YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYLARINDA MATRİS OPERATÖRLER VE LİNEER OPERATÖRLERİN MATRİS TEMSİLİ

Matematikçi Serkan ÖZDEMİR

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

A^*	A operatörünün eşleniği
D(A)	A operatörünün tanım kümesi
H	Hilbert uzayı
$\overline{a}$	a kompleks sayısının eşleniği
$\lvert a \rvert$	a kompleks sayısının mutlak değeri
$\lVert x \rVert$	x elemanın normu
$\wp_\lambda$	birimin açılımı
$\sum$	Toplam sembolü

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli Hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU' na saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca manevi desteklerinden dolayı aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Bu çalışmada ayrılabilir Hilbert uzayında matrislerle tanımlı lineer operatörler ve lineer operatörlerin matris temsilleri incelenmiştir. Konu ile ilgili sınırlı ve simetrik sınırsız operatörler ele alınmıştır.

Anahtar kelimeler: Hilbert uzayı, lineer operatörler, kendine eş operatörler, birimin açılımı.

ABSTRACT

In this research it is investigated the linear operators defined by matrices and matrix representations of linear operators in seperable Hilbert space. It is involvement about the subject that bounded and unbounded symmetric operators are approached.

Keywords: Hilbert space, linear operators, self-conjugate operators, resolution of identity.

1. GİRİŞ

Biz bu tez çalışmasında sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayında matrislerle tanımlanmış lineer operatörleri ve lineer operatörlerin matris temsillerini inceleyeceğiz.

Sonsuz matrislerle tanımlanan operatörler 20.yüzyılın başından günümüze dek incelenmektedir. İlk olarak Hilbert simetrik integral denklemlerin çözümü problemini sonsuz matrislerle verilen operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesine indirgemiştir. (Hilbert, 1924) Bu çalışma ile Hilbert uzayı ve Hilbert uzaylarında operatörler teorisinin temeli atılmıştır.

Matrislerle tanımlanmış operatörler ve operatörlerin matris temsili çok sayıda kitap ve makalelerde yer almıştır. Sözü edilen konunun yer aldığı kitaplardan (Akhiezer and Glazman, 1993, Berezanskii, 1968, Smirnov, 1965, Weidmann, 1980, Wintner, 1929) , makale çalışmalarından ise (Bairomov, Çakar, Krall, 2001, Kostyucenko ve Mirzoyev, 1998, Maksudov, Bairomov and Orudzheva, 1992) gösterelim.

2. ℓ_2 UZAYINDA MATRİS OPERATÖRLER

Bu kısımda biz ℓ_2 uzayında tanımlı her sınırlı operatörlerin bir sonsuz matrisle tanımlanabildiğini ve matrisin elemanları ile karşılık gelen operatör arasındaki bağlantıları inceleyeceğiz. Burada ℓ_2 bilinen somut Hilbert uzayıdır.

Kesik eleman kavramını tanımlayalım.

$x=(\xi_1,\xi_2,...)$ ℓ_2' nin bir elemanı ve $x^k=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_k,0,0,...)$' da ilk k bileşeni x ile aynı diğer bileşenleri 0 olan ℓ_2'nin bir elemanı olsun. Buradaki $x^{(k)}$' ya x in kesik elemanı denir. Burada $k\to\infty$ iken

$$\left\|x-x^{(k)}\right\|^2=\sum_{m=k+1}^{\infty}|\xi_m|^2\to 0 \text{ dır.} \tag{2.1}$$

Yani $m\to\infty$ iken $x^k\Rightarrow x$ dir.

$\varphi_1,\varphi_2,...$ vektörlerini ℓ_2' nin taban vektörleri olarak gösterelim. Yani φ_k için $\xi_k=1$ geri kalan bileşenler sıfırdır. Buradaki x:

$$x=\sum_{m=1}^{\infty}\xi_m\varphi_m \text{ dir.} \tag{2.2}$$

Eğer A, ℓ_2' de bir lineer operatör ise $x'=Ax$ olacak şekilde $x'(\xi_1',\xi_2',...)$ vardır:

$$a_{nm}=(A\varphi_m,\varphi_n) \text{ olmak üzere} \tag{2.3}$$

$$\xi_n'=(x',\varphi_n)=\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\,\xi_m,\ (n=1,2,...). \tag{2.4}$$

(2.3)' teki elemanlarla ℓ_2' deki bir lineer operatörü bir matris ile gösterebiliriz.

A^* eşlenik operatöre karşılık gelen matris

$$a_{nm}^*=(A^*\varphi_m,\varphi_n)=(\varphi_m,A\varphi_n)=\overline{a_{mn}} \tag{2.5}$$

şeklindedir.

Kendine eş A operatörü $\quad a_{nm}=\overline{a_{mn}}$ (2.6) eşitliği ile tanımlanr.

$y=(\eta_1,\eta_2,...)$ olmak üzere bir bilinear fonksiyonelde

$$(Ax,y)=(x,A^*y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\xi_m\right)\overline{\eta_n}=\sum_{m=1}^{\infty}\xi_m\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\overline{\eta_n}\right) \tag{2.7}$$

olur.

x ve y elemanlarının kesik elemanları $x^{(k)}$ ve $y^{(\ell)}$ için

$\left(A\,x^{(k)},y^{(\ell)}\right)=\sum_{n=1}^{\ell}\sum_{m=1}^{k}a_{nm}\,\xi_m\,\overline{\eta_n}$ dir.

Fakat k ve $\ell\to\infty$ iken $\left(A\,x^{(k)},y^{(\ell)}\right)\to$ (Ax, y) olur, buradan

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\,\xi_m\right)\overline{\eta_n}=\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ \ell\to\infty}}\sum_{n=1}^{\ell}\sum_{m=1}^{k}\,a_{nm}\,\xi_m\,\overline{\eta_n}$ dir.

(2.8)

Eğer A ve B operatörlerine karşılık gelen matrisin elemanları a_{pq} ve b_{qp} ise, D = BA matrisi

$d_{pq}=(D\,\varphi_q,\varphi_p)=(BA\varphi_q,\varphi_p)=(A\varphi_q,B^*\varphi_p)$ şeklinde veya ℓ_2' deki skaler çarpım formunu kullanarak

$$d_{pq}=\sum_{s=1}^{\infty}(A\,\varphi_q,\varphi_s).\left(\overline{B^*\,\varphi_p,\varphi_s}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{sq}\,\overline{b_{sp}^*} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır.

(2.5)' deki ifadeden sonunda

$$d_{pq}=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ps}\,a_{sq}$$

eşitliğini elde ederiz.

Eğer A ve B operatörlerinin sonsuz matrisleri için aynı harfleri kullanacaksak ve matris elemanları $\{A\}_{pq}$ ve $\{B\}_{pq}$ şeklinde gösterirsek yukarıdaki formül

$$\{BA\}_{pq}=\sum_{s=1}^{\infty}\{B\}_{ps}\,\{A\}_{sq} \tag{2.10}$$

şeklinde yazılabilir.

A, B, C lineer sınırlı operatörler verildiğinde, birleşme özelliğini kullanarak $(CB).\,A = C\,(BA)$ aşağıdaki formülü yazabiliriz.

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\{C\}_{ps}\{B\}_{st}\right)\{A\}_{tq} = \sum_{s=1}^{\infty}\{C\}_{ps}\left(\sum_{t=1}^{\infty}\{B\}_{st}\,\{A\}_{tq}\right). \tag{2.11}$$

3. SINIRLI MATRİS OPERATÖRLER

Gördüğümüz gibi ℓ_2 ayrılabilir Hilbert uzayında her sınırlı lineer operatör sonsuz bir a_{pq} matrisi ile tanımlanabilir. Şimdi tersine cevap arayalım. Hangi elemanlara sahip bir matris ℓ_2' de sınırlı bir operatör oluşturur? (2.4)' deki serinin ℓ_2' nin her $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ elemanı için yakınsak olduğunu varsayalım, ve her $x \in \ell_2$ için öyle bir N vardır, öyle ki

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, \xi_k\right|^2 \le N^2 \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 . \qquad (3.1)$$

Hatırlayalım ki sınırlı bir operatör A' da

$$|(Ax, y)| \le N\, \|x\| . \|y\|$$

eşitsizliği vardır.

Bu eşitsizliği kesik elemanlarına uygularsak a_{pq} için gerekli koşul elde edilmiş olur.

$$\left|\sum_{n=1}^{\ell} \sum_{m=1}^{k} a_{nm}\, \xi_m\, \overline{\eta}_n\right|^2 \le N^2 \sum_{m=1}^{k}|\xi_m|^2 . \sum_{n=1}^{\ell}|\eta_n|^2 \qquad (3.2)$$

Teorem 3.1

a_{pq} elemanının, bir sınırlı lineer dönüşümün matrisinin elemanı olması için gerekli ve yeterli koşul, verilen her k ve ℓ tamsayıları ve ξ_m, η_n kompleks sayıları için (3.2) koşulunun N' nin bazı seçimlerinde sağlanmasıdır (ξ_p, η_p, k ve ℓ ye bağlı olarak).

Gereklilik yukarıda açıklandı. Şimdi yeterliliği kanıtlayalım.

$(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ ℓ_2' nin elemanı olsun. (3.2) de $\ell = k$ ve $\eta_n = \sum_{m=1}^{k} a_{nm}\, \xi_m$ (n = 1, 2, 3, ... k) yazalım. Bu bize

$$\left(\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_{nm}\, \xi_m\right|^2\right)^2 \le N^2 \sum_{m=1}^{k}|\xi_m|^2 . \sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_{nm}\, \xi_m\right|^2$$

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_{nm}\, \xi_m\right|^2 \le N^2 \sum_{m=1}^{k}|\xi_m|^2$$

eşitsizliğini verir.

Ve üstelik $\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_{nm}\ \xi_m\right|^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^{\infty}\left|\xi_m\right|^2$ olur . (3.3)

Şimdi bu eşitsizlik sağlandığı halinde ℓ_2' nin her elemanı için

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\ \xi_m \quad (n = 1, 2, ...) \tag{3.4}$$

serisinin yakınsak olduğunu göstereceğiz.

Bu serinin bazı $\left(\xi_1^{(o)}, \xi_2^{(o)}, ...\right)$ elemanı ve n sayısı için ıraksak olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$\sum_{m=1}^{\infty}\left|a_{nm}\ \xi_m^{(o)}\right|$, daha ıraksaktır ve serinin sonlu toplamı

$\sum_{m=1}^{k}\left|a_{nm}\ \xi_m^{(o)}\right|$, k artarken sonsuza gider.

$\xi_m^{(o)}$ kompleks sayılarının argumanlarını $a_{nm}\ \xi_m^{(o)}$ çarpımları pozitif sayılar olacak şekilde değiştirelim.

(3.3) eşitsizliğini ℓ_2' nin elemanına uyguladığımızda ve eşitsizliğin sol tarafını kaldırdığımızda

$$\left(\sum_{m=1}^{k} a_{nm}\ \xi_m^{(o)}\right)^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^{\infty}\left|\xi_m^{(o)}\right|^2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

k' nın artmasıyla eşitsizliğin sol tarafı sonsuza gider ve buradan bir çelişki ortaya çıkar. Öyleyse (3.4) deki bütün seriler her x elemanı için yakınsaktır. (3.3) eşitsizliğinin

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\ \xi_m\right|^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^{\infty}\left|\xi_m\right|^2 \tag{3.5}$$

bağıntısını belirttiğini gösterelim.

Gerçekten, belirli bir k ve ℓ_2' nin belirli bir x elemanı için eşitsizliği ters çevirdiğimizde, k ve yeterli büyüklükteki ℓ için ($\ell \geq k$ kabul ettiğimizde)

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{\ell} a_{nm}\ \xi_m\right|^2 > N^2 \sum_{m=1}^{\infty}\left|\xi_m\right|^2$$

ve üstelik

$$\sum_{n=1}^{\ell}\left|\sum_{m=1}^{\ell} a_{nm}\ \xi_m\right|^2 > N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_m|^2 ,$$

bu (3.3) k = ℓ ile çelişir. Böylece (3.5) ispatlandı.

k' yı sonsuza götürdüğümüzde (3.1) bağıntısına ulaşırız ve teorem ispatlanmış olur.

Not 3.2

Yeterliliği ispatlarken (3.2) bağıntısını sadece $\ell = k$ durumda kullandık. Yeterliliği, bu koşulun sadece kuadratik formlar için doğrulandığını gösterelim. Yani, her k için operatörün sınırlı olması için yeter koşul,

$$\left|\sum_{n,m=1}^{k} a_{nm}\ \xi_m\ \overline{\xi}_n\right| \le N \sum_{m=1}^{k} |\xi_m|^2 \text{ dir.} \tag{3.6}$$

Eğer (3.6)' yı ve bir bilineer fonksiyonelin kuadratik formuna karşılık gelen formülü kullanırsak

$$\left|\sum_{m,n=1}^{k} a_{nm}\xi_m\overline{\eta}_n\right| \le \frac{N}{4}\Big[\sum_{m=1}^{k}|\xi_m+\eta_m|^2 + \sum_{m=1}^{k}|\xi_m-\eta_m|^2 +$$

$$\sum_{m=1}^{k}|\xi_m+i\eta_m|^2 + \sum_{m=1}^{k}|\xi_m-i\eta_m|^2\Big]$$

yazabiliriz.

$|\alpha+\beta|^2 \le 2\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)$ bağıntısını kullanarak, $\|x\| = \|y\| = 1$

olduğunda aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\left|\sum_{m,n=1}^{k} a_{nm}\ \xi_m\ \overline{\eta}_n\right| \le 4N ,$$

ve x , y keyfi olduklarında

$$\left|\sum_{m,n=1}^{k} a_{nm}\xi_m\overline{\eta}_n\right| \le 4N\left[\sum_{m=1}^{k}|\xi_m|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{m=1}^{k}|\eta_m|^2\right]^{1/2} \text{ olur.}$$

Yani $\ell = k$ iken (3.2) koşulu (3.6)' nın sonucudur. Yani a_{nm} matrisi ile tanımlı sınırlı olmalıdır. (3.2) koşulu ile bağlantılı bazı durumlardan bahsedelim. Eğer a_{pq} (3.2) koşulunu sağlarsa $A^*_{pq} = \overline{a}_{qp}$ eşlenik operatörün matris elemanlarının da bu koşulu sağlayacağı aşikardır. Burada transpoze operatörün matrisini ve kompleks eşlenik operatörün matrisini de göz önünde bulundurmalıyız.

$$\{A'\}_{pq} = a_{qp}; \{\overline{A}\}_{pq} = \overline{a_{pq}}. \tag{3.7}$$

$$A^* = (\overline{A})' = \overline{A'} \tag{3.8}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Eğer A esas matrisinin elemanları (3.2) koşulunu sağlıyor ise A ve A' matris operatörlerinin elamanlarının da koşulu sağladığı kolayca görülür. Eğer (3.2)' de $\xi_p = \eta_q = 1$ ve geri kalan ξ_m ve η_n eşit sıfır alınırsa direkt olarak $|a_{pq}| \leq N$ bulunur. Sınırlı dönüşüm tanımlayan bir matrisin elemanları için bir gerek koşul gösterelim. (2.3) formülünü göre a_{nk} ' lar $A\varphi_k$ elemanlarının bileşenleridir. Bundan dolayı aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmalıdır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < +\infty \qquad (\text{k} = 1,2, \ldots) \tag{3.9}$$

A' dan A^* 'a geçersek

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{km}|^2 < +\infty \qquad (\text{k} = 1,2, \ldots) \tag{3.10}$$

oldukları görülür.

Teorem 3.3

Eğer aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan bir ℓ pozitif sayısı varsa (m ve n ye bağlı olmayan)

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq \ell \quad (\text{n} = 1, 2, ...) \tag{3.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq \ell \quad (\text{m} = 1, 2, ...) \tag{3.12}$$

a_{nm} matrisi sınırlı bir dönüşüm oluşturur.

İspat : Yeterliliği gösterelim.

$\|x\| \le 1$ ve $\|y\| \le 1$ iken

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| |\xi_m| |\eta_n| \tag{3.13}$$

toplamı sınırlıdır. Bu durumda (3.2) koşulu sağlanır.

$|ab| \le \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right)$'yi kullanarak

$$S \le \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \left(|\xi_m|^2 + |\eta_n|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[|\xi_m|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}|\right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[|\eta_n|^2 \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|\right]$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.11) ve (3.12)' den

$$S \le \frac{\ell}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_m|^2 + \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2 = \frac{\ell}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \le \ell$$

olur ve teorem ispatlanmış olur.

Burada (3.13) serisi belirtelim ki her sınırlı matris için yakınsak değildir.

Örnek olarak aşağıdaki iki sonsuz matrisi ele alalım.

$$A = \left\| \begin{matrix} 0, & 0, & 0, & \dots \\ 1, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 1, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\| \qquad B = \left\| \begin{matrix} a_1, & 1, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ a_2, & 0, & 1, & 0, & 0, & \dots \\ a_3, & 0, & 0, & 1, & 0, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|$$

Burada a_k ortak terimleri $|a_k|$ yakınsak olan real sayılar dizisidir. Teorem 3.3' ü kullanarak kolayca gösterilebilir ki bu lineer dönüşüm A ve B matrislerine karşılık gelmektedir. Yine (2.9)' u kullanarak kolayca gösterilebilir ki her hangi bir a_k (yukarıdaki koşulu sağlayan) için BA = I dir. a_k lar reel iken eşlenik matrislere ve transpozlara geçersek A' ve B', A'B' = I elde ederiz. Ax =y eşitliği, $\xi_1 = \eta_2$; $\xi_2 = \eta_3$; ... formunda ve herhangi bir $y \in \ell_2$ için tek çözüme sahiptir. A'x=y eşitliği ξ_1 keyfi seçildiğinde $\xi_2 = \eta_1, \xi_3 = \eta_2$;... formunda sonsuz kümeler çözümüne sahiptir.

4. ÜNİTER MATRİSLER ve İZDÜŞÜM MATRİSLER

U üniter dönüşümün temel özelliğini verelim:

U*U = U U* = I .

u_{pq}, U' ya karşılık gelen matrisin elemanları olsun. O zaman bu koşulu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{ps}^{*} u_{sq} = \delta_{pq} \; ; \; \sum_{s=1}^{\infty} u_{ps} \, u_{sq}^{*} = \delta_{pq} \tag{4.1}$$

Burada $p \neq q$ için $\delta_{pq} = 0$ ve $\delta_{pp} = 1$ dir.

$u_{mn}^{*} = \overline{u_{nm}}$ olduğundan

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overline{u}_{sp} \, u_{sq} = \delta_{pq} \tag{4.2}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{ps} \overline{u}_{qs} = \delta_{pq} \tag{4.3}$$

eşitliklerine de yazabiliriz.

Yani u_{pq} matrisi ortogonal matristir.

Teorem 4.1

u_{pq} kompleks sayılarının bir üniter dönüşüme karşılık gelen matrisin elemanları olması için gerek ve yeter koşul (4.2) ve (4.3) eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Gereklilik yukarıda ifade edildiği gibi (4.2) ve (4.3)' nin sonucudur. Yeterliliği gösterelim. (4.2) ve (4.3) eşitlikleri verildiğinde u_{pq} matrisine lineer sınırlı bir dönüşümün karşılık geldiğini gösterelim. Aslında bu dönüşümün üniter olması (4.2) ve (4.3) koşullarının (4.1)' e denk olmasının sonucudur.

(4.3) koşulu $\sum_{s=1}^{\infty} \left| u_{ps} \right|^{2} = 1$ olduğunu gösterir. Bu yüzden

$$\xi_n' = \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk} \xi_k \tag{4.4}$$

serisi her x elemanı için yakınsaktır.

Aşağıdaki ifadeyi oluşturalım.

$$\sum_{p=1}^{m}\left|\sum_{q=1}^{n}u_{pq}\xi_q\right|^2=\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}u_{ps}\bar{u}_{pt}\xi_s\bar{\xi}_t=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{m}u_{ps}\overline{u_{pt}}\right)\xi_s\,\bar{\xi}_t$$

m'i sonsuza götürdüğümüzde (4.2)' den aşağıdaki ifade oluşur.

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{n}u_{pq}\xi_q\right|^2=\sum_{q=1}^{n}\left|\xi_q\right|^2 \quad \text{ve üstelik}$$

$$\sum_{p=1}^{m}\left|\sum_{q=1}^{n}u_{pq}\xi_q\right|^2\le\sum_{q=1}^{\infty}\left|\xi_q\right|^2 \quad \text{olur.}$$

Burada m belirli bir sonlu sayıdır. $n=\infty$ olduğunda da eşitsizlik sağlanır. Eğer m'i sonsuza götürürsek aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty}u_{pq}\xi_q\right|^2\le\sum_{q=1}^{\infty}\left|\xi_q\right|^2. \tag{4.5}$$

Bu da bize U' nun sınırlı olduğunu gösterir. Vurgulayalım U üniter iken (4.5) ifadesi eşitlik belirtir.

Bir P izdüşüm operatörüne karşılık gelen p_{ik} matrisin L alt uzayında göz önüne alalım. Biliriz ki P kendine eş operatör ve $P^2=P$ dir. Buradan aşağıdaki koşulu elde ederiz.

$$p_{ki}=\overline{p_{ik}}\,;\ \sum_{s=1}^{\infty}p_{is}p_{sk}=p_{ik} \tag{4.6}$$

Yukarıdaki üniter dönüşümde olduğu gibi gösterilebilir ki bu koşullar, p_{ik} matrisinin bir izdüşüm operatörüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter koşuldur.

5. OPERATÖRLERİN MATRİS TEMSİLİNE DAİR ÖRNEKLER

Örnek 5.1

$$g(s) = Af(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\, f(t)\, dt$$

formülüyle $L^2(-\infty,\infty)$' de tanımlı integral operatörünü düşünelim. Burada K(s,t) fonksiyonuna operatörün çekirdeği denir. Eğer çekirdek

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2\, ds\, dt < \infty \tag{5.1}$$

koşulunu sağlıyorsa çekirdeğe Hilbert-Schmidt çekirdeği denir ve bu çekirdekle oluşturulan operatöre de Hilbert-Schmidt operatörü denir.

(5.1) koşulunun sağlandığını varsayalım.

Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğine göre her t ve u için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| K(s,t).\, \overline{K(s,u)} \right| ds \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2\, ds}\ \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,u)|^2\, ds} \ \text{ dir.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|.|f(u)|.\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2\, ds}\ \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,u)|^2\, ds}\ dt\, du =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 ds}\ dt \right\}^2 \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2\, ds\, dt < \infty \ .$$

Fubini teoreminden

$$\|g\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\, f(t)\, dt \right|^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t) f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(s,u)}\, \overline{f(u)}\, du \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt}\ \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2\, ds\, dt} \ \text{ olur.}$$

Hilbert-Schmidt operatörünün sınırlı olduğunu ve bunun normunun

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|K(s,t)|^2\, ds\, dt}$$

sayısını aşmadığını gördük.

$L^2(-\infty,\infty)$ de $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ fonksiyonlarının bütün ortonormal sistemlerini ele alalım ve

$$a_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\,\overline{\varphi_i(s)}\,\varphi_k(t)\, ds\, dt \quad \text{(i, k = 1, 2, 3, ...)}$$

ifadesini tanımlayalım.

$L^2(-\infty,\infty)$ da herhangi bir f(t) fonksiyonu seçelim ve $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\varphi_k(t)}\, dt = x_k$

(k = 1, 2, 3, ...) olsun.

$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\, f(t)\, dt$ fonksiyonunun

$y_i = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,\overline{\varphi_i(s)}\, ds$ (i = 1, 2, 3, ...) Fourier katsayıları

$$y_i = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t) f(t)\,\overline{\varphi_i(s)}\, ds\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\,\varphi_i(s)\, ds\right\} dt$$ (i = 1, 2, 3, ...) şeklinde tanımlanır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\,\overline{\varphi_i(s)}\, ds \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\overline{\varphi_k(t)} \quad \text{(i = 1, 2, 3, ...)} \qquad (5.2)$$

ve f(t) ~ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k(t)$,

olduklarında, Parseval bağıntısından

$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_k$ (i = 1, 2, 3, ...) elde ederiz.

Benzer şekilde (5.2) bağıntısının sonucu olarak

$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left|\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\,\varphi_i(s) ds\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2$ (i = 1, 2, 3, ...) olur.

Diğer yandan Parseval bağıntısından

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 \, ds = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\, \overline{\varphi_i(s)}\, ds \right|^2$$

ve buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 \, \mathrm{ds\,dt} = \sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \quad \text{olur.}$$

$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ olmak üzere her Hilbert-Schmidt operatörünün bir matris operatör tarafından temsil edildiğini gördük.

Örnek 5.2

$L_2(-\infty,\infty)$ uzayında Fourier dönüşümünün bir matris temsiline örnek verelim.

$L_2(-\infty,\infty)$ uzayına ait $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}(\lambda)$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \ , \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

formulü ile tanımlanır (Kolmogorov and Fomin, 1961, Hochstadt, 1989). $\hat{f}(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty)$ olduğu bilinmektedir. Böylece

her $f(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ fonksiyonuna $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$ integrali ile bir $\hat{f}(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty)$ fonksiyonu karşılık getirilir. Bununla bir

$$\mathrm{F} : L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$$

operatörü tanımlanmış olur. Bu operatörün üniter olduğu, yani F bütün $L_2(-\infty,\infty)$ bütün $L_2(-\infty,\infty)$ ye dönüştürdüğü ve

$$\|Ff\| = \|f\| \qquad (\forall f \in \mathrm{L}_2(-\infty,\infty))$$

koşulunun sağlandığı görülür.

F lineer sınırlı operatör olduğundan matris temsile sahiptir ve F in matrisinin $L_2(-\infty,\infty)$' de seçilmiş baza bağlı olduğu bilinmektedir. F operatörü L_2 de ortonormal özvektörler bazına sahiptir (Kolmogorov and Fomin, 1961, Hochstadt, 1989).

Bunlar

$$\varphi_n(x) = H_n(x)e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad (n = 0,1,2, \ldots)$$

fonksiyonlarından ibarettir. Burada $H_n(x)$ n.dereceden Hermit polinomudur. $\varphi_n(x)$ fonksiyonlarına Hermit fonksiyonları denir(Kolmogorov and Fomin, 1961, Hochstadt, 1989). (Kolmogorov and Fomin, 1961)' den bilindiği gibi

$$F^4\varphi_n = \varphi_n \ .$$

Burada F^4 operatörü F' in dördüncü mertebesini göstermektedir. Buradan F operatörünün özdeğerlerinin sadece ± 1 ve $\pm i$ sayılarından ibaret olduğu ve her özdeğerin sonsuz katlı olduğu görülür. Böylece F operatörü $\{\varphi_n\}$ özvektörler bazında köşegen elemanları ± 1 ve $\pm i$ sayılarından ibaret sonsuz köşegen matrisi ile ifade edilir.

6. KENDİNE EŞ MATRİSLERİN SPEKTRAL AÇILIMI

Bir A kendine eş matrisi (3.2) ve (2.6) koşullarıyla tanımlanır. Matrisin özdeğer ve özvektörleri aşağıdaki sonsuz sistemin ℓ_2' de sıfırdan farklı çözümlerin olması koşulu ile tanımlanır.

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{is}\xi_s = \lambda\xi_i \tag{6.1}$$

(i = 1, 2, ...)

Eğer özvektörler ψ_k kapalı bir ortonormal sistem oluştururlarsa ve baz vektörleri olarak alınırlarsa, A operatörüne karşılık gelen matrisin elemanları şu şekildedir.

$$a_{pq} = (A\psi_q, \psi_p) = \lambda_q(\psi_q, \psi_p) = \begin{cases} 0 & , p \neq q \;\; için \\ \lambda_p & , p = q \;\; için \end{cases} \tag{6.2}$$

Yani ana köşegeni λ_p sayılarından oluşan bir köşegen matris elde ederiz. Kendine eş bir matrisin bir spectrum noktasına sahip olması için gerek ve yeter koşul bir köşegen matrise denk olmasıdır.

Yukarıdaki durumda ψ_k baz vektörleri olduğunda,

$$(Ax, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \xi_s \overline{\eta}_s; \; (Ax, x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |\xi_s|^2 \tag{6.3}$$

eşitliğini elde ederiz.

Genelde verilen bir a_{ik} kendine eş matrisi için birimin öyle bir $\wp_\lambda$ açılımı, yani öyle bir azalmayan $\ell_{ik}(\lambda)$ izdüşüm matrisi vardır ki

$$\ell_{ik}(\alpha) = 0; \; \ell_{ik}(b) = \begin{cases} 0 \;, \; i \neq k \; için \\ 1 \;, \; i = k \; için \end{cases} \tag{6.4}$$

(i,k = 1, 2, ...) dır.

Ve aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$x_i' = \sum_{s=1}^{\infty} a_{is}\xi_s = (Ax, \varphi_i) = \int_a^b \lambda d(\wp_\lambda x, \varphi_i) = \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s=1}^{\infty} \ell_{is}(\lambda)\xi_s\right),$$

yani $\quad a_{is} = \int_a^b \lambda d\ell_{is}(\lambda)$ (6.5)

ve $\quad \left.\begin{array}{l} (Ax,y) = \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} \ell_{st}(\lambda)\xi_t\overline{\eta}_s\right) \\ (Ax,x) = \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} \ell_{st}(\lambda)\xi_t\overline{\xi}_s\right) \end{array}\right\}$ dır. (6.6)

Birimin açılımı özelliğinden $\lambda_1 \leq \lambda_2$ için

$$\sum_{s=1}^{\infty} \ell_{is}(\lambda_1)\ell_{sk}(\lambda_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \ell_{is}(\lambda_2)\ell_{sk}(\lambda_1) = \ell_{ik}(\lambda_1) \tag{6.7}$$

ve genel olarak

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Delta_1\ell_{is}(\lambda).\,\Delta_2\ell_{sk}(\lambda) = \Delta_1\Delta_2\ell_{ik}(\lambda), \tag{6.8}$$

burada eşitliğin sağ tarafı $\Delta_1\Delta_2$ aralığının sonunda $\ell_{ik}(\lambda)$ değerlerinin farkını gösterir. Eğer $f(\lambda)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon ise f(A) operatörü aşağıdaki elemanlardan oluşan bir matrise karşılık gelir.

$$\{f(A)\}_{ik} = \int_a^b f(\lambda)d\,\ell_{ik}(\lambda). \tag{6.9}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \int_a^b f_1(\lambda)d\ell_{is}(\lambda).\int_a^b f_2(\lambda)d\ell_{sk}(\lambda) = \int_a^b f_1(\lambda)f_2(\lambda)d\ell_{ik}(\lambda) \tag{6.10}$$

şeklinde yazabiliriz.

Belirtelim ki

$$(\wp_\lambda x, y) = \sum_{s,t=1}^{\infty} \ell_{st}(\lambda)\xi_t\overline{\eta}_s \tag{6.11}$$

bilineer formu λ' nın sınırlı değişken fonksiyonudur. y = x olduğunda (6.11) ifadesi λ' nın azalmayan bir fonksiyonu olur ve bunun sonucu olarak da $\ell_{ss}(\lambda)$ fonksiyonları da azalmayan olurlar. (6.9) formülü geniş f(λ) fonksiyonlar sınıfına uygulanabilir. f(λ)' nın sınırlı olduğunu farzetmek yeterlidir. Bu durumda azalmayan bir fonksiyona göre ölçülebilir olacaktır. Sürekli bir spektrum durumunda bütün $\ell_{ik}(\lambda)$ fonksiyonları sürekli olacaktır. Bunun tersi de doğrudur. Karışık spektrum halinde biz A' nın saf noktasal spektruma sahip olduğu alt uzayı L ile saf spektruma sahip olduğu tümleyenini ise H-L ile gösterelim. Bu alt uzaylarda kapalı ortonormal sistemleri ele alalım. L' de $(\xi_1', \xi_2',...)$ elemanını ve H-L' de

$\left(\xi_1^{''},\xi_2^{''},...\right)$ elemanlarını aldığımızda, bilineer ve kuadratik formu, $\ell_{st}(\lambda)$ sürekli olmak üzere aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k\eta_i &= \sum_k \lambda_k \xi_k^{'}\overline{\eta}_k^{'} + \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty}\ell_{st}(\lambda)\xi_t^{''}\overline{\eta}_s^{''}\right)\\ \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k\overline{\xi}_i &= \sum_k \lambda_k \left|\xi_k^{'}\right|^2 + \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty}\ell_{st}(\lambda)\xi_t^{''}\overline{\xi}_s^{''}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{6.12}$$

$\{R(\lambda)\}_{ik}$ elemanları

$$\{R(\lambda)\}_{ik} = \left\{(A-\lambda I)^{-1}\right\}_{ik}$$

eşitliği ile tanımlanmış A matrisini düşünelim.

$$\{R(\lambda)\}_{ik} = \int_a^b \frac{d\ell_{ik}(\mu)}{\mu-\lambda}, \tag{6.13}$$

A' nın spectrumuna ait olmayan λ için yukarıdaki (6.13) eşitliğini elde ederiz. Vurgulayalım ki (6.9)' dan A nın pozitif integral kuvvetlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\left\{A^m\right\}_{ik} = \int_a^b \lambda^m d\ell_{ik}(\lambda) \tag{6.14}$$

Eğer $\lambda = 0$ A' nın spektrumuna ait değilse yani bütün $\ell_{ik}(\lambda)$' ler, $\lambda = 0$' ın bazı komşuluğunda sabitlerse, sınırlı bir A^{-1} ters matrisi vardır ve kuvvetleri

$$\left\{A^{-m}\right\}_{ik} = \int_a^b \lambda^{-m} d\,\ell_{ik}(\lambda) \tag{6.15}$$

eşitliği ile verilir.

7. SINIRSIZ SİMETRİK OPERATÖRLERİN MATRİS TEMSİLİ

H uzayının ayrık olduğunu farz edelim. A operatörünün matris temsili ile ilgilenelim. A operatörü burada sınırsız, simetrik ve kapalıdır.

H' de yoğun D_A alt kümesine ait olan bir $\{e_k\}_1^\infty$ ortonormal bazını alalım.

$$Ae_k = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, ...) \text{ ve} \tag{7.1}$$

$$(Ae_{k,}e_i) = a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, ...) \tag{7.2}$$

olsun.

Şimdi e_k vektörlerindeki değerlerine göre yani (a_{ik}) matrisine göre A operatörünü oluşturalım.

Bu amaçla bütün e_k (k = 1, 2, 3, ...) vektörler kümesinin $L = L(e_1, e_2, e_3, ...)$ lineer birleşimini ele alalım.

B operatörü

$$Be_k = c_k, \quad (k = 1, 2, 3, ...) \tag{7.3}$$

eşitliği ile $k \geq 1$ ve e_k'lar için tanımlı bir lineer operatör olsun. Lineerliği ile L' ye genişletilsin. Böylece B' nin D_B tanım kümesi lineer manifold L' dir. $\overline{a}_{ik} = a_{ki}$ olduğunda B simetriktir. (7.1) ve (7.3) ten A, B' nin kapalı bir genişletilmesidir. Böylece B' nin kapanışı $\overline{B}$,

$$\overline{B} \subset A$$

bağıntısını sağlar.

$\overline{B}$ (7.1) koşullarını sağlayan minimal operatördür. Eğer $\{e_k\}_1^\infty$ bazında matrisi (a_{ik}) olan bir operatör alınırsa o zaman $\overline{B}$' nin herhangi bir simetrik genişletilmesi değil $\overline{B}$' nin kendisini kabul etmek doğaldır.

Buradan $\overline{B} = A$ yazabiliriz. Bu durumda A operatörü $\{e_k\}_1^\infty$ bazına göre a_{ik} matrisiyle temsil edilir. $\{e_k\}_1^\infty$ bazında değişiklik (a_{ik}) matrisini ve B operatörünü de değiştirir. Bu durumda bir soru ortaya çıkar. Kapalı simetrik bir A operatörü verildiğinde $\overline{B} = A$ eşitliğine göre bir $\{e_k\}_1^\infty$ ortonormal baz bulmak mümkün müdür? Aşağıda bu soruyu cevaplayacağız.

Tanım 7.1

Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\{e_k\}_1^\infty$ ortonormal bazına, A kapalı simetrik operatörünün matris temsili için bir baz oluşturur denir.

1) bazın elemanları D_A ’ ya aittir

2) A birim elemanları $e_k, k \geq 1$ değerleri Ae_k olan minimal kapalı lineer operatördür.

Teorem 7.2

A bir kapalı simetrik operatör, $\{e_k\}$ elemanları D_A ’ya ait olan keyfi bir ortonormal baz ve $(Ae_k, e_i) = a_{ik}$ (i,k = 1, 2, 3, ...) olsun. Eğer

$$f = \sum_{k=1}^\infty x_k\, e_k \tag{7.4}$$

ise o zaman her $f \in D_A$ için Af değeri aşağıdaki formüller ile verilir.

$$Af = \sum_{i=1}^\infty y_i e_i \tag{7.5}$$

$$y_i = \sum_{k=1}^\infty a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3, ...). \tag{7.6}$$

İspat : İspat aşağıdaki denklemin sonucudur.

$$y_i = (Af, e_i) = (f, Ae_i) = \sum_{k=1}^\infty (f, e_k)(e_k, Ae_i)$$

$$= \sum_{k=1}^\infty (f, e_k)(Ae_k, e_i) = \sum_{k=1}^\infty a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3, ...).$$

Teorem 7.3

A bir kapalı simetrik operatör, $\{e_k\}_1^\infty$ A’ nın bir matris temsilinin bir bazı ve $a_{ik} = (Ae_k, e_i)$ (i, k = 1, 2, 3, ...) olsun.

Aşağıdaki bağıntılarla T operatörünü tanımlayalım.

$Tf = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i$, burada $z_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ ve D_T kümesi üzerinde, $\sum_{i=1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 < \infty$ olmak üzere bütün vektörler $f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ dır.

O zaman $T = A^*$ yani T, A' nın eşleniğidir.

İspat: İlk önce

$$A^* \subset T \tag{7.7}$$

olduğunu ispatlayalım. $g \in D_{A^*}$ ve $A^* g = g^*$ olsun.

$g = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, $g^* = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i$ olduğundan

$$z_i = (g^*, e_i) = (g, Ae_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(e_k, Ae_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(Ae_k, e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$$

elde ederiz. Aynı zamanda

$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 = \|g^*\|^2 < \infty$ dır.

Buradan g, D_T kümesine aittir ve $Tg = g^*$ dır. O halde (7.7) ispatlamış olduk.

İspatta $\{e_k\}_1^{\infty}$ bazının A operatörün matris temsilinin bir bazı olduğunu kullanmadık. Şimdi

$$T \subset A^* \tag{7.8}$$

olduğunu ispatlayalım.

$g \in D_T$ ve $g = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ olsun.

$(Ae_i, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k (Ae_i, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} \ \bar{x}_k$ eşitliğini elde ederiz.

Aynı zamanda

$(Tg,e_i)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{a}_{ki}x_k$ eşitliği sağlandığında

$(Ae_i,g)=\overline{(Tg,e_i)}=(e_i,Tg)$ olur.

Sonuç olarak $e_i(i=1,2,3,...)$ vektörlerinin lineer birleşimindeki her f için

(Af, g) = (f, Tg) dir. (7.9)

Fakat $\{e_k\}_1^{\infty}$ bazı, A operatörün matris temsilinin bazı olduğunda (7.9) eşitliği $f\in D_A$ için sağlanır. Bundan dolayı $g\in D_{A^*}$ ve $A^*g=Tg$ dir. O halde (7.8) bağıntısı sağlandı. (7.7) ve (7.8) bağıntılarından $T=A^*$ olduğu ispatlanmıştır.

Uyaralım ki Teorem 7.3 aşağıdaki denklemi verir.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k\right)\overline{y}_i=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}y_i\right)} \quad (7.10)$$

Burada $\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k$ D_A kümesinin ve $\sum_{i=1}^{\infty}y_ie_i$ D_{A^*} kümesinin vektörleridir. (7.10) Denklemi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k\right)\overline{y}_i=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}\overline{y}_i\right)x_k\,.$$

Eğer toplamın tersi D_{A^*} ' daki her vektör için geçerli ise o zaman A^* operatörü simetriktir. Bu durumda A kendine eş bir operatördür.

Yukarıdaki teoremler simetrik operatörlerin matris temsillerinin neden (7.5), (7.6) ve (7.4) formlarındaki formüllerle kurulamadığını gösterir.

Teorem 7.4

Her kapalı simetrik A operatörün matris temsilinin bir bazı vardır.

İspat: İlk olarak, $\{f_k\}_1^{\infty}\subset D_A$ dizisi vardır, öyle ki her $f\in D_A$ için, $\lim_{i\to\infty}f_{ki}=f$ ve $\lim_{i\to\infty}Af_{ki}=Af$ olacak şekilde $\{f_{ki}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi olduğunu ispatlayalım. Bundan sonra $\{f_k\}_1^{\infty}$ dizisini ortagonalleştirerek teoremi ispatlamış oluruz. H' de yoğun olan keyfi bir $\{h_k\}_1^{\infty}$ dizisi seçelim. Eğer bir (m, n, p) tamsayı üçlüsü için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $f\in D_A$ varsa

$$\|h_m - f\| \le \frac{1}{p},\ \|h_n - Af\| \le \frac{1}{p},$$

bu taktirde bu üçlüye f elemanını karşılık getirelim ve bunu $f_{m,n,p}$ ile gösterelim. Eğer $\{h_k\}_1^\infty$ dizisi H' de yoğunsa o zaman $\{f_{m,n,p}\}$ dizisi sonsuz bir dizi tanımlar. Her (m,n,p) üçlüsüne bir elemanın karşılık gelmemesi veya farklı üçlüye aynı elemanın karşılık gelmesi durumu sonralar göreceğimiz gibi önemli değildir. $\{f_{m,n,p}\}$ dizisinin elemanlarını bir indis ile numaralayarak istenilen $\{f_k\}_1^\infty$ dizisi elde edilir.

İspat için keyfi bir $f \in D_A$, keyfi $\varepsilon > 0$ ve $p' \ge \frac{2}{\varepsilon}$ tamsayısını seçelim. $\{h_k\}_1^\infty$ dizisi H' de yoğun ise öyle bir m', n' tamsayısı vardır ki

$$\|h_{m'} - f\| \le \frac{1}{p'},\ \|h_{n'} - Af\| \le \frac{1}{p'} \ \text{dir.} \tag{7.11}$$

(7.11)' den (m', n', p') üçlüsünün öyle bir $f_{m',n',p'}$ elemanı vardır ki

$$\|h_{m'} - f_{m',n',p'}\| \le \frac{1}{p'},\ \|h_{n'} - Af_{m',n',p'}\| \le \frac{1}{p'} \ \text{dir.} \tag{7.12}$$

(7.11) ve (7.12)' den

$$\|f_{m',n',p'} - f\| \le \varepsilon,\ \|Af_{m',n',p'} - Af\| \le \varepsilon \ \text{dir.}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi iken, istenilen $\{f_{ki}\}_{i=1}^\infty$ alt dizisi elde edilmiş oldu. Böylece teorem ispatlandı.

Her kapalı simetrik operatöre karşılık gelen bir Hermityen matrisi olduğunu ispatladık. Bununla birlikte her Hermityen matris bir simetrik operatör tanımlamaz.

Teorem 7.5

Eğer Hermityen (a_{ik}) matrisi aşağıdaki bağıntıyı sağlarsa

$$\sum_{i=1}^\infty |a_{ik}|^2 < \infty \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7.13}$$

ilgili her ortonormal baza bağlı olarak kapalı bir simetrik operatör tanımlar.

İspat: $Ae_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\, e_i$ (k = 1, 2, 3, ...) olsun.

Bu en başta söylediğimiz $\overline{B}$ operatörünü tanımlar.

(7.13) koşulunu sağlayan sınırlı olmayan hermityen matrislere sınırsız Hermityen matrisler denir. Genelde sınırsız Hermityen (a_{ik}) matrisi için $\begin{pmatrix} o \\ a_{ik} \end{pmatrix} = (u_{ir}^{*}).(ar_s).(u_{sk})$ formülü sağlanmayabilir. Buna göre genelde simetrik sınırsız operatörleri matris temsili yardımı ile incelemiyorlar.

Örnek 7.6

H = $L_2(-\pi,\pi)$ uzayında

$$Lf = \frac{1}{i} f^{'}(x) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

operatörünü göz önüne alalım. L 'nin tanım kümesi

$$D(L) = \{ f : f(x) \ \ ve \ \ f^{'}(x) \ [-\pi,\pi] \text{ de sürekli ve } f(-\pi) = f(\pi) \}$$

elemanlarından ibaret olsun. $L:\ L_2(-\pi,\pi) \ \rightarrow \ L_2(-\pi,\pi)$ simetrik sınırsız operatördür. Gerçekten D(L) $L_2(-\pi,\pi)$ üzerinde her yerde yoğundur ve

$f, g \in D(L)$ iken

$$(Lf, g) = \int_{-\pi}^{\pi} Lf(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{i} f'(x)\overline{g(x)}dx$$

$$= \ \frac{1}{i} f(x)\overline{g(x)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\left(\frac{1}{i} g^{'}(x)\right)}dx$$

$$= \ \frac{1}{i}\left[f(\pi)\overline{g(\pi)} - f(-\pi)\overline{g(-\pi)}\right] + \int_{-\pi}^{\pi} f\,\overline{Lg}dx$$

$$= (f, Lg)$$

$(Lf, g) = (f, Lg)$ dir.

Bu ise L' nin simetrikliğini gösterir.

$e^{\text{int}} \in D(L)$ iken (n = 0,1,2, …), $\left\| e^{\text{int}} \right\| = \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{\text{int}} \right| dt = 2\pi$

$$\frac{\left\| L(e^{\text{int}}) \right\|}{\left\| e^{\text{int}} \right\|} = \frac{\left\| ne^{\text{int}} \right\|}{2\pi} = \frac{n.2\pi}{2\pi} = n \to \infty \quad \text{olduğundan}$$

L sınırsız operatördür.

Fourier serileri (Tolstov, 1962) teorisinden $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ikt} \right\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ fonksiyonlar kümesinin $L_2(-\pi, \pi)$' de bir ortonormal baz oluşturduğu bellidir. $Le^{ikt} = ke^{ikt}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ olduğu göz önüne alınırsa $\{e^{ikt}\}$ bazında L operatörünün matrisinin aşağıdaki şekilde köşegen matris olduğu açıkça görülmektedir.

$$\begin{pmatrix} ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Burada fark sadece matrisin satır ve sütun elemanlarının 1' den ∞' a kadar değil, -∞' dan ∞' a kadar numaralandırılmasıdır. Bu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$ fonksiyonlarının $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ sayıları ile numaralandığından ortaya çıkmıştır.

Uyarı 7.7

L operatörünün sınırsız olduğu, bunun matrisin köşegen elemanlarının sınırsızlığından da görülmektedir.

8. JAKOBİYEN MATRİSLERİ

Şimdi elde edilen bazı sonuçları jakobiyen matrislerine uygulayalım.

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\| \tag{8.1}$$

burada a_i'ler reel ve $b_i > 0$ dır.

$$d_k^{\ 2} = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki}|^2 < \infty \quad (k=1,2,\dots;\ d_k \geq 0)$$

koşulu sağlanır.

Baz vektörlerini numaralandırırken k = 0 ile başlayalım.

$P_k(\lambda)$, reel polinomlarını

$$\lambda P_k(\lambda) = b_k\ P_{k+1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_{k-1} P_{k-1}(\lambda), \tag{8.2}$$

$$P_{-1}(\lambda) = 0;\ P_o(\lambda) = 1$$

ile form edelim (Smirnov, 1964, V.5, sayfa, 500, 619).

Bunun sonucu olarak (Smirnov, 1964, V.5, sayfa 501)

$$e_k = P_k(A) e_o \text{ olur.} \tag{8.3}$$

Burada e_k baz vektörleridir.

Teorem 8.1

Eğer

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(i)|^2 \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right), \tag{8.4}$$

serisi yakınsaksa, A operatörü kendine eş değildir.

İspat :(8.4)' ün yakınsaklığından, $x \in \ell_2$' yi $x_k = P_k(i)$ bileşenleri ile gösterelim. Böylece $(x, e_k) = P_k(i)$ olur.

$Ae_k = b_{k-1}e_{k-1} + a_k e_k + b_k e_{k+1}$ olduğundan ve (8.2)' yi kullanarak

$$(Ae_k, x) = b_{k-1}\overline{P_{k-1}(i)} + a_k\overline{P_k(i)} + b_k\overline{P_{k+1}(i)} = \overline{iP_k(i)}$$

eşitliğini elde ederiz. $(e_k, x) = \overline{P_k(i)}$ iken $(Ae_k, x) = (e_k, ix)$ yazabiliriz. Skaler çarpımın dağılma özelliğinden her y "sonlu elemanı" için (Ay, x) = (y, ix) eşitliğini elde ederiz. Teoreme göre (Smirnov, 1964, V.5, sayfa 618) her $y \in D(A)$ bu denklemi sağlar. Böylece, x∈ D(A^*)'dır ve $A^*x = ix$. Buradan A kendine eş olmadığı görülür.

Teorem 8.2

Eğer (8.4) serisi ıraksaksa, A kendine eştir.

İspat : A^*' ın $\pm i$ öz değerlerine sahip olmadığını göstermek yeterlidir. Tersini düşünelim. $A^*x = ix$ olsun, burada $x(x_o, x_1, x_2, \ldots)$ sıfırdan farklıdır. A^* tanımından ve $e_k \in D(A)$ olduğundan, $(Ae_k, x) = (e_k, ix)$ eşitliğini veya $(x, Ae_k) = i(x, e_k) = i\,x_k$ elde ederiz. Yani $(x, b_{k-1}e_{k-1} + a_k e_k + b_k e_{k+1}) = i\,x_k$ dır. Skaler çarpımı açık olarak yazdığımızda $b_{k-1}x_{k-1} + a_k x_k + b_k x_{k+1} = ix_k$ eşitliğini elde ederiz. (8.2) ve tam tümevarım metodunu kullanarak $x_k = P_k(i)x_o$ eşitliğini ve $x_o \neq 0$ elde ederiz. Fakat bu (8.4)' ün ıraksaklığı ile çelişki yaratır. Eğer (8.4)' te i ve –i yer değiştirirsek başka bir ıraksak seri elde ederiz. $P_k(-i) = \overline{P_k(i)}$, iken yukarıdaki gibi A^*, (-i) özdeğerine sahip değildir. Öyleyse teorem ispatlanmış olur. Böylece (8.4) serisinin ıraksak olması için gerek ve yeter koşul A nın kendine eş olmasıdır. Verilen son iki teoremin ispatlarını tekrar ettiğimizde gösterilebilir ki, eğer

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(a)|^2 \qquad (8.5)$$

serisi verilen reel olmayan her a için yakınsaksa o zaman a ve $\overline{a}$, A^*' ın özdeğerleridir, eğer (8.5) serisi reel olmayan bazı a için ıraksaksa a ve $\overline{a}$ A^*' ın özdeğerleri değildirler. Bunun sonucu olarak A kendine eş yani (8.4) serisi ıraksaktır. Zıt olarak (8.5) serisi reel olmayan bazı a için ıraksaksa, A*' ın reel olmayan özdeğerleri vardır ve A kendine eş değildir. (8.4) serisi de yakınsak olur.

Teorem 8.3

Sadece iki durum söz konusudur. (8.5) serisi verilen non-reel a için ıraksaktır ya da verilen non-reel a için yakınsaktır. Birinci durumda A kendine eştir, ikinci durumda ise kendine eş değildir.

Teorem 8.2' nin ispatının sonucu olarak (8.4) serisi yakınsaksa öz değer i' ye karşılık gelen A^*' ın öz vektörlerinin bileşenleri $x_k = P_k(i)x_o$ (k = 1, 2, ...) denklemlerini sağlarlar. Burada x_o keyfi ve sıfırdan farklıdır. Yani $M_i(A)$ alt uzayı tek boyutludur. Benzer olarak $M_{-i}(A)$ alt uzayı da tek boyutludur. $M_{-i}(A)$, $M_i(A)$' dan x_k elemanlarının yerlerine eşlenikleri ile yer değiştirerek elde edilir. $M_i(A)$ ve $M_{-i}(A)$ alt uzaylarının x_i ve x_{-i} elemanları keyfi kompleks çarpanlara ayrılabilir.

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(i)e_k,\ x_{-i} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-i)e_k .$$

A' nın kendine eş genişletilmesi A_θ' nın $D(A_\theta)$ alt uzayının elemanları $v = x_A + ax_\theta$ ile tek türlü tanımlıdır. Burada $x_A \in D(A)$, a herhangi bir kompleks sayı, $x_\theta = i(e^{-\theta/2}x_{-i} + e^{\theta/2}x_i)$ ve $0 \le \theta \le 2\pi$ dir. $\wp_\lambda$ birinci durumda A' nın spektral fonksiyonu veya ikinci durumda herhangi A_θ' nın spektral fonksiyonu ve $\rho(\lambda) = (\wp_\lambda e_0, e_0)$ olsun.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_k(\lambda)P_\ell(\lambda)d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & k \ne \ell \text{ } için \\ 1, & k = \ell \text{ } için \end{cases}$$

$$(Ae_k, e_\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_k(\lambda)P_\ell(\lambda)d\rho(\lambda),\quad e_k = \int_{-\infty}^{\infty} P_k(\lambda)\, d\wp_\lambda e_o ,$$

eşitliklerini elde ederiz (Smirnov, 1964, V.5, sayfa 502).

Burada, A ikinci durumdaki A_θ ile yer değiştirmelidir. Açıktır ki (8.1) matrisinin elemanları

$$a_{ik} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_k(\lambda)P_i(\lambda)\, d\rho(\lambda) \text{ ile verilir.}$$

Teorem 8.4

$P_k(\lambda)$ polinomları $\rho(\lambda)$'ya göre kapalı bir sistem teşkil ederler.

İspat : $\varphi_\mu(\lambda)=\begin{cases}0, & -\infty<\lambda\le\mu \text{ için}\\ 1, & \lambda>\mu \text{ için}\end{cases}$

şeklinde bir fonksiyon olsun. Sonlu sayıda $a_1, a_2, \ldots, a_m$ değerleri alan keyfi $\pi(\lambda)$ fonksiyonu, böyle ki bu her a_k değerini sonlu aralıkta alıyor, $\varphi_\mu(\lambda)$ fonksiyonlarının sonlu lineer kombinasyonu şeklinde gösterilebildiği açıktır. Eğer her μ için, $\varphi_\mu(\lambda)$ için kapalılık denklemini ispatlayabilirsek, $\varphi_\mu(\lambda)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu ve belirtilen tipten oluşan $\pi(\lambda)$ fonksiyonları kapalılık denklemi için de sağlanacaktır. Fakat bu fonksiyonların lineer birleşimi L_2' de $\rho(\lambda)$'ya göre her yerde yoğundur (Smirnov, 1964, V.5, sayfa 168). Böylece $P_k(\lambda)$ kapalı bir sistem teşkil eder. $\varphi_\mu(\lambda)$ için kapalı denklemi ispat etmek yeterlidir. $\varphi_\mu^{\,2}(\lambda)$' nın integralini ve bu fonksiyonun Fourier katsayısını hesaplayalım.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\mu^{\,2}(\lambda)d\rho(\lambda)=\int_{(-\infty,\mu]}d\rho(\lambda)=\rho(\mu);$$

$$a_k=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\mu(\lambda)P_k(\lambda)d\rho(\lambda)=\int_{(-\infty,\mu]}P_k(\lambda)d\rho(\lambda).$$

Her μ için göstermeliyiz ki:

$$\rho(\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(-\infty,\mu]}P_k(\lambda)d\rho(\lambda).\int_{(-\infty,\mu]}P_k(\lambda)d\rho(\lambda).$$

Kapalılık denkleminin özelliğinden

$$\rho(\mu)=\left\|\wp_\mu e_0\right\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\wp_\mu e_o, e_k\right)\left(e_k,\wp_\mu e_o\right)$$

eşitliğini elde ederiz ve göstermek yeterlidir ki

$$\left(\wp_\mu e_o, e_k\right)=\left(e_k,\wp_\mu e_0\right)=\int_{(-\infty,\mu]}P_k(\lambda)d\rho(\lambda)$$

eşitliğinin sağ tarafı reeldir. Bu son denklem, e_k ' nın ilk integralinin bir direk sonucudur (Smirnov, 1964, V.5, sayfa 564). Böylece teorem ispatlandı.

(8.1) matrisinin kendine eş olması için yeterli olan bir kriter verelim. (8.2)' nin sonucu olarak

$$b_k \frac{P_{k+1}(a)\overline{P_k(a)} - \overline{P_{k+1}(a)}\, P_k(a)}{a-\bar{a}} = \left|P_k(a)\right|^2 + b_{k-1} \frac{P_k(a)\overline{P_{k-1}(a)} - \overline{P_k(a)}\, P_{k-1}(a)}{a-\bar{a}}$$

ve k = 0 dan k = n -1'e kadar toplarsak

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|P_k(a)\right|^2 = b_{n-1} \frac{P_n(a)\overline{P_{n-1}(a)} - \overline{P_n(a)}\, P_{n-1}(a)}{a-\bar{a}}$$

eşitliğini elde ederiz. a = i ile;

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|P_k(i)\right|^2 = b_{n-1} \frac{P_n(i)\overline{P_{n-1}(i)} - \overline{P_n(i)} P_{n-1}(i)}{2i} = b_{n-1} T\left[P_n(i)\,\overline{P_{n-1}(i)}\right] \text{ olur.}$$

$P_o(\lambda) \equiv 1$ olduğunda, eşitliğin sol tarafı ≥ 1 dir. Buradan

$$\frac{1}{b_{n-1}} \leq T\left[P_n(i)\overline{P_{n-1}(i)}\right] \leq \left|P_n(i)\right|.\left|P_{n-1}(i)\right| \leq \frac{1}{2}\left[\left|P_n(i)\right|^2 + \left|P_{n-1}(i)\right|^2\right],$$

n = 1 den n = m + 1'e kadar toplarsak

$\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{b_n} \leq \sum_{n=0}^{m+1} \left|P_n(i)\right|^2$ eşitliğini elde ederiz.

Teorem 8.5

$\frac{1}{b_n}$ ' den oluşturulmuş seri ıraksaksa, A kendine eş bir operatördür.

Yukarıdaki durumla bağlantılı ispatsız iki gerçekten bahsedelim. Gösterilebilir ki, eğer A' nın indis defekti (1,1) varsa, (8.5) serisi a' nın her değeri için yakınsaktır. Eğer A kendine eş ise, (8.5) serisi A' nın spektrum noktasına karşılık gelen hariç bütün reel a'lar için ıraksaktır. Bundan başka indis defekti (1,1) ile, A' nın kendine eş her genişletilmesi bir spektrum noktasına sahiptir (Akhiezer and Glazman, 1993).

Hermityen polinomlar Jakobiyen matrise bir örnek olarak alınabilir.

$$H_k(\lambda)=(-1)^k e^{\lambda^2}\frac{d^k}{d\,\lambda^k}\left(e^{-\lambda^2}\right) \tag{8.6}$$

eşitliği ile tanımlandığı ve

$$\lambda H_k(\lambda)=\frac{1}{2}H_{k+1}(\lambda)+k\,H_{k-1}(\lambda) \tag{8.7}$$

bağıntısı ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}H_k^{\,2}(\lambda)d\lambda=2^k k!\sqrt{\pi} \tag{8.8}$$

olduğu bilinmektedir (Smirnov, 1964, V. III_2, sayfa 587-588)

Polinomların normalize edilmiş şeklini elde etmek için (8.6) polinomlarının yerine

$$P_k(\lambda)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k!}}e^{\lambda^2}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(e^{-\lambda^2}\right) \tag{8.9}$$

polinomlarını tanımlayalım. Buradan (8.7) bağıntısını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\lambda P_k(\lambda)=\sqrt{\frac{k+1}{2}}\,P_{k+1}(\lambda)+\sqrt{\frac{k}{2}}\,P_{k-1}(\lambda).$$

Burada $P_o(\lambda)\equiv 1$ dir. Böylece, bir Jakobiyen matrisi alırsak, $a_k=0$; $b_k=\sqrt{\frac{k+1}{2}}$

(k = 0, 1, 2, ...) değerlerini koyduğumuzda aşağıdaki bağıntıları sağlayan (Smirnov, 1964, V. III_2, sayfa 588)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}P_k(\lambda)P_\ell(\lambda)d\lambda=\begin{cases}0, k\neq\ell \; i\c{c}in\\ 1, k=\ell \; i\c{c}in\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}\lambda P_k(\lambda)P_\ell(\lambda)d\lambda=\begin{cases}0, |k-\ell|\neq 1 \; i\c{c}in\\ \sqrt{\frac{k}{2}}, \ell=k+1 \; i\c{c}in\end{cases}$$

(8.9) polinomlarına ulaşırız.

Teorem 8.5' in sonucu olarak A kendine eş operatördür. Yukarıdaki integral formülünü kullanarak gösterebiliriz ki A operatörü için

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\mu^2} d\mu \quad \text{dir.}$$

A' nın, bütün $(-\infty, +\infty)$ aralığı üzerinde basit sürekli bir spektrumu vardır.

Belirtelim ki, Jakobi matrisleri günümüzde de incelenmektedir. Örneğin; (Kostyucenko ve Mirzoyev, 1998, Maksudov, Bairomov and Orudzheva, 1992, Bairomov, Çakar ve Krall, 2001) çalışmasından ve orada verilen kaynaklardan da görülmektedir.

KAYNAKLAR

Akhiezer, N.I. and Glazman, I.M., (1993), Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications Inc., New York.

Akhiezer, N.I., (1941), “Sonsuz Jakobi Matrisleri ve Momentler Problemi”, Usp.Matem.Nauk., 9:126-156(Rusça).

Bairomov, E., Çakar, Ö. ve Krall A.M., (2001), “Non-selfadjoint Difference Operators and Jacobi Matrices with Spectral Singularities”, Math.Nachr., 229:5-14.

Berezanskii, J.M., (1968), Expansions of Self-adjoint Operators in Eigenfunctions, Am. Math Society vol.17, Providence, R.I. English Translation.

Hilbert, D., (1924), “Grundzüge Einer Allgeminen Theorie der Linearen Integralgleichungen”.

Hochstadt, H., (1989), Integral Equations, John Wiley&Sons, New York

Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., (1957,1961), Functional Analysis vol 1,2, Graylock, Albany.

Kostyucenko, A.G. ve Mirzoyev, K.A., (1998), “Matris Katsayılı Üç Terimli Recurent İlişkiler.Tam Belirsizlik Hali”, Matem.Zametki., 63:709-716 (Rusça).

Maksudov, F.G., Bairomov E.M. and Orudzheva, R.U, (1992), “The Inverse Scattering Problem an Infinite Jacobi Matrix with Operator Elements”, Dokl.Math., 45:366-370.

Smirnov, V.I., (1964), A course of Higher Mathematics V. III_2, Pergamon Press, New York.

Smirnov, V.I., (1964), A course of Higher Mathematics V.5, Pergamon Press, New York.

Tolstov, G.P., (1962), Fourier Series, Englewood Clifts, N.J. Prentice-Hall.

Weidmann, J., (1980), Linear Operators In Hilbert Space, Springer-Verlag, New York.

Wintner, A., (1929), Spectral Theorie der Unendlichen Matrizen, Liebzig.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	08.02.1982	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1996-2000	Cibali Lisesi
Lisans	2000-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

	2004-2005	Vem Dershanesi
	2005-2007	Med Dershanesi