıralama bağıntısı şu özellikleri sağlar:

$$1) \text{ (yansıma) Her } x \in E \text{ için } x \geq x \quad (2.2)$$

$$2) \text{ (ters simetrik) Her } x, y \in E \text{ için } x \geq y \text{ ve } y \geq x \text{ ise } x = y \quad (2.3)$$

$$3) \text{ (geçişme) Her } x, y, z \in E \text{ için } x \geq y \text{ ve } y \geq z \text{ ise } x \geq z \quad (2.4)$$

Herhangi bir küme bir sıralama bağıntısı ile donatıldığında bu kümeye kısmi sıralı küme denir. Özellikle sıralama bağıntısı bir reel vektör uzayına ise kısmi sıralı reel vektör uzayı denir.

$(E, \geq)$ bir reel vektör uzayı ve $\geq$ E üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y, z \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$1) x \geq y \rightarrow x + z \geq y + z \quad (2.5)$$

$$2) x \geq y \rightarrow \alpha x \geq \alpha y \quad (2.6)$$

sağlanırsa sıralı uzaylara E^+ ve sıralı vektör uzayı denir.

Sıralı vektör uzayı E^+ için bir elemanı x olsun. $x \geq 0$ ise x^+ pozitifir denir. E^+ için tüm pozitif elemanların kümesine E^+ nin pozitif kısmı denir. $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2

E topolojik normluklu ve sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $\|x, y\|$ normunun supremumu ve infimumu yani E^+ nin elemanı ise E^+ ve bir Riesz uzayı (veya bir vektör örgüsü) denir. Kısaltık olarak $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Bir Riesz uzayının bir elemanı x olsun. x^+ in pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0, \quad |x| = x \vee (-x) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

2. ÖN BİLGİLER

İlk olarak çalışmamızda çok sık kullanacağımız kavramların tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.1

(i) Bir küme üzerindeki yansıma , ters simetri ve geçişme özellikleri sıralama bağıntısı olarak bilinir. Bir E kümesi üzerindeki $\geq$ sıralama bağıntısı şu özellikleri sağlar :

$$1) \text{ (yansıma) Her } x \in E \text{ için } x \geq x. \quad (2.1)$$

$$2) \text{ (ters simetri) Her } x, y \in E \text{ için } x \geq y \text{ ve } y \geq x \text{ ise } x = y. \quad (2.2)$$

$$3) \text{ (geçişme) Her } x, y, z \in E \text{ için } x \geq y \text{ ve } y \geq z \text{ ise } x \geq z. \quad (2.3)$$

Herhangi bir küme bir sıralama bağıntısı ile donatılmış ise bu kümeye kısmi sıralı küme denir. Üzerinde sıralama tanımlanmış reel vektör uzayına da kısmi sıralı reel vektör uzayı denir.

(ii) E , bir reel vektör uzayı ve $\geq$, E üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y, z \in E$ ve $0 \leq \alpha \in \mathbf{R}$ için ,

$$1) x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z \quad (2.4)$$

$$2) x \geq y \Rightarrow \alpha x \geq \alpha y \quad (2.5)$$

aksiyomları sağlanıyorsa E ' ye sıralı vektör uzayı denir.

Sıralı vektör uzayı E ' nin bir elemanı x olsun. $x \geq 0$ ise x ' e pozitifdir denir. E ' nin tüm pozitif elemanlarının kümesine E ' nin pozitif konisi denir. $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2

E , toplamsal özelliklere sahip bir sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ çifti için $\{x, y\}$ kümesinin *supremumu* ve *infimumu* yine E ' nin elemanı ise E ' ye bir Riesz uzayı (veya bir vektör örgüsü) denir. Klasik olarak $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Bir Riesz uzayının bir elemanı x olsun. x ' in pozitif kısmı , negatif kısmı ve mutlak değeri :

$$x^+ = x \vee 0 \quad , \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad , \quad |x| = x \vee (-x) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3

E bir Riesz uzayı olsun.

- (i) G, E' 'nin bir vektör alt uzayı olsun. Eğer G, E' 'deki örgü işlemleri altında kapalı (yani her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$ ve $x \wedge y \in G$) ise G 'ye, E' 'nin bir Riesz alt uzayı denir.
 - (ii) $x, y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x, y 'ye diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.
 - (iii) E' 'nin boştan farklı bir alt kümesi A olsun. A' 'nin ayırık tümleyeni A^d ile gösterilir ve $A^d = \{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$ şeklinde tanımlanır.
 - (iv) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa E Riesz uzayına Archimedean 'dır (Archimede özelliğine sahiptir) denir.
 - (v) $x \in E$ ve $\{x_\alpha\}, E'$ 'de bir net olsun. Eğer $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ sıralamasını sağlayan $\sup\{x_\alpha\}$ E' 'nin elemanı ise E' 'ye Dedekind Tam denir. Denk olarak, $x_\alpha \downarrow x \geq 0$ sıralamasını sağlayan $\inf\{x_\alpha\}$ E' 'nin elemanı ise E' 'ye Dedekind Tam denir.
 - (vi) A, E' 'nin bir alt kümesi olsun. $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyorsa A' 'ya *solid* (katı) denir.
- E' 'nin bir *solid* vektör alt uzayına E' 'de bir ideal denir.
- (vii) A, E içerisinde bir ideal olsun. $\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in A$ oluyorsa A' 'ya E' 'de band denir. Denk olarak, $D \subseteq A^+$ ve $D \uparrow x$ iken $x \in A$ oluyorsa A' 'ya E' 'de band denir.

Tanım 2.4

- (i) Bir E Riesz uzayının iki elemanı x ve y , $x \leq y$ sıralamasını sağlasın. $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ şeklinde tanımlanan alt kümeye sıralı aralık denir.
- (ii) Bir A kümesi hem yukarıdan hemde aşağıdan sınırlı ise (denk olarak, bir sıralı aralık A' 'yı kapsarsa) A' 'ya sıralı sınırlıdır denir.
- (iii) E bir Riesz uzayı ve E' 'nin bir Riesz alt uzayı G olsun. Her $0 < x \in E$ için $0 < y \leq x$ sıralamasını sağlayan bir $y \in G$ varsa, G' 'ye E içerisinde sıralı yoğundur denir.

Tanım 2.5

E, F Riesz uzayı olsun.

(i) $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ bir lineer fonksiyonel olsun. Her $x \in E^+$ için $f(x) \geq 0$ oluyorsa f fonksiyoneline pozitifdir denir.

(ii) $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ bir lineer fonksiyonel olsun. f, E' 'nin sıralı sınırlı alt uzaylarını $\mathbf{R}$ 'nin sınırlı alt uzaylarına örterek eşliyorsa f' 'ye sıralı sınırlıdır denir.

(iii) $\{x_\alpha\}$ E' 'de bir net olsun. Eğer $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde aynı indeksli kümede bir $\{y_\alpha\}$ neti varsa $\{x_\alpha\}$, x 'e sıralı yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ ile gösterilir.

$T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun. E' 'de $x_\alpha \xrightarrow{0} 0$ iken F' 'de $Tx_\alpha \xrightarrow{0} 0$ oluyorsa T' 'ye sıralı sürekli operatör denir.

(iv) $T : E \rightarrow F$ bir pozitif operatör olsun. Her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa T operatörüne aralık koruyandır denir.

(v) $T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ oluyorsa T' 'ye bir örgü homomorfizma denir.

Tanım 2.6

E bir Riesz uzayı olsun.

(i) E üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin vektör uzayına E' 'nin sıralı duali denir. E' ile gösterilir.

(ii) E üzerindeki tüm sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı E'_n ile gösterilir. E'_n, E üzerinde bandtır. E'_n bandına , E' 'nin sıralı sürekli duali denir.

(iii) Eğer E bir Riesz uzayı ise onun sıralı duali E' yine bir Riesz uzayıdır. E' üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin Riesz uzayına E' 'nin ikinci sıralı duali denir. E'' ile gösterilir ve E'' , E' 'nün sıralı dualidir.

Tanım 2.7

Bir A vektör uzayı , her $x, y, z \in A$ ve her α skaleri için ,

$$1) (xy)z = x(yz) \text{ ve } (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy) \quad (2.7)$$

$$2) x(y + z) = xy + xz \text{ ve } (x + y)z = xz + yz \quad (2.8)$$

özelliklerini sağlayan bir ikili işlem $(x, y) \rightarrow xy$ (çarpım) ile donatılmış ise , A' 'ya bir cebir denir.

Bu bölümün kalan kısmında çalışmamızla ilgili diğer ön hazırlıkları yapalım.

A bir reel vektör örgüsü (veya Riesz uzayı) olsun. A' 'nin birinci sıralı dualini A' ve ikinci sıralı dualini A'' ile göstereceğiz. A' 'nin bir Dedekind Tam (ve böylece Archimedean) vektör örgüsü olduğu bilinmektedir. Her $x \in A$ için $x'' \in A''$ elemanı her $f \in A'$ için ,

$$x''(f) = f(x) \quad (2.9)$$

ile tanımlanır ve o zaman her $x \in A$ için ,

$$\sigma(x) = x'' \quad (2.10)$$

ile de $\sigma: A \rightarrow A''$ dönüşümü tanımlanır. Buradaki σ dönüşümü A' dan A'' 'ne bir vektör örgü homomorfizmasıdır (Zaanen, 1983). A' aşık bir uzaydır (Zaanen, 1983). Bununla birlikte A' , A' 'nin noktalarını ayrıştırırsa σ dönüşümü birebirdir ve bu durumda A' 'yı A'' 'nün vektör alt örgüsü $\sigma(A)$ ile özdeşleriz. A'' 'nün Dedekind Tam olduğunu ve A' aşıkarsa A'' 'nün de aşık olduğunu biliyoruz. Şimdi A' 'nin bir örgü sıralı cebir olması durumunda A'' 'nün cebirsel yapısı üzerinde duracağız.

Tanım 2.8

A birleşme özelliğine sahip (değişme özelliğine sahip olması gerekli olmayan) bir vektör örgüsü cebir öyleki her $0 \leq x, y \in A$ için $0 \leq x.y$ ise A' 'ya bir örgü sıralı cebir (veya l -cebiri , Riesz cebiri) denir. Her $0 \leq x, y \in A$ için $0 \leq x.y$ olması $|x.y| \leq |x|.|y|$ olmasına denktir.

A'' içinde üç adımda , Arens çarpımı olarak bilinen çarpmayı şöyle sunabiliriz. $x, y \in A$, $f \in A'$ ve $F, G \in A''$ için $f.x \in A'$, $G.f \in A'$ ve $F.G \in A''$ 'nü şu eşitlikler vasıtası ile tanımlarız :

$$(i) \quad (f.x)(y) = f(xy) \quad (2.11)$$

$$(ii) \quad (G.f)(x) = G(f.x) \quad (2.12)$$

$$(iii) \quad (F.G)(f) = F(G.f) \quad (2.13)$$

A'' 'nün Arens çarpımına göre bir örgü sıralı cebir olduğunu göstermek (2.13) te tanımlandığı gibi doğrudan yapılır (Huijsmans ve De Pagter, 1984). A' 'daki çarpım değişmeli olsa bile A'' 'deki Arens çarpımı değişmeli olmayabilir. σ bir cebir homomorfizmadır. Bundan dolayı A' , A' 'nin noktalarını ayrıştırdığı zaman A' 'yı A'' 'nün $\sigma(A)$ alt örgü cebiri ile özdeşleyebiliriz. A' 'deki bütün sıralı sınırlı , sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin

bandı $(A')'_n$ ile gösterilir ve A'' ' deki ayrık tümleyen $(A')'_s$ ile gösterilir, $(A')'_s$ de A' üzerindeki bütün sıralı sınırlı tekil fonksiyonların bandıdır.

A'' Dedekind Tam olduğunda ,

$$A'' = (A')'_n \oplus (A')'_s \quad (2.14)$$

bir sıralı direkt toplamdır. Bir Dedekind Tam vektör örgüsünde bant olduklarından $(A')'_n$ ve $(A')'_s$ de Dedekind Tam vektör örgüsüdür. Arens çarpımına göre $(A')'_n$ ' nin aynı zamanda bir l -cebiri olduğunu göstermek kolaydır (Huijsmans ve De Pagter, 1984). Ayrıca $\sigma(A) \subset (A')'_n$ olduğu açıktır.

A değişmeli olduğu zaman (Archimedean hemen hemen f -cebirleri ve f -cebirleri için değişmelidir fakat d -cebirleri için değildir (Bernau ve Huijsmans , 1990)) her $x \in A$ için ve $f \in A'$ için ,

$$x'' \cdot f = f \cdot x \quad (2.15)$$

dir. Gerçektende , her $y \in A$ için ,

$$(x'' \cdot f)(y) = x''(f \cdot y) = (f \cdot y)(x) = f(yx) = f(xy) = (f \cdot x)(y)$$

dir. Üstelik bu durumda her $x \in A$ ve $F \in A''$ için ,

$$x'' \cdot F = F \cdot x'' \quad (2.16)$$

dir. Bunun ispatı için ; her $f \in A'$ için ,

$$\begin{aligned} (x'' \cdot F)(f) &= x''(F \cdot f) = (F \cdot f)(x) = F(f \cdot x) \\ &= F(x'' \cdot f) = (F \cdot x'')(f) \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim. Bu iki özellik çalışmamızda kullanılacaktır.

Bir f -cebir , hemen hemen f -cebir ve d -cebir tanımlarını verelim (Bernau ve Huijsmans , 1990).

Tanım 2.9

Bir l -cebir A ' ya eğer $x \wedge y = 0$ ve $0 \leq z \in A$ iken $xz \wedge y = zx \wedge y = 0$ oluyorsa bir f -cebir denir.

Tanım 2.10

Bir l -cebiri A 'ya eğer $x \wedge y = 0$ iken $xy = 0$ oluyorsa hemen hemen f -cebiri denir. Herhangi bir f -cebiri , hemen hemen f -cebiri ' dir.Fakat tam tersi doğru değildir. Archimedean (hemen hemen) f -cebirleri değişmelidir (eğer f -cebiri durumundaysa birleşme özelliği de vardır). Eğer A hemen hemen f -cebiridir ise her $x \in A$ için $x.x^+ \geq 0$ ve $x^2 \geq 0$ dır.

Tanım 2.11

Bir l -cebiri A 'ya eğer $x \wedge y = 0$ ve $0 \leq z \in A$ iken $zx \wedge zy = 0$ oluyorsa bir sol d -cebiri denir. Bir l -cebiri A 'ya eğer $x \wedge y = 0$ ve $0 \leq z \in A$ iken $xz \wedge yz = 0$ oluyorsa bir sağ d -cebiri denir. Bir l -cebiri eğer hem sol hem de sağ d -cebiri ise buna kısaca d -cebiri denir.

Herhangi bir f -cebiri bir d -cebirdir. Fakat tam tersi doğru değildir.Hemen hemen f -cebirlerinin d -cebir olması gerekmez. Aynı şekilde d -cebirlerinin de hemen hemen f -cebir olması gerekmez. Archimedean d -cebirlerinin değişmeli olması gerekmediği gibi pozitif kareleri olması da gerekmez. Değişmeli Archimedean d -cebirleri veya pozitif kareli Archimedean d -cebirleri hemen hemen f -cebirleridir. Bununla birlikte , birimli veya yarı asal (yalnızca 0 nilpotent elemandır) Archimedean hemen hemen f -cebirleri ve Archimedean d -cebirleri , f -cebiridirler (Bernau ve Huijsmans , 1990).

Son olarak ispatlarımızda önemli rol oynayacak vektör örgüleri üzerindeki bazı temel neticeleri verelim. İlk olarak ünlü Riesz-Kantorovich teoremini alalım (Aliprantis ve Burkinshaw , 1985).

Eğer A bir vektör örgüsü ise A' bir Dedekind Tam vektör örgüsüdür. Her $g, h \in A'$, $0 \leq x \in A$ için bu örgü işlemleri şu eşitlikleri sağlar :

$$(g \vee h)(x) = \sup\{g(y) + h(z) : x = y + z , 0 \leq y, z \in A\} \quad (2.17)$$

$$(g \wedge h)(x) = \inf\{g(y) + h(z) : x = y + z , 0 \leq y, z \in A\} \quad (2.18)$$

İkinci olarak , A bir vektör örgüsü ve $\sigma(A) = \{x'' : x \in A\}$ ise Nakano ' nun iyi bilinen bir sonucuna göre $(A')'_n$ içinde $\sigma(A)$ ile üretilen sıralı ideal ,

$$I(\sigma(A)) = \{F \in (A')'_n : |F| \leq x'' , \text{ uygun } 0 \leq x \in A \text{ için } \} \quad (2.19)$$

$(A')'_n$ içerisinde sıralı yoğundur (Meyer-Nieberg, 1991). Bu her $0 < F \in (A')'_n$ için $0 < G \leq F$ sıralamasını sağlayan bir $G \in I(\sigma(A))$ varolması demektir. Denk olarak, $0 < F_\alpha \in I(\sigma(A))$ (bir $0 < x_\alpha \in A$ için $F_\alpha \leq x_\alpha''$ demektir) neti var ki $F_\alpha \uparrow F$ dir.

$F \in A''$ için F' nin mutlak çekirdeği veya sıfır ideali :

$$N_F = \{f \in A' : |F|(|f|) = 0\} \quad (2.20)$$

olarak tanımlanır.

$N_F = N_{|F|} = N_{F^+} \cap N_{F^-}$, F' nin sıfır uzayında kapsanan A' içerisinde bir sıralı ideal olduğu gerçektir. Eğer $F \in (A')'_n$ ise N_F , A' içerisinde bir banttır. $C_F = N_F^{dd}$ 'nin ayrık tümleyeni F' nin taşıyıcısı olarak adlandırılır ve A' içerisinde bir banttır.

Şimdi vereceğimiz teoremden taşıyıcı ve sıfır idealinin bazı özelliklerini listeleyeceğiz.

Teorem 2.12

- (i) (Nakano) Eğer $G, H \in (A')'_n$ ise $G \perp H$ ($|G| \wedge |H| = 0$) olması için gerek ve yeter koşul $C_G \subset N_H$ (simetriyle birlikte gerek ve yeter koşul $C_H \subset N_G$) olmasıdır.
- (ii) Eğer $G \in (A')'_n$ ise $A' = N_G \oplus C_G$ (Bant ayrıştırma).
- (iii) Eğer $H \in A''$ ise $H \in (A')'_s$ olması için gerek ve yeter şart $N_H^{dd} = A'$ olmasıdır.

İspat : (i) (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) veya (Zaanen, 1983) kaynak olarak verebiliriz.

(ii) (Zaanen, 1983) kaynak olarak verebiliriz.

(iii) Bir yönünün ispatı için (Luxemburg, 1965) kaynak olarak verebiliriz. Tersini ispat için öyle bir $H \in A''$ alalım ki N_H sıfır ideali A' içerisinde sıralı yoğun olsun. Genelliği bozmadan $N_H = N_{|H|}$ eşitliğini sağlayan $H \geq 0$ kabul edelim. $0 \leq F \in (A')'_n$ seçelim. $N_H \subset N_{H \wedge F}$ olması $N_{H \wedge F}^{dd} = A'$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan $H \wedge F$ sıralı süreklidir ve bundan dolayı $N_{H \wedge F} = N_{H \wedge F}^{dd}$ dir. Bu iki neticeyi birleştirirsek $N_{H \wedge F} = A'$ bulunur. Buradan da her $0 \leq F \in (A')'_n$ için $H \wedge F = 0$ dir. Bu da gösterir ki $H \in (A')'_s$ dir.

Sonuç 2.13

Eğer $G, H \in (A')'_n$, $G \perp H$ ve $0 \leq f \in A'$ ise o zaman $f = g + h$, $g \wedge h = 0$ ve $G(g) = 0 = H(h)$ olacak biçimde $g, h \in A'$ vardır.

İspat : Teorem 2.12 (ii) den $g \in N_G$ ve $h \in C_G$ bulabiliriz ki $f = g + h$ sağlanır ve $g \wedge h = 0$ olduğu açıktır. Teorem 2.12 (i) vasıtasıyla $C_G \subset N_H$ ve buradan da $G(g) = 0 = H(h)$ elde edilir.

3. HEMEN HEMEN F-CEBİRLERİNİN SIRALI İKİNCİ DUALI

Bu bölümde ilk olarak bir hemen hemen f -cebiri A 'nın sıralı sürekli sıralı ikinci duali $(A')'_n$ 'nin Arens çarpımına göre hemen hemen f -cebiri olduğunu göstereceğiz. Ardından her $H \in (A')'_s$ ve her $G \in (A')'_n$ için $H.G = 0$ olduğunu göstereceğiz. Buradan da A'' 'nın bir hemen hemen f -cebiri olduğu elde edilir.

Önerme 3.1

A bir hemen hemen f -cebiri olsun. Eğer $0 \leq x \in A$, $0 \leq G, H \in (A')'_n$ elemanları $G \wedge H = 0$ ve $0 \leq G, H \leq x''$ koşullarını sağlarsa $G.H = 0$ dır.

İspat : $0 \leq f \in A'$ seçelim. Sonuç 2.13 ' ten $x''.f = f.x = g + h$, $g \wedge h = 0$ ve $G(g) = 0 = H(h)$ eşitliklerini sağlayan $g, h \in A'$ vardır. Riesz-Kantorovich teoremi ile ,

$$0 = (g \wedge h)(x) = \inf \{g(y) + h(z) : x = y + z , 0 \leq y, z \in A\}. \quad (3.1)$$

$\varepsilon > 0$ ise yukarıdaki formül $x = y + z$ ve $g(y) + h(z) < \varepsilon$ olacak biçimde $0 \leq y, z \in A$ elemanlarının varlığını verir (burada y ve z , ε ' a bağlıdır). Şimdi ,

$$G_1 = G \wedge (y - y \wedge z)'' , \quad H_1 = H \wedge (z - y \wedge z)''$$

vasıtasıyla $0 \leq G_1, H_1 \in (A')'_n$ fonksiyonellerini tanımlayalım. O zaman ;

$$\begin{aligned} 0 \leq G - G_1 &= (G - (y - y \wedge z)')^+ \leq (x'' - (y - y \wedge z)'')^+ \\ &= y'' + z'' - (y - y \wedge z)'' \leq 2z'' \end{aligned} \quad (3.2)$$

ve benzer şekilde ;

$$0 \leq H - H_1 \leq 2y'' \quad (3.3)$$

elde ederiz. Şimdi ;

$(y - y \wedge z) \wedge (z - y \wedge z) = 0$ olduğuna dikkat edersek A bir hemen hemen f -cebir olduğundan

$(y - y \wedge z).(z - y \wedge z) = 0$ dır. Buradan;

$$0 \leq G_1.H_1 \leq (y - y \wedge z)''.(z - y \wedge z)'' = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. Şimdi $((G - G_1).H)(f)$ değerini düşünelim. (3.2) ve $G(g) = 0$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &\leq ((G - G_1).H)(f) = (G - G_1)(H.f) \leq (G - G_1)(x''.f) \\
&= (G - G_1)(f.x) = (G - G_1)(g + h) \\
&\leq G(g) + (G - G_1)(h) \leq 0 + 2z''(h) = 2h(z)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

buluruz. Benzer şekilde ;

$$\begin{aligned}
0 &\leq (G_1.(H - H_1))(f) \leq (G.(H - H_1))(f) \leq (x''.(H - H_1))(f) \\
&= ((H - H_1).x'')(f) = (H - H_1)(f.x) = (H - H_1)(g + h) \\
&\leq (H - H_1)(g) + H(h) \leq 2y''(g) + 0 = 2g(y)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde ederiz. (3.4) ' den $G_1.H_1 = 0$ dır ve buradan da $G.H = (G - G_1).H + G_1.(H - H_1)$ olur.

Bu nedenle (3.5) ve (3.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &\leq (G.H)(f) = ((G - G_1).H)(f) + (G_1.(H - H_1))(f) \\
&\leq 2h(z) + 2g(y) < 2\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan , her $0 \leq f \in A'$ için $(G.H)(f) = 0$ olur. Yani $G.H = 0$ dır.

Şimdiki vereceğimiz sonuç , temsil teorisi vasıtasıyla Banach hemen hemen f -cebirleri için Scheffold tarafından ispat edilen standart sıralı sürekli argümanlar (tartışmalar , deliller , tezler) kullanılarak Önerme 3.1 ' in genişlemesi olarak elde edilmiştir (Meyer-Nieberg , 1991).

Teorem 3.2

Eğer A bir hemen hemen f -cebiri ise o zaman sıralı sürekli sıralı ikinci dual $(A')'_n$ Arens çarpımına göre bir hemen hemen f -cebiridir.

İspat : $0 \leq G, H \in (A')'_n$ ve $G \wedge H = 0$ ise $G.H = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\sigma(A)$ ile üretilen $(A')'_n$ 'deki sıralı ideal $I(\sigma(A))$ olsun. Yani ,

$$I(\sigma(A)) = \{K \in (A')'_n : |K| \leq x'', \text{ uygun } 0 \leq x \in A \text{ için } \}.$$

Sunuştaki gözlendiği gibi $I(\sigma(A))$, $(A')'_n$ de sıralı yoğun olduğundan $I(\sigma(A))$ içerisinde $G_\alpha, H_\beta \in I(\sigma(A))$ netleri vardır ki $0 \leq G_\alpha \uparrow G$, $0 \leq H_\beta \uparrow H$ olur. Burada $0 \leq x_\alpha, y_\beta \in A$ için $0 \leq G_\alpha \leq x''_\alpha$, $0 \leq H_\beta \leq y''_\beta$ şeklindedir. Şimdi $G \wedge H = 0$ olması her α, β için $G_\alpha \wedge H_\beta = 0$ olmasını gerektirir. Üstelik ,

$$0 \leq G_\alpha, H_\beta \leq (x_\alpha + y_\beta)''$$

olduğundan Önerme (3.1) ile her α, β için $G_\alpha.H_\beta = 0$ elde ederiz. $0 \leq f \in A'$ seçelim. Her $0 \leq x \in A$ için $0 \leq H_\beta(f.x) \uparrow H(f.x)$ olduğundan $0 \leq H_\beta.f \uparrow H.f$ dir. Fakat her G_α sıralı sürekli olduğundan $0 \leq (G_\alpha.H_\beta)(f) \uparrow (G_\alpha.H)(f)$ dir. Bu her $0 \leq f \in A'$ için sağlanır, bu nedenle $0 \leq G_\alpha.H_\beta \uparrow G_\alpha.H$ olur. Şimdi her β için $G_\alpha.H_\beta = 0$ olması her α için $G_\alpha.H = 0$ olduğunu gösterir.

$0 \leq G_\alpha \uparrow G$ olduğundan her $0 \leq f \in A'$ için $0 \leq G_\alpha(H.f) \uparrow G(H.f)$ elde ederiz. Bu da $0 \leq G_\alpha.H \uparrow G.H$ olmasını gerektirir. Her α için $G_\alpha.H = 0$ ile birleştirdiğimizde $G.H = 0$ sonucunu elde ederiz.

Bir hemen hemen f -cebiri sıralı ikinci dualinin tamamının yine bir hemen hemen f -cebiri olduğunu göstermek için bazı ön bilgilere ihtiyacımız vardır.

Yardımcı Teorem 3.3 (Cauchy Eşitsizliği)

A bir hemen hemen f -cebiri ve $0 \leq f \in A'$ ise o zaman her $x, y \in A$ için ,

$$|f(xy)| \leq \sqrt{f(x^2)} \sqrt{f(y^2)} \text{ dir.} \quad (3.8)$$

İspat : $x, y \in A$ sabit turalım. A değişmeli ve pozitif kareli olduğundan her $\alpha \in \mathbf{R}$ için ,

$$(x - \alpha y)^2 = x^2 - 2\alpha xy + \alpha^2 y^2 \geq 0 \text{ olur.}$$

Bu nedenle her $\alpha \in \mathbf{R}$ için ,

$$f(x^2) - 2\alpha f(xy) + \alpha^2 f(y^2) \geq 0 \text{ dır.}$$

O halde α ' ya göre bu ikinci dereceden polinomun diskriminantı negatif olacağından

$$4f(xy)^2 - 4f(x^2)f(y^2) \leq 0 \text{ dır.}$$

Bu da istediğimiz sonucu verir.

$(A')'_n$ bir hemen hemen f -cebiri ve A' ' nün her f elemanı $(A')'_n$ üzerinde bir lineer fonksiyonel tanımladığından Yardımcı Teorem 3.3 ' ün bir sonucu olarak şunu elde ederiz.

Yardımcı Teorem 3.4

Eğer A bir hemen hemen f -cebiri ve $0 \leq f \in A'$ ise o zaman her $G, H \in (A')'_n$ için ,

$$|(G.H)(f)| \leq \sqrt{G^2(f)} \cdot \sqrt{H^2(f)} \text{ dir.} \quad (3.9)$$

Özellikle , $0 \leq G \in (A')'_n$ ve $0 \leq x \in A$ ($H = x^n$ alınarak) ise her $0 \leq f \in A'$ için ,

$$0 \leq (G.f)(x) \leq \sqrt{G^2(f)} \cdot \sqrt{f(x^2)} \quad (3.10)$$

elde ederiz.

Yardımcı teoremin bir sonucu olarak şunu verelim.

Sonuç 3.5

A bir hemen hemen f -cebiri , $x \in A$ ve $0 \leq f \in A'$ olsun. Bu durumda $f.x = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f(x^2) = 0$ olmasıdır.

Önerme 3.5.1

A bir hemen hemen f -cebiri , $x \in A$ olsun. $x^2 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $y \in A$ için $x.y = 0$ olmasıdır.

İspat : $x^2 = 0$ iken her $y \in A$ için $x.y = 0$ olduğunu göstermek için $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ kabul edelim.

$$(y - nx)^2 \geq 0 \text{ eşitsizliğinden ,}$$

$$y^2 \geq 2nxy - n^2x^2 = 2nxy \geq 0 , \quad (n=1,2,3,\dots)$$

elde ederiz. Archimedean özelliğinden $x.y = 0$ olur.

Bu sonucu ikinci yoldan şu şekilde ispatlayabiliriz.

$$(y - nx)(y - nx)^+ \geq 0 \text{ olduğundan}$$

$$0 \leq xy - xy \wedge nx^2 \leq x(y - y \wedge nx) \leq \frac{1}{n}y^2 , \quad (n=1,2,3,\dots)$$

elde ederiz. Buradan $x^2 = 0$ ise o zaman $0 \leq xy \leq n^{-1}y^2$, $(n=1,2,3,\dots)$ buluruz.

Archimedean özelliğinden $x.y = 0$ olur.

Bizim amacımızı gerçekleştirebilmemiz için aşağıdaki önermeye de ihtiyacımız vardır.

Önerme 3.6

A bir hemen hemen f -cebiri ve $0 \leq f \in A'$ olsun. Bu durumda her $x \in A$ için ,

$$(f.x)^+ = f.x^+ \text{ dir.} \quad (3.11)$$

Diğer bir ifadeyle $f.A = \{f.x : x \in A\}$, A' ' nün bir vektör alt örgüsüdür (ve her $x \in A$ için $(f.x)^- = f.x^-$, $|f.x| = f.|x|$ dir). Ayrıca $T_f(x) = f.x$ şeklinde tanımlı $T_f : A \rightarrow A'$ dönüşümü bir örgü homomorfizmasıdır.

İspat : Her $0 \leq y \in A$ için $x^+ y \geq xy$ olduğundan her pozitif y için ,

$(f.x^+)(y) = f(x^+ y) \geq f(xy) = (f.x)(y)$ buluruz. Bu da $f.x^+ \geq f.x$ demektir. Aynı zamanda , $f.x^+ \geq 0$ olması gösterir ki $f.x^+ \geq (f.x)^+$ dir.

Eşitsizliğin tersini göstermek için , $0 \leq y \in A$ alalım ve $g = (f.x)^+$ diyelim. $x^+ \wedge (x^- \wedge y) = 0$ ile birlikte hemen hemen f -cebiri özelliği kullanılırsa $x^+(x^- \wedge y) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde , $(x^- - x^- \wedge y) \wedge (y - x^- \wedge y) = 0$ neticesinden hemen hemen f -cebiri tanımını kullanarak $(x^- - x^- \wedge y).(y - x^- \wedge y) = 0$ bulunur. Buradan da ,

$$x^-(y - x^- \wedge y) = (x^- \wedge y).(y - x^- \wedge y) \text{ olur.}$$

Böylece ,

$$\begin{aligned} g(y) &\geq g(y - x^- \wedge y) \geq (f.x)(y - x^- \wedge y) \\ &= f(xy - x(x^- \wedge y)) \\ &= f(x^+ y - x^- y - x^+(x^- \wedge y) + x^-(x^- \wedge y)) \\ &= f(x^+ y - x^-(y - x^- \wedge y)) \\ &= f(x^+ y - (x^- \wedge y)(y - x^- \wedge y)) \\ &\geq (f.x^+)(y) - f(y^2) \end{aligned}$$

elde edilir. y yerine $(1/n)y$ yazarsak

$$g(y) \geq (f.x^+)(y) - \frac{1}{n}f(y^2) \quad , \quad (n=1,2,3,\dots) \text{ buluruz.}$$

Sonuç olarak , $g(y) \geq (f.x^+)(y)$ dir. Bu da her $0 \leq y \in A$ için sağlanır. Böylece $(f.x)^+ \geq f.x^+$ olur ve ispat biter.

Şimdi Önerme 3.6 daki $T_f : A \rightarrow A'$ örgü homomorfizmasının adjointi $T'_f : A'' \rightarrow A'$, her $x \in A$, $G \in A''$ için ,

$$(T'_f G)(x) = G(T_f x) = G(f.x) = (G.f)(x) \quad (3.12)$$

ile tanımlanır. Buradan da her $G \in A''$ için $T'_f G = G.f$ elde edilir.

Önerme 3.7

A bir hemen hemen f -cebiri, $0 \leq f \in A'$ ve $0 \leq H \in A''$ olsun. Eğer $g \in A'$, $0 \leq g \leq H.f$ sıralamasını sağlarsa o zaman $0 \leq K \leq H$ ve $g = K.f$ koşullarını sağlayan bir $K \in A''$ vardır. Böylece $H \in (A')'_n$ ise $K \in (A')'_n$ dir. Diğer bir ifade ile T'_f aralık koruyandır (Maharam özelliğine sahip dönüşümdür).

İspat : Önerme 3.6 dan eğer $x \in A$ ve $f.x = 0$ ise $f.x^+ = 0$ dir. Bu nedenle $0 \leq g(x^+) \leq (H.f)(x^+) = H(f.x^+) = 0$ olması $g(x^+) = 0$ sonucunu verir. Benzer şekilde $g(x^-) = 0$ elde ederiz. Böylece $g(x) = 0$ olur. Her $x \in A$ için ,

$$K(f.x) = g(x) \quad (3.13)$$

ile A' ' nün $f.A$ vektör altörgüsü üzerinde bir K lineer fonksiyoneli tanımlayalım. Buradaki K , $f.A$ üzerinde bir pozitif lineer fonksiyoneldir. Gerçekten , eğer $f.x \geq 0$ ise o zaman $f.x = (f.x)^+ = f.x^+$ olması bize $K(f.x) = K(f.x^+) = g(x^+) \geq 0$ sonucunu verir. Üstelik $g \leq H.f$ olması durumunda ,

$$K(f.x) = g(x^+) \leq (H.f)(x^+) = H(f.x^+) = H(f.x)$$

olmasını gerektirir. Bu nedenle K , $f.A$ üzerinde $0 \leq K \leq H$ sıralamasını sağlayan A' ' nün $f.A$ vektör altörgüsü üzerinde bir pozitif lineer fonksiyoneldir. Pozitif lineer fonksiyoneller için Hahn-Banach ' ın genişleme teoremiyle , A' ' nün tamamı üzerinde H ile kısıtlı K ' nın bir pozitif genişlemesi vardır (Aliprantis ve Burkinshaw , 1985). Bu genişlemeyi yine K ile gösterirsek A' üzerinde $0 \leq K \leq H$ dir ve her $x \in A$ için $(K.f)(x) = K(f.x) = g(x)$ dir. Öyleyse $g = K.f$ elde ederiz.

T_f örgü homomorfizmasının adjointi T'_f ' nün aralık koruyan (Aliprantis ve Burkinshaw , 1985) olduğu neticesi kullanılarak bu sonucun farklı bir ispatı şöyle yapılır.

Gerçekten , Önerme 3.7 deki ispatımız Aliprantis ve Burkinshaw (1985) deki ispat ile içerik olarak denktir ve her iki ispattada Hahn-Banach teoremi kullanılır. Bu nedenle ,

$$T'_f[0, H] = [0, T'_f H] = [0, H.f] \quad \text{dir.} \quad (3.14)$$

Eğer $0 \leq g \leq H.f$ ise bir $0 \leq K \leq H$ için $g = T'_f(K) = K.f$ dir.

Yardımcı Teorem 3.8

A bir l -cebiri ve A'' içerisinde $G_\alpha \downarrow 0$ olsun. Bu durumda $G_\alpha^2 \downarrow 0$ dır.

İspat : $0 \leq f \in A'$ olsun. Sabit β ve her α için $G_\alpha \leq G_\beta$ ise ,

$$0 \leq G_\alpha^2(f) \leq (G_\alpha \cdot G_\beta)(f) = G_\alpha(G_\beta \cdot f) \downarrow 0 \text{ olur.}$$

Bundan sonra vereceğimiz önermenin ispatında kullanılan metot Huijsmans (1989) da kullandığı metot ile aynıdır.

Önerme 3.9

A bir hemen hemen f -cebiri ve $(A')'_n$ içerisinde $G_\alpha \downarrow 0$ olsun. Bu durumda her $0 \leq F \in A''$ için $F \cdot G_\alpha \downarrow 0$ dır.

İspat : $0 \leq f \in A'$ seçelim. Yardımcı Teorem 3.8 den $G_k^2(f) \leq k^{-4}$, $(k = 1, 2, 3, \dots)$ eşitsizliğini sağlayan $\{G_\alpha\}$ netinin $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ bir alt dizisi vardır. $0 \leq x \in A$ için Yardımcı Teorem 3.4 ,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (G_k \cdot f)(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{G_k^2(f)} \cdot \sqrt{f(x^2)} \leq \sqrt{f(x^2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

ifadesini verir.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (G_k \cdot f)(x) \quad (3.15)$$

ile tanımlanan $g : A^+ \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyoneli A^+ üzerinde toplamsaldır ve bu nedenle A^+ 'nın tamamına bir pozitif lineer genişlemesi vardır (Zaanen , 1983). Bu pozitif lineer genişlemeyi yine g ile gösterelim. $(F \cdot G_\alpha)(f) \downarrow 0$ olduğunu göstermeliyiz. Her pozitif m tamsayısı için

$$F(g) \geq \sum_{k=1}^m F(G_k \cdot f) = \sum_{k=1}^m (F \cdot G_k)(f)$$

olduğuna dikkat edelim. Buradan $\sum_{k=1}^{\infty} (F \cdot G_k)(f)$ serisi yakınsaktır ve bu nedenle $k \rightarrow \infty$ iken

$$(F \cdot G_k)(f) \rightarrow 0 \text{ dır. Bu da ihtiyacımız olan } (F \cdot G_\alpha)(f) \downarrow 0 \text{ sonucunu verir.}$$

Bundan sonraki neticemiz A bir hemen hemen f -cebiri iken A'' 'nün de bir hemen hemen f -cebiri olduğunu ispat ederken son olarak , bize yardımcı olacaktır.

Teorem 3.10

A bir hemen hemen f -cebiri , $G \in (A')'_n$ ve $H \in (A')'_s$ olsun. O zaman $H.G = 0$ dir.

İspat : $0 \leq G \in (A')'_n$ ve $0 \leq H \in (A')'_s$ alalım. Her $0 \leq f \in A'$ için $H(G.f) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. f ' i sabit tutup ,

$$J = \{L \in (A')'_n : L \geq 0, (H.L)(f) = H(L.f) = 0\} \quad (3.16)$$

kümesini yazalım. Açıkça , J toplama ve pozitif skalelerle çarpma altında kapalı ve ayrıca $(A')'_n$ ' in pozitif konisinde bir örgü idealdir (yani , eğer $L_1 \in J$, $0 \leq L_2 \leq L_1$ ise $L_2 \in J$ dir ve $L_1, L_2 \in J$ ise $L_1 \vee L_2 \in J$ dir).

$$0 \leq (H.(L_1 \vee L_2))(f) \leq (H.L_1)(f) + (H.L_2)(f) = 0$$

ifadesinden J ' nin örgü ideal olduğunu ispatlarız.

J ' nin , $(A')'_n$ ' in pozitif konisinde sıralı yoğun olduğunu iddia ediyoruz. Bunun için , $0 < M \in (A')'_n$ için $0 < L \leq M$ sıralamasını sağlayan bir $L \in J$ elemanının var olduğunu göstermeliyiz. Eğer $(H.M)(f) = 0$ ise $L = M$ seçebiliriz. Bundan dolayı $(H.M)(f) = H(M.f) > 0$ farzedelim. $N_H^{dd} = A'$ olduğundan $0 < g \leq M.f$ sıralamasını sağlayan $g \in N_H$ ($H(g) = 0$) bulabiliriz. Teorem 2.12 (iii) vasıtası ile H ' ın tekil olduğu gerçeğini tam olarak kullandık. Önerme 3.7 ile g , $g = L.f$ (burada $L \in (A')'_n$ ve $0 \leq L \leq M$) biçiminde yazabiliriz. Böylece , $H(g) = H(L.f) = 0$ olması $L \in J$ olduğunu gösterir. Çünkü , $g > 0$ olduğundan $L > 0$ elde ederiz.

Şimdi , $J_G = \{L \in J : L \leq G\}$ kümesini düşünelim. J bir örgü ideal olduğundan J_G yukarı doğru yönlendirilmiştir. Üstelik J_G , $(A')'_n$ Dedekind Tam vektör örgüsünde G ile yukarıdan sınırlıdır. Bu nedenle $(A')'_n$ de $G_0 = \sup J_G$ vardır ve $G_0 \leq G$ dir. Önerme 3.9 ile $(H.(G_0 - L))(f) \downarrow 0$, $(L \in J_G)$ olduğundan $(H.G_0)(f) = 0$ dir ve böylece $G_0 \in J_G$ dir. $G = G_0$ olduğunu iddia ediyoruz. Ters olarak $G - G_0 > 0$ olduğunu farzedelim. J , $(A')'_n$ ' nin pozitif konisinde sıralı yoğun olduğundan $0 < L \leq G - G_0$ sıralamasını sağlayan bir $L \in J$ vardır. Buradan $0 < L + G_0 \leq G$ elde ederiz. $L + G_0 \in J$ ile birlikte $L + G_0 \in J_G$ olur. Böylece $L > 0$ olması $L + G_0 \leq G_0$ olmasıyla çelişir. Bu nedenle $G = G_0 \in J$ dir. O halde $(H.G)(f) = 0$ olur. Bu her $0 \leq f \in A'$ için sağlandığından $H.G = 0$ olur.

Sonuç 3.11

A bir hemen hemen f -cebiri ve $H \in (A')'_s$ ise her $f \in A'$ için $H.f = 0$ dır. Böylece , her $F \in A''$, $H \in (A')'_s$ için $F.H = 0$ dır.

İspat : Teorem 3.10 ile her $x \in A$ için $H.x'' = 0$ dır. Sonuç olarak her $x \in A$ ve $f \in A'$ için , $0 = (H.x'')(f) = (x''.H)(f) = x''(H.f) = (H.f)(x)$ dir. O halde her $f \in A'$ için , $H.f = 0$ olur. Buradan her $f \in A'$ ve $F \in A''$ için $0 = F(H.f) = (F.H)(f)$ dir. Diğer bir ifade ile her $F \in A''$ için $F.H = 0$ dır.

Şimdi ana neticelerimizden birini yazıp ispatlayabiliriz.

Teorem 3.12

A bir hemen hemen f -cebiri ise o zaman Arens çarpımına göre A'' (Dedekind Tam ve böylece Archimedean) bir hemen hemen f -cebiridir.

İspat : $F \wedge G = 0$ eşitliğini sağlayan $0 \leq F, G \in A''$ alalım ve $A'' = (A')'_n \oplus (A')'_s$ sıralı direkt toplamına göre F ve G ' yi ayrıştıralım. Öyle ise ,

$$\begin{aligned} F &= F_n + F_s & (0 \leq F_n \in (A')'_n , 0 \leq F_s \in (A')'_s) \\ G &= G_n + G_s & (0 \leq G_n \in (A')'_n , 0 \leq G_s \in (A')'_s) \end{aligned}$$

olur. $F_n \wedge G_n = 0$ ve Teorem 3.2 ile $(A')'_n$ bir hemen hemen f -cebiri olduğundan $F_n.G_n = 0$ dır. Teorem 3.10 ile $F_s.G_n = 0$ elde ederiz. Sonuç 3.11 ile $F.G_s = 0$ dır. Buradan da $F.G = 0$ olur.

Teorem 3.12 nin ispatı gösterir ki $F, G \in A''$ için $F.G = F_n.G_n$ olur. Bu gerçek , $(A')'_n$ ' nin değişmeli ve çarpım altında kapalı olduğu düşüncesi ile birleştirilirse aşağıdaki iki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.13

A bir hemen hemen f -cebiri olsun. O zaman her $F \in A''$, $H \in (A')'_s$ için $F.H = H.F = 0$ dır. Özellikle , her $H \in (A')'_s$ için $H^2 = 0$ dır.

Sonuç 3.14

A bir hemen hemen f -cebiri olsun. O zaman her $F, G \in A''$ için $F.G \in (A')'_n$ dir.

4. F-CEBİRLERİNİN SIRALI İKİNCİ DUALİ

Huijsmans ve De Pagter , bir Archimedean f -cebiri $(A')'_n$ 'nin Arens çarpımına göre bir Archimedean f -cebiri olduğunu ispat etmişlerdir (Huijsmans ve De Pagter , 1984). Huijsmans bunu A'' 'ne genişletmiştir (Huijsmans , 1989). Örgü normlu Riesz uzaylarında Scheffold aynı neticeyi bağımsız olarak elde etmiştir (Scheffold , 1991). Bu bölümde buradaki sonuçların aynı zamanda Önerme 3.1 ve Teorem 3.10 'daki metotlar kullanılarak elde edilebileceğini göstereceğiz.

Teorem 4.1

A bir f -cebiri olsun o zaman $(A')'_n$ Arens çarpımına göre bir f -cebidir.

İspat : Önerme 3.1 'in ispatında kullanılan fikirlerden faydalanacağız. İlk olarak , $0 \leq G, H \in (A')'_n$ alalım ve $0 \leq x \in A$ için $0 \leq G, H \leq x''$ ve $G \wedge H = 0$ farzedelim. Ayrıca $0 \leq F \leq x''$ sıralamasını sağlayan $F \in (A')'_n$ olduğunu kabul edelim. $(F.G) \wedge H = 0$ olduğunu göstereceğiz. $0 \leq f \in A'$ sabit tutulur ve Sonuç 2.13 kullanılırsa ,

$$g \wedge h = 0 \text{ ve } G(g) = 0 = H(h) \text{ sağlayan } f + f.x = g + h \text{ olan } g, h \in A' \text{ vardır.}$$

$\varepsilon > 0$ farzedelim , $g \wedge h = 0$ olduğundan $x = y + z$ ve $g(y) + h(z) < \varepsilon$ koşullarını sağlayan $0 \leq y, z \in A$ vardır. İlk önce ,

$$G_1 = G \wedge (y - y \wedge z)'' \text{ ve } H_1 = H \wedge (z - y \wedge z)''$$

yazalım. O zaman ,

$$0 \leq G - G_1 \leq 2z'' \text{ ve } 0 \leq H - H_1 \leq 2y'' \text{ olur.}$$

Şimdi , $(y - y \wedge z) \wedge (z - y \wedge z) = 0$ ve A bir f -cebiri olduğundan

$$x(y - y \wedge z) \wedge (z - y \wedge z) = 0 \text{ olur. Böylece ,}$$

$$0 \leq (F.G_1) \wedge H_1 \leq x''(y - y \wedge z)'' \wedge (z - y \wedge z)'' = 0$$

bize $(F.G_1) \wedge H_1 = 0$ sonucunu verir. A' 'nin değişmeli olduğu kullanılarak ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (F.(G - G_1))(f) \leq (x''.(G - G_1))(f) = ((G - G_1).x'')(f) \\ &= (G - G_1)(f.x) \leq (G - G_1)(f + f.x) \\ &= (G - G_1)(g + h) \leq G(g) + (G - G_1)(h) \leq 0 + 2z''(h) = 2h(z) \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde ,

$$0 \leq (H - H_1)(f) \leq (H - H_1)(f + f.x) = (H - H_1)(g + h) \\ \leq (H - H_1)(g) + H(h) \leq 2g(y)$$

olur. Ardından ,

$$0 \leq (F.G) \wedge H \leq (F.(G - G_1) \wedge H + (F.G_1) \wedge (H - H_1) + (F.G_1) \wedge H_1) \\ \leq F.(G - G_1) + (H - H_1) + 0$$

ve buradan ,

$$0 \leq ((F.G) \wedge H)(f) \leq (F.(G - G_1))(f) + (H - H_1)(f) \\ \leq 2h(z) + 2g(y) < 2\varepsilon$$

elde ederiz.

Her $\varepsilon > 0$ için $0 \leq (F.G \wedge H)(f) < 2\varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Öyleyse $((F.G) \wedge H)(f) = 0$ dır. Bu her $0 \leq f \in A'$ için doğru olduğundan $(F.G) \wedge H = 0$ sonucunu çıkarırız. Benzer şekilde A' 'nin değişmeli olduğu kullanılarak $(G.F) \wedge H = 0$ olduğu gösterilir. Özetlersek , $0 \leq x \in A$ için $0 \leq F, G, H \leq x''$ ve $G \wedge H = 0$ ise o zaman $(F.G) \wedge H = 0 = (G.F) \wedge H$ dır. Genel durumda , $G \wedge H = 0$ eşitliğini sağlayan $(A')'_n$ 'nin keyfi pozitif elemanları F, G, H ise $I(\sigma(A))$, $(A')'_n$ 'de sıralı yoğun olmasından ve Teorem 3.2 'nin ispatında kullanılan aynı standart argümanlardan $(F.G) \wedge H = 0 = (G.F) \wedge H$ elde ederiz.

Şimdi her f -cebiri bir hemen hemen f -cebiri olduğundan 3. Bölümde (Yardımcı Teorem 3.3 'ten Sonuç 3.11 'e kadar) ve özellikle Sonuç 3.14 'te kullanılan bütün argümanlar burada yaptıklarımız içinde geçerlidir. Şimdi A'' içinde $G \wedge H = 0$ ve $0 \leq F \in A''$ olduğunu farzedelim. F, G, H 'ı sıralı sürekli ve tekil parçalarına şu şekilde ayırştıralım :

$$F = F_n + F_s \quad , \quad G = G_n + G_s \quad , \quad H = H_n + H_s \quad .$$

Sonuç 3.14 'teki gibi $F.G = F_n.G_n \in (A')'_n$ 'dir. Öyleyse $(F.G) \wedge H_s = (F_n.G_n) \wedge H_s = 0$ dır. $G_n \wedge H_n = 0$ ve $(A')'_n$ bir f -cebiri olduğundan Teorem 4.1 ile $F_n.G_n \wedge H_n = 0$ elde ederiz. Bütün bu gözlemlerden sonra ,

$$(F.G) \wedge H = (F_n.G_n) \wedge (H_n + H_s) = (F_n.G_n) \wedge H_n + (F_n.G_n) \wedge H_s = 0$$

buluruz. Benzer olarak $(G.F) \wedge H = 0$ dır. Öyleyse A'' bir f -cebidir.

Bundan sonraki teoremden bu sonuçları özetleyelim.

Teorem 4.2

A bir f -cebiri ise o zaman A'' (Dedekind tam ve böylece Archimedean) Arens çarpımına göre bir f -cebiridir (Huijsmans , 1989).

Bu bölümün kalan kısmında , bir Archimedean f -cebirinin sıralı sürekli ikinci duali $(A')'_n$ 'nin yine bir f -cebiri olduğu gerçeğinin diğer ispatını (daha basit ve en önemlisi farklı) göstereceğiz. Öncelikle bir yardımcı teoreme ihtiyacımız olacak.

Yardımcı Teorem 4.3

A bir f -cebiri , $0 \leq a \in A$ ve $0 \leq f \in A'$ olsun. O zaman ,

$$(i) \quad \text{Her } 0 \leq x \in A \text{ için } ax \leq x + a^2x . \quad (4.1)$$

$$(ii) \quad f.a \leq f + f.a^2 \text{ dir.} \quad (4.2)$$

İspat : (i) $(x - x \wedge ax) \wedge (ax - x \wedge ax) = 0$

eşitliğinde ilk terimi a ile çarparsak ,

$$(ax - a(x \wedge ax)) \wedge (ax - x \wedge ax) = 0$$

elde ederiz. Buradan da ,

$$ax = a(x \wedge ax) \vee (x \wedge ax) \leq a(x \wedge ax) + x \wedge ax \leq a^2x + x$$

bulunur.

(ii) (i) ve f ' in pozitifliğinden , her $0 \leq x \in A$ için ,

$$(f.a)(x) = f(ax) \leq f(x) + f(a^2x) = f(x) + (f.a^2)(x)$$

elde ederiz. Bu da istediğimiz sonucu verir.

Şimdi Teorem 4.1 ' in diğer bir ispatını sunmaya hazırız.

Teorem 4.4

Bir f -cebiri A ' nın sıralı sürekli sıralı ikinci duali $(A')'_n$, Arens çarpımına göre yine bir f -cebiridir.

İspat : İlk önce Yardımcı Teorem 4.3 (ii) den , her $0 \leq x \in A$, $0 \leq G \in A''$ ve her $0 \leq f \in A'$ için ,

$$(x''.G)(f) = G(f.x) \leq G(f) + G(f.x^2) = G(f) + ((x'')^2.G)(f)$$

olduğundan $x'' \cdot G \leq G + (x'')^2 \cdot G$ dir.

Bu eşitsizlikte x'' yerine , $(1/n)x''$ koyarsak ;

$$n(x'' \cdot G) \leq n^2 G + (x'')^2 \cdot G , \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

elde ederiz.

Şimdi $G \wedge H = 0$ olacak şekilde $0 \leq G, H \in A''$ alalım. Bizim iddiamız , her $0 \leq F \in (A')'_n$ için $(F \cdot G) \wedge H = 0$ olmasıdır. İlk önce bir $0 \leq x \in A$ için $0 \leq F \leq x''$ durumunu düşünelim. Yukarıda verilenler ile ,

$$\begin{aligned} 0 \leq n((x'' \cdot G) \wedge H) &= n(x'' \cdot G) \wedge nH \\ &\leq n^2 G \wedge nH + ((x'')^2 \cdot G) \wedge nH \leq (x'')^2 \cdot G \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

elde ederiz.

A'' bir Dedekind Tam ve böylece Archimedean olduğundan $(x'' \cdot G) \wedge H = 0$ buluruz. Sonuç olarak $(F \cdot G) \wedge H = 0$ dır. Eğer F , $(A')'_n$ ' nin bir keyfi pozitif elemanı ise $0 \leq F_\alpha \uparrow F$ olacak biçimde $F_\alpha \in I(\sigma(A))$ (yani , $0 \leq F_\alpha \leq x''_\alpha$) neti vardır. Bu ispatın ilk kısmı ile her α için , $(F_\alpha \cdot G) \wedge H = 0$ dır. $0 \leq F_\alpha \cdot G \uparrow F \cdot G$ olduğundan $(F \cdot G) \wedge H = 0$ buluruz.

Şimdi $G \wedge H = 0$ olacak biçimde $0 \leq F, G \in (A')'_n$ ve $0 \leq H \in A''$ elemanlarını düşünelim. Her $x \in A$ için $x'' \cdot G = G \cdot x''$ olduğundan her $0 \leq x \in A$ için önceki neticelerimizden $(G \cdot x'') \wedge H = 0$ sonucunu çıkarırız. Aynı gösterimle her α için , $(G \cdot F_\alpha) \wedge H = 0$ dır. G ' nin sıralı sürekli oluşu ile $0 \leq F_\alpha \uparrow F$ birleştirilirse $0 \leq G \cdot F_\alpha \uparrow G \cdot F$ neticesini verir ve buradanda ,

$$(G \cdot F) \wedge H = 0 \text{ olur.}$$

Önceki sonuçlardan , $(A')'_n$ içerisinde $G \wedge H = 0$ ve $0 \leq F \in (A')'_n$ ise o zaman ,

$$(F \cdot G) \wedge H = 0 = (G \cdot F) \wedge H$$

olur ve bundan dolayı $(A')'_n$ bir f -cebiri.

Bunların ışığında A bir f -cebiri olduğunda sıralı ikinci dual A'' ' nünde bir f -cebiri olduğunu diğer bir yaklaşım ile göstereceğiz.

Teorem 4.5

Bir f -cebiri A ' nın sıralı ikinci duali A'' de yine bir f -cebiri.

İspat : Teorem 4.4 ' ün ispatından $0 \leq F \in (A')'_n$ ve $0 \leq G, H \in A''$ için $G \wedge H = 0$ olduğunda $(F.G) \wedge H = 0$ olduğunu gösterdik. Hipotez aynı kalmak şartı ile $(G.F) \wedge H = 0$ olduğunu göstereceğiz. Gerçekten ,

$$F.f \leq f + F^2.f$$

elde etmek için $(A')'_n$ üzerinde bir lineer fonksiyonel olarak düşünülen A' ' nün f ve $(A')'_n$ ' nin F pozitif elemanlarına Yardımcı Teorem 4.3 (ii) ' yi uygularız. $0 \leq G \in A''$ olduğundan her $0 \leq f \in A'$ için ,

$$(G.F)(f) = G(F.f) \leq G(f) + G(F^2.f) = G(f) + (G.F^2)(f)$$

elde ederiz ve buradan ,

$$G.F \leq G + G.F^2 \text{ olur. } G \wedge H = 0 \text{ olduğundan ,}$$

$$(G.F) \wedge H \leq G \wedge H + (G.F^2) \wedge H = (G.F^2) \wedge H$$

olur. F yerine $(1/n)F$ koyarsak ,

$$(G.F) \wedge H \leq (1/n)(G.F^2) \wedge H , \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

elde ederiz. A , Archimedean olduğundan $(G.F) \wedge H = 0$ olur.

Huijsmans (1989) göstermiştir ki $F \in (A')'_n$ ve $G \in A''$ ise $G.F \in (A')'_n$ dir. $0 \leq G \in (A')'_s$ ve $0 \leq F \in (A')'_n$ alalım. $G.F \in (A')'_n$ olduğu biliniyor ve ayrıca her $0 \leq H \in (A')'_n$ için $G \wedge H = 0$ dir. Gözlemlerimizden her $0 \leq H \in (A')'_n$ için $G.F \wedge H = 0$ dir , yani $G.F \in (A')'_s$ dir. O halde her $0 \leq G \in (A')'_s$ ve $0 \leq F \in (A')'_n$ için $G.F = 0$ olur. Bu da tam olarak Teorem 3.10 ' un sonucudur. İspatın kalanı için Sonuç 3.11 , Sonuç 3.14 ve Teorem 4.2 deki argümanlar izlenir.

5. D-CEBİRLERİNİN SIRALI SÜREKLİ SIRALI İKİNCİ DUALI

Scheffold , bir Banach d -cebiri $(A')'_n$ 'nin Arens çarpımına göre bir sol Banach d -cebiri olduğunu gösterdi. Fakat , Archimedean d -cebiri değişmeli olmadığından $(A')'_n$ 'nin aynı zamanda bir sağ Banach d -cebiri olduğunu gösteremedi (Bernau ve Huijsmans , 1990). Bu bölümde , biz , bir Archimedean d -cebiri $(A')'_n$ 'nin Arens çarpımına göre bir Archimedean (ve hatta Dedekind Tam) d -cebiri olduğunu göstererek Scheffold ' ın sonuçlarını genelleştireceğiz. Düşündüğümüz d -cebiri A , bir örgü normuna sahip olmayacaktır ve biz göstereceğiz ki $(A')'_n$ yalnız sol değil aynı zamanda bir sağ d -cebidir. İspatlarımız , Scheffold ' ın ispatlarından tamamen farklı olacaktır.

d -cebiri değişmeli olmadığında ve pozitif kareleri yoksa bir Archimedean d -cebiri A 'nın sıralı ikinci duali A'' için karşılık gelen neticeleri ispatlayamıyoruz (Bernau ve Huijsmans , 1990). Bu demektir ki hemen hemen f -cebiri için Bölüm 3 ' te kullanılan yöntem (özellikle Yardımcı Teorem 3.3) bu durumda çalışmaz. Şimdi vereceğimiz teoremin ispatında Önerme 3.1 ve Teorem 4.1 ' in ispatında geliştirdiğimiz aynı temel metodları kullanabiliriz.

Teorem 5.1

A bir d -cebiri olsun. O zaman $(A')'_n$, Arens çarpımına göre bir d -cebidir.

İspat : Eğer $0 \leq F, G, H \in (A')'_n$ ve $G \wedge H = 0$ ise o zaman $(F.G) \wedge (F.H) = 0$ (bundan dolayı $(A')'_n$ bir sol d -cebidir) ve $(G.F) \wedge (H.F) = 0$ (bundan dolayı $(A')'_n$ bir sağ d -cebidir) olduğunu göstermeliyiz. $0 \leq x \in A$ için $0 \leq F, G, H \leq x''$ olduğunu kabul edelim. Standart sıralı sürekli argümanlarla $(I(\sigma(A)))$ 'nın $(A')'_n$ içerisinde sıralı yoğun olduğu kullanılarak genel sonuç üretilir. $0 \leq f \in A'$ alalım ve her $y \in A$ ($f.x$ 'in dual fonksiyoneli) için ,

$$(f * x)(y) = f(yx) \quad (5.1)$$

ile $f * x$ pozitif lineer fonksiyoneli tanımlayalım. Şüphesiz A değişmeli olduğu zaman $f.x = f * x$ dir. Fakat Archimedean d -cebirlerinin değişmeli olması gerekmez. Sonuç 2.13 ile $f.x + f * x = g + h$ olacak şekilde $G(g) = 0 = H(h)$ ve $g \wedge h = 0$ eşitliklerini sağlayan $0 \leq g, h \in A'$ vardır.

$\varepsilon > 0$ fazedelim, $g \wedge h = 0$ olduğundan A içerisinde $0 \leq y, z$ elemanları bulabiliriz ki $x = y + z$ ve $g(y) + h(z) < \varepsilon$ sağlanır. Öncelikle ,

$$G_I = G \wedge (y - y \wedge z)'' \quad \text{ve} \quad H_I = H \wedge (z - y \wedge z)''$$

olarak tanımlayalım. Yine $0 \leq G - G_I \leq 2z''$ ve $0 \leq H - H_I \leq 2y''$ elde ederiz. Buradan ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (G_I.F) \wedge (H_I.F) \leq (G_I.x'') \wedge (H_I.x'') \\ &\leq ((y - y \wedge z)'' . x'') \wedge ((z - y \wedge z)'' . x'') = 0 \end{aligned}$$

(A' da sağ d -cebiri özelliği kullanılarak) ,

$$(G_I.F) \wedge (H_I.F) = 0$$

olduğunu buluruz. Her $y \in A$ için ,

$$(x'' . f)(y) = x''(f.y) = (f.y)(x) = f(yx) = (f * x)(y)$$

olduğunu gözlemleyerek $x'' . f = f * x$ sonucuna ulaşırız. Böylece ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq ((G - G_I).F)(f) \leq ((G - G_I).x'')(f) = (G - G_I)(x'' . f) \\ &= (G - G_I)(f * x) \leq (G - G_I)(f.x + f * x) \\ &= (G - G_I)(g + h) \leq G(g) + (G - G_I)(h) \leq 0 + 2z''(h) = 2h(z) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde ,

$$0 \leq ((H - H_I).F)(f) \leq 2g(y)$$

elde edilir. Şimdi ,

$$\begin{aligned} (G.F) \wedge (H.F) &= (G - G_I + G_I).F \wedge (H - H_I + H_I).F \\ &\leq (G - G_I).F + (H - H_I).F + (G_I.F) \wedge (H_I.F) \\ &= (G - G_I).F + (H - H_I).F \end{aligned}$$

ve bu da gösterir ki ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq ((G.F) \wedge (H.F))(f) \leq ((G - G_I).F)(f) + ((H - H_I).F)(f) \\ &\leq 2h(z) + 2g(y) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

olur.

Böylece , $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan her $0 \leq f \in A'$ için $((G.F) \wedge (H.F))(f) = 0$ elde ederiz.

Öyleyse $(G.F) \wedge (H.F) = 0$ dır. Benzer şekilde , $(F.G) \wedge (F.H) = 0$ olur ve ispat biter.

Teorem 5.1 ' in sonucunu elde etmenin bir diğer yoluda örgü homomorfizması teorisi vasıtasıyladır. Gerçekten , A bir l -cebiri ise A' ' nın d -cebiri olması için gerek ve yeter koşul

her $0 \leq x \in A$ için x ile tanımlı sağ çarpım R_x (her $y \in A$ için $R_x(y) = yx$) ve x ile tanımlı sol çarpım L_x (her $y \in A$ için $L_x(y) = xy$) A 'nın örgü homomorfizmalarıdır. Bu nedenle, birinci adjointler R'_x ve L'_x aralık koruyandır. Ve sonuç olarak ikinci adjointler R''_x ve L''_x , A'' 'nın örgü homomorfizmalarıdır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Bizim iddiamız, her $G \in A''$ için $R''_x(G) = G.x''$ olduğudur (buradanda, A'' içinde $R''_x = R_x$ olduğudur). Gerçekten, eğer $f \in A'$ ise her $y \in A$ için,

$$(R'_x f)(y) = f(R_x y) = f(yx) = (f.y)(x) = x''(f.y) = (x''.f)(y)$$

eşitliği $R'_x f = x''.f$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak, $G \in A''$ ise ozaman her $f \in A'$ için,

$$(R''_x G)(f) = G(R'_x f) = G(x''.f) = (G.x'')(f)$$

eşitliği bize $R''_x(G) = G.x''$ ($x \in A$, $G \in A''$) sonucunu verir. Benzer şekilde, $L'_x f = f.x$ ($x \in A$, $f \in A'$) ve $L''_x(G) = x''.G$ ($x \in A$, $G \in A''$) elde edilir. Buradan, A'' içinde $L''_x = L_x$ olur.

Şimdi, $0 \leq x \in A$ ve $F \wedge G = 0$ olacak biçimde $0 \leq F, G \in A''$ alalım. L''_x , A'' 'nın bir örgü homomorfizması olduğundan,

$$(x''.F) \wedge (x''.G) = L''_x(F) \wedge L''_x(G) = 0$$

elde ederiz.

Standart sıralı sürekli argümanlar kullanılarak her $0 \leq H \in (A')'_n$ için $(H.F) \wedge (H.G) = 0$ bulunur. Özellikle, $(A')'_n$ bir sol d -cebiri. Eğer $(A')'_n$ içerisinde $F \wedge G = 0$ ise yukarıdaki gibi,

$$(F.x'') \wedge (G.x'') = R''_x(F) \wedge R''_x(G) = 0$$

bulunur. Bu da kolaylıkla $(F.H) \wedge (G.H) = 0$ olmasını gerektirir. Bu nedenle, $(A')'_n$ aynı zamanda bir sağ d -cebiri (Bunun için F ve G 'nin sıralı sürekli olmasına ihtiyacımız vardır).

Önceden gözlemlendiği gibi bir d -cebiri A 'nın ikinci sıralı duali A'' 'nın tamamının bir d -cebiri olduğunu ispatlayamayız. Çünkü biz A'' 'nın tekil kısmı için bir yol bulamadık. A 'nın değişmeli olmasına ya da A 'nın pozitif karelere sahip olmasına ihtiyaç olmadığını gözlemledik. Eğer A 'ya bu şartlardan birini ilave edersek durum basitleşir.

Teorem 5.2

A değişmeli veya pozitif karelere sahip bir d -cebiri olsun. O zaman A'' , Arens çarpımına göre bir Dedekind Tam (böylece Archimedean) d -cebiridir. Üstelik, A'' değişmelidir ve kareleri pozitifdir.

İspat : A zerindeki şartlardan her biri, A' 'nın bir hemen hemen f -cebiri olmasını gerektirir (Bernau ve Huijsmans, 1990). Sonuç 3.14 ile sırasıyla F ve G 'nin sıralı sürekli kısımları F_n ve G_n olmak üzere her $F, G \in A''$ için $F.G = F_n.G_n$ dir. şimdi $0 \leq F \in A''$ ve A'' içerisinde $G \wedge H = 0$ olduğunu kabul edelim. F, G, H 'ın n birden sıralı sürekli ve tekil bileşenlerine ayrıştıralım. şöyle ki, band ayrışımı $A'' = (A')'_n \oplus (A')'_s$ ye göre ;

$$F = F_n + F_s, \quad G = G_n + G_s, \quad H = H_n + H_s$$

olur. Teorem 5.1 ile, $(A')'_n$ bir d -cebiri ve $G_n \wedge H_n = 0$ olduğundan,

$$(F_n.G_n) \wedge (F_n.H_n) = 0 = (G_n.F_n) \wedge (H_n.F_n)$$

elde ederiz.

Sonuç 3.14 kullanılarak $F.G = F_n.G_n$, $F.H = F_n.H_n$ bulunur ve buradan da $(F.G) \wedge (F.H) = 0$ olur. Benzer şekilde, $(G.F) \wedge (H.F) = 0$ dir. Bu nedenle A'' bir d -cebiridir. Teorem 3.12 kullanılarak A'' bir Archimedean hemen hemen f -cebiridir ve özellikle A'' değişmelidir ve kareleri pozitifdir.

6. SONUÇLAR

En ince ayrıntısına kadar Arens çarpımı ile donatılmış bir Archimedean örgü sıralı cebir A' 'nın sıralı ikinci duali A'' üzerinde çalıştık. Bizim ana sonuçlarımız şunlar olmuştur :

Bir Archimedean hemen hemen f -cebiri A' 'nın sıralı ikinci duali A'' yine bir hemen hemen f -cebiridir.

Bir Archimedean f -cebiri A' 'nın sıralı ikinci duali A'' yine bir f -cebiridir.

Bir Archimedean d -cebiri A' 'nın sıralı sürekli sıralı ikinci duali $(A')'_n$ bir Archimedean d -cebiridir. Aynı zamanda eğer d -cebiri A değişmeli ise veya pozitif karelere sahipse o zaman sıralı ikinci dual A'' yine bir d -cebiridir. Sıralı ikinci dual A'' 'nın tamamı bir d -cebiri mi sorusu açık soru olarak kalmıştır.

Hujsmans, C. B., (1991), "Lattice Ordered Algebras and Ideals", *Studies in Functional Theory 2, Positive Operators, Riesz Spaces, and Extensions*, (Eds. C. B. Huijsmans, R. C. ve Luxemburg, W. A. J.), Springer, Berlin, 151-189.

Hujsmans, C. B., ve de Pagter, B., (1984), "The Lattice Order of Lattice Ordered Algebras", *Journal of Functional Analysis*, 59:41-64.

Luxemburg, W. A. J., (1963), "Notes on Banach Lattices, Volume 2", *Mathematica Mathematica*, 27:413-428.

Luxemburg, W. A. J., ve Zaanen, A. C., (1983), *Riesz Spaces I*, North-Holland, Amsterdam.

Meyer-Nieberg, P., (1991), *Banach Lattices*, Universitext, Springer, Berlin.

Scheffold, E., (1990), "Über gewisse von f -Bilinearformen", *Archiv für Mathematik*, 55:167-179.

Scheffold, E., (1993), "Über die f -Bilinearformen", *Archiv für Mathematik*, 60:1-17.

Scheffold, E., (1994), "Über die f -Bilinearformen", *Archiv für Mathematik*, 62:1-17.

Zaanen, A. C., (1983), *Riesz Spaces I*, North-Holland, Amsterdam.

KAYNAKLAR

- Aliprantis, C. D. ve Burkinshaw, O., (1985), Positive Operators, Academic Press, Orlando.
- Arens, R., (1951), "Operations Induced in Function Classes", Monatshefte für Mathematik, 55:1-19.
- Arens, R., (1951), "The Adjoint of a Bilinear Operation", Proceedings of the American Mathematical Society, 2:839-848.
- Bernau, S. J. ve Huijmans, C. B., (1990), "Almost f -algebras and d -algebras", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 107:287-308.
- Bernau, S. J. ve Huijmans, C. B., (1995), "The Order Bidual of Almost f -algebras and d -algebras", Transactions of the American Mathematical Society, 347(11):4259-4275.
- Huijmans, C. B., (1989), "The Order Bidual of Lattice Ordered Algebras II", Journal of Operator Theory, 22:277-290.
- Huijmans, C. B., (1991), "Lattice Ordered Algebras and f -algebras", Studies in Economic Theory 2, Positive Operators, Riesz Spaces and Economics, (Aliprantis, C. D., Border, K. C. ve Luxemburg, W. A. J.), Springer, Berlin, 151-169.
- Huijmans, C. B., ve de Pagter, B., (1984), "The Order Bidual of Lattice Ordered Algebras", Journal of Functional Analysis, 59:41-64.
- Luxemburg, W. A. J., (1965), "Notes on Banach Function Spaces XVa", Indagationes Mathematicae, 27:415-429.
- Luxemburg, W. A. J., ve Zaanen, A. C., (1971), Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam.
- Meyer-Nieberg, P., (1991), Banach Lattices, Universitext, Springer, Berlin.
- Scheffold, E., (1991), "Der Bidual von F-Banachverbandsalgebren", Acta Scientiarum Mathematicarum, 55:167-179.
- Scheffold, E., (1993), "Ueber den Ordnungsstetigen Bidual von F-Banachverbandsalgebren", Archiv der Mathematik, 60:473-477.
- Scheffold, E., (1994), "Ueber Bimorphismen und das Arens-Produkt bei Kommutativen D-Banachverbandsalgebren", Revue Roumanie de Mathematiques Pures et Appliquees, 39:259-270.
- Zaanen, A. C., (1983) Riesz Spaces II, North-Holland, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 22. 10. 1974

Doğum yeri İstanbul

Lise 1988-1991 Pertevniyal Lisesi

Lisans 1991-1995 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

1997-Devam ediyor MEB Matematik Öğretmeni

