

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VADELİ İŞLEMLERDE FİYATLANDIRMANIN
MATEMATİKSEL YÖNTEMLERLE ANALİZİ**

Didem ÖZVEREN

**FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

İSTANBUL, 2007

SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. FUTURES PİYASALARININ GENEL NİTELİKLERİ.....	5
3.1 Futures Piyasalarının Tarihsel Gelişimi	5
3.2 Risk Transferi ve Spekülatör	5
3.3 Vadeli Piyasalarda Alınan Pozisyonlar	7
3.4 Forward Sözleşmeleri.....	7
3.5 Futures Piyasalarında Teminat.....	9
3.6 Takas Odası.....	13
3.7 Futures Piyasalarında Mal Teslimi ve Denetim.....	13
4. FUTURES PİYASALARINDA FİYATLANDIRMA	16
4.1 Birleşik Faiz Hesaplamaları.....	16
4.2 Forward ve Futures Fiyatlarının Belirlenmesi	16
4.3 Futures Sözleşmelerin Değerlendirilmesi.....	21
4.4 Forward ve Futures Fiyatları Eşit mi?	22
4.5 Hisse Senedi Endeksi ile Futures Sözleşmeleri	24
4.5.1 Kısa Tarihçe	24
4.5.2 Endeks Kavramı	26
4.5.3 Temel Özellikler.....	26
4.5.4 Endeks Futurelarının Fiyatlandırılması	28
4.6 Döviz Piyasalarında Futures Sözleşmeleri	28
4.6.1 Döviz Kurlarını Belirleyen Ana Etmenler.....	29
4.6.2 Döviz Futures Sözleşmelerinin Fiyatlandırılması.....	31
4.7 Ticaret Malları ile İlgili Futures Sözleşmeleri	31
4.7.1 Ticaret Mallarında Futures Sözleşmeleri Fiyatlandırılması	34
4.8 Tahvil ve Bono Piyasalarında Futures İşlemleri	35
4.8.1 Genel Özellikler ve Kotasyon	35
4.8.2 Tahvil Fiyatlanmasının Esasları	40
4.8.3 Getiri Eğrisi.....	41
4.8.4 Tahvil Teslim Koşulları.....	45

4.8.5	T-Bond Futures Fiyatlaması	45
4.8.6	T-Bill ve Eurodolar Futures Fiyatlanması	48
5.	FUTURES PİYASALARINDA RİSK KORUMASI (HEDGİNG)	49
5.1	Korunma Oranının Minimum Varyansı	52
5.2	Sözleşmenin Optimal Sayısı	55
6.	OPSİYON SÖZLEŞMELERİ	56
6.1	Vadeli İşlem Opsiyon (Options) Sözleşmeleri	56
6.2	Geometrik Brown Hareketleri	60
6.3	Geometrik Brown Hareketinin Daha Basit Modellerin Bir Limiti Olarak Elde Edilmesi	60
6.4	Brown Hareketi	62
6.5	Options Fiyatlandırmasına Bir Örnek	63
6.6	Arbitraj Teoremi	65
6.7	Çok Periyotlu Binom Modeli	68
6.8	Arbitraj Teoreminin İspatı	70
6.9	Black – Scholes Formülleri	72
6.10	Black–Scholes Opsiyon Fiyatının Özellikleri	74
6.11	σ nin tahmini	75
6.12	Korunma Pozisyonları	77
6.12.1	Delta Koruması	77
6.12.2	Avrupa Call ve Put Opsiyonlarının Deltaları	79
6.12.3	Diğer Opsiyonlar İçin Delta	80
6.12.4	Bir portföyün deltası	80
6.12.5	Theta	81
6.12.6	Gamma	82
6.12.7	Vega	84
6.12.8	Rho	84
7.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER	85
	KAYNAKLAR	86
	ÖZGEÇMİŞ	87

SİMGE LİSTESİ

b	Baz fiyatı
c	Opsiyonun birim fiyatı
CC	Bir tahvilin taşıma maliyeti
D	Hazine bonosunun piyasadan satın alındığı fiyat
$E[X]$	X random değişkeninin beklenen değeri
F	Bugünkü futures fiyatı veya bononun nominal değeri
f	Sözleşmedeki pozisyonun bugünkü değeri
FP	Bonolardaki futures sözleşmelerinin değeri
I	Bir finansal ürünün nakit getirisinin bugünkü değeri
K	Bir sözleşmedeki varlığın teslim fiyatı
L	Temettü miktarı
P	Bir bononun piyasa fiyatı
p	Olasılık değeri
q	Kar payının yıllık sürekli olarak oranı
R_m	Yılda m defa hesaplanan faiz oranı
R_∞	Sürekli birleşik yıllık faiz oranı
r	Risksiz yıllık faiz oranı
S	Bir varlığın bugünkü değeri
T	Vade bitimine kadar geçen zaman
U	Ticaret malının saklama giderlerinin bugünkü değeri
W	Normal random değişken
$Var[X]$	X random değişkeninin varyansı
Z	Standart normal random değişken
δ	Günlük sabit risksiz faiz oranı
$\Phi(X)$	Standart normal dağılım
μ	Ortalama değer
π	Portföyün değeri
ρ	Korelasyon katsayısı
σ	Standart sapma

KISALTMA LİSTESİ

A.B.D	Amerika Birleşik Devletleri
ADP	Alternative Delivery Process
EFP	Exchange of Futures for Physicals
GNMA	Goverment National Mortgage Association
IMM	International Money Market
İMKB	İstanbul Menkul Kıymetler Borsası
T-Bill	Treasury Bills
T-Bond	Treasury Bonds
U.K	Büyük Britanya
YTL	Yeni Türk Lirası

Şekil 4.1	A.B.D faiz oranları getiri eğrisi (15 Temmuz 1993).....	44
Şekil 4.2	A.B.D faiz oranlarının getiri eğrisi (16 Mart ve 15 Temmuz 1993)	44
Şekil 5.1	Bazın zamanla değişimi.....	50
Şekil 5.2	Pozisyonun hedge oranına bağlı değişimi	53
Şekil 5.3	Future fiyatının spot fiyata bağlı değişiminin regresyonu.....	54
Şekil 6.1	Alıcı tarafın kar grafiği	58
Şekil 6.2	Satıcı tarafın kar grafiği	58
Şekil 6.3	Yatırımcının kar grafiği	59
Şekil 6.4	Satıcı tarafın kar grafiği	59
Şekil 6.5	Opsiyon fiyatlandırması	63
Şekil 6.6	Deltanın hesaplanması.....	78
Şekil 6.7	Bir call opsiyonlu (a) ve put opsiyonun (b) deltasının hisse fiyatlarına göre değişimi.....	79
Şekil 6.8	Thetanın hisse endeksi üzerindeki call-opsiyonu için değişimi.....	82
Şekil 6.9	Hisse fiyatı ile opsiyon fiyatı arasındaki bağıntı eğrisi	82
Şekil 6.10	$\Delta\pi$ ve ΔS arasındaki bağıntılar.....	83
Şekil 6.11	Gammanın S ile değişimi.....	83

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1	Vadeli işlem hareketleri	11
Çizelge 4.1	Futures stratejileri	23
Çizelge 4.2	Wallstreet journal (15 Temmuz 1993).....	37
Çizelge 5.1	Korunma oranının minimum varyansını hesaplamak için veriler.....	54
Çizelge 6.1	Volatilenin hesaplanması	76

ÖNSÖZ

Vadeli işlem piyasaları, günümüzde finans dünyasının en önemli unsurlarından biridir. Ülkemizde de vadeli işlemler 2001 yılından itibaren uygulanmaktadır. Bu nedenle konunun finans dünyamızda iyi bilinmesi önemli bir husustur. Vadeli işlemlerin yapısını büyük çapta matematiksel modeller oluşturmaktadır. Bu bakımdan konu ile ilgilenenler vadeli işlemlerin matematiksel yapısını bilmek zorundadır.

Bu çalışma, vadeli işlemlerin matematiksel yapısını bilimsel olarak incelemeyi amaçlamıştır. Futures ve options piyasalarının matematiksel yapıları, istatistik ve olasılık teorisi ve lineer programlama kullanılarak ele alınmış ve temel özellikleri matematiksel olarak ifade edilmiştir. Bu çalışmada ileri seviyede stokastik süreçler kullanılmamıştır. Böylece daha geniş bir okuyucu kitlesine hitap etme imkanı doğmuştur.

Çalışmada, bu konuda yazılmış en klasik kitap ve makalelerden faydalanılmıştır. Bu kitap ve makaleler kaynaklar kısmında verilmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında çok emeği geçen değerli hocam Prof. Dr. Mustafa Sivri'ye ve bana bu konuda yardımcı olan diğer hocalarıma teşekkür ederim.

Temmuz 2007

Didem ÖZVEREN

ÖZET

Vadeli işlemlerin matematiksel yapısı incelenmiştir. Vadeli işlemlerin temelini oluşturan futures ve optionsların yapıları ve fiyatlandırmaları matematiksel modeller kullanılarak ifade edilmiştir.

Vadeli işlemlerin matematiksel yapısı incelenirken istatistik ve olasılık teorisi ile lineer programlamanın temel özellikleri kullanılmıştır. Ayrıca stokastik bir süreç olan geometrik brown hareketlerinden yararlanılmıştır.

Forwards ve futures fiyatlarının sabit faiz oranı altında eşit oldukları bir teorem olarak ifade ve ispat edilmiştir. Hisse senedi endeksi, döviz piyasaları, ticaret malları ve tahvil–bono piyasalarındaki futures işlemleri matematiksel olarak modellenmiştir. Futures sözleşmelerindeki risk koruması (hedging) matematiksel olarak modellenmiş ve korunma pozisyonunun varyansını minimize eden oran bir teorem olarak ifade edilmiştir. Ayrıca korunma için yapılacak futures sözleşmelerinin optimal sayısı belirlenmiştir.

Opsiyon sözleşmelerinin fiyatlanmasında geometrik brown hareketleri ve arbitraj teoremi kuralı kullanılmıştır. Çok periyotlu binom modeli ile hisse senedi opsiyonu senaryoları incelenmiştir. Arbitraj imkanı vermeyen Black–Scholes formülleri elde edilmiştir. Opsiyon sözleşmelerindeki delta, theta, vega ve rho korunma yöntemlerinin matematiksel ifadeleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Vadeli işlemler, türev işlemler, forwards, futures, opsiyon, risk korunması, geometrik brown hareketleri, tahvil, bono, arbitraj, Black–Scholes denklemleri, delta, theta, vega, rho.

ABSTRACT

The mathematical structure of the financial derivatives was studied. The structure of futures and options, which are the main objects of the financial derivatives, and their pricings were expressed by using mathematical models.

In the studying of the mathematical structure of the financial derivatives the main properties of statistics, probability theory and linear programming were used. Also the geometric brown motions were utilized which is a stochastic process.

The property that the prices of forwards and futures are equal if the interest rate is constant, was expressed as a theorem and it was proved. The futures transactions on stocks index, foreign money, commerce goods, bonds were modelled in mathematical formulations. The hedgings in futures transactions were expressed mathematically. The minimizing of the variance of the hedging was expressed as a theorem and it was proved. Also the optimal number of futures contracts was obtained mathematically.

In the pricing of options contracts the geometric brown motions and the arbitrage theorem were used. Options scenarios on stock index were studied by multi binomial models. The Black–Scholes equations, which don't let any arbitrage, are obtained. The hedging methods delta, theta, vega and rho on options contracts were expressed in mathematical formulations.

Keywords: Financial derivatives, forwards, futures, options, hedging, geometric brown motions, bonds, arbitrage, Black–Scholes equations, delta, theta, vega, rho.

1. GİRİŞ

Vadeli işlem piyasaları (türev piyasaları) ilerideki bir tarihte teslimatı veya nakit uzlaşması yapılmak üzere herhangi bir malın veya finansal aracın, şimdiden alım satımının yapıldığı piyasalardır. Türev piyasaları forward, swaps, futures ve opsiyon işlemlerinin tamamını içermektedir. Daha çok tezgah üstü piyasada yapılmakta olan ve organize borsalarda işleme tabi olmayan işlemler forward ve swapslerdir. Futures ve opsiyon işlemleri ise organize borsalarda yapılmaktadır.

Vadeli işlem sözleşmesi, sözleşmenin taraflarına bugünden, belirlenen ileri bir tarihte, üzerinde anlaşılan bir fiyattan, standartlaştırılmış miktar ve kalitedeki bir malı, kıymeti ve finansal alma veya satma yükümlülüğü getiren sözleşmedir.

Bugünkü anlamda organize borsalarda işlem gören vadeli işlem sözleşmelerine benzer ilk uygulama 1697 yılında Japonya’da ortaya çıkmıştır. Japon feodal sisteminde toprak sahipleri, pirinç üretimini teminat göstererek ekonomide para gibi kabul gören alındı-sertifikalari (certificates of receipt) çıkarmışlardır. Pirinç fiyatlarındaki oynamalara göre sertifikanın değerinin değiştiği gözlenince spekülörlerle birlikte ilk vadeli işlem piyasası “Dojima Pirinç Piyasası” adı altında oluşmuştur. (İMKB (2003), sayfa 470)

A.B.D’de 19. yüzyılda sanayinin gelişmesiyle çiftçilerin üretim kapasiteleri artmış ve uluslar arası pazarlara doğru genişlemeler başlamıştır. Malların pazarlanmasının merkezi Chicago şehriydi. Burada 1848’de organize vadeli işlem borsası kuruldu. 1865 yılına kadar futures işlemlerinin standartlaşmasına yönelik çalışmalar tamamlanmıştır. İlk defa 1973’de Chicago Opsiyon Borsası kuruldu. 1977’de ilk defa satım opsiyonları işleme sunuldu.

Ülkemizde organize türev piyasalarının kurulma çalışmaları çerçevesinde, 1994 yılında İMKB bünyesinde Vadeli İşlemler Piyasası Müdürlüğü oluşturulmuştur. Organize bir finansal vadeli işlem ve opsiyon piyasasının oluşturulması ve bu piyasada çeşitli sermaye piyasası araçları ile finansal göstergelere dayalı vadeli işlem ve opsiyon sözleşmelerinin düzenlenmesi amacıyla yapılan çalışmalar sonucunda 15 Ağustos 2001 tarihinde döviz üzerine vadeli işlem sözleşmeleri işlem görmeye başladı. (İMKB (2003), sayfa 472)

Vadeli işlemlerdeki yapının matematiksel olarak incelenmesi bu çalışmanın amacıdır. Bu çalışmanın 2. bölümünde, bu konuda yapılan çalışmalar kısaca özetlenmektedir. Bu çalışmanın 3. bölümünde futures piyasalarının özellikleri ele alınmaktadır. Çeşitli yatırım araçları için futures sözleşmelerinin fiyatlarının belirlenmesi için matematiksel çıkarımlar gösterilmektedir. Forward ve futures fiyatlarının sabit faiz oranı için eşit olduğu bir teorem

olarak ispat edilmektedir. Ayrıca hisse senedi endeksine göre, döviz piyasalarındaki, ticaret mallarıyla ilgili, tahvil ve bono piyasalarındaki futures işlemleri ayrı ayrı ele alınarak incelenmiştir. 5. bölümde futures piyasalarındaki risk korunması (hedging) ele alınmaktadır. Korunmacının pozisyonunun varyansını minimize eden korunma oranı veren formül bir teorem olarak ispat edilmiştir. Ayrıca korunma için yapılacak futures sözleşmelerinin optimal sayısını veren matematiksel ifadeler çıkarılmıştır. 6. bölümde opsiyon sözleşmeleri ele alınmıştır. Opsiyon sözleşmelerinin fiyatlanmasında geometrik brown hareketleri kullanılmıştır. Ayrıca arbitraj teoremi yardımıyla opsiyon işlemlerinde kesin kazanç elde edilmesi için opsiyon fiyatlarının ne olması gerektiği belirlenmiştir. Çok periyotlu binom modeli ile hisse senedi opsiyonu senaryoları incelenmiştir. Herhangi bir arbitraj imkanı vermeyen tek türlü belirli opsiyon maliyet fiyatı için Black–Scholes formülleri elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde opsiyon sözleşmelerinde korunma yöntemleri anlatılmıştır. Bu yöntemler delta, theta, vega ve rho korunmalarıdır.

Çalışmanın sonuç bölümünde elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Vadeli işlemlerin matematiksel yapısı hakkında şimdiye kadar gerek yurt dışında ve gerekse yurt içinde birçok çalışma yayımlanmıştır. Bu bölümde çalışmamı hazırlarken faydalandığım bu konuyla ilgili çalışmaları kısaca ele alacağım.

Yurt içinde yayımlanmış olan çalışmalardan İMKB yayınları başı çekmektedir. İMKB'nin 18. basımını yaptığı “Sermaye Piyasası ve Borsa Temel Bilgiler Kılavuzu” (2003) adlı kitapta 469–492 sayfalarında vadeli işlemler piyasası hakkında genel ve tanıtıcı bilgiler verilmektedir. İMKB yayınları arasında Prof. Dr. Ümit Erol'un “Vadeli İşlem Piyasaları Teori ve Pratik” adlı kitabı (1999) da vardır. Bu kitapta vadeli işlem piyasaları hakkında çok detaylı bilgiler ve matematiksel modeller hakkında kısa bilgiler verilmiştir. İMKB'de ayrıca Murat Kayacan ve arkadaşları (1999) tarafından “Futures ve Options Sözleşmelerinin Fiyatlanması” (1999a) ve “Faiz Oranına Dayalı Vadeli İşlemler” (1999b) adlı kitaplar yayımlanmıştır. Bu kitaplarda da kısmen matematiksel modellere yer verilmiştir. Bu konuda Prof. Dr. Mehmet H. Oryan tarafından 2001 yılında hazırlanan “Vadeli İşlemlerin Matematiksel Yapısı ve Uygulaması Eğitim Semineri” adlı ders notları İ.Ü.F.F tarafından yayımlanmıştır.

Bu konuda yurt dışında yayımlanmış birçok çalışma vardır. Bunların başlıcaları John C. Hull'un 1991'de yayımlanan “Introduction to Futures and Options Markets” ve 1993'de yayımlanan “Options, Futures and Other Derivatives” adlı kitaplarıdır. Hull'un 1993'de yayımladığı kitap matematiksel olarak daha yoğun olup 1991'de yayımladığı kitap nispeten daha az matematiksel yoğunluk içermektedir. Sheldon M. Ross'un 1999'da yazdığı “An Introduction to Mathematical Finance” kitabı da çalışmamı hazırlarken faydalandığım bir eserdir. Ayrıca Robert J. Elliott ve P. Ekkerhard Kopp tarafından 2005'de yayımlanan “Mathematics of Financial Markets” adlı kitap vadeli işlemleri stokastik proseslerle incelenmektedir. Bu nedenle, çalışmamda bu kitaptan çok az faydalanabildim. Prof. Dr. Salih N. Neftçi'nin 1996'da yayımlanan “An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives” kitabı da bu konuda yazılmış temel kitaplardan biridir. Cox, J. ve Rubinstein M.'nin “Options Markets” adlı kitabı 1985'de yayımlanmıştır. Bu kitapta binomial trees yöntemi detaylı bir şekilde anlatılmaktadır.

Vadeli işlemlerin matematiksel yapısı ile ilgili yayımlanmış makalelerden faydalandıklarım şunlardır: opsiyon fiyatlaması için kullanılan ve çok tanınan Black–Scholes denklemleri Black, F. ve Scholes, M.'nin ortak makaleleri olan “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” de 1973'de ilk defa ortaya atılmıştır. Arbitraj teoremini kullanarak opsiyon fiyatlandırmasını inceleyen bir makale Stoll, H. R. ve R. E. Whaley tarafından 1986'da

yayımlanmıştır: “New Option Instruments: Arbitrageable Linkages and Valuation”. Put ve Call options’lar arasındaki bağıntıları inceleyen Merton, R. C.’nin 1973’de yayımlanan “ The Relationship Between Put and Call Prices Comment” adlı makalesi ile Stoll, H.R.’nin 1969’da yayımlanan “The Relationship Between Put and Call Prices” adlı makalesi incelenmiştir.

3. FUTURES PİYASALARININ GENEL NİTELİKLERİ

3.1 Futures Piyasalarının Tarihsel Gelişimi

Future İngilizce’de sözlük anlamı olarak gelecek veya gelecekle ilgili demektir. Finans piyasalarında future yada yaygın kullanımı ile futures deyimini geleceğe dönük alım ve satım işlemlerinin yapıldığı piyasalar olarak anlıyoruz. Kavramı detaylarını daha ilerde incelemek üzere basitleştirilmiş bir örnekte görebiliriz:

Futures piyasalarının olmadığı bir ortamda bir çiftçi malını eğer mal mevcutsa spot olarak yani anında satmak zorunluluğu ile karşı karşıyadır. Ürünün ekimini sonbaharda yaptı ise, malını satabilmek için hasat zamanını yani bir sonraki yılın ilkbahar veya yaz dönemini bekleme durumundadır. Futures piyasalarının varlığı çiftçi açısından bu zorunluluğu ortadan kaldırır ve sunumda, büyük bir esneklik getirir. Futures piyasalarının varolduğu bir ortamda, çiftçi hasat zamanına dek beklemeden istediği herhangi bir zamanda geleceğe yönelik bir kontrat yaparak malını satabilir. Burada söz konusu olan kontrat (futures kontratı) çiftçiye bugünden belirlenen bir fiyattan malını örneğin altı ay sonra satmak koşuluyla bir anlaşma yapma olanağı sağlamaktadır.

İlk organize futures piyasasının kuruluşu A.B.D’de 1848 yılına dek gitmektedir. İsmi geçen yılda Chicago Ticaret Odası geleceğe yönelik kontratları işleme koymuştu. Bir asır boyunca futures işlemlerine konu olan mallar tarımsal mallarla sınırlı kaldı. Bunun nedeni tarımsal mal fiyatlarının kendine özgü niteliğidir.

Bu süreç tarımsal mal fiyatlarının zaman içinde sürekli dalgalanmasına yol açar. Fiyat değişkenliğinin yüksek olması yada teknik deyimle tarımsal mal fiyatlarının standart sapmasının yüksek oluşu üretici açısından ciddi bir fiyat riski yaratır. Bu olgu çiftçinin fiyat tahmini yapmasını ve ekim alanı konusunda sağlıklı karar almasını zorlaştıracaktır. Tarım kesimindeki üreticiler önemli bir risk sorunu ile karşı karşıyadır.

Bir futures piyasasının varolması için temel koşul, piyasada konu olan mal fiyatlarının bir risk transferi gerektirecek kadar değişken olmasıdır. Tarımsal mallar bu karakteri taşıdığı için ilk futures piyasaları bu alanda kurulmuştur.

3.2 Risk Transferi ve Spekülatör

Tarımsal piyasalarda riski devretmek isteyen çiftçidir. Riski devralan kişi ise spekülatördür. Yaygın kanının aksine spekülatörün zengin bir kişi olması gerekmez. Futures ticaretinde başlangıç teminatı (marjin) olgusu spekülatör olmak için gerekli ön kapital miktarını büyük

ölçüde düşürür. Spekülatörün esas özelliği risk taşıyabilecek bir yapıda olmasıdır. Spekülatör, geleceğe yönelik fiyat belirsizliklerinin olduğu bir ortamda, gelecekteki fiyatları başkalarından daha iyi tahmin etme yetisine sahip olduğuna inanan ve bu inançla risk taşımayı kabul eden kişidir.

Futures piyasasının iki ucunu , riskten korunmak isteyenlerle spekülatörler yani riski kabul edenler oluşturur. Riskten korunmak isteyen gruba futures piyasalarında verilen teknik isim 'hedger'dir. Hedger gelecekte bir mal teslim alma veya satma durumunda olan ; ancak gelecekteki fiyat değişikliklerinden çekinen ve gelecekteki mal alım veya teslimini bugün belirlenen bir fiyattan garantileyerek kendisini ani fiyat değişikliklerine karşı korunmayı hedefleyen gruptur. Spekülatör ise bugün anlaşılan bir fiyattan (futures fiyatı) gelecekte mal alım veya teslimini kabul eden ve fiyat riskini kabul eden taraftır. Spekülatör bu riskli işlemi bir kazanç potansiyeli gördüğü için kabul eder. Spekülatör mal tesliminin yapılacağı zaman spot (o anki) fiyatın futures fiyatının üstünde olacağını ve kâr edeceğini öngörür. Bir örnekle belirtmek gerekirse :

1993 Ekiminde buğdayın ton fiyatının spot piyasada 97 dolar olduğunu varsayalım. Şu an ekim faaliyetini tamamlayan bir çiftçi Haziran 94'de elinde 2.000 ton buğday olacağını düşünmektedir. Buğdayın üretim maliyeti ton başına 80 dolardır. Bir spekülatör çiftçiye ekilen buğdayı tonu 100 dolardan almayı teklif etmektedir. Çiftçi kendi açısından garantili %25 kâr içeren bu anlaşmayı kabul eder.

Haziran 94'de çiftçi hasattan sonra 2.000 ton buğdayı spekülatöre tonu 100 dolardan teslim eder ve karşılığında 200.000 dolar alır. Çiftçi bu işlemle ton başına 20 dolar ve toplam olarak 40.000 dolar kârı hiçbir fiyat riskine girmeden gerçekleştirmiştir. Spekülatörün durumunu ise Haziran 94'de buğdayın spot fiyatının ne olduğu belirleyecektir. Eğer buğdayın spot fiyatı Haziran 94'de 110 dolara çıkarsa spekülatör bu işlemde ton başına 10 dolar ve toplam olarak 20.000 dolar kâr sağlayacaktır. Buğday fiyatı 90 dolara düşerse bu kez ton başına 10 dolar zarar söz konusudur. Spekülatör birinci olasılığı umarak risk almıştır. Ancak fiyat öngörüsünde hata yapması halinde, ikinci durumda olduğu gibi, belirli bir zararı göze almak zorundadır. Çiftçi ise Haziran 94'de fiyat ne olursa olsun her durumda 40.000 dolar kazancı Haziran 94 spot fiyatlarına bağlı olmadan gerçekleştirmektedir.

Piyasada riski satanın (hedger) temel amacı üretim maliyetinin üstünde, kabul edilebilir bir karı gelecekteki fiyat hareketlerinden bağımsız olarak garantilemektir. Spekülatör ise, riski satın alırken, tam tersine gelecekteki fiyat hareketlerine bağlı bir karın peşindedir.

3.3 Vadeli Piyasalarda Alınan Pozisyonlar

Vadeli piyasalarda alınan pozisyonları aşağıdaki şekilde sınıflandırabiliriz:

a) Uzun Pozisyon (Long Position)

Vadeli işlem sözleşmelerini satın almaya uzun pozisyon denir. Piyasada uzun pozisyonun sayılarının artması sonucu fiyatların yükselmesi beklenir.

b) Kısa Pozisyon (Short Position)

Vadeli işlem sözleşmelerini satmaya kısa pozisyon denir. Piyasada kısa pozisyonların artması sonucu fiyatların düşmesi beklenir.

c) Açık Pozisyon (Open Interest)

Vadeli piyasalarda alınmış fakat henüz kapatılmamış pozisyonlara açık pozisyon denir.

d) Pozisyon Kapatma (Offset Position)

Vadeli piyasalarda alınmış bir pozisyonun ters yönde bir işlem yaparak sona erdirilmesi işlemidir. Yani alınmış bir pozisyonu satarak veya satılmış bir pozisyonu geri alarak pozisyon kapatılabilir.

3.4 Forward Sözleşmeleri

Forward vadeli sözleşmelerin en basit biçimidir. Forward piyasasında mal alım/teslim anlaşması arada üçüncü bir parti olmadan alıcı ve satıcı arasında yapılır. Hem geleceğe dönük fiyat, hem de teslim edilecek miktar ve malın kalite özellikleri alıcı ve satıcı arasında saptanır. Burada üçüncü bir kurumun, anlaşma koşullarının bir tarafça bozulması halinde ek garantisi söz konusu değildir. Anlaşma koşullarına uymama diğer ticaret sözleşmelerinde olduğu gibi konuyla ilgili mahkemelerde çözümlenir. Mahkeme kararlarının uzun zaman alabilmesi forward sözleşmelerinin güvenilirlik açısından istenilen düzeyde olmadığını gösterir. Futures sözleşmeleri bu eksiği ortadan kaldırmak amacıyla geliştirilmiştir. Futures piyasası organize bir forward piyasasıdır. Alıcı ve satıcı arasında İMKB’de olduğu gibi üçüncü bir kurum olarak futures borsası yer alır. Piyasayı futures borsası tanzim eder. Malı alım ve teslimi ile ilgili tüm taahhütler futures borsasının garantisi altındadır. Bu belirli yeri, çalışma saatleri ve kuralları olan bir piyasadır. Mal teslim tarihleri ve teslim edilecek mal miktarları standartize edilmiştir.

Futures piyasalarının bu standardizasyonu, esnekliği azaltılan negatif bir faktör olmakla beraber, işlemlerdeki hız ve kolaylığı arttırmak için geliştirilmiştir. Bu dezavantaja karşılık futures piyasalarının önemli avantajları da söz konusudur. Her şeyden önce mal veya paranın

teslim alınmasında, futures borsasının araya girmesi, bu konudaki güvenilirliği önemli düzeyde arttırmaktadır. Tüm futures kontratları futures borsasında satılır ve oradan alınır. Bu işlemlerde alıcı ve satıcı birbirini tanımaz. Aynı şekilde futures kontratına konu olan tüm mallar futures borsasına teslim edilir veya oradan alınır. Dolayısıyla tüm bu işlemler futures borsasının kesin gözetim ve güvencesi altında yapılır. Futures piyasasının bir diğer avantajı teslim alınan malların kalite standartları açısından getirilen garantidir. Forward kontratında teslim edilecek malın kalite özellikleri (grad, nem oranı gibi) iki taraf arasında saptanır. Buna karşın futures piyasasında hangi tip ve kalitede malların teslim için kullanılabileceği önceden belirlenmiştir. Futures borsası yada onun adına çalışan bağımsız denetçi bir kuruluş malları teslim alırken belirlenen kalite standartlarının karşılanıp karşılanmadığını belirler ve getirilen mal kalite standartlarını karşılamıyorsa malı kabul etmeme hakkına sahiptir. Bu denetim mekanizmasının, tarımsal mallarda önemli olan mal kalite standartları açısından mal teslim alana büyük bir güvence getirdiği açıktır.

Fiyatlama konusunda da forward ve futures işlemleri farklıdır. Forward da geleceğe yönelik fiyat belirlemesi iki taraf arasında pazarlıkla saptanır. Buna karşın futures piyasası diğer menkul kıymet borsaları gibi çalışır. Belirli bir günde alıcı ve satıcılar emirlerini verdikten sonra arz ve talep koşulları o gün hatta o an için geçerli olan futures fiyatlarını belirler.

Açık pozisyon (open interest) futures'a özgü teknik bir deyimdir. Açık pozisyon, seans kapanışında açık olan kontrat sayısını gösterir ve işlem hacminden (volume) farklı bir kavramdır. Eğer bir kişi sabah bir kontrat satın alıp aynı kontratı seans sonunda satarsa bu o günkü işlem hacmine iki kontrat olarak girer. Buna karşın bu işlemin o günkü açık pozisyon karşılığı sıfırdır çünkü birbirini götürən iki işlem söz konusudur. İşlem hacmi gün içinde toplam ne kadar kontratın el değiştirdiğini gösterir; buna karşın açık pozisyon o seansta açılan ve seans sonunda kapatılmayan pozisyonların toplamıdır ve bu açıdan piyasanın gerçek akışkanlığını (liquidity) daha iyi yansıtan bir kavramdır.

Futures piyasalarında fiyat oluşumu ile ilgili olarak iki noktanın daha altını çizmemiz gerekir. Bunların ilki futures piyasalarında fiyatların seans içinde belli aralıklarla değişmesidir.

Fiyatlarla ilgili bir diğer konu gün içindeki toplam fiyat oynamasının da sınırlı olmasıdır. Bu değer de futures borsası tarafından saptanır.

Futures sözleşmesi satın alan şahıs girdiği futures fiyatından, kontrat da yazılan malı sözleşmesi de belirlenen miktar ve zamanda teslim almak yükümlülüğündedir. Futures sözleşmesi satan şahıs ise girdiği futures fiyatından kontratın belirlediği mal miktarını teslim tarihinde teslim etmekle yükümlüdür.

Tüm açılan kontratlar istenirse kontrat süresinden önce herhangi bir günde kapatılabilir. Bu şekilde mal alım/teslim yükümlülüklerine gerek kalmadan kapatılabilmesi, futures piyasasına büyük bir esneklik kazandırır. Forward kontratı, yapıldığı andan itibaren, mal alım veya tesliminin zorunlu olduğu bir kontrattır çünkü genelde forward piyasalarının alınıp satılabildiği bir ikinci el piyasası yoktur.

Futures kontratlarının sahip olduğu bu esneklik ve ayrıca mal alım/teslimiyle ilgili garantilerin bu piyasada çok daha güvenilir bir biçimde düzenlenmesi, tarihsel olarak daha sonra ortaya çıkan futures kontratlarının forward kontratlarına göre çok daha yaygın ilgi görmesine neden olmuştur.

Bugün futures kontratları esas olarak dört ana grup mal üstünde yapılmaktadır. Bunları a) Tarımsal mallar ve Madenler b) Dövizler c) Bonolar ve Finans enstrümanları d) Hisse senetleri endeksleri olarak özetleyebiliriz. Bu ana tasnif içinde futures yapılan mallar çok değişik türleri kapsamaktadır.

3.5 Futures Piyasalarında Teminat

Futures piyasalarında ödeme sistemi kendine özgü özellikler taşır. Bu sisteme marjın (margin) sistemi denir. Futures piyasalarında kontrat alıp satmak isteyen kişi marjın (teminat) dediğimiz bir ön tutarı yatırmak zorundadır. Aynı şey satış kontratları içinde geçerlidir. Nitekim pozisyon açmak için gerekli başlangıç teminatı alış yada satış kontratları için aynıdır. Bu miktar bizim tarafımızdan aracı kuruma ve aracı kurum tarafından da futures borsasına yatırılır. Başlangıç teminatı bir ön ödemeden ziyade kaporadır (performance bond). Futures işlemleri gelecekte yerine getirilecek taahhütleri içerdiği için, pozisyon açan kişi başlangıç teminatını yatırarak gelecekteki taahhütlerine ilişkin parasal bir garanti vermektedir.

Yukarda başlangıç teminatı denerek teminat kelimesinin önüne bir sıfat getirilmiştir. Bunun nedeni futures piyasasında değişik teminat biçimlerinin olmasıdır. Bunlardan en önemlisi sürdürme teminatı (maintenance margin) kavramıdır.

Açılan bir pozisyonu devam ettirebilmek için sürdürme teminatı yatırma zorunluluğuna marjın uyarısı (margin call) diyoruz. Başlangıç teminatına ek olarak, marjın uyarısı sonucu yatırmak zorunda olduğumuz teminata sürdürme teminatı denir.

Örnek 3.1 : İMKB–30 Endeksi üzerinden bir vadeli işlem sözleşmesi aşağıdaki koşullarla satın alınmış olsun.

Vadeli İşlem Pozisyonu	:	İMKB–30 Endeksi Vadeli İşlem Sözleşmesi Uzun Pozisyonu
Başlangıç Teminatı	:	600 Milyon
Sürdürme Teminatı	:	300 Milyon
Sözleşmeye Giriş Tarihi	:	1.2.1999
Sözleşmenin Vade Sonu	:	22.2.1999
Sözleşmenin Büyüklüğü	:	(Endeks) . 1 Milyon YTL (=6.000 · 1.000.000)
Sözleşmenin Fiyatı	:	6.000

Çizelge 3.1 Vadeli işlem hareketleri

İşlem Tarihi	Vadeli İşlem Fiyatı	Günlük Kar/Zarar (MilyonYTL)	Kümülatif Kar/Zarar (MilyonYTL)	Teminat Hesabı (MilyonYTL)	Teminat Çağrısı (MilyonYTL)
	6.000			600	
1.2	5.800	-200	-200	400	
2.2	5.700	-100	-300	300	300
3.2	5.800	+100	-200	700	
4.2	5.600	-200	-400	500	
5.2	5.700	+100	-300	600	
8.2	5.800	+100	-200	700	
9.2	6.000	+200	0	900	
10.2	6.200	+200	+200	1100	
11.2	5.800	-400	-200	700	
12.2	5.500	-300	-500	400	
15.2	5.800	+300	-200	700	
16.2	5.500	-300	-500	400	
17.2	5.400	-100	-600	300	300
18.2	5.600	+200	-400	800	
19.2	6.000	+400	0	1200	
22.2	6.200	+200	+200	1400	

Pozisyon alan taraf açısından net kar nedir?

Başlangıçta yatırılan teminat		-600 YTL
1.Teminat tamamlama çağrısı		-300 YTL
2.Teminat tamamlama çağrısı		-300 YTL
Son gün hesaptan çekilen teminat		+1400 YTL
Toplam Net Kar / Zarar		+200 Milyon YTL

Sürdürme teminatı ve marjin uyarısı olgusu futures piyasalarının yüksek düzeyde risk içeren piyasalar olduğunu gösterir. Marjin uyarıları devam ettikçe müşteri ya belli miktarda zararı kabul ederek pozisyonunu kapatacak yada pozisyonu devam ettirmek için kararlı ise kendi hesabından her gün ek ödemeler yapmayı kabul edecektir.

Marjin uyarısıyla karşılaşan bir futures oyuncusunun önünde üç seçenek vardır. Bu kişi ya marjin uyarısını karşılayarak pozisyonunu korur. Pozisyonunu koruyan kişi, fiyatların yakın zamanda kendi lehine doğru gelişeceğini ve böylece şu an katlandığı ek maliyetlerin ilerde fazlasıyla karşılanacağı umudunu taşımaktadır.

Yada fiyatın dönmesinden umudunu kesecek ve o ana kadar ki zararını realize ederek kontratını satacaktır. Kontrat satmanın sık rastlanan bir diğer nedeni futures pozisyonu tutan kişinin yeni marjin uyarılarını karşılayacak mali gücünün kalmamasıdır. Bir üçüncü alternatif ise eldeki pozisyonu tutmakla birlikte yeni karşıt bir pozisyon açmaktır.

Satış kontratları kâr/zarar açısından alım kontratlarının tam tersidir. Bu nedenle, fiyatlar düştükçe alım kontratı zararla karşılaşırken, satış kontratı tam tersine kâra geçmektedir.

Futures kontratlarında başlangıç teminatı tutarı hesaplanırken risk faktörü göz önüne alınır. Alım veya satım kontratı olan bir kişiye normal başlangıç teminatı tutarı uygulanırken, aynı mal üstüne hem alım hem satım kontratı alan kişiye daha düşük bir başlangıç teminatı uygulanır. Bunun nedeni, geleceğe dönük bir taahhüt durumunda, aynı malda hem alım hem satım taahhüdü bulunmasının mal teslimiyle ilgili risk faktörü düşürmesidir. Bir futures sözleşmesi alan bir kişi pozisyonu 3.000\$ lık bir başlangıç teminatıyla açmakla birlikte, buna sonradan bir satış kontratı eklediğinde, satış sözleşmesi için 3.000\$ yerine 1.500\$ başlangıç teminatı ödeyecektir. Başlangıç teminatı tutarları ilgili futures borsaları tarafından saptanır. Gerek günlük limitler gerekse başlangıç teminatı tutarları, futures fiyatlarının değişkenliği (volatility) arttıkça yükselir. Bu açıdan bazı borsalarda başlangıç teminatı hesaplanırken farklı bir formül uygulanır. Bu formülde son altı ay veya bir yılın fiyatlarının aritmetik ortalaması

alınarak buna aynı dönemdeki fiyat standart sapmasının iki veya üç katı eklenerek başlangıç teminatı tutarı saptanır.

3.6 Takas Odası

Futures borsalarının beyni takas odasıdır. Takas odası tüm ticari işlemlerin yürütüldüğü ve kaydedildiği merkezdir. Takas odasının ana görevi futures işlemlerinin düzgün biçimde yürütmesini sağlamak ve piyasada oyunculardan birinin yükümlülüklerini yerine getirememesi riskine karşı bir garantör olarak işlev görmektedir. Takas odası, kamu denetiminde, özel bir kuruluştur. Üyeleri genellikle büyük aracı kurum ve bankalardan oluşur. Takas odasına üye olmanın avantajı futures piyasasına gelen emirleri ilk elden görmektir. Bu avantajlara karşılık kapitallerini bir kriz durumunda risk etme durumundadırlar.

Takas odasının ana işlevi, işlemlerin bir güvenlik sorunu çıkmadan düzgün biçimde yürütülmesidir. Sisteminin esasını piyasaya katılanlardan alınan teminatlar oluşturur. Bu teminatlar, önemli bir piyasada büyük bir yekun oluştururlar. Piyasada, bir oyuncunun yükümlülüklerini yerine getirememesi durumunda teminatlarla oluşturulan bu havuzun bir bölümü karşı tarafın taleplerini karşılamakta kullanılır.

3.7 Futures Piyasalarında Mal Teslimi ve Denetim

Futures piyasalarında açılan kontratlar, çoğu kez mal teslimine gerek kalmadan ve kontratlar süre bitiminden önce piyasada satılarak kapatılır. Pozisyon sahibi, mal teslim etme veya mal teslim almak konusunda ısrarlı olduğu durumlarda, genel kural olarak mal teslimi kontrat ayında yapılır. Elinde alış kontratı bulunanlar mal teslim almakla buna karşın satış kontratı bulunanlar mal teslim etmekle yükümlüdür. Müşterinin bu isteği aracı kurum tarafından takas odasına iletilir. Takas odası, haber verme süresi (notice day) sonuna kadar bekleyerek tüm istekleri toplar. Ardından, gelen tüm mal teslim alma ve teslim etme istekleri tasnif edilir. Takas odası, gelen istekler içinde tarih olarak en eski alım ve satış kontratı bulunur ve eşleştirilir.

Exchange of futures for physicals (fiziki mallar için futures takası) yada EFP denen sistemde ise mal teslim etmek isteyen bir kişi takas odasının eşleştirmesini beklemeden aynı malı teslim almak isteyen bir kişiyi kendi olanaklarıyla bulabilir.

Bir diğer mal teslim biçimi alternative delivery process (alternatif mal teslim süreci) yada kısaca ADP'dir. ADP durumunda da iki taraf mal teslimi konusunda aralarında anlaşılırlar.

Bu yöntemin farkı, ikili anlaşma uyarınca mal tesliminin kontrat ayından sonra yapılmasına olanak tanınmasıdır.

Futures piyasaları yapı olarak spekülasyona açık piyasalardır. Marjin uygulaması bu piyasada kaldıraç etkisi (leverage) yaratmakta ve küçük paralarla büyük kar imkanı yaratmaktadır. Futures piyasaların bu niteliği, piyasaların denetimine (regulation) özel bir önem kazandırmaktadır.

Futures piyasaların topluma iki yönden katkıda olduğunu söyleyebiliriz. Bunların ilki risk transferi fonksiyonudur. Örneğin tarım kesiminde, ilerdeki fiyatlarla ilgili belirsizliğin başkalarına transferi üreticiler açısından önem taşır ve üreticilerin geleceğe yönelik ekonomik kararlarını daha sağlıklı biçimde almalarını sağlar.

Futures piyasalarının ikinci önemli fonksiyonu geleceğe yönelik fiyat bulmayı kolaylaştıran niteliğidir. Eğer piyasalar etkin ise yani fiyat oluşumunda o an varolan tüm bilgileri kullanıyorsa, söz konusu fiyatların aynı zamanda geleceğe dönük en iyi tahminler olduğunu da söyleyebiliriz.

Futures borsalarının denetiminin bu fonksiyonlar açısından değerlendirilmesi gerekir. Denetimin temel amacı, futures piyasalarının bu ikili fonksiyonu en iyi biçimde yerine getirmesine olanak sağlamak ve risk transferinin gerektirdiği ölçünün üstünde haksız kazançların oluşumuna engel olmaktadır.

Bu amaçla futures piyasalarında çeşitli denetim mekanizmaları oluşturulmuştur. Denetimin ilk aşamasını futures piyasasında yer alan kurumların oto-denetimi oluşturur. Bu denetimin üstünde kamu denetimi yer alır.

Futures piyasalarında haksız kazanç yollarını şöyle sıralayabiliriz:

- a) Aracı kurumların müşteri emirlerini belirtildiği şekilde yerine getirmemesi. Bunun bir örneği müşterinin limit emir verdiği halde kontrat alımının verilen fiyat dışında bir fiyattan yapılmasıdır.
- b) İkinci bir haksız kazanç yolu aracılardan kendi aralarında anlaşarak sahte alım satım emirleriyle piyasada gerçek arz ve talebi yansıtmayan suni bir şişkinlik yaratmaları ve bu yolla fiyatları etkilemeye çalışmalarıdır.
- c) Üçüncü bir haksız kazanç yolu özel bilgilerin kazanç amacıyla piyasada kullanılmasıdır. Örneğin piyasayı etkileyecek bir bilgiye başkalarından önce ulaşma imkanına sahip birini, bu bilgiyi kendi kişisel kazancı için kullanmasıdır.

- d) Futures piyasasında yada spot piyasada egemen durumda yani ekonomik açıdan monopol durumunda olan bir kişi veya kuruluşun fiyat belirlemedeki güçlü ve imtiyazlı konumunu kendi çıkarları için kullanılmasıdır. Bunun en tipik örneklerini, spot piyasada güçlü konumda olan bir firmanın futures piyasasında pozisyon alması ve spot fiyatları şişirerek futures piyasasında haksız kazanç sağlaması oluşturur.
- e) Denetlemesi zor bir haksız kazanç yolu piyasanın yapısı dolayısıyla oluşur. Futures borsalarında aracılardan çoğu hem müşteri hesabına hem de kendi hesaplarına alım-satım yapma haklarına sahiptirler. Bu da kendi çıkarlarını zaman zaman müşteri çıkarlarının önüne çıkarmalarına ve hızla değişen bir piyasada kendi emirlerine öncelik vermelerine yol açabilir.

4. FUTURES PİYASALARINDA FİYATLANDIRMA

4.1 Birleşik Faiz Hesaplamaları

Bir A miktarının yıllık R faiz oranıyla n yıllığına yatırıldığında yatırımın son değeri

$A \cdot (1 + R)^n$ dir. Eğer faiz oranı yılda m defa birleşik hesaplandığında yatırımın son değeri

$$A \cdot \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{mn} \text{ dir.}$$

Eğer $m \rightarrow \infty$ olursa yukarıdaki ifadedden $A \cdot e^{R_\infty n}$ sürekli birleşik durumu elde ederiz.

Sürekli birleşik faiz oranı ile ona denk olan yılda m defa hesaplanan faiz oranı arasında aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$A \cdot e^{R_\infty n} = A \cdot \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

$$\Leftrightarrow e^{R_\infty} = \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^m$$

$$\Leftrightarrow R_\infty = m \cdot \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow R_m = m \left(e^{\frac{R_\infty}{m}} - 1 \right)$$

4.2 Forward ve Futures Fiyatlarının Belirlenmesi

Genelde forward sözleşmelerinin analizi, futures sözleşmelerinin analizinden daha kolaydır. Çünkü futures sözleşmelerinde günlük ayarlamalar söz konusudur. Forward da ise yalnızca vade bitiminde ödeme vardır.

İleride bir varlığın aynı vadedeki forward ve futures fiyatlarının genel olarak birbirlerine çok yakın olduğunu ispat edeceğiz dolayısıyla burada elde edilen sonuçlar hem forwards hem de futures fiyatları içinde geçerli olacaktır.

Üç ayrı durumu ele alacağız:

- 1) Yatırım aracının herhangi bir getirisinin olmaması hali.
- 2) Yatırım aracının bilinen bir nakit getirisinin olması hali.
- 3) Yatırım aracının bilinen bir kar payı olması hali.

Bu bölümde şu notasyonlar kullanılacaktır:

T =: Vade bitimine kadar geçen zaman. (yıl olarak)

S =: Varlığın bugünkü değeri.

K =: Sözleşmedeki teslim fiyatı.

f =: Sözleşmedeki pozisyonun bugünkü değeri.

F =: Bugünkü futures fiyatı.

r =: Risksiz yıllık faiz oranı. (Birleşik sürekli hesaplanır)

F futures fiyatı ve f futures sözleşme değeri birbirinden farklıdır. Herhangi bir zamandaki futures fiyatı sözleşmenin değerini sıfır (0) yapacak olan teslim fiyatına eşittir. Bir sözleşme başlatılınca $F=K$ ve $f=0$ olur. Fakat zaman geçtikçe f ve F değişir.

1) Yatırım Aracının Herhangi Bir Getirisinin Olmaması Hali:

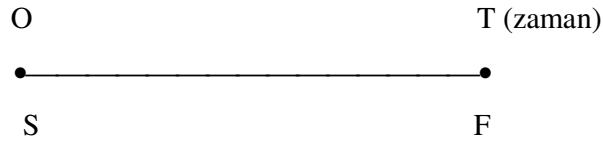
Bu türlü sözleşmelere örnek olarak kâr payı ödemeyen hisse senetlerini ve kupon ödemesi yapmayan bonoları verebiliriz. Bir yatırımın varlığının fiyatı S olsun. Yatırımın aşağıdaki stratejiyi uyguladığını düşünelim:

a) Bir kişi bu varlığı spot olarak satın alır.

b) Bir futures sözleşmesi yapar.

Futures sözleşmesinin başlangıçtaki değeri sıfır (0) dır.

Stratejinin başlangıçtaki maliyeti S dir.



Futures sözleşmesine göre T zamanında yatırımın varlığı futures fiyatında değiştirilecektir. Varlığın herhangi bir getirisi yoktur. Yukarıdaki stratejiye göre

$$F = S \cdot e^{rT} \quad (4.1)$$

dir. Yani yatırımcı, bugünkü S ödemesine karşılık T zamanında risksiz bir nakit geri ödeme alacaktır. Dolayısıyla bu sözleşmenin bugünkü fiyatı F dir.

Örnek 4.1 : Bugünden itibaren bir yıl içinde vadesi bitecek olan bir devlet tahvilini satın almak için dört aylık bir forward sözleşmesini göz önüne alalım. Devlet tahvilinin bugünkü

fiyatı 930 dolar olsun. Dört aylık risksiz faiz oranı yıllık %6 olsun. Bononun herhangi bir getirisi olmadığına göre yukarıdaki eşitliği

$$T = \frac{4}{12} \text{ (yıl)} , r=0,06 \text{ ve } S=930 \text{ F=: forward fiyatı}$$

$$F = S \cdot e^{rT}$$

$$F = 930 \cdot e^{(0,06) \left(\frac{4}{12} \right)} = 948,79 \text{ dolar}$$

Bu değer bugün yürürlüğe giren sözleşmenin dört ay sonraki teslim fiyatıdır.

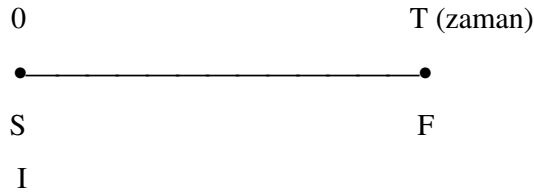
2) Yatırım Aracının Bilinen Bir Nakit Getirisinin Olması Hali

Finansal ürünün bir nakit getirisi olsun. Bu getirinin bugünkü değerini I ile gösterelim. Yatırımcının aşağıdaki stratejiyi uyguladığını göz önüne alalım.

a) Söz konusu finansal ürünü spot piyasadan satın alsın.

b) Bu ürün üzerinden kısa futures sözleşmesi yapsın.

Stratejisinin başlama maliyeti ürüne ödenen S spot değeridir.



Futures sözleşmesinin T zamanındaki değeri F olsun. Bu takdirde stratejisinin bugünkü değeri olarak $S = I + F \cdot e^{-rT}$ yazabiliriz. Bu eşitlikten sözleşmenin F fiyatını bulabiliriz. $F = (S - I)e^{rT}$

Örnek 4.2 : 10 aylık bir futures sözleşmesi, spot fiyatı 50\$ olan bir hisse senedi üzerinde yapılsın. Riskten bağımsız birleşik sürekli faiz oranı %8 olsun. Ayrıca hisse senedinin 3 ay, 6 ay ve 9 ay sonra 0,75\$ kâr payı vereceği beklensin.

Temettülerin bugünkü değeri:

$$I = 0,75 \cdot e^{-0,08 \cdot \frac{3}{12}} + 0,75 \cdot e^{-0,08 \cdot \frac{6}{12}} + 0,75 \cdot e^{-0,08 \cdot \frac{9}{12}} = 2,162\$$$

$$T=10 \text{ ay} \Rightarrow F = (50 - 2,162) \cdot e^{0,08 \cdot \frac{10}{12}} = 51,14\$$$

Futures sözleşmesinin fiyatı 51,14\$ olarak hesaplandığına göre yatırımcı için aşağıdaki iki strateji söz konusudur:

$$F = (S - I) \cdot e^{rT} = (900 - 74,43) \cdot e^{0,11} = 912,39 \$$$

Stratejiler:

a) Futures fiyatı yüksektir. Yani o gün vadeli işlemler piyasasında yukarıdaki şartlardaki bononun futures fiyatı 930\$ (912,39\$'dan fazla) olsun. Bu takdirde yatırımcı aşağıdaki stratejiyi uygular:

- Bonoyu spot piyasadan satın almak için 900\$ borç alır.
- Bono üzerine kısa futures sözleşmesi yapar. (Yani bono satmayı taahhüt eder)

Birinci kupon ödemesinin bugünkü değeri: $40 \cdot e^{-0,09 \cdot 0,5} = 38,24\$$ dır.

Dolayısıyla alınan borcun $900 - 38,24 = 861,76\$$ 'lık kalan kısmı %10 faiz oranıyla yıllık alınmış olmaktadır.

Bunun yıl sonundaki toplam değeri $861,76 \cdot e^{0,1 \cdot 1} = 952,39\$$ dır.

Yıl sonunda $40 + 930 - 952,39 = 17,61\$$ kâr etmiş olur.

b) Futures fiyatı düşüktür. Örneğin 905\$ olsun. Bu fiyat 912,39\$'dan azdır. Elinde bu bonodan olan bir yatırımcı elindeki bonoyu spot piyasada satar ve bir uzun (satın alma) futures sözleşmesine girer.

Bonoyu satmakla birinci kuponun bugünkü değeri olan 38,24\$'ı kaybetmiştir. Dolayısıyla kalan miktar 861,76\$ 1 yıllığına %10'dan yatırılmış demektir. Bir yıl sonra elindeki paranın miktarı $861,76 \cdot e^{0,11} = 952,39\$$ olur.

Bir yıl sonundaki 40\$'lık ikinci kupon değeri de düşülürse $952,39 - 40 - 905 = 7,39\$$ kârdadır.

c) Eğer bononun futures fiyatı 912,39\$ ise herhangi bir arbitraj fırsatı yoktur.

3) Yatırım Aracının Bilinen Bir Kâr Payı Olması Hali

Bilinen bir kâr payı, varlığın fiyatının belirli bir yüzdesi kadar kar payı vereceği biliniyor olması demektir. Kar payının yıllık sürekli olarak q oranında getiri oluşturduğunu kabul edelim. Bir yatırımcının aşağıdaki stratejiyi uyguladığını göz önüne alalım.

a) Spot olarak finansal varlıktan e^{-qT} miktar olsun.

b) Kısa futures sözleşmesi yapsın. Elde T süre tutulan varlık q oranında artarak $e^{-qT} \cdot e^{qT} = 1$

olur. Sözleşme gereği varlık T zamanda F değerinde satılsın. Buna göre başlangıçta $S \cdot e^{-qT}$ para çıkışına karşılık sonunda F para girişi temin edilmektedir. Çıkan ve giren paraların

başlangıçtaki değerlerini eşit olması gerektiğini düşünürsek, $S \cdot e^{-qt} = F \cdot e^{-rt}$ veya $F = S \cdot e^{(r-q)t}$ elde ederiz.

Eğer $F < S \cdot e^{(r-q)t}$ ise, yatırımcı hisse senedi satarak bir long (uzun) futures sözleşmesi satın alır. Eğer $F > S \cdot e^{(r-q)t}$ ise yatırımcı hisse senedi satın alarak, bir short (kısa) futures sözleşmesini yapar.

Örnek 4.4 : Bir hisse senedi üzerine 6 aylık futures sözleşmesi yapalım. Hisse senedinin kar payı yıllık $q=4\%$, yıllık risksiz faiz oranı 10% ve hisse senedi fiyatı $25\$$ olsun.

Buna göre $S=25$, $r=0,10$, $T=0,5$, $q=0,04$ olmak üzere:

Yukarıdaki eşitlik sözleşme verileriyle $F = 25 \cdot e^{(0,10-0,04) \cdot 0,5} = 25,76\$$ olarak bulunur.

4.3 Futures Sözleşmelerin Değerlendirilmesi

Bir futures sözleşmesinin ilk yapıldığı andaki değeri sıfırdır. Daha sonraki bir safhada pozitif veya negatif değer alabilir. Bir long (uzun) futures sözleşmesinin bugünkü değeri f ,

$$f = (F - K) \cdot e^{-rt} \quad (4.2)$$

ile verilir. Bunun doğru olduğunu şu şekilde ispat edebiliriz: Teslim fiyatı F olan bir long (uzun) futures sözleşmesi ile aynı koşullardaki teslim fiyatı K olan başka bir long (uzun) futures sözleşmesini karşılaştıralım. İki arasındaki fark T teslim zamanındaki ödenen miktarlar arasındadır. T zamanındaki bir $F-K$ farkını bugüne taşırsak $(F-K) \cdot e^{-rt}$ olur. Buna göre F teslim fiyatlı bir sözleşme, K teslim fiyatlı sözleşmeden $(F-K) \cdot e^{-rt}$ miktarı kadar daha az değerlidir. F teslim fiyatlı bir sözleşmenin değeri tanımdan dolayı sıfırdır. Dolayısıyla K teslim fiyatlı bir sözleşmenin değeri $(F-K) \cdot e^{-rt}$ dir. (4.2) eşitliğini (4.1) ile birlikte kullanırsak; bir getirisi olmayan yatırım aracına yapılan futures sözleşmesinin değeri:

$$\begin{aligned} f &= (F - K) \cdot e^{-rt} \\ f &= \underbrace{F \cdot e^{-rt}}_{=S} - K \cdot e^{-rt} \\ f &= S - K \cdot e^{-rt} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur.

Benzer şekilde bilinen bir getirisi olan yatırım araçları üzerine yapılan futures sözleşmelerinin değeri:

$$f = (F - K) \cdot e^{-rt}$$

$$f = \underbrace{F}_{=(S-I) \cdot e^{rT}} \cdot e^{-rT} - K \cdot e^{-rT}$$

$$f = (S-I) \cdot e^{rT} \cdot e^{-rT} - K \cdot e^{-rT}$$

$$f = S - I - K \cdot e^{-rT}$$

olur.

Son olarak bilinen bir kar payı olan bir yatırım aracının futures sözleşmesinin değeri:

$$f = (F - K) \cdot e^{-rT}$$

$$f = \underbrace{F}_{=S \cdot e^{(r-q) \cdot T}} \cdot e^{-rT} - K \cdot e^{-rT}$$

$$f = S \cdot e^{(r-q) \cdot T} \cdot e^{-rT} - K \cdot e^{-rT}$$

$$f = S \cdot e^{-qT} - K \cdot e^{-rT}$$

Örnek 4.5 : Kâr payı ödemeyen bir hisse senedi üzerine yapılan altı aylık futures sözleşmesini göz önüne alalım. Risksiz faiz oranı yıllık %10 olsun. Hisse senedinin fiyatı 25 dolar ve sözleşmedeki teslim fiyatı 24\$ olsun. Bu durumda

$$S = 25; r = \%10 = 0,1; T = 0,5 \left(= \frac{6}{12} \text{ yıl} \right) \quad K = 24$$

(4.1) eşitliğinden, F sözleşme fiyatı:

$$F = S \cdot e^{rT} = 25 \cdot e^{(0,1) \cdot (0,5)} = 26,28\$$$

(4.2) denklemden futures sözleşmesinin değeri:

$$f = (F - K) \cdot e^{-rT} = (26,28 - 24) \cdot e^{-(0,1) \cdot (0,5)} = 2,17\$$$

ifadesi futures değeridir.

Benzer şekilde; (4.3) eşitliğinden de f'i hesaplırsak

$$f = S - K \cdot e^{-rT} = 25 - 24 \cdot e^{-(0,1) \cdot (0,5)} = 2,17\$$$

değerini buluruz.

4.4 Forward ve Futures Fiyatları Eşit mi?

Eğer faiz oranları yorumlanamayacak şekilde değişirlerse (gerçek dünyada olduğu gibi) forwards ve futures fiyatları aynı değildir. Aşağıdaki teoremden; değişmeyen faiz oranları altında aynı vadedeki forwards ve futures fiyatlarının aynı oldukları ifade edilmektedir. Bununla beraber forwards ve futures fiyatları arasındaki fark, birkaç aylık vadeler için birçok

hallerde ihmal edilebilecek şekilde küçüktür. Bu nedenle yukarıdaki anlattığımız yöntemler forwards sözleşmelerinde olduğu kadar, futures sözleşmeleri için de kullanılabilirler. Bundan sonra F sembolü bir varlığın hem forwards hem de futures fiyatı olarak kullanılacaktır.

Teorem 4.1 : Faiz oranları sabit ise forwards ve futures fiyatları eşittir.

İspat : Bir futures sözleşmesi n günlük olsun. Ve

F_i ; i . günün ($0 < i < n$) sonundaki futures fiyatı olsun.

δ =: günlük sabit risksiz faiz oranı olsun.

Aşağıdaki stratejiyi takip edelim:

a) 0. (sıfırıncı) günün sonunda yani sözleşmenin başlangıcında e^δ uzun futures pozisyonu alınsın.

b) 1. günün sonunda uzun pozisyon $e^{2\delta}$ ya arttırılsın.

c) 2. günün sonunda uzun pozisyon $e^{3\delta}$ ya arttırılsın.

ve bu şekilde devam edilsin.

Bu strateji Çizelge 4.1’de toplu olarak gösterilmiştir.

Çizelge 4.1 Futures stratejileri

Gün	0	1	2	...	$n-1$	n
Futures Fiyatı	F_0	F_1	F_2	...	F_{n-1}	F_n
Futures Pozisyonu	e^δ	$e^{2\delta}$	$e^{3\delta}$	...	$e^{n\delta}$	0
Kazanç/Kayıp	0	$(F_1 - F_0)e^\delta$	$(F_2 - F_1)e^{2\delta}$	...	...	$(F_n - F_{n-1})e^{n\delta}$
Kazanç/Kayıp (N Günlük Hesaplanmış Hali)	0	$(F_1 - F_0)e^{n\delta}$	$(F_2 - F_0)e^{n\delta}$	...	...	$(F_n - F_0)e^{n\delta}$

i. günün başlangıcında yatırımcı $e^{\delta i}$ uzun pozisyonundadır. i. günündeki pozisyonundan gelen kar $(F_i - F_{i-1}) \cdot e^{\delta i}$ dir.

Kârın risksiz oranda n. günün sonuna kadar bileşik olarak hesaplandığını kabul edelim.

n. günün sonunda bu karın değeri:

$$(F_i - F_{i-1}) \cdot e^{\delta i} \cdot e^{(n-i)\delta} = (F_i - F_{i-1}) \cdot e^{n\delta} \text{ dir.}$$

Buna göre karın bütün yatırım stratejisinin n. günün sonundaki değeri:

$$\sum_{i=1}^n (F_i - F_{i-1}) \cdot e^{n\delta} = e^{n\delta} \cdot \sum_{i=1}^n (F_i - F_{i-1}) = e^{n\delta} \cdot (F_n - F_0) \text{ dir.}$$

F_n , varlığın vade bitimindeki spot fiyatı yani S_T ile aynı olduğundan, yatırım stratejisinin bitim değeri $(S_T - F_0) \cdot e^{n\delta}$ olarak yazılabilir.

Yukarıdaki verilen strateji ile birlikte risksiz devlet tahviline F_0 değeri ile yapılan bir yatırımın T zamanındaki değeri $F_0 \cdot e^{n\delta} + (S_T - F_0) \cdot e^{n\delta} = S_T \cdot e^{n\delta}$ dir.

Yani F_0 miktarı, T zamanı içerisinde $S_T \cdot e^{n\delta}$ değerine ulaşacak şekilde yatırılmış olur. Şimdi 0. günün sonundaki forward fiyatının değeri G_0 olsun.

G_0 'ı risksiz devlet tahviline yatırımında ve $e^{n\delta}$ uzun forward pozisyonu alınması halinde forward sözleşmesi T zamanında $S_T \cdot e^{n\delta}$ değerini garanti eder. Böylece her iki yatırım stratejisi de T zamanında $S_T \cdot e^{n\delta}$ yı getirir. Yani birinci yatırım stratejisinde F_0 miktarı ikincisinde G_0 miktarı harcarsak her ikisi de T zaman sonunda $S_T \cdot e^{n\delta}$ kar elde edilmektedir. Herhangi bir arbitraj fırsatı olmaması halinde $F_0 = G_0$ elde edilir.

Yani futures fiyatı ve forwards fiyatları eşittir.

4.5 Hisse Senedi Endeksi ile Futures Sözleşmeleri

4.5.1 Kısa Tarihçe

Endeks futures kontratları mal, döviz ve tahvil futures kontratlarından sonra ve 1982 yılında ilk kez A.B.D'de işleme açıldı.

Endeks futures; üstüne yazıldığı endeks değeri ile aynı yönde hareket eder ve endeks futures fiyatı ile endeks değeri arasındaki korelasyon katsayısı 1'e yakındır (yani yaklaşık aynı oranda ve aynı yönde hareket ederler). Öte yandan en az 30 senetten oluşan yaygın bir portföyün beta katsayısı da yaklaşık birdir. Yani yaygın portföylerde hemen hemen endeks

gibi hareket ederler (yada başka deyişle yaygın bir portföy satın almak fiilen endeksi satın almak gibidir). Bu durumda elinde yaygın bir portföy tutan kurumsal bir yatırımcı, bu portföyün değeri kadar endeks futures kontratı sattığında (short ettiğinde); elinde fiyatları tümüyle birbirine ters yönde hareket eden iki enstrüman olur. Portföy değeri %10 arttığında, short edilen futures kontratlarının değeri yaklaşık %10 düşer. Portföy değeri endeksin aşağı gidişyle %20 değer kaybettiğinde ise short edilen endeks futures kontratlarının değeri yaklaşık %20 artar. Yaklaşık olarak birbirini telafi eden iki enstrüman söz konusu olduğu için de, kurumsal yatırımcının portföy artı short futures kontratlarından oluşan pozisyonu, endeksin değişiminden hemen hemen hiç etkilenmez. Bu pozisyonun net getirisi yaklaşık sıfır, ancak riski de yaklaşık sıfır düzeyindedir. Farklı bir terminoloji kullanırsak; elinde bulunan yaygın bir portföye short futures kontratları ekleyen bir yatırımcı, geçici bir süre için sentetik bir nakit pozisyonu yaratmış olur (bilindiği gibi nakdin nominal olarak getirisi sıfır ve riski de sıfırdır).

Ancak endeks üstüne yazılı bir futures kontratı satarsak (short edersek), portföyün sistematik riskini de ortadan kaldırmaya başlarız. Çünkü futures satmak, bir anlamda, bir dönem için endeksi satmak anlamına geldiği için; endeks futures kontratı satma esasında sistematik riski de satmış oluruz. Sonuç olarak da geniş bir portföyü elde tutarken endeks futures satmak, sistematik riski bir süre için satmak anlamına gelir. Bu durumda da hem sistematik olmayan risk (portföy oluşturularak), hem de sistematik risk elimine edilmiş olacağı için; yatırımcı portföyü elinde tutmaya devam etmekle beraber yaklaşık tümüyle riskten arındırılmış (sıfır riskli) bir pozisyon yaratmış olur. Kurumsal yatırımcının bu sıfır riskli pozisyonu ne kadar taşıyacağı ise kendi inisiyatifinde bir karardır. Sıfır risk, sıfır getiri anlamına geldiği için muhtemelen çok uzun süre bu pozisyonu taşımayacaktır. Piyasanın belirsizliği azaldığında ve endeks tekrar yukarı döndüğünde, yatırımcı futures pozisyonunu kapatacak (sattığı futures kontratını o an geçerli fiyattan geri alacak) ve tekrar portföy riskini (ve artan bir piyasada pozitif olan portföy getirisini) taşımaya başlayacaktır.

Futures kontratını cazip kılan unsur, endeks aşağı gittikçe; short futures pozisyonunun her gün değer kazanmasıdır. Endeks futures kontratında mal teslimatının diğer futures kontratlarında olduğu gibi mümkün olmamasıdır. Endeks fiziki bir mal değil, itibari bir kavramdır. Endeksi simule edecek bir portföyün fiziki teslimatı teorik açıdan mümkün olsa da, pratikte bunun yapılması önemli zorluklar içeriyordur.

4.5.2 Endeks Kavramı

Endeks futures kontratı bir endeks üstüne yazılır. Böyle olduğu için de endeks kavramı bu futures kontratı için özel bir önem taşır. Endeks bilindiği gibi hisse senedi piyasasının bir barometresidir ve genel olarak senetlere ilginin artıp artmadığını saptar. Bu niteliği dolayısıyla endeks matematiksel olarak hesaplanan itibari bir kavramdır. Türkiye’de sadece tek bir popüler endeks (Endeks-100) olmasına karşın, gelişmiş ülkelerde piyasanın nabzını tutan birkaç farklı endeks söz konusu olabilir.

İyi bir endeks, piyasayı iyi yansıtan bir göstergedir. Genellikle bu amaçla, piyasayı iyi yansıttığına inanılan bir örnek (piyasadaki senetlerin bir bölümü) seçilir. Bu seçimde ana kriter seçilen senetlerin piyasayı ne ölçüde yansıtabildiğidir. Ardından bu senetler seçilen bir yöntemle ağırlıklandırılır. Ağırlıklandırılmış örnek değerinin daha sonra bir averajı (ortalaması) bulunur. Son olarak da bulunan ortalama değer, baz (başlangıç değeri) olarak seçilen bir değere bölünerek endeks değeri saptanır.

4.5.3 Temel Özellikler

Endeks futures kontratlarında önemli kavramlardan biri kontrat çarpanı (contract value) kavramıdır. Kontrat çarpanı; endeks futures fiyatında bir puanlık oynamanın, kontratı elinde tutanlar açısından ne kadarlık bir maddi kazanca veya maddi kayba neden olacağını tayin eder. Futures pozisyonlarının ne kadar değer kazanıp kaybedebileceği (alınan kontrat sayısı yanında) esas olarak futures fiyatındaki değişim ve söz konusu endeks futures kontratının çarpan değeri ile belirlenmektedir.

Belli bir andaki futures fiyatı, kontrat çarpanıyla çarpıldığında, kontratın o anki değeri (contract value) belirlenir. Endeks futures’ında alıcı (long), tek kontrat için kontrat değerindeki artış kadar kazanç sağlar, satım (short) pozisyonunda bulunan yatırımcı ise, kontrat değerindeki artış kadar (tek kontratta) kayba uğrar. Toplam kazanç veya kaybı ise, kontrat değerindeki değişim ile elde bulundurulmuş kontrat sayısının çarpımı belirler. Kontrata girildiği anki kontrat değeri, alıcının karşı tarafa toplam kaç dolarlık bir devirde bulunma (veya devir alma) taahhüdünde bulunduğunu gösterir.

Endeks futures borsalarında da, diğer futures borsalarında olduğu gibi, pozisyon açabilmek için bir başlangıç teminatı (ön marjın) yatırılması gerekir. Başlangıç teminatının ne miktarda olacağı, ilgili futures borsası tarafından saptanır.

Başlangıç teminatı uygulanması bir diğer önemli kavrama yol açar. Bu kaldıraç etkisi (leverage) kavramıdır. Basit tanımıyla kaldıraç faktörü kontrat çarpanının başlangıç teminatı tutarına bölünmesiyle bulunur.

Kaldıraç faktörü önemli bir kavramdır. Bu faktör bize piyasada 1 YTL'nin veya 1 doların kaç YTL'yi (doları) kontrol ettiğini gösterir. Kaldıraç faktörünün artışı piyasayı çok daha riskli hale getirir. Bu noktada iki temel kavramı formül şeklinde tekrar özetleyebiliriz.

Kontrat Değeri=Futures Fiyatı · Kontrat Çarpanı

Kaldıraç Faktörü=Kontrat değeri/Başlangıç Teminatı

veya

Kaldıraç Faktörü=(Futures Fiyatı · Kontrat Çarpanı)/B.T

Normal olarak kontrat çarpanı ile başlangıç teminat tutarı kısa dönemde sabittir. Ancak endeks ve faiz haddindeki değişmelere bağlı olarak, futures fiyatı saniyelik aralarda dahi değişebilir. Bunun anlamı kaldıraç faktörünün de piyasada sürekli biçimde değişebileceğidir.

Hedging ve spekülasyon piyasanın iki ana ayağıdır. Futures borsasının esas işlevi büyük kurumsal yatırımcılara risk satabilecekleri ve pozisyon hedge edebilecekleri bir ortam yaratmaktır. Ancak bir hedger (riskten korunan) riski satmak istediğinde, satmak istediği riski almayı kabul edecek bir başka hedger bulması çoğu kez kolay değildir. Bu açıdan; hedger'in satmak istediği riski almaya istekli bir spekülâtörün olması, piyasanın işlerliği açısından bir gereksinimdir. Spekülâtör endeks futures piyasalarında endeksin yönü üstüne oynayan kişi veya kurumdur. Bu oyunda kazanma şansı ise istatistiksel olarak düşüktür. Spekülâtör matematik beklentisi negatif olan bir oyun oynar ve kaybetme şansı kazanma şansından çoktur. Futures borsasında spekülâtöre kısa sürede küçük parayla büyük para kazanma olanağını kaldıraç faktörünün birden büyük olması sağlar.

Sonuç olarak; borsanın belirlemesi gereken kaldıraç faktörü piyasadaki her iki grubu da (hedger ve spakülâtör) tatmin edecek düzeyde olmalıdır. Kaldıraç faktörünün çok yükselmesi ve piyasanın çok riskli ve değişken olması, piyasada makul biçimde hedge yapabilme olanaklarını kısıtlar. Çok riskli ve değişken piyasalarda ise baz da çok değişken olur ve buna bağlı olarak hedging'in etkinliği azalır. Bu durumda hedge amaçlayan grupların piyasayı terk etmeleri ve meydana tümüyle spekülâtörlere bırakmaları gündeme gelir. Ancak kaldıraç faktörü çok düşük tutulursa, bu kez de spekülâtörler piyasaya girmeyebilir ve piyasada sürekli işlem yapılabilmesi tehlikeye girer. İki tarafı da tatmin edebilecek bir orta yolun bulunabilmesi bu açıdan önemlidir.

4.5.4 Endeks Futurelarının Fiyatlandırılması

Hisse senetleri endeksinin futures fiyatlarını belirlemek için onları kâr payı ödeyen bir yatırım aracı olarak gözleyebiliriz. Yatırım aracı, endekse giren hisselerin portföyüdür. Kâr payları ise bu portföyü elinde tutanlara ödenecek olan kâr payıdır. Gerçeğe iyi bir yaklaşımla sonuç verdiğinden kâr payları ödenmesinin sürekli olduğu kabul edilir. q kar payı oranı olsun. r paranın değerini göstere.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & T \text{ (Vade)} \\
 \bullet & \text{---} & \bullet \\
 S & & F
 \end{array}$$

$$F = \underbrace{S \cdot e^{rT}}_{\text{Faiz artışı}} \cdot \underbrace{e^{-qT}}_{\text{Temettü getirisi den mahrum olma}} = S \cdot e^{(r-q)T}$$

Yani hisse senedi bugün S 'den spot piyasada satılsa, bu nakit paranın T zaman sonraki değeri $S \cdot e^{rT}$ dir. Hisse senedi satılmakla kar paylarından vazgeçilmiş olunmakta, bunun etkisini e^{-qT} ile çarparak bulmaktayız.

Örnek 4.6 : 3 aylık S&P 500 endeksi üzerine forwards sözleşmesi yapılmasını göz önüne alalım. Endekse giren hisselerin yılda %3 oranında temettü verdiğini kabul edelim. Endeksin bugünkü değeri 400 olsun. Yıllık sürekli birleşik faiz ise %8 olsun.

Bu takdirde forwards fiyatı $F = S \cdot e^{(r-q)T} = 400 \cdot e^{(0,08-0,03) \cdot 0,25} = 405,03 \$$ dir.

Pratikte temettü ödemeleri sürekli olmaz. Eğer yatırımcı yukarıdaki oran hesabı yerine kârlarını miktar olarak hesaplamak isterse, bu miktarın bugünkü değerini I ile gösterir.

Bu takdirde: $S = I + F \cdot e^{-rT}$, $F = (S - I) \cdot e^{rT}$ olur.

a) Eğer endeksin T zaman sonrası için forwards fiyatı $F > S \cdot e^{(r-q)T}$ (veya $F > (S - I) \cdot e^{rT}$)

ise endekse giren hisse senetleri spot piyasadan satın alınır ve kısa forwards sözleşmelerine girilir. Bu şekilde kâr elde edilir.

b) Eğer $F < S \cdot e^{(r-q)T}$ (veya $F < (S - I) \cdot e^{rT}$) ise tersi yapılarak, yani endekse giren hisse senetleri satılır ve forwards sözleşmelerinde uzun pozisyona girilir. Bu stratejilere endeks arbitraji denir.

4.6 Döviz Piyasalarında Futures Sözleşmeleri

Dünya ülkeleri 1971 yılından başlayarak sabit kur sisteminden esnek kur sistemine geçmeye başlayınca, esnek yani arz ve talep koşullarıyla belirlenen döviz kurlarındaki kısa dönemli

dalgalanmalar; bu piyasalarda yer alanları dalgalanmaların yarattığı kur riskine karşı korunmaya itti ve bu ihtiyacın bir sonucu olarak 1972 yılından başlayarak döviz futures piyasaları ortaya çıktı. Spot döviz piyasaları bugün çok yüksek işlem hacmine sahip ve ağırlıklı olarak özel bankalarla Merkez bankalarının döviz alıp sattığı piyasalardır. Bu piyasa bir over the counter tipinde piyasa olup, alım satımlar esas olarak birbirlerine telefon ve computer ağlarıyla bağlı bankaların ikili görüşme ve anlaşmalarla birbirlerinden döviz alıp satmalarıyla gerçekleşir.

Döviz piyasalarında spot kur kadar forward yani geleceğe dönük kur da önem taşır. Forward kur ileriki bir tarihte teslimi yapılacak bir dövizin bugünden belirlenen kur değerini gösterir.

Dünyanın en önemli futures borsası A.B.D'deki uluslararası para piyasasıdır (IMM). Bu futures borsasında esas olarak yedi döviz üstünde işlem yapılır. Bu dövizler Japon Yeni, Euro, İsviçre Frankı, Kanada Doları, İngiliz Sterlini, Avustralya Doları ve Fransız Frankıdır. İlk beş dövizin futures piyasaları işlem hacmi açısından daha önemlidir. Döviz futures piyasalarında standart kontrat bitiş ayları Mart, Haziran, Eylül ve Aralıktır.

4.6.1 Döviz Kurlarını Belirleyen Ana Etmenler

Döviz futures kontratları temel özellikler açısından diğer kontrat tipleriyle, örneğin mal piyasası ve bono piyasasındaki kontratlarla benzer niteliktedir. En önemli fark döviz kurlarını belirleyen mekanizmanın farklı ve kendine özgü nitelikleri taşımasıdır.

Esas olarak döviz fiyatlarını dört ana etmen belirler. Bunlar a) Ülkelerin ticaret fazla veya açıkları b) Gerçek (reel) faiz hadlerinin durumu c) Satın alma paritesi d) Hükümet politikaları ve beklentilerdir.

Bunlardan cari ticaret fazlası (açığı), bir ülkenin cari işlemler yani mal ve hizmet hareketleri sonucu ticaret yaptığı tüm ülkelere göre bilançosunun artı veya eksi oluşu ile ilgilidir. Eğer bir ülke ithal ettiğinden daha fazla mal ve hizmet ihraç ediyorsa cari işlemlerde ticaret fazlası, aksi durumda ise ticaret açığı söz konusudur. Cari ticaret açığı durumunda, ülkenin yapmak istediği miktarda ithalat yapabilmesi için, ya dışardan kapital akımı sağlaması veya varolan döviz stokunu kullanması gerekir. Dışardan kapital akımı da ya ülkeye yabancı sermaye yatırımları yada dış borçlanma yoluyla olur. Cari işlemlerle ilgili ticaret açık veya fazlasının döviz kurlarıyla ilgisine gelince, bunu en iyi biçimde bir örnek aracılığıyla görebiliriz. Yeni Türk Lirasının A.B.D dolarına göre durumunu ele alalım. YTL/\$ kurunu belirleyen en önemli unsurlardan biri Türkiye'nin A.B.D ile yaptığı mal ve hizmet (turizm v.s) ticareti olacaktır. A.B.D'liler Türkiye'den mal ve hizmet alırken ellerindeki A.B.D dolarlarını YTL ye

çevirerek alımlarını finanse edeceklerdir. Türkler de A.B.D'den mal ve hizmet ithal ederken, ulusal para olan Yeni Türk Lirası'nı A.B.D dolarlarına çevirerek ithalatı finanse edeceklerdir. Türkiye'nin A.B.D'den ihraç ettiğinden daha fazla mal ithal etmesi demek, A.B.D ile ticaret açığını finanse etmek için A.B.D dolarlarına karşı Yeni Türk Lirası arzının arttırılması ve öte yandan da A.B.D dolarlarına talebin artması demektir. Dövizler de arz ve talep kanunlarıyla belirlenir. A.B.D dolarlarına talebin artması bu dövizin Yeni Türk Lirası cinsinden kıymetlenmesi yada başka deyişle Yeni Türk Lirası'nın A.B.D dolarlarına göre değer kaybetmesi sonucunu getirir. Özet olarak Türkiye A.B.D ile olan cari işlemlerinde açık verdikçe, A.B.D dolarları Yeni Türk Lirası'na göre kıymetlenir, buna karşın Türkiye A.B.D ile olan işlemlerinde ticaret fazlası verdikçe A.B.D dolarları Yeni Türk Lirasına göre zayıflar. Bu kur paritesini açıklayan tek neden olmamakla birlikte en önemli etkenlerden biridir.

Bu ana etmenin yanında bir diğer önemli etmen ülkelerin göreceli enflasyon düzeyleridir. Satın alma paritesi kuramına göre mal ve faktör hareketlerinin kısıtlanmadığı, yani gümrük ve kotaların yada sermaye hareketini kısıtlayan etmenlerin olmadığı bir dünyada, tek fiyat (law of one price) ilkesinin geçerli olması gerekir. Bu ilkeye göre bir malın yerli para birimiyle ifade edilen birim fiyatı, aynı malın yabancı bir ülkede o ülkenin parası cinsinden birim fiyatı bölü iki para arasındaki döviz paritesine eşit olmalıdır.

Satın alma paritesi gerçek dünyada teoremin belirlediği etkinlikte çalışmaz. Kurların satın alma paritesinin öngördüğü düzeyin altında veya üstünde kaldığı sık görülen bir olgudur. Bunun ana nedeni de gerçek dünyada sermaye kısıtlamaları ve gümrük engellerinin varlığıdır. Bu açıdan satın alma paritesini kur düzeylerini kısa dönemde açıklayan bir öneriden çok, kurların uzun dönemde yöneldiği denge seviyelerini açıklayan bir ilişki olarak görmek daha yararlı olur. Yapılan çalışmalar satın alma paritesinin genellikle bir yılı aşan dönemlerde etkin olduğunu göstermektedir.

Döviz kurlarını belirleyen bir diğer etmen, hükümetlerin özellikle Merkez Bankalarının izlediği politikalar ve piyasanın geleceğe dönük beklentileridir. Gümrük duvarlarının çeşitli nedenlerle yükseltilmesi, satın alma paritesinin belirlediği düzeylere kurların yönelmesini geciktirici bir etki yapar. Ayrıca Merkez Bankaları ekonomik olarak belirledikleri hedeflere varmayı sağlamak için sık sık döviz piyasalarına doğrudan doğruya müdahale ederler. Bu müdahale genellikle Merkez Bankasının piyasaya döviz satması veya piyasadan döviz alması şeklinde oluşur.

4.6.2 Döviz Futures Sözleşmelerinin Fiyatlandırılması

S ile yabancı bir paranın bir biriminin spot fiyatını gösterelim. Yabancı paranın kendi ülkesindeki risksiz faiz aracı r_f ile parayı elinde tutan yatırımcı tarafından değerlendirilebileceğini kabul edelim. Yatırımcının aşağıdaki stratejiyi uyguladığını düşünelim:

- a) $e^{-r_f T}$ miktar yabancı parayı satın alsın.
- b) Yabancı paranın bir kısım üyesinden kısa futures sözleşmesi yapsın.

Buna göre T süre sonunda yatırımcı faizden elde ettiği kazanç dolayısıyla elindeki parayı 1 birime büyütmüş olur. Sözleşme gereği, T zamanında yabancı parayı F'e satar.

Bu stratejiye göre, başlangıçta $Se^{-r_f T}$ nakit çıkışına karşı sonda F girişi sağlar. Giriş bugünkü değer çıkışına eşit olması gerektiğinden

$$Se^{-r_f T} = Fe^{-r_f T} \quad \text{veya} \quad F = Se^{(r_f - r)T} \quad \text{dir.}$$

Eğer $r_f > r$ ise $F < S$ dir ve T süresi arttıkça F değeri azalır.

Tersini alırsak eğer $r > r_f$ ise, $F > S$ olup T arttıkça F değeri artar.

Örnek 4.7 : 1996'daki Alman markının Amerika'daki futures fiyatı vade süresi ile yıllık %2,7 aşamasında artmıştır. Bu ise, A.B.D'deki faiz aşamalarını 1996'da, Almanya'daki faiz aşamalarından %2,7 daha fazla olması demektir.

4.7 Ticaret Malları ile İlgili Futures Sözleşmeleri

Tarımsal malları, endüstriyel nitelikteki madenleri, yakıtları ve değerli madenleri futures kontratlarını fiyatlamadaki benzer özellikleri dolayısıyla tek bir grupta ele alıp, bu gruba commodity futures (mal futuresları) diyebiliriz.

Mal piyasalarında futures fiyatlaması belirli bir anda verili bilgileri kullanarak teorik yani olması gereken futures fiyatlarını mallar (commodities) için saptamaktır. Bu bilgiyi piyasada oluşan gerçek futures fiyatlarının yapısını anlamakta kullanacağız. Örneğin 21 Temmuz'daki buğday kontratlarına bakarsak spot buğday fiyatlarının ve değişik kontrat ayları için buğday futures fiyatlarının aşağıdaki biçimde olduğunu görüyoruz.

Spot	295,5
Eylül Kontratı	310,75
Aralık Kontratı	320,5

Mart Kontratı

324,75

Futures kontratlarının fiyatlaması basit bir mantığa dayanır. Futures kontratları bugün belirlenen bir fiyattan gelecekte mal teslimini veya alımını hedefleyen kontratlardır. Örneğimizde Aralık ayının kontratına giren (alan) bir şahıs Aralık ayında 5.000 ton buğdayı ton başına 320,5 dolardan teslim alma hakkına sahiptir. Dikkat edilirse bu şahıs depolama külfetine girmeden Aralık ayında 5.000 ton buğday teslim almayı garanti etmiş bulunmaktadır. Ancak bu şahsın bir diğer alternatifi daha mevcuttur. O da bugünkü spot fiyattan yani ton başına 295,5 dolardan 5.000 ton buğday satın alarak bunu Aralığa dek saklamaktadır. Ancak ikinci alternatifte bu şahsın ödediği spot fiyata ek olarak depolama ve stoklama maliyetlerini de yüklenmesi gerekmektedir. Bu maliyetlerin toplamına taşıma maliyeti (cost of carry) denir. Bu maliyetlerin ayrıntılı dökümü depolama masrafını, buğdayı sigortalama bedelini ve yükleme/boşaltma masraflarını içerir. Ayrıca toplam taşıma maliyetine stoktaki mala bağladığımız paranın bize kazandırabileceği faiz miktarını da eklemek gerekir.

Buna karşın spot piyasasında işlem gören şahıs 5.000 ton buğday için 21 Temmuz'da toplam 5.000 çarpı 2,925 dolar yani 14,625 dolarlık ödeme yapacak ve bu parayı Aralığa dek bağlamış olacaktır. Futures kontratına giren şahıs, sürdürme teminatı olmadığı varsayımıyla 13,125 dolarlık bir miktarı Aralık ayına kadar mala bağlamaktan kurtulmuş olacaktır. A.B.D'de yıllık faizlerin %6 olduğunu varsayarak futures piyasasında işlem yapan kişinin spot piyasada işlem gören şahsa göre yaklaşık altı ay hesabıyla $13,125 \cdot 0,03 = 393,75$ dolarlık toplam faiz avantajı sağladığını söyleyebiliriz. Bu da ton başına 7,87 sentlik bir fark demektir. Bu faiz farkını da toplam taşıma maliyetine eklememiz gerekir. Bu şekilde toplam taşıma maliyetinin unsurlarından birinin de faiz haddi olduğunu görüyoruz. Normal koşullarda faiz hadleri arttıkça toplam taşıma maliyetlerinin artacağı söylenebilir.

Teorik futures fiyatlarını bilmek önemlidir. Gerçek yani arz ve talebin belirlediği piyasa fiyatlarının teorik fiyatlardan çok uzaklaştığı durumlarda, piyasanın arbitraj yoluyla bir düzeltme yaparak teorik fiyatlara tekrar yaklaşma eğiliminde olduğunu söyleyebiliriz. Burada teorik açıdan futures fiyatlarının hesaplanmasıyla ilgili bir iki noktayı da belirtmek gerekir. Taşıma maliyetlerinin doğru hesaplanması her zaman kolay olmayabilir. Özellikle, zaman içinde hızla değişebilen faiz hadlerinin taşıma maliyetinde yer alması işleri biraz daha zorlaştırır. Dikkat edilirse bizi ilgilendiren taşıma maliyeti ve faiz haddi önümüzdeki dönemlerde gerçekleşecek olan yani tahmin edilmesi gereken taşıma maliyetidir.

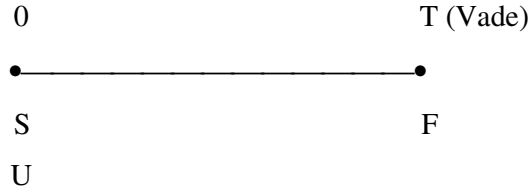
Bir diğ er sorunda spot fiyatların doğru biçimde tespitidir. Belli bir günde teorik futures fiyatının ne olduğunu saptamak için tahmin ettiğimiz taşıma maliyetini o günkü spot fiyata eklemek durumundayız. Ancak spot fiyatlara baktığımızda bu fiyatların gün içinde önemli ölçüde değişebildiğini, ayrıca işlem gördüğü yer ve kaliteye göre de farklılık gösterebildiğini görüyoruz. Burada kural futures kontratının gerektirdiği kalite ve teslim yeri kriterini kullanmaktır.

Pratikte teorik futures fiyatlarının hesaplanması için şu yöntem önerilebilir. Genelde aracı kurumlar taşıma maliyetlerinin tahminini yaparak müşterilerine bildirirler. Fazla zaman harcamak istemeyen bir yatırımcı bu maliyetleri veri olarak alıp, bunlara bugünkü spot fiyatları ekleyerek bulduğu fiyata %5 değişme payı ekleyebilir. Piyasadaki futures fiyatı teorik fiyatın etrafındaki bu %5’lik marjın dışına çıktığı takdirde bunu pozisyon değerlendirmesi yapmak için bir neden olarak görebilir.

Futures fiyatından spot fiyatı çıkarırsak aradaki farka yani (F-S)’ye futures literatüründe baz diyoruz. Eğer spot fiyatı teorik futures fiyatından çıkarıyorsak buna teorik baz, buna karşın spot fiyatı piyasada oluşan futures fiyatından çıkarırsak buna da piyasanın belirlediği baz yada piyasa bazı diyoruz. Açıktır ki teorik futures fiyatları piyasa futures fiyatlarından farklı olduğu oranda, teorik bazda piyasa bazından farklı olacaktır. Normal koşullarda taşıma maliyeti pozitif bir diğ er olacağı yada futures fiyatı spot fiyattan fazla olacağı için bazın (teorik ve piyasa bazı) pozitif bir değ er olması gerekir.

Elde spot mal bulundurmanın sağladığı avantajların parasal karşılığına uygunluk getirisi denir. Futures kontratı satan bir kişi gerçekte şu an elinde olmayan bir malı satmaktadır ve kontrat süresi bitiminde bu malı piyasadan spot olarak teslim etmekle yükümlüdür. Normal koşullarda bu bir sorun olmayabilir. Ancak bir kriz veya savaş dolayısıyla malın piyasada bulunamadığını varsayalım. Bu durumda futures piyasasında satış pozisyonu olan bir kişi ya mal teslim yükümlülüklerini zamanında yerine getiremeyerek tazminat ödemek zorunda kalacak yada malı karaborsadan ve yüksek fiyattan almak zorunda kalacaktır. Şu halde malı spot olarak taşıyan kişinin futures kontratı tutan kişiye göre, bu ek maliyetlere girmeyeceği için bir avantajı vardır. Bu avantajın parasal karşılığına uygunluk getirisi diyoruz. Piyasa, futures kontratının teslim tarihine kadar olan sürede herhangi bir nedenle mal bulmada bir sıkışıklık olacağını düşünüyorsa, bu beklentiyi futures fiyatlarına yansıtır.

4.7.1 Ticaret Mallarında Futures Sözleşmeleri Fiyatlandırılması



S =: Ticaret malının bugünkü spot fiyatı.

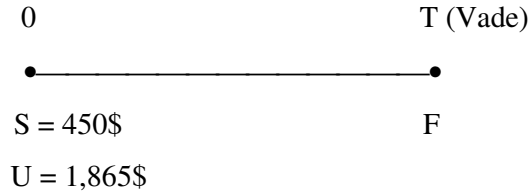
F =: Futures fiyatı.

U =: Ticaret malının saklanma ve korunma giderlerinin bugünkü değeri.

$$\Rightarrow F = (S + U) \cdot e^{rT}$$

Eğer U masrafı oran olarak hesaplanmışsa $F = S \cdot e^{(r+U)T}$ dir.

Örnek 4.8 : Altın üzerine bir yıllık futures sözleşmesi düşünelim. Altın saklama masrafı yıl sonunda ödenmek üzere ons başına 2\$ olsun. Altının bugünkü ons başına spot fiyatı 450\$ ve paranın değeri yıllık %7 olsun. Buna göre;



$$F = S \cdot e^{(r+U)T}$$

$$F = (S + U) \cdot e^{rT}$$

$$F = (450 + 1,8648) \cdot e^{0,07 \cdot 1} = 484,6286$$

$$U = 2 \cdot e^{-0,07 \cdot 1} = 2 \cdot e^{-0,07} = 1,8648 \approx 1,865\$$$

$$F = (450 + 1,865) \cdot e^{0,07 \cdot 1} = 484,63\$$$

Stratejiler:

a) Eğer vadeli işlem piyasalarında $F > 484,63$ ise bir yatırımcı altın satın alır ve 1 yıllık kısa altın futures sözleşmesine girerse kâr eder.

b) Eğer $F < 484,63$ ise, elinde altın bulunduran bir yatırımcı, elindeki altını satar ve 1 yıllık altın futures sözleşmesinde uzun pozisyona girer.

Örnek 4.9 : Altının bir yıllık futures fiyatı ons başına 500\$ olsun. Ons başına spot fiyat 450\$ ve paranın değeri yıllık %7 olsun. Altının ons başına yıllık saklama fiyatı 2\$ olsun ve istenildiği zaman ödensin.

Eğer futures fiyatı yüksek ise yatırımcı şu stratejiyi uygular:

- a) Spot piyasadan 100 ons altın almak için 45.000\$ borç alır.
- b) Bir yıllık altın futures sözleşmesine kısa pozisyonda girer.

Yıl sonunda $500 \cdot 100 = 50.000$ \$ alır. Aldığı borca yıl sonunda ödemesi gereken para $45.000 \cdot e^{0,07 \cdot 1} = 48.263$ \$ dır. 200\$ saklama masrafı olarak öder. Dolayısıyla net kârı $50.000 - 48.263 - 200 = 1.537$ \$ dır.

Örnek 4.10 : Altının bir yıllık futures fiyatı ons başına 470\$ olsun. Ons başına spot fiyat 450\$ olsun. Paranın değeri yıllık 0,07 olsun. Saklama masrafı ons başına 2\$ olup her zaman ödenebilir olsun.

Eğer futures fiyatı düşükse ve yatırımcının elinde 100 ons altın varsa, aşağıdaki strateji uygulanabilir.

- a) Elindeki altını $450 \cdot 100 = 45.000$ \$'a satar.
- b) 1 yıllık altın futures sözleşmesinde uzun pozisyon alır. Elindeki 45.000\$ bir yıl sonra $45.000 \cdot e^{0,07 \cdot 1} = 48.263$ \$ olur. Yıl sonunda sözleşme gereği 100 ons altını 47.000\$'a alır. $48.263 - 47.000 = 1.263$ \$. Ayrıca altın saklama masrafından kurtulduğu için net kârı $1.263 + 200 = 1.463$ \$ dır.

4.8 Tahvil ve Bono Piyasalarında Futures İşlemleri

4.8.1 Genel Özellikler ve Kotasyon

Futures işlemlerinin yapıldığı en önemli piyasalardan birini finansal instrumanlar dediğimiz bona ve tahviller oluşturur. Şu an futures kontratları T-Bill denen A.B.D hazine bonoları, T-Bond denen A.B.D devlet tahvilleri, Eurodolar depozitleri, finansman bonoları (commercial paper) ve GNMA denilen ve A.B.D'de ipotekli gayrimenkuller karşılığında çıkarılan tahvil benzeri araçlar üstüne yazılmaktadır.

T-Bill, A.B.D hazinesinin kısa dönemli borçlanma gereksinimlerini karşılamak için A.B.D hazinesi (Treasury) tarafından çıkarılan ve nominal değeri 10.000 dolar ve katları olan hazine bonolarıdır.

T-Bill’ler standart olarak 13,26 ve 52 haftalık süreler için çıkarılır yada teknik deyişle standart vadeleri 13,26 ve 52 haftadır. T-Bill’lerin getirisi iskonto getirisi (discount yield) esası üstünden hesaplanır. T-Bill normal tahviller gibi düzenli faiz (kupon) ödemesi yapmaz. Getiriyi nominal değer altında olan alış fiyatı ile süre oluşturur. Bir örnek verirsek; nominal değeri 10.000 dolar ve kalan süresi 102 gün olan bir T-Bill piyasada 10.000 doların altına satılır. Bu fiyat 9.822 dolar olsun. T-Bill’i 9.822 dolara alan şahıs 102 gün tuttuktan sonra süre bitiminde 10.000 dolar alacaktır. Aradaki fark T-Bill’i 102 gün tutan şahsın faiz gelirini oluşturur. Getiri oranı;

$$\text{İskonto Getirisi} = \frac{(F - D)}{F} \cdot \frac{360}{t}$$

formülüyle hesaplanır. Burada D, T-Bill piyasadan satın alındığı fiyatı, F nominal değeri (çoğunlukla 10.000 dolar), t bononun satın alındığı günden vade sonuna dek gün sayısını gösterir. Yukarıdaki örnekte bono getirisi

$$\frac{10.000 - 9.822}{10.000} \cdot \frac{360}{102} = 0,628$$

dir. Bu getiri 360 gün üstünden hesaplanan yıllık iskonto getirisidir (annualized discount yield). İskonto getirisi tahvillerde yaygın olarak kullanılan ve 365 gün esasından hesaplanan vade sonuna getiriden (yield to maturity) farklı bir kavramdır. Bir T-Bill’in vade sonuna getirisini hesaplamak için $\frac{F - D}{D} \cdot \frac{365}{t}$ formülünü uygulamak gerekir. Görüldüğü gibi bu yaklaşımda getiri nominal değer yerine piyasa değerine bölünmekte ve 360 yerine 365 gün kullanılmaktadır. Örnekte vade sonuna getiri: $\frac{10.000 - 9.822}{9.822} \cdot \frac{365}{102} = 0,648$ olacaktır. Bir müşteri T-Bill alırken T-Bill asked yield denen satın alma getirisinden, bonoyu satarken bid yield denen satış getirisi üstünden satacaktır.

Eurodolar ise A.B.D dışındaki bankaların (çoğunlukla Londra’da) dolar hesapları üstünden açtıkları mevduat hesapları (time deposit) dir. Bu genellikle kısa vadeli (üç veya altı ay) ve dolar üstünden faiz getirili bir mevduat hesabıdır. Eurodolarlar’da yıllık getiri oranı genellikle 360 gün üstünden hesaplanır.

T-Bond ise A.B.D hazinesinin uzun dönemli finansman gereksinimlerini karşılamak için çıkartılan A.B.D devlet tahvilleridir. Vadeleri bir yıldan otuz yıla kadar değişir. Vadesi 10 yıldan az olan tahvillere T-Notes, vadesi 10 yıldan uzun olan tahvillere ise T-Bond denir. Tahviller A.B.D hazinesi tarafından sadece seçkin aracılara (govenment bond dealer) dönük açık arttırmalarda (auction) satılır.

Tahviller genellikle 1.000 ve 5.000 dolarlık nominal değerler üstünden işlem görür.

Tahviller bonolardan farklı olarak belirli dönemlerde önceden belirlenmiş faiz ödemeleri yaparlar. Bu faiz ödemelerine kupon ödemesi (coupon, payment) denir. Kupon ödemeleri genellikle her altı ayda bir ve çoğunlukla da Mayıs ve Kasım aylarında yapılır. Şu halde 4 yıl vade kupon ödemesi 50 dolar olan, 1.000 dolarlık nominal değere sahip tahvil alan bir şahıs bunu vade sonuna dek tuttuğu takdirde, her yıl Şubat ve Kasım aylarında 50 dolar ve vade sonunda da 1.000 dolar alacaktır. Tahvil getirileri 365 gün üstünden ve vade sonuna getiri esası üstünden hesaplanır. Tahvil kotasyonlarında özel bir yöntem kullanılır. Tahvil dilinde %1'lik bir faiz haddinin 1/32'sine bir baz noktası (one basis point) denir. Standart olarak bir tahvil kotasyonu örneğin 93,8 olarak verilir. 1.000 dolarlık nominal değeri olan bir tahvilde bu kotasyon piyasa fiyatının $93\frac{8}{32}$ yada $93,25 \cdot 10 = 932,5$ dolar olduğunu gösterir.

Futures kontratına esas olan araçları kasaca tanımladıktan sonra şimdi de bunların üstüne yazılan futures kontratlarının genel özellikleri ele alınacaktır. T-Bill'ler üstüne yazılan futures kontratları genellikle IMM'de (International Money Market) işlem görür. T-Bill futures kontratları standart olarak Mart, Haziran, Eylül ve Aralık ayı kontratlarıdır. Bir kontrat 1.000.000 dolar nominal değere sahip T-Bill'lerin kontrat ayında teslimini veya teslim alınmasını öngörür. T-Bill futures kotasyonunu anlamak için 15 Temmuz 1993 tarihindeki Wall Street Journal'dan alınan aşağıdaki alıntı bir fikir verebilir.

Çizelge 4.2 Wallstreet Journal (15 Temmuz 1993)

	Açılış	En Yüksek	En Düşük	Settle		İskonto oranı	
Eylül	96,61	96,91	96,89	96,89	3,11	+	0,01
Aralık	96,70	96,71	96,68	96,69	3,31	+	0,01

Aralık kontratını ele alalım. İlk dört sütun gün içindeki fiyat oynamalarını verir. İskonto (yıllık iskonto getirisi) altındaki S ibaresi settle fiyatına göre hesaplanan iskonto oranını, D ise iskonto oranının gün içindeki değişmesini verir.

Buradaki iskonto oranı (discount rate) daha önce tartıştığımız spot T-Bill'in iskonto oranı değildir. Bu iskonto oranı futures yield denilen ve kontrat süresi bitiminde (Aralık ayında) 13 haftalık instrumenlar için T-Bill iskonto oranının ne olacağı hakkındaki piyasa beklentisidir. Şu an (15 Temmuz'da) spot piyasada işlem gören T-Bill'lerin yıllık iskonto oranı 3,35 ise futures kotasyonu bize piyasanın bugünden Aralık'a dek yıllık iskonto oranlarının %3,35'den %3,31'e düşmesini beklediğini gösterir. D ifadesi ise Aralık ayı ile ilgili iskonto oranı beklentisinin gün içinde yüzde birlik faizin 0,01'i kadar (3,30'dan 3,31'e) arttığını gösterir. T-Bill futures kontratlarında yüzde birlik faizin 0,01'ine bir baz noktası denir. Şu halde gün içinde Aralık ayı iskonto oranı beklentileri bir baz noktası artmıştır. Dikkat edilirse settle cinsinden futures fiyatı (96,69) Aralık kontratında (100-S)'ye yani 100 eksi settle cinsinden beklenen yıllık iskonto oranına (100-3,31=96,69) eşittir. Ancak bu rakam (96,689) futures kontratının şu anki değerini göstermez. Futures kontratının şu anki değerini belirleyen kontrat teslim tarihinde teslim konu olan T-Bill'lerin beklenen piyasa değeridir. Bu açıdan futures kontratının değerini belirlerken biraz önce belirtilen T-Bill fiyatlaması yöntemlerini kullanmak gerekir. Örnek kotasyonda geçen 96,69 settle fiyatının futures kontrat değeri olarak karşılığı:

$$FP = 1.000.000 - 1.000.000 \cdot \left(\frac{100 - 96,69}{100} \right) \cdot \frac{91}{360} = 991.635,7 \text{ dolardır.}$$

Futures kontratlarını değerlendirmede kullanılan tam formül:

$$FP = \text{Par değ er} - \frac{(\text{Par değ er} \cdot \text{Yıllık iskonto getirisi} \cdot 91)}{360} \text{ dır.}$$

Burada par değ er futures kontratının taşıdığı T-Bill'lerin par değ eri yani 1 milyon dolar, yıllık iskonto getirisi futures kontratının geleceğe dönük olarak ima ettiği iskonto değ eri (futures yield) dir. Son terim yani $\frac{91}{360}$ ise üç ay için beklenen getiriyi yıllık baza çevirir ve 13 haftalık kontratlar için kullanılır. Futures kontratında bunu kullanmamız T-Bill futures kontratlarının 13 haftalık T-Bill yapılmasıyla ilgilidir.

Bir başka deyiş le bu kontratı satın alan kişi kontrat süresi bitiminde bugünkü (15 Temmuz) piyasa beklentilerine göre 991.635,7 dolar piyasa değ erine sahip olacağı ve %3,31 yıllık iskonto getirisi sağlayacağı umulan 1.000.000 dolarlık nominal değ ere sahip 13 haftalık T-Bill'leri teslim alacaktır. Öte yandan bu fiyattan 15 Temmuz'da Aralık T-Bill kontratı alana bir kişi aynı kontratı 21 Temmuz'da settle fiyatından satsaydı, settle fiyatı bu tarihte 96,58 olarak verildiğine göre, sattığı kontratın değ eri:

$$FP = 1.000.000 - 1.000.000 \cdot \left(\frac{100 - 96,58}{100} \right) \cdot \frac{91}{360} = 991.357,7 \text{ dolar olacaktır.}$$

Şu halde 991.635,7 dolara alınan kontrat altı gün sonra 991.357,7 dolarlık bir değerden satıldığına göre zarar 278 dolardır. Zararın nedeni ise altı gün içinde Aralık ayında beklenen yıllık iskonto getirisinin %3,31'den %3,42'ye yükselmesidir. Bono piyasalarında getiri oranları yükseldikçe bono fiyatları düşer.

Aralık ayında beklenen getiri oranları yükseldikçe bono fiyatları düşer. Şu halde futures kontratı satın alan bir kişi kontratın değerinin artması ve kar etmek için piyasanın geleceğe dönük iskonto getirisinin düşmesini ummak durumundadır. Piyasanın gelecekte beklediği iskonto oranları yükselirse bu kez futures satanlar kâra geçerler.

T-Bill futures piyasasında minimum fiyat değişim aralığı (tick) ise

$$T = 1.000.000 \cdot \left(\frac{1}{100} \right) \cdot (\%1) \cdot \frac{90}{360} \text{ formülüyle saptanır ve 25 dolardır.}$$

T-Bill'lerin futures kontrat hükümleri gereğince teslim tarihi kontrat ayında 13 haftalık yeni bir T-Bill piyasaya çıktıktan sonra ve piyasada mevcut 52 haftalık bir T-Bill tam olarak 13 hafta kalan vadeye sahip olduktan sonraki ilk gündür. Örneğin Aralık kontratında eğer 6 Aralık 1993 günü (Pazartesi'ye rastlar) bir hazine açık arttırım sonucu yeni 13 haftalık T-Bill'ler piyasaya çıkmışsa ve 8 Aralık günü piyasada işlem gören 52 haftalık T-Bill'ler kalan vadesi tam olarak 13 hafta olarak belirlenmiş ise bu takdirde teslim tarihi 8 Aralık olarak saptanır. Piyasada işlemler teslim tarihinden bir gün sonra yani örneğimizde 9 Aralık günü kesilir.

Eurodolar futures kontratları da 1.000.000 dolar nominal değer üstünden yapılır. Bir başka deyişle elinde alım kontratı bulunan bir kişi teslim tarihinde 1.000.000 dolar nominal değere sahip Eurodolar'ı alma yükümlülüğündedir. Eurodolar futures kontratlarının değerlendirilmesi de T-Bill'ler gibi ve aynı formüller kullanılarak yapılır. Örneğin 21 Temmuz 1993'te Eurodolar Aralık kontratının settle fiyatı 96,14 olarak verilmiştir. Bu kotasyon piyasasının 21 Temmuz günü Aralık ayı Eurodolar iskonto getirisinin (yıllık bazda) %3,86 ($100 - 96,14 = 3,86$) olmasını beklediğini gösterir. Bu settle fiyatından alınan Eurodolar kontratının, alındığı anki

$$\text{değeri ise } FP = 1.000.000 - 1.000.000 \cdot \left(\frac{100 - 96,14}{100} \right) \cdot \frac{90}{360} = 990.350 \text{ dır.}$$

Formülde T-Bill örneğindeki 91 yerine 90 kullanılması T-Bill vadesinin 91 gün, buna karşın Eurodolar vadesinin 90 gün olması ile ilgilidir. T-Bill kontratlarında teslim koşulunun yerine

getirilmesi fiziki olarak T-Bill'lerin teslimi içerir, buna karşın Eurodolar kontratlarında kontrata konu olan üç aylık bir mevduat hesabıdır ve bu hesabın fiziki olarak devri zordur. Bu açıdan Eurodolar kontratlarında kontrat süresi bitiminde nakitle hesaplaşma (cash settlement) yöntemi kullanılır. Bu yöntemde fiziki olarak bir mal teslimi söz konusu değildir. Kontrat süresi bitiminde Eurodolar kontratının aldığı son değer hesaplanır ve bu değere göre alış veya satış fiyatına oranla kontratın ne kadar değer kazandığı yada kaybettiği hesaplanır. Bu fark nakit bedel olarak kontrat sahibine ödenir yada fark negatifse kontrat sahibinden nakit olarak tahsil edilir.

4.8.2 Tahvil Fiyatlanmasının Esasları

T-Bond futures fiyatlarının belirlenmesine geçmeden önce T-Bond futures kontratlarının üstüne yazıldığı enstrümanın yani T-Bond'un fiyatlanması üstünde duralım.

Tahviller genellikle firmalar ve devlet tarafından kısa veya uzun dönem finansman gereksinimlerini karşılamak üzere çıkartılır. Tahvil alan şahıs özünde tahvili çıkaran kuruma bir dönem için borç vermektedir. Bu açıdan tahvil alan şahıs verdiği borç karşılığı önceden belirlenmiş bir faize hak kazanır. Bunun sonucu tipik bir tahvil, vade (maturity) boyunca tahvili elinde tutan şahsa düzenli ve önceden belirlenmiş bir nakit alışı sağlar. Nakit akışı esas olarak iki ana bölümden oluşur. a) genellikle vade sonunda ödenen ana para b) vade süresince belirli zamanlarda çoğunlukla da her altı ay sonunda ödenen faizler.

Bu düzenli faiz ödemelerine kupon ödemesi (coupon payment) da denir. 1.000 dolarlık nominal değere sahip ve dört yıl vadeli bir tahvili ele alalım. Bu tahvil her yıl sonunda 100 dolarlık faiz ödemesi yapıyorsa, tahvili elinde tutan bir şahsın nakit girdisini her yıl sonunda aldığı 100 dolarlık faiz yada kupon ödemeleriyle birlikte vade yani dört yıl sonunda eline geçen 1.000 dolar oluşturur. Burada iki nokta önemlidir. Birincisi vade sonunda ödenen ana paranın nominal değer yani tahvilin üstünde yazılan değer olmasıdır. Diğer bir nokta ise tahvil ilk piyasaya çıktığı an ne kadar kupon ve ana para ödeyeceğinin belirlenmiş olmasıdır. Tahvilin ödediği toplam yıllık faizin nominal değere oranına kupon getirisi denir.

Tahviller genellikle ikinci el piyasasında da işlem görürler. Dolayısıyla piyasaya ilk kez çıkan bir tahvili satın alan bir şahıs iki seçeneğe sahiptir. Ya tahvili vade sonuna kadar saklar ve belirlenmiş kupon ödemeleri ile ana parayı alır yada vade sonundan önce ikinci el piyasada bir başkasına satar. Tahvilin ikinci el piyasasında satıldığı fiyata tahvil fiyatı denir ve tahvil fiyatlaması denilen konu tahvil fiyatlarının serbest piyasada nasıl belirlendiği ile ilgilidir. Bir tahvil piyasaya ilk çıktığı an ikinci el piyasadaki fiyatı nominal değerine eşittir.

Tahvil fiyatlamasında tahvil fiyatları ile piyasaya faiz hadlerinin ters orantılı olarak değiştirmektedir.

Tahvil fiyatı=kupon ödemelerinin bugünkü değeri+ana paranın bugünkü değeri

şeklinde belirlenir. Fiyatlar kolaylıkla özel olarak hazırlanmış tahvil tablolarından bulunabilir.

Formül uyarınca bulunan fiyatlar bize piyasada kote edilen fiyatları verir.

Piyasada işlem gören fiyat kote edilen fiyattan farklı olabilir. Bu farkın nedeni bir kupon ödemesinden diğer kupon ödemesine kadar geçen zamanda gerçekleşen toplanmış kupon faizi (accrued interest) dir.

Tahvillerle ilgili olarak ilerde kullanılacak önemli bir kavram da süre (duration) kavramıdır. Süre kavramı tahvil fiyatlarının faiz haddi değişikliklerine karşı duyarlılığını gösterir. Uzun süreye sahip bir tahvilin fiyatı faiz haddi değişikliklerine, kısa süreli bir tahvile göre daha duyarlıdır yani fiyatı aynı oranda bir faiz haddi değişikliği durumunda daha fazla değişir. Süre kavramını formül olarak

$$D = \frac{1}{P} \left[\frac{t_1 \cdot X_1}{1+r} + \frac{t_2 \cdot X_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{t_n \cdot X_n}{(1+r)^n} \right] \text{ şeklinde gösterebiliriz.}$$

Bu formülde P tahvilin piyasa fiyatını, t zaman ağırlığını, X kupon veya ana para ödemesini, r ise iskonto oranını gösterir. Burada t bir zaman indeksi olarak formüle girer. Altı ay yada yıl sonunda yapılan ilk kupon ödemesi 1, ikinci kupon ödemesi 2 ağırlığına sahiptir ve bu diğer kupon ödemeleri için de bu şekilde devam eder.

$$D = \frac{1}{939,26} \left[\frac{1 \cdot 100}{1,12} + \frac{2 \cdot 100}{1,2544} + \frac{3 \cdot 100}{1,4049} + \frac{4 \cdot 1000}{1,5735} \right] = 3,469$$

Genelde düşük kupon ödemeleri ve uzun vadeli tahviller uzun sürelerle, buna karşın yüksek kupon ödemeli ve kısa vadeli tahviller kısa sürelerle sahiptir. Tahvillerden oluşan bir portföyün süresi ise portföyü oluşturan tahvillerin sürelerinin ağırlıklı ortalamasıdır. Aktif ve pasifleri yaklaşık aynı sürelerle sahip bir portföy faiz haddi değişikliklerinden pek etkilenmeyecektir.

4.8.3 Getiri Eğrisi

Piyasada işlem gören tahvillerin faizleri risk faktörü, ikinci el piyasada satılabilme kolaylığı ve vade süresi gibi nedenlerle farklı değerler taşırlar. Aynı kurum tarafından çıkarılan

tahviller genellikle eş risk düzeyine sahiptir bu kurumun çıkardığı değişik vadeli tahvillerin faiz farkları esas olarak vade süresinin bir fonksiyonudur. Faiz farklarına yol açan diğer unsurlar Hazine bonoları için aynı olduğuna göre bu bonolarda gözlenen faiz farkları esas olarak değişik vade sürelerinin bir fonksiyonudur.

Getiri eğrisi bu saptamadan yola çıkarak faiz hadleri yada getirilerle (yield) vade süreleri arasındaki ilişkiyi gösteren bir kavramdır. Örneğin belli bir günde üç ay, altı ay, bir yıl, iki yıl, beş yıl ve on yıl vadeli A.B.D hazine bonolarını ve devlet tahvillerini ele alalım. Bu bono ve tahvillerin geçerli iskonto oranını yani vade sonuna getirilerini bir önceki bölümde gördüğümüz gibi o günkü bono ve tahvil piyasa fiyatlarını kullanarak saptayalım. Daha sonra da yatay ekseninde zamanı (vade süresini), dikey ekseninde ise her vade süresine tekabül eden vade sonuna getiriyi gösterelim. Bu diyagramda her nokta iki koordinat değerine sahip olacaktır. Bu noktaları birleştirdiğimizde elde edeceğimiz doğru veya eğriye getirisi eğrisi diyoruz.

Getirilen vade sürelerine bağlı olarak nasıl değiştiğini açıklamak için değişik hipotezler geliştirilmiştir. Bunlardan en çok kabul göreni beklentiler hipotezi (expectations hypothesis) dir. Bu hipotez vade sürelerine göre getirileni değişmesini piyasanın geleceğe dönük faiz haddi beklentileri ile açıklar. Bunu basit bir örnekle açıklayalım. Şu an için iki tane tahvil alalım. Tahvillerden biri bir yıl, diğeri ise iki yıl vadeli olsun. Bir yıl vadeli tahvilin getirisi %5 (yıllık) diyelim. Beklentiler hipotezine göre rasyonel bir yatırımcı açısından şu iki alternatiften biri arasında fark olmaması gerekir.

a) Şu an iki yıllık bir tahvil alarak parayı iki yıl için bu tahvile bağlamak

b) Önce bir yıl vadeli tahvili satın almak, bu tahvilin anapara ve faizini aldıktan sonra bu parayla birinci yıl sonunda yeniden bir yıllık bir tahvil almak.

Burada karar sürecinde olan yatırımcı ilk yıl tahvillerin getirisini şu an gözlemleyebilir, buna karşın b alternatifinde almayı düşündüğü ikinci yıldaki bir yıllık tahvillerin getirisini ise bu noktada bilemez ancak bu gelecek getiriyi tahmin edebilir. İkinci yıl almayı düşündüğü bir yıllık tahvillerin getirisini %7 (yıllık) olarak tahmin ettiğini varsayalım. Beklentiler hipotezine göre a ve b alternatifleri arasında beklenen getiri olarak bir fark olmaması gerekir.

Formül olarak $[(G1 + E(G1))/2] = G2$ eşitliğinin sağlanması gerekir.

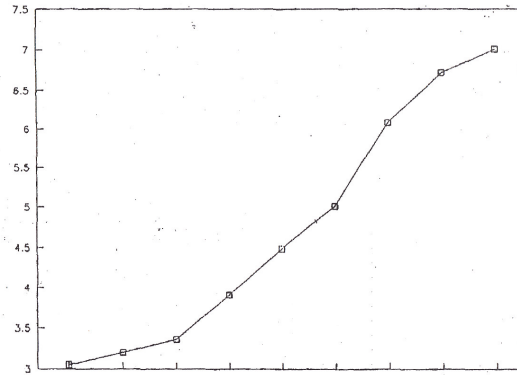
Burada $G1$ ilk yılın bir yıllık tahvilin getirisini, $E(G1)$ ikinci yılda bir yıllık tahvil getirilerinin ne olacağı hakkındaki yatırımcı beklentisini, $G2$ ise iki yıllık tahvillerin yıllık getirisini gösterir.

Beklentiler hipotezine dayanılarak bulunan gelecek yılların faiz getirisi oranlarına, piyasanın öngördüğü gelecek faizler (implicit forward rates) diyoruz. Örneğimizde %7 ve %12 piyasanın sırasıyla bir ve iki yıl sonrası için öngördüğü gelecek yıllık faiz oranlarıdır. Şu halde beklentiler hipotezi bize getiri eğrisini geleceğe dönük faiz haddi beklentilerini yansıtan bir araç olarak kullanma olanağını getirir. Gelecekte beklenen yıllık faiz hadleri bugünkü faizlerden daha yüksekse, bu getiri eğrisinin artan vadelerle birlikte artmasını ve yukarıya doğru ivmelenen bir görüntü almasını sağlar. Bu da piyasa beklentilerinin gelecekte faiz hadlerinin artması yolunda olduğunu gösterir. Yatay eksene paralel düz bir çizgi halindeki bir getiri eğrisi ise bize piyasanın gelecekle ilgili beklentilerinin faiz hadlerinin değişmeyeceği yolunda olduğunu gösterir. Artan vadelerle birlikte azalan ve aşağıya eğimli bir getiri eğrisi ise, piyasanın faiz hadlerinin düşeceğini beklediğini gösterir.

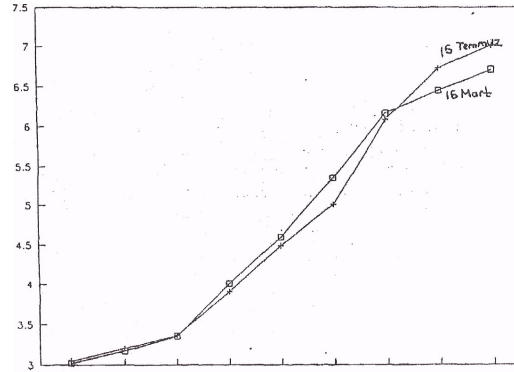
Faiz hadlerinin genellikle iniş çıkışlı olduğunu biliyoruz buna karşın piyasada gözlenen getiri eğrileri genellikle yukarıya doğru eğimlidir. Bu durumda ya piyasa beklentileri sık sık yanılmaktadır, yada atladığımız bir nokta vardır. Likidite hipotezi (liquidity hypothesis) atladığımız noktanın bonolardaki likidite yani bonoyu kolaylıkla paraya çevirebilme özelliği olduğunu söyler. Bu hipotez beklentiler hipotezini kabul eder ancak orijinal beklentiler hipotezinin eksik olduğunu belirtir. Likidite hipotezine göre daha kısa vadeli tahviller uzun vadeli tahvillerden önce paraya çevrilecekleri için bir avantaj taşırlar. Bu durumda da daha uzun vadeli tahvillerin kısa vadeli tahvillerin likidite avantajını karşılamak için yatırımcılara daha yüksek bir getiri sağlaması gerekir. Dolayısıyla piyasa bugüne göre gelecekte faiz hadlerinin değişmeyeceğini düşünse dahi getiri eğrisi likidite unsuru dolayısıyla yukarıya eğimli olacaktır, bu da niye gözlenen getiri eğrilerinin genellikle yukarı doğru eğimli olduğunu gösterir. Piyasanın gerçek beklentilerini görmek için uzun vadeli tahvil getirilerinden likidite unsurunu yada primini (liquidity premium) çıkarmak gerekir. Bir diğer alternatif hipotez olan ayrılmış piyasa (market segmentation hypothesis) da getiri eğrisinin bazen aldığı özel bir şekilden kaynaklanır. Getiri eğrisi bazı durumlarda orta vadelerde bir tepe yapar ve bu orta vadeli bono getirilerinin gerek daha kısa, gerekse daha uzun vadeli bonolardan fazla olduğunu gösterir. Piyasa ayrışım hipotezi, beklentiler hipotezinin bu olguyu açıklayamadığı öngörüsüne dayanarak alternatif bir öneri geliştirir. Bu öneriye göre değişik vadeli tahvillerin piyasaları birbirlerine beklentiler hipotezinin öngördüğü ölçüde bağlı değildir. Gerçekte her tahvilin piyasasını diğerlerinden bağımsız ve kendine özgü arz ve talep koşulları olan piyasalar olarak kabul edebiliriz. Bu durumda da orta vadeli tahvillerin zaman zaman diğer vadelerden daha fazla getiri sağlaması şaşırtıcı olmaktan çıkar, o dönemde bu piyasalardaki arz talep yapısına bağlı bir olgu olarak kolaylıkla açıklanabilir.

Bu teorik önerileri şimdi gerçek hayattan bir örnekle tamamlayabiliriz. Örneğimizde 16 Mart ve 15 Temmuz 1993 tarihlerinde A.B.D bono ve tahvil piyasalarında geçerli olan getiri eğrilerini ele aldım. Getiri eğrileri Wall Street Journal'dan 3,6 ay ve 1 yıl vadeli T-Bill getirileri ile 2, 3, 5, 10, 15 ve 20 yıl vadeli tahvil getirileri bulunarak çizilmiştir. Getiriler tespit edilirken 16 Mart (veya 15 Temmuz) tarihinden üç ay, altı ay, v.s. sonra vadesi dolacak bono veya tahviller seçilerek bu araçların vade sonuna getirileri hesaplanmıştır. 15 Temmuz 1993 tarihli getiri eğrisi Şekil 4.1'de verilmiştir.

Zaman içinde bir karşılaştırma yapabilmek amacıyla 16 Mart ve 15 Temmuz tarihli getiri eğrilerini aynı diyagrama koyarak Şekil 4.2'de gösterelim.



Şekil 4.1 A.B.D faiz oranları getiri eğrisi (15 Temmuz 1993)



Şekil 4.2 A.B.D faiz oranlarının getiri eğrisi (16 Mart ve 15 Temmuz 1993)

4.8.4 Tahvil Teslim Koşulları

T-Bond piyasasında daha önce değinildiği gibi kontrat süresi sonunda 100.000 dolar nominal değere sahip 15 yıl ve daha uzun vadeli A.B.D devlet tahvilleri futures yükümlülüğü gereğince teslim edilir.

Tahvil fiyatlamasının esasları değişik vade ve kupon ödemelerine sahip olan tahvillerin ikinci el piyasasında farklı piyasa fiyatlarına sahip olacağını gösterir. Bir tahvilin vade sonuna getirisi, tahvil denkleminin sol tarafına piyasa fiyatını, denklemin sağ tarafına ise kupon ve ana para ödemelerini koyduğumuzda, iki tarafın eşit olmasını sağlayan iskonto oranıdır. Bir yanda (denklemin sağ tarafında) değişik kupon ödemeleri ve vade süreleri, sol tarafta ise değişik piyasa fiyatları söz konusu olduğuna göre teslim koşullarına uyan tahvillerin vade sonuna getirileri birbirinden farklı olabilir.

Teslim fiyatı en ucuz tahvil nasıl seçilir? Eğer piyasadaki getiri eğrisi düz yani yatay eksene paralel ise bu görece olarak kolay bir iştir. Eğer getiri eğrisi %8 getiri oranını üstünde bir oranda düz ise (örneğin tüm vadeler için %9 değerinde ise), bu durumda teslim fiyatı en ucuz tahviller en uzun süreye sahip tahvillerdir. Buna karşın getiri eğrisi %8 oranının altında yatay ise, teslim fiyatı en ucuz tahviller süreleri en kısa olan tahvillerdir. Ancak getiri eğrisi genellikle olduğu gibi yukarı veya aşağıya doğru eğimli ise o zaman işimiz daha zorlaşır. Bu durumlarda teslim edilebilir tüm tahvillerin teorik futures fiyatlarını hesaplamamız ve bunların içinden en ucuz teorik futures değerine sahip tahvili teslim için seçmemiz gerekir.

4.8.5 T-Bond Futures Fiyatlaması

Bu bölümde T-Bond futures kontratlarının piyasada nasıl fiyatlandırıldığını, başka bir deyişle teorik futures fiyatını inceleyeceğiz. T-Bond futures kontratlarının fiyatlaması daha önce mal piyasaları konusunda gördüğümüz fiyatlama mantığına dayanır. Yani futures fiyatı futures kontratına konu olan spot aracın (T-Bond) fiyatına bu aracı kontrat ayı sonuna dek taşımanın maliyeti eklenerek bulunur. Şu halde T-Bond futures kontratlarında da $F=S+CC$ formülü geçerlidir. Ancak T-Bond'ların kendine özgü nitelikleri dolayısıyla uygulamada farklı yaklaşımlar söz konusudur.

Futures kontratının süre bitiminde aynı fiyata sahip olduğu spot T-Bond, teslim fiyatı en ucuz olan T-bond'dur. Bu tahvilin %10 yıllık kupon getirili ve 20 yıl kalan vadeli bir tahvil olduğunu varsayalım. Bu tahvilin şu anki (kontrat süresi bitimindeki) fiyatı $B(T)$ şeklinde gösterilsin. Diyelim ki Haziranın 21'inde yani Haziran kontratlarının işlem gördüğü en son günde teslim fiyatı diğerlerine göre daha ucuz olan bu tahvilin piyasa fiyatı 10.516/32 olarak

kote edilsin. Ancak bu fiyat da futures fiyatı olmayacaktır. Çünkü bizi ilgilendiren bu tahvilin şu anki piyasa fiyatından ziyade takas odasının teslimde bu tahvile hangi fiyatı biçtiğidir. Bunu bulmak için teslim fiyatı en ucuz olan tahvilin piyasa fiyatını faktör değeri ile bölmek yeterli olacaktır. Futures kontratının kapanış günündeki değeri formül olarak

$$P(F)=B(T)/F$$

olacaktır. Burada P(F) kapanış günündeki teorik futures fiyatını (T-bondlar için), F ise teslimi en ucuz olan tahvilin tabloya göre faktör değerini gösterir. Örneğimizde futures kontratının kapanış günü fiyatı $105,5/1,1979=88,07$ olacaktır. Açıktır ki 1,1979 yıllık %10 kupon getirili ve 20 yıl vadeli bir tahvilin tablodaki faktör değeridir. Futures kotasyonlarına baktığımızda kapanış gününün futures fiyatı olarak $(100.000 \cdot 0,08) + (100.000 \cdot 0,01 \cdot 7/32) = 88.218$ değerini görmemiz gerekir. Başka bir deyişle son işlem gününün settle fiyatı olarak 88-7 şeklinde standart bir kotasyon görmeyi umabiliriz. Görüldüğü gibi kapanış anındaki kotasyonlar 100'den farklı olabilir. Teslim fiyatı en ucuz tahvillerin piyasa fiyatına ve faktör değerine bağlı olarak kapanış anında 100'ün altında veya üstünde bir kotasyon görebiliriz. .

Şimdi de aynı kontratı kapanış anında değil de kontrat süresinin bitiminden önceki bir günde fiyatlamaya çalışalım. Diyelim ki T-Bond Haziran futures kontratını 6 Mayıs günü fiyatlamaya çalışıyoruz. Bu durumda kapanış günü (21 Haziran) yerine 6 Mayıs tarihindeki spot bir T-Bond fiyatını esas almamız gerekir (futures kontratını 6 Mayıs tarihinde fiyatlamaya çalıştığımıza göre). Kapanış fiyatı örneğinde olduğu gibi gene teslim fiyatı en ucuz olan bir tahvili seçmemiz gerekir. Bu tahvilin gene aynı tahvil (20 yıl vadeli ve %10 yıllık kupon getirili tahvil) olduğunu varsayalım. Normal piyasa şartlarında ve birkaç aylık kısa sürelerde teslimi en ucuz tahvilin değişmemesi gerekir. Seçtiğimiz tahvilin fiyatını (6 Mayıs tarihli fiyatı) B(t) olarak gösterelim ve 6 Mayıs tarihinde bu tahvilin piyasa fiyatının $104 \cdot 24/32$ olduğunu varsayalım. Kapanış fiyatı örneğine göre bir fark, bu tahvilin 6 Mayıs'tan 21 Haziran'a dek taşıma maliyetini bu kez hesaba katmamız gereğidir. Futures piyasasında işlem yapmak yerine şu an spot piyasada tahvil satın alan kişinin katlandığı maliyet, bu tahvile bağladığı miktar kadar bir paranın faiz gelirinden vazgeçmesidir. Şu anki tahvil spot fiyatı B(t) olduğuna göre, ayrıca tahvili satın alırken o ana kadar toplanmış kupon faizi gelirini de (bunu A diye gösterelim) tahvili satın alana ödemesi gerektiğine göre bu kişi tahvil almakla B(t)+A kadar bir parayı tahvile bağlamış olmaktadır. Bu paranın 6 Mayıs'tan 21 Haziran'a dek sağlayacağı faiz geliri ise $(B(t)+A) \cdot (((T-t)/360) \cdot R)$ olacaktır. Burada (T-t) kontrat süresinin bitimine kalan gün sayısını, R ise piyasadaki geçerli bir faiz haddini örneğin repo faizini göstermektedir. Buna karşın futures kontratı yerine spot piyasada tahvil satın

almayı (6 Mayıs'ta) ve böylece kendini fiyat değişikliklerine karşı korumayı seçen kişinin futures kontratıyla hedge yapan kişiye göre bir avantajı olacaktır. O da bu şahsın elinde tuttuğu tahvilden sağlayacağı kupon faizi geliridir. Bu geliri $C \cdot ((T-t)/365)$ olarak gösterebiliriz, burada $(T-t)/365$ vadeye kalan gün süresini, C ise yıllık kupon faizi gelirini göstermektedir. Tahvil taşımanın net maliyetini bulmak için bu ikinci terimi (kupon gelirini) ilk bulduğumuz maliyet teriminden çıkartmak gerekir. Ayrıca biz piyasadaki gerçek taşıma maliyetinden ziyade takas odası hesaplarına göre belirlenen taşıma maliyeti ile ilgili olduğumuz için, bulduğumuz taşıma maliyetinin teslim fiyatı en ucuz tahvilin faktör değerine de bölmemiz gerekir. Tüm bu işlemleri bir formül halinde toparlarsak $T-t$ gün kadar vadesi kalan teslim fiyatı en ucuz tahvilin taşıma maliyeti olarak

$$CC = 1/F[(B(t)+A) \cdot (R \cdot (T-t)/360) - (C \cdot (T-t)/365)]$$

ifadesini verebiliriz. Burada F teslim fiyatı en ucuz olan tahvilin faktör değeridir.

Tahvillerde uygunluk getirisi (convenience yield) genellikle söz konusu değildir. Çünkü tahvillerde teslim edilen malı (tahvil) bulmada herhangi bir an bir problem veya sıkışıklık pek rastlanan bir durum değildir. Dolayısıyla $F-S=B=CC$ olacağı için bulduğumuz taşıma maliyeti aynı zamanda bize bazı verir. Tahvillerde de mal piyasalarında olduğu gibi kontratın kapanış günü baz değerinin 0 olduğudur. Kontratın son günü futures kontratı üstüne yazıldığı spot enstrümanla (tahvil) aynı şey haline gelir, sonuç olarak da taşıma maliyeti ve baz son gün 0 değerini alır. Buna karşı mal piyasalarında geçerli olan bazın çoğunlukla ve normal olarak pozitif olması ve kontrat gününe gidildikçe 0 değerlerine yaklaşması önerisini tahvil piyasalarında söylememiz daha zordur. Formülde de açıkça görüldüğü gibi taşıma maliyetinin dolayısıyla bazın değerini yıllık borçlanma (repo) faizi ile teslimi en ucuz tahvilin yıllık kupon getirisi arasındaki ilişki belirleyecektir. Eğer repo faizi kupon getirisinden fazla ise baz pozitif, aksi halde ise baz negatif olacaktır. Sonuç olarak T-Bond futures kontratlarında bazın değeri ve işareti, teslimi en ucuz tahvilin kupon getirisine ve faiz hadleri arasındaki ilişkilere bağlı olarak değişebilir.

Kontrat süresinden önceki bir tarihte T-Bond futures fiyatlanmasını tamamlamak için tahvil taşıma maliyetini CC olarak göstererek $Fut(t)=B(t)/F+CC$ formülünü kullanmamız yeterli olacaktır. Burada $Fut(t)$ futures fiyatını (t anında), $B(t)$ teslimi en ucuz olan tahvilin t anındaki piyasa fiyatını, F bu tahvilin faktör değerini göstermektedir.

4.8.6 T-Bill ve Eurodolar Futures Fiyatlanması

T-Bill futures kontratı 1.000.000 dolar par değere sahip 3 aylık T-Bill’lerin kontrat süresi bitiminde teslimini gerektirir.

Kontrat süresinin bitiminden daha önceki bir t gününde teorik T-Bill futures fiyatını belirlemek için $Fut(t)=T(t)+T(t) \cdot (R-D) \cdot (T-t)/360$ formülünü kullanabilirdik. Burada $Fut(t)$ teorik T-Bill futures fiyatını (t gününde), $T(t)$ üç aylık T-Bill’lerin t anındaki spot piyasa fiyatını, R repo faizini, D ifadesi T-Bill faiz getirisini, $T-t$ ise kontrat bitişine kadar kalan gün sayısını göstermektedir. Burada $(R-D) \cdot (D-d)/360$ gene taşıma maliyetini gösterir. Ancak T-Bill’ler kupon faizi vermediği için burada D ’de sıfıra eşittir. Ve taşıma maliyeti $R \cdot (T-t)/360$ ’dan ibarettir.

Bir de Eurodolar futures fiyatlamasına bakalım. Eurodolar futures fiyatlarını fiyatlarırken de, T-Bill futures kontratlarını fiyatlarırken kullanılan formülü uygulamayı deneyebiliriz. Ancak burada bir sorun vardır. T-Bill’ler güçlü bir ikinci el piyasasına sahip olduğu için formülde kullanılan spot T-Bill fiyatını belirlemekte pek bir sorun çıkmaz. Buna karşın Eurodolar bir mevduat hesabı olduğu için T-Bill gibi bir ikinci el piyasası yoktur. Dolayısıyla spot Eurodolar değerini bir t anında belirlemekte zorlukla karşılaşabiliriz. Bu açıdan Eurodolar futures fiyatlamasında alternatif bir yaklaşım kullanabiliriz. Bu yaklaşım T-Bill futures fiyatlamasında da kullanılabilir ve normal olarak formüle aynı sonuçları vermesi gerekir. Alternatif yaklaşım gene arbitraj mantığına dayanır.

$$\text{T-Bill formülü iskonto getirisi} = \left(\frac{F-D}{F} \right) \cdot \frac{360}{91}$$

şeklindedir. Burada F par değeri, D ise iskonto oranını vermektedir.

5. FUTURES PİYASALARINDA RİSK KORUMASI (HEDGING)

Futures piyasalarının ana işlevi risk korunmasıdır. Bu açıdan risk korunmasının (hedging) futures kontratları yolu ile nasıl yapıldığı özel önem taşıyan bir konudur. Hedging'in önemini bir örnekle açıklayalım. Bir kuyumcu yaptığı üretim planı gereğince Haziran sonunda 500 ons altına gereksinim duymaktadır. Şu an yani 15 Mart 1993'de spot altın fiyatı ons başına 328,81 dolardır. Bir alternatif hiç bir şey yapmadan Haziranı beklemektedir. Ancak bu alternatif gerçek sayılara dayanan örneğimizde kuyumcu için çok pahalı bir alternatif olacaktır. Çünkü altın fiyatları Mart 93'den başlayarak büyük bir patlama gösterdi ve Haziran 24'de 375,19 dolara (ons başına) yükseldi. Kuyumcunun üretim planlarını 15 Marttaki spot fiyata göre yani 328,81 dolara göre yaptığını varsayarsak bu durumda bütün planların alt üst olduğunu görebiliriz. Altın fiyatlarındaki patlama sonucu 328,81 dolardan planladığı altın alımını ons başına 375,19 dolardan yapmak zorunda kalacak ve ons başına $(375,81 - 328,81 = 46,38)$ dolar relatif zarara veya toplam olarak $500 \cdot 46,38 = 23.190$ dolarlık relatif zarara katlanmak zorunda kalacaktı. Bu denli bir farkın tüm hesapları alt üst edeceği açıktır. Buna karşın kuyumcumuz futures piyasaları ve bu piyasaların risk korunması için sağladığı olanakları bilseydi, 15 Mart 1993'de futures piyasalarında pozisyon alacaktı.

15 Mart 1993'de Haziran futures kontratları ons başına 330,6 dolardan (settle fiyatı) satıyordu. Kuyumcumuz Haziran ayında 500 ons altına ihtiyaç duyduğu için 5 adet Haziran futures kontratını satın alacaktı. 24 Haziran 1993'de ise Haziran kontratları ons başına 375,1 dolardan satılıyordu. Kuyumcunun bu durumda 24 Haziran'da iki alternatifi vardı. Birinci alternatif Haziran'da mal teslimi için takas odasına emir vererek 500 ons altını 330,6 dolardan (ons başına) almaktı. Açıktır ki bu durumda ihtiyaç duyduğu 500 ons altın 375 dolar seviyesine çıkan spot piyasa yerine 330,6 dolardan teslim aldığı için kendini büyük oranda korumuş veya teknik deyişle hedge etmiş olacaktı. Futures piyasalarının sağladığı hedging potansiyeli, üretim planlarının da planlandığı gibi yürümesini sağlayacaktır. Kuyumcunun ikinci alternatifi ise, mal teslimi ile ilgili formalitelere girmeden, elindeki futures kontratlarını 24 Haziran'da o günkü futures fiyatı olan 375,1 dolardan satmak ve ihtiyacı olan altını gene spot piyasadan onsu 375,19 dolardan (24 Haziran fiyatı) satın almaktı. Şimdi bu alternatifi inceleyelim.

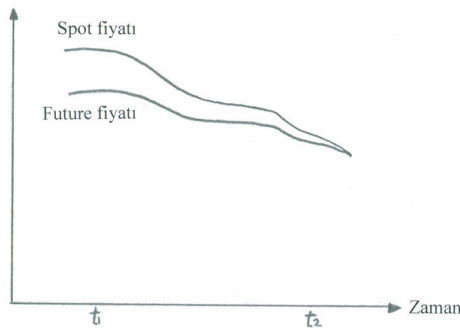
15 Mart 1993: Kuyumcu Haziran sonunda 500 ons altına ihtiyaç duymaktadır. Şu anki spot fiyat 328,81 dolardır. Haziran futures kontratı ise onsu 330,6 dolardan satılmaktadır. Kuyumcu bu fiyattan 5 adet altın kontratı satın alır.

24 Haziran 1993: Piyasada altın spot fiyatı 375,19 dolara çıkmıştır. Kuyumcu 15 Mart'a göre spot altını ons başına 46,38 dolar yada toplam olarak 500 ons altın için fazladan 23.190 dolar ödeyerek satın almaktadır. Toplam relatif kaybı 23.190 dolardır. Buna karşın 24 Haziran'da 5 adet altın kontratı onsu 375,1 dolardan satmaktadır. Futures piyasasında toplam kârı ons başına $375,1 - 330,6 = 44,5$ dolar veya toplam olarak 22.250 dolardır. Spot piyasadaki relatif kaybının büyük bölümünü yada daha net söylersek $22.250 / 23.190 = \%95,9$ 'luk kısmını futures piyasasındaki kârı ile kapatmaktadır. Biz buna teknik olarak bu kuyumcunun futures işlemleri sayesinde pozisyonunu $\%95,6$ oranında hedge etmesi diyoruz. Bu hedge'nin niye $\%100$ olmadığına ise birazdan değineceğiz. Daha önce de belirttiğimiz gibi futures kontratları çoğunlukla ters pozisyon alınarak ve mal teslimine gidilmeden kapatılır. Bu açıdan hedging yapmanın futures piyasalarındaki normal yolu, ikinci alternatif yani malı spot piyasadan alıp buradaki relatif zararı futures kontratı alıp satarak karşılamaktır.

Korunma stratejilerindeki önemli bir kavram da temel (baz) risktir. Temel (baz) risk aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Temel (baz) risk = Korunacak varlığın spot fiyatı-kullanılan sözleşmenin futures fiyatı

Eğer spot fiyat futures fiyatından daha fazla artarsa baz artar. Buna bazın gerilmesi denir. Eğer spot fiyat futures fiyattan daha az artıyorsa, baz azalır. Buna da bazın zayıflaması denir. Şekil 5.1'de bazın zamanla nasıl değişebileceğinin gösterimi vardır.



Şekil 5.1 Bazın zamanla değişimi

Temel (baz) riskin tabiatını inceleyebilmek için aşağıdaki notasyonu kullanacağız.

S_1 = t_1 zamanındaki spot fiyat.

S_2 = t_2 zamanındaki spot fiyat.

F_1 = t_1 zamanındaki futures fiyatı.

F_2 =: t_2 zamanındaki futures fiyatı.

b_1 =: t_1 zamanındaki baz.

b_2 =: t_2 zamanındaki baz.

a) Korunmanın t_1 zamanında başlayıp, t_2 zamanında bittiğini kabul edeceğiz. Bazın tanımından

$$b_1 = S_1 - F_1$$

$$b_2 = S_2 - F_2$$

dir.

Bir korunmacının, önce varlığın t_2 zamanında satılacağı ve t_1 zamanında futures pozisyonu alınacağını göz önüne alalım. Bu durumda varlık için gerçekleşen fiyat S_2 ve futures pozisyonundaki kar $F_1 - F_2$ dir. Buna göre varlık için elde edilen efektif fiyat $S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$ dir.

Eğer b_2 değeri t_1 zamanında bilinseydi tam bir korunma elde edilecekti. Korunmadaki korunma riski b_2 değerinin belirsizliğinden ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden b_2 ye baz riski adı verilir.

b) Şimdi varlığın t_2 zamanında satın alınacağını ve t_1 zamanında da bir korunmanın başlatılacağını düşünelim. Varlık için ödenen fiyat; S_2 olup, korunmadaki kayıp $F_1 - F_2$ dir. Buna göre korunmada ödenen efektif fiyat $S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$ dir. F_1 değeri, t_1 zamanında bilinmekte ve b_2 değeri baz riskini göstermektedir.

Korunma yoluyla bir firmanın bir varlık için ödediği (veya aldığı) fiyatın $S_2 + F_1 - F_2$ oluşunu garanti etmektedir.

S_2^* =: Futures kontratı sözleşmesindeki varlığın t_2 zamanındaki değerini gösterebilir.

Daha önce de söylediğimiz gibi;

S_2 =: Korunan varlığın t_2 zamanındaki fiyatıdır.

$$\text{Buradan firmanın garanti ettiği değeri } S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

olarak yazabiliriz. Buradaki $(S_2^* - F_2)$ ve $(S_2 - S_2^*)$ terimleri bazın iki bileşenini göstermektedir.

Baz riskine tesir eden temel bir faktör korunma için futures sözleşmesinin seçilmesidir. Bu seçimin iki bileşeni vardır.

- a) Futures sözleşmesinde söz konusu varlığın seçimi
- b) Teslimat ayının seçimi

5.1 Korunma Oranının Minimum Varyansı

Korunma oranı, futures sözleşmesinde alınan pozisyonun büyüklüğünün maruz kalınan büyüklüğüne oranıdır. Şimdi aşağıdaki notasyonu kullanalım;

ΔS =: S spot fiyatındaki değişme (korunma süresine eşit olan zaman periyodu içinde).

ΔF =: F futures fiyatındaki değişme (korunma süresine eşit olan zaman periyodu içinde).

σ_S =: ΔS 'nin standart sapması.

σ_F =: ΔF 'nin standart sapması.

ρ =: ΔS ve ΔF arasındaki korelasyon katsayısı.

h^* =: Korunmacının pozisyonunun varyansını minimize eden korunma oranı.

Teorem 5.1: Yukarıdaki gösterişler altında

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

dir.

İspat : t_2 zamanında N_A birim varlığı satacağımızı farz edelim ve t_1 zamanında aynı varlığın N_F birimi üzerine futures sözleşmesi yapalım. Buna göre korunma oranı

$$h = \frac{N_F}{N_A}$$

dır. Korunma dolayısıyla varlık üzerine gerçekleşen toplam miktar Y olsun.

$$Y = S_2 N_A - (F_2 - F_1) N_F$$

veya

$$Y = S_1 N_A + (S_2 - S_1) N_A - (F_2 - F_1) N_F$$

$$Y = S_1 N_A + N_A (\Delta S - h \cdot \Delta F) \tag{5.1}$$

Burada,

$$\Delta S = S_2 - S_1$$

$$\Delta F = F_2 - F_1$$

dir.

$(\Delta S - h \cdot \Delta F)$ ifadesinin varyansı minimize edilirse, t_1 zamanında S_1 ve N_A bilindiğinden (5.1) eşitliğindeki Y 'nin varyansı da minimize olur.

$$(\Delta S - h \cdot \Delta F) \text{ 'in varyansı şuna eşittir: } \sigma_S^2 + h^2 \sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F$$

Bu varyansı şu şekilde de yazabiliriz :

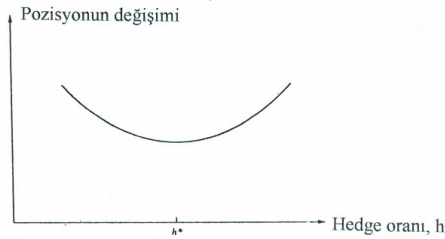
$$(h\sigma_F - \rho\sigma_S)^2 + \sigma_S^2 - \rho^2\sigma_S^2$$

Buradaki ikinci ve üçüncü terimler h 'yı ihtiva etmezler. Dolayısıyla yukarıdaki ifadenin minimum olması için $(h\sigma_F - \rho\sigma_S)^2 = 0$ gerekir. Yani

$$h = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

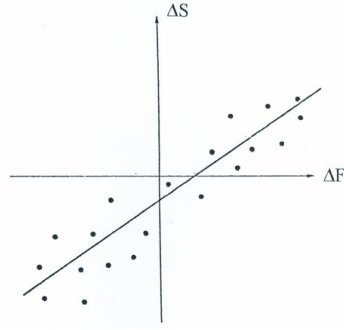
dir.

Korunmacının pozisyonunun değerinin varyansının korunma oranına nasıl bağlı olduğu Şekil 5.2'de gösterilmektedir.



Şekil 5.2 Pozisyonun hedge oranına bağlı değişimi

Eğer $\rho = 1$ ve $\sigma_F = \sigma_S$ ise korunma oranı $h^* = 1,0$ dir. Bu beklenen bir sonuçtur. Çünkü bu durumda futures fiyatları spot fiyatı tam olarak yansıtırlar. Eğer $\rho = 1$ ve $\sigma_F = 2\sigma_S$ ise $h^* = 0,5$ dir. Bu sonuç da beklenmektedir. Çünkü bu durumda futures fiyatları daima spot fiyatın iki katı kadar değişmektedir. h^* , ΔS ile ΔF arasındaki lineer regresyon doğrusunun eğimidir.



Şekil 5.3 Future fiyatının spot fiyata bağlı değişiminin regresyonu

Örnek 5.1: h^* 'ın hesaplanmasını Çizelge 5.1'de verilen data ile uygulayabiliriz. Korunma süresini bir ay kabul edelim. Buna göre ΔF ve ΔS , F ve S 'nin arka arkaya gelen bir aylık periyotlardaki değişimlerini ölçmektedir.

$$\sum x_i = -0,013 \quad \sum x_i^2 = 0,0138 \quad \sum y_i = 0,003 \quad \sum y_i^2 = 0,0097 \quad \sum x_i y_i = 0,0107$$

Çizelge 5.1 Korunma oranının minimum varyansını hesaplamak için veriler

Ay i	$\Delta F = x_i$	$\Delta S = y_i$
1	0,021	0,029
2	0,035	0,020
3	- 0,046	- 0,044
4	0,001	0,008
5	0,044	0,026
6	- 0,029	- 0,019
7	- 0,026	- 0,010
8	- 0,029	- 0,007
9	0,048	0,043
10	- 0,006	0,011
11	- 0,036	- 0,036
12	- 0,011	-0,018
13	0,019	0,009
14	- 0,027	- 0,032
15	0,029	0,023

İstatistiğin standart formülleri, bazı tahminleri şöyle verir:

σ_F 'nin tahmini:

$$\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n-1} - \frac{(\sum x_i)^2}{n(n-1)}} = 0,0313$$

σ_S 'nin tahmini:

$$\sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n-1} - \frac{(\sum y_i)^2}{n(n-1)}} = 0,0263$$

ρ 'nin tahmini:

$$\frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right] \left[n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 \right]}} = 0,928$$

O halde,

$$h^* = 0,928 \cdot \frac{0,0263}{0,0313} = 0,78 \text{ dir.}$$

Buna göre futures sözleşmeleri (satılan veya satın alınan) korunacak varlığın nominal değerinin %78'ini ya satın alacaktır yada satacaktır.

5.2 Sözleşmenin Optimal Sayısı

Aşağıdaki notasyonu kullanacağız.

N_A =: Korunan pozisyonun büyüklüğü.

Q_F =: Bir futures sözleşmesinin büyüklüğü.

N^* =: Korunma için yapılacak futures sözleşmelerinin optimal sayısı.

$h^* \cdot N_A$ =: Kullanılan futures sözleşmelerinin nominal değeridir.

Bunun için gerekli olan sözleşme sayısı

$$N^* = \frac{h^* \cdot N_A}{Q_F} \text{ dir.}$$

6. OPSİYON SÖZLEŞMELERİ

6.1 Vadeli İşlem Opsiyon (Options) Sözleşmeleri

Opsiyon sözleşmeleri iki taraf arasında yapılır. Esas olarak iki çeşit opsiyon sözleşmesi yapılır. Birinci tipte, sözleşmeyi alan tarafa belirli bir kıymeti, ileride belirli bir tarihte, belirli bir fiyattan satın alma hakkını verir. Buna “call option” denir. Diğer tipte ise sözleşmeyi alan tarafa belirli bir kıymeti, ilerideki belirli bir tarihte, belirli bir fiyattan satma hakkını verir. Buna “put option” denir.

Opsiyon sözleşmeleri alıcı olan tarafa bir hak sağlamakta, buna karşılık satıcı tarafı ise yükümlülük altına sokmaktadır. Opsiyon sözleşmesini satın alan taraf, sözleşmede belirlenen hakkı satın alırken karşı tarafa bir prim öder. Buna “opsiyon primi” denir. Opsiyon primi tıpkı bir sigorta primi gibidir. Arabasını kazaya karşı sigortalayan bir kişi bir kasko sigortası satın alır ve buna karşılık bir prim öder. Burada sözleşmenin alıcı tarafı araba sahibi, satıcı tarafı ise sigorta şirketidir. Alıcı taraf karşı tarafa sigorta öder.

Satıcı taraf da, sözleşmenin şartları yerine geldiğinde yükümlülüğünü yerine getirir. Sözleşmeyi alan taraf opsiyon primi ödemesine karşı takas banka herhangi bir teminat yatırmaz. Alan tarafın hesabına, sözleşmede pozisyonunu koruduğu sürece herhangi bir nakit akışı olmaz. Buna mukabil, opsiyon sözleşmesini satan tarafa, takas merkezi tarafından zaman zaman teminat yatırması için çağrı yapılır. Bu, satıcı tarafın sözleşme bitiminde üstlendiği yükümlülüğü yerine getirmemesi halinde alıcı taraf için ortaya çıkacak olan riski karşılamak içindir.

Opsiyon sözleşmeleri iki tip olarak yapılır. Birisi Avrupa tipi opsiyon diğeri Amerika tipi opsiyondur. Avrupa tipi opsiyonlarda sözleşme konusu olan hak yalnız sözleşmenin bitiş tarihinde kullanılır. Amerika tipi opsiyonlarda ise sözleşme konusu olan hak vade sonuna kadar herhangi bir tarihte kullanılır.

Opsiyon sözleşmelerinin konusu finansal ürünler olduğu gibi mal ve eşya da olabilir. Örneğin hisse senedi, borsa endeksleri, tahviller, döviz, arpa, buğday, altın v.s. opsiyon sözleşmelerine konu olabilir.

Opsiyon sözleşmelerinde sözleşmenin bitim tarihi belirtilmelidir. Bu tarihte sözleşmede ön görülen haklar ve yükümlülükler yerine getirilir. Sözleşmenin bitim tarihine vade sonu (expiration date, maturity date) denir.

Opsiyon sözleşmelerinde opsiyonun sağladığı hakkın kullanılacağı fiyat belirlidir. Buna (exercise price, strike price) denir.

Opsiyon sözleşmesini satın alan tarafın vade sonuna kadar uygulayabileceği üç türlü strateji imkânı vardır:

- a) Almış olduğu opsiyonu satabilir.
- b) Opsiyon hakkını vade bitiminde kullanabilir.
- c) Kullanma süresi dolana kadar bekler ve hakkını kullanmaz. Bu durumda daha önce karşı tarafa verdiği opsiyon primi kadar zarar eder.

Opsiyon satan tarafın da üç alternatifi vardır:

- a) Satmış olduğu opsiyon sözleşmesini tekrar geri satın alabilir. Bu şekilde pozisyonu kapamış olur.
- b) Opsiyon sattığı taraf hakkını kullanmak isteyince ona karşı olan yükümlülüklerini yerine getirir.
- c) Kullanım süresi dolana kadar opsiyon alan taraf satın alma hakkını kullanmazsa aldığı opsiyon primi kadar kâra geçer.

Opsiyon piyasalarında 4 çeşit temel pozisyon vardır.

- a) Satın alım hakkı opsiyonunun satın alınması (Long call)
- b) Satın alım hakkı opsiyonunun satılması (Short call)
- c) Satım hakkı opsiyonunun satın alınması (Long put)
- d) Satım hakkı opsiyonunun satılması (Short put)

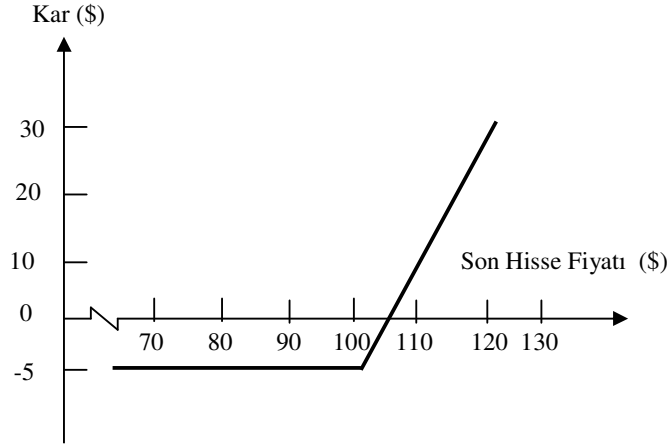
Örnek 6.1: Bir yatırımcı 100 IBM hissesini kullanım fiyatı 100\$ dan satın almak için bir Avrupa call opsiyonu satın alsın. Opsiyonun vade bitimi 4 ay sonra olsun ve opsiyon primi 5\$ olsun.

Yatırımcının başta ödeyeceği opsiyon primi $5 \cdot 100 = 500\$$ dır.

Avrupa tipi olduğundan ancak vade bitiminde işlem yapılabilir. Eğer 4 ay sonra, IBM in hisselerinin spot piyasadaki değeri 100\$'dan az ise, haliyle satın alan taraf sözleşmedeki hakkını kullanmayacaktır. Bu taktirde yatırımcının, başta ödediği 500\$ kaybı olacaktır. Eğer IBM hisselerinin spot piyasadaki fiyatı 4 ay sonra 100\$'dan fazla ise satın alan taraf sözleşmedeki hakkını kullanacaktır. Örneğin IBM hisselerinin vade sonundaki fiyatı 115\$ ise satın alan taraf $100 \cdot 100 = 10.000\$$ ödeyerek karşı taraftan 100 hisse alır ve eğer aynı gün hisseleri satabilirse $100 \cdot 115 = 11.500\$$ eline geçer. Bu işten kârı

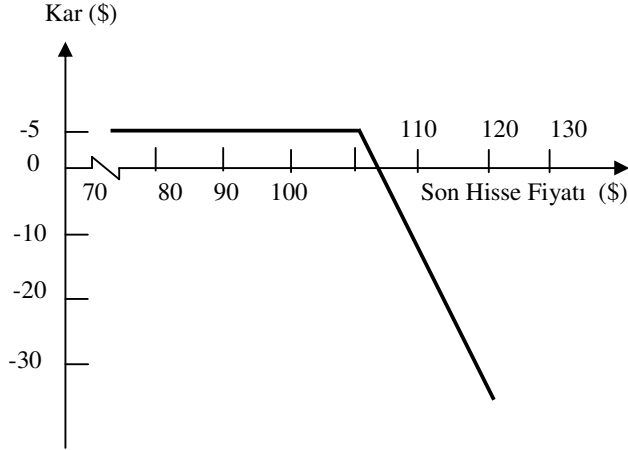
$11.500 - 10.000 - 500 = 1.000\$$ dır.

Bu işlemdeki kâr grafiği aşağıdadır:



Şekil 6.1 Alıcı tarafın kâr grafiği

Bu sözleşmede satıcı tarafın kâr grafiği de aşağıdaki gibidir:



Şekil 6.2 Satıcı tarafın kâr grafiği

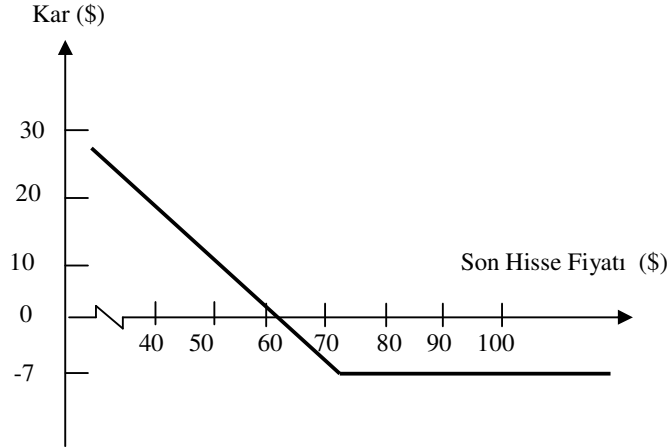
Call opsiyonu satın alanlar hisse fiyatlarının yükseleceğini ümit ederek bu pozisyona girerler. Buna mukabil, hisse fiyatlarının düşeceğini ümit edenler put opsiyonu satın alırlar.

Örnek 6.2: Exxon firmasının hisselerinin bugünkü fiyatı 65\$ olsun. Bir yatırımcı 100 adet Exxon hissesi üzerinde kullanım fiyatı 70\$'dan bir Avrupa put opsiyonu (satma hakkı sözleşmesi) satın alsın. Vade bitimi 3 ay sonra olsun. Opsiyon primi hisse başına 7\$ olsun.

Yatırımcı hisse fiyatlarının 3 ay içinde 70\$'ı geçmeyeceğini tahmin ederek böyle bir strateji takip etmektedir. Bu sözleşmeye göre yatırımcı başlangıçta $7 \cdot 100 = 700$ \$'lık bir yatırım yapmaktadır. Sözleşme Avrupa tipi olduğundan ancak vade bitiminde hak kullanılacaktır.

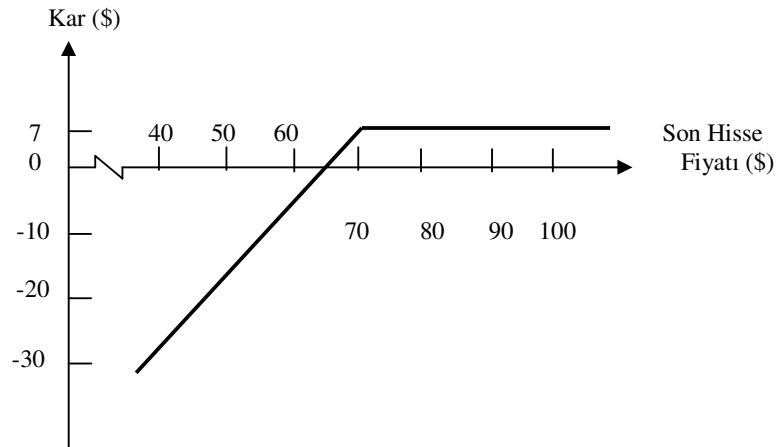
Vade bitiminde Exxon hisseleri 55\$ olsun. Yatırımcı vade bitiminde piyasadan 100 Exxon hissesini $100 \cdot 55 = 5.500\$$ 'dan satın alır ve karşı tarafa sözleşme gereği $70 \cdot 100 = 7.000\$$ 'a satar. Bu takdirde yatırımcının kârı $7.000 - 5.500 - 700 = 800\$$ 'dır.

Eğer Exxon hisselerinin fiyatı vade bitiminde 70\$'dan fazla ise yatırımcı sözleşmedeki hakkını uygulamaktan vazgeçer ve sadece 700\$'lık opsiyon primi kadar zarar etmiş olur. Yatırımcının kâr grafiği aşağıdadır :



Şekil 6.3 Yatırımcının kâr grafiği

Bu sözleşmedeki satıcı tarafın kâr grafiği de aşağıdaki gibidir :



Şekil 6.4 Satıcı tarafın kâr grafiği

6.2 Geometrik Brown Hareketleri

Zaman içerisinde fiyatı değişen bir varlığın fiyatını $S(y)$ ile gösterelim. y , bu andan itibaren ölçülen zamanı gösterebilir. Eğer $\frac{S(t+y)}{S(y)}$ random değişkeni y zamanına kadar olan bütün fiyatlardan bağımsız ve $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$, ortalaması μt olan ve varyansı $t\sigma^2$ olan bir normal random değişken ise ($y \geq 0; t \geq 0$) $S(y)$, $0 \leq y < \infty$, fiyat topluluğu bir geometrik brown hareketi yapar diyeceğiz. Bu hareketin parametresi μ ve volatilitesi σ dır.

Diğer bir deyişle fiyat serisi bir geometrik brown hareketi oluşturur denir, eğer gelecekteki bir t zamanındaki fiyatın şimdiki fiyata oranı fiyatların geçmişinden bağımsız ise ve bu oran μt ve $t\sigma^2$ parametreleri ile bir lognormal olasılık dağılımı oluşturuyorsa. Buna göre, varlığın fiyatının bir geometrik brown hareketi yapmasından sadece bugünkü fiyatın gelecekteki fiyatların olasılıklarını etkiledikleri sonucu çıkmaktadır. Bundan başka gelecekteki t zamanındaki fiyatın, bugünkü fiyata oranı ile ilgili olasılıklar bugünkü fiyata bağlı değildir. Böylece, örneğin bu modele göre bir varlığın fiyatının gelecek ayda ikiye katlanmasının olasılığı, bugünkü fiyatın 10 veya 25 olsa da aynıdır.

Başlangıç fiyatı $S(0)$ verilmesi halinde t zamanındaki fiyatın beklenen değeri geometrik brown hareketlerinin her iki parametresine bağlıdır. Özellikle eğer başlangıç fiyatı s_0 ise bu takdirde t zamanındaki fiyatın beklenen değeri şu şekildedir.

$$E[S(t)] = s_0 \cdot e^{t\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

Böylece geometrik brown hareketi altında beklenen fiyat $\mu + \frac{\sigma^2}{2}$ oranında artar.

6.3 Geometrik Brown Hareketinin Daha Basit Modellerin Bir Limiti Olarak Elde Edilmesi

Δ : Zamanın küçük bir artışını gösterebilir ve şunu kabul edelim.

Her Δ zaman biriminde varlığın fiyatı ya p olasılığı ile u çarpanı ile artsın veya $1-p$ olasılığı ile d çarpanı ile azalsın. Burada, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$, $p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right)$ dır. Yani varlığın

fiyatının sadece Δ 'nın tam katları olan zamanlarda değiştiğini kabul ediyoruz. Bu zamanlarda varlığın fiyatı ya u çarpanı ile artmakta ya da d çarpanı ile azalmaktadır.

Δ 'yı öyle küçük alalım ki fiyat değişimi daha çok sıklıkla olsun. Bu şekilde fiyat topluluğu bir geometrik brown hareketi olur. Bunun sonucu olarak geometrik brown hareketine sabit bir çarpanla azalan veya artan basit bir prosesle yaklaşılabilmüş olunur.

Δ 'nın küçülmesi halinde yukarıdaki modelin bir geometrik brown hareketi oluşturduğunu ispat edelim. Fiyat $i\Delta$ zamanında artarsa $Y_i = 1$, eğer azalırsa $Y_i = 0$ olsun. Buna göre ilk n

zamanında varlığın fiyatının artmasının sayısı $\sum_{i=1}^n Y_i$ olur.

$n - \sum_{i=1}^n Y_i$ sayısı fiyatın azaldığının sayısını gösterebilir. Böylece bu zaman sonunda

$$S(n\Delta) \text{ fiyatı: } S(n\Delta) = S(0) \cdot u^{\sum_{i=1}^n Y_i} \cdot d^{n - \sum_{i=1}^n Y_i} \text{ veya } S(n\Delta) = d^n \cdot S(0) \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^n Y_i} \text{ dir.}$$

$$\text{Eğer } n = \frac{t}{\Delta} \text{ yazarsak } (n \cdot \Delta = t) \quad \frac{S(t)}{S(0)} = d^{\frac{t}{\Delta}} \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i} \text{ elde edilir.}$$

Her iki tarafın logaritmasını alırsak

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \frac{t}{\Delta} \cdot \log d + \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i \cdot \log\left(\frac{u}{d}\right) = \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i \quad (6.1)$$

elde edilir. Δ çok küçük olduğu zaman $\sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i$ toplamında çok daha fazla terim olacaktır.

Böylece merkezi limit teoremine göre bu toplam daha fazla normale yaklaşacaktır. Yani

$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$ bir normal random değişkendir. (6.1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
E\left[\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right] &= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} E[Y_i] \\
&= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \cdot \frac{t}{\Delta} p \\
&= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right) \\
&= \mu t
\end{aligned}$$

elde edilir.

(6.1) eşitliğinden ayrıca,

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left[\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right] &= 4\sigma^2\Delta \cdot \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} \text{Var}[Y_i] && (\text{Bağımsızlık tan}) \\
&= 4\sigma^2 t p (1-p) \\
&\approx \sigma^2 t && \left(\text{çünkü küçük } \Delta \text{ lar için } p \approx \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Böylece Δ giderek küçüldükçe $\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$ (ve aynı sebeple $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$) ortalama değeri μt ve varyansı $t\sigma^2$ olan bir randon değişken olur. Buna ilaveten arka arkaya gelen fiyat değişiklikleri bağımsız olduğundan ve her birinin artma olasılığı aynı olduğundan $\frac{S(t+y)}{S(y)}$, y zamanından önceki fiyat değişikliklerinden bağımsızdır. Böylece $\Delta \rightarrow 0$ iken geometrik brown hareketinin her iki koşulu da sağlanmış olur. Yani model gerçekten bir geometrik brown hareketidir.

6.4 Brown Hareketi

Geometrik brown hareketi, brown hareketi olarak bilinen uzun süreli davranışları inceleyen modelin bir varyantı olarak düşünülebilir. Brown hareketleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır,

Tanım 6.1: (Brown Hareketi)

$S(y)$, $0 \leq y < \infty$, fiyat topluluğu, μ ve σ^2 parametrelili bir brown hareketini yapar denir, eğer y ve t 'nin bütün negatif olmayan değerleri için $S(t+y) - S(y)$ random değişkeni y

zamanına kadar olan bütün fiyatlardan bağımsız ve ortalama değeri μt ve varyansı $\sigma^2 t$ olan bir normal random değişken ise.

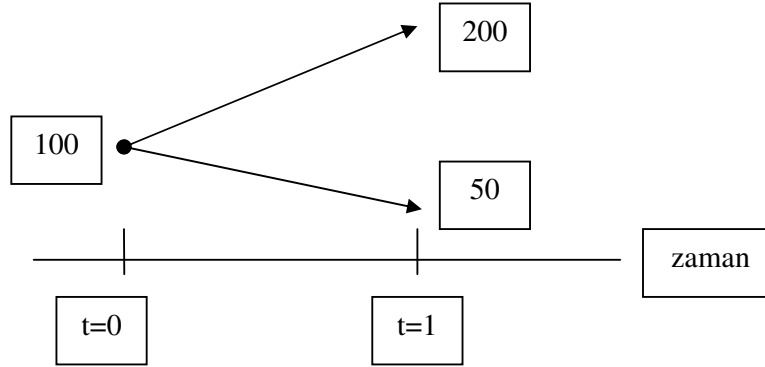
Brown hareketi ilk defa İngiliz botanikçisi Robert Brown tarafından 1827'de bir sıvı veya gazdaki bir küçük partikülün gösterdiği hareketi açıklamak için tanımlanmıştır. Brown hareketinin, hisse senetlerinin ve ticari malların fiyat hareketlerini modellemek için kullanılması Fransız matematikçi Bachelier tarafından (1900) yapılmıştır.

Her iki modelde de model parametreleri olan μ ve σ nın belirlenmesi halinde gelecekteki fiyatların yorumlanması için sadece şimdiki fiyatın bilinmesi yetmektedir. Geçmişteki fiyatlara ait bilgiler önemli değildir.

6.5 Options Fiyatlandırmasına Bir Örnek

Nominal faiz oranı r olsun. Gelecek bir zamanda bir hisse senedini sabit bir fiyattan satın almak için yazılan opsiyonunun fiyatlandırılması için aşağıdaki modeli göz önüne alalım.

Söz konusu hisse senedinin bugünkü fiyatı hisse başına 100\$ olsun. Ve bir zaman periyodu sonra hisse senedinin fiyatının ya 200\$ veya 50\$ olacağını bildiğimizi kabul edelim. (Şekil 6.5) Bundan başka bir periyot sonra y kadar hissenin 150\$'dan satın alınmasına dair bir opsiyonu bugün cy maliyeti ile satın alabileceğimizi kabul edelim.



Şekil 6.5 Opsiyon fiyatlandırması

Opsiyon satın aldığımız takdirde eğer hisse senedinin fiyatı 200\$ olursa $t=1$ zamanında opsiyonu uygulayarak $200-150=50$ \$ hisse başına kazanç oluşur. Diğer taraftan eğer hisse senedinin fiyatı 50\$ olursa opsiyonu uygulamak anlamsız olur. Opsiyona ilaveten $t=0$ zamanında da x tane hisse senedi satın alınırsa (maliyeti $100x$ \$ olur) her bir hisse senedinin değeri $t=1$ zamanında da ya 200\$ yada 50\$ dır. x ve y her ikisinin de pozitif, negatif yada sıfır

olabileceğini kabul edelim. Yani hisse senedini ve opsiyonlarını hem satın alabiliriz hem de satabiliriz. Örneğin; x negatif ise ($x < 0$), $-x$ tane hisse senedini satıyorsunuz demektir. Böylelikle bir başlangıç getirisi olarak $-100x$ elde edilir. Bu durumda $t=1$ de $-x$ tane hisse senedini 200\$ veya 50\$ dan satın almak zorunluluğunda kalıyoruz.

Burada opsiyonunun birim maliyetinin (c) uygun değerini belirlemek istiyoruz. Eğer r , bir periyotluk faiz oranı ve $c \neq \left[100 - 50(1+r)^{-1}\right]/3$ ise satın almanın öyle bir kombinasyonunu oluşturabiliriz ki pozitif bir kazanç elde edilsin. Bunu göstermek için $t=0$ 'da

a) x birim hisse senedi satın aldığımızı

b) y birim opsiyon satın aldığımızı farz edelim

Burada x ve y (pozitif veya negatif olabilir) belirlenecek sayılardır. Bu işlemin maliyeti $100x + c \cdot y$ dır. Eğer bu değer pozitif ise bir bankadan $t=1$ zamanında ödenmek üzere borç alınır. Eğer negatif ise bu miktar $-(100x + c \cdot y)$ bir bankaya $t=1$ zamanında çekilmek üzere yatırılır.

Bu işlemin $t=1$ zamanındaki değeri, hisse senedinin $t=1$ zamanındaki değerine bağlıdır ve şu şekilde hesaplanır.

$$\text{değer} = \begin{cases} 200x + 50y & , \quad \text{eğer hisse senedinin fiyatı 200$ ise} \\ 50x & , \quad \text{eğer hisse senedinin fiyatı 50$ ise} \end{cases}$$

y 'yi $200x + 50y = 50x$ veya $y = -3x$ olacak şekilde seçelim. y , x ile ters işaretlidir. Böylece eğer $x > 0$ ise $t=0$ da x hisse senedi satın alınır ve $3x$ tane satılır. Aynı şekilde eğer $x < 0$ ise $t=0$ 'da $-x$ hisse senedi satılır ve $-3x$ tane opsiyon satın alınır. Böylece $t=1$ 'deki elde tutulan varlıkların değeri $50x$ 'tir. Bu miktar hisse senedinin değerine bağlı değildir. Bu işlemdeki kazancımız:

$$\begin{aligned} \text{kazanç} &= 50x - (100x + cy) \cdot (1+r) \\ &= 50x - (100x - 3xc) \cdot (1+r) \\ &= (1+r) \cdot x \cdot \left[3c - 100 + 50 \cdot (1+r)^{-1} \right] \end{aligned}$$

Eğer $3c = 100 - 50 \cdot (1+r)^{-1}$ ise kazanç sıfırdır.

Eğer $3c \neq 100 - 50 \cdot (1+r)^{-1}$ ise pozitif bir kazanç elde edilmiş olur.

Örneğin; Eğer $(1+r)^{-1}=0,9$ ise ve $c=20$ ise bir hisse senedinin satın alınması ve üç opsiyonun satılmasının bize maliyeti: $100-3 \cdot 20=40$ 'tır. Bu miktar bir bankadan ödünç alınır. Bu portföyün $t=1$ zamanındaki değeri hisse senedinin fiyatı 200\$ çıksa da yada 50\$ inse de, 50\$'dır. $t=1$ zamanında bankaya ödenecek para $40 \cdot (1+r)=44,44$ olup bu işlemde elde edilen kazanç $50-44,44=5,56$ 'dır. Benzer şekilde eğer opsiyonun maliyeti 15\$ ise bir hisse senedi satılır. ($x=-1$) ve üç birim opsiyon satın alınır. Buradaki başlangıçtaki kazanç $100-3 \cdot 15=55$ 'dir. Bu, bir bankaya konulursa $t=1$ zamanındaki değer $55 \cdot (1+r)=61,11$ olur. $t=1$ zamanındaki portföyümüzün değeri -50 olduğundan kazancımız 11,11\$ dır. Bu kesin kazanma şemasına bir arbitraj denir. Bu arbitrajda kazanç getirmeyen opsiyon fiyatı $c=(100-45)/3=55/3$ tür.

6.6 Arbitraj Teoremi

Bir deneyin mümkün olan sonuçlarının kümesi $\{1,2,...,m\}$ olsun. Bu deney için n tane bahis göz önüne alalım. i bahsine oynanan miktar x ise, deneyin sonucunun j ($j=1,...,m$) olması halinde, kazanılan miktar $xr_i(j)$ dir. Burada $r_i(j)$, i bahsine oynanan bir birimlik bahis için getiri fonksiyonunu göstermektedir. Bir bahis üzerine oynanan miktar pozitif, negatif ve sıfır olabilir.

Bir bahis oynama stratejisi bir $\vec{x}=(x_1,...,x_n)$ vektörü olup, x_i ($i=1,...,n$) i bahsine oynanan miktarı göstermektedir. Eğer deneyin sonucu j ise, $\vec{x}$ stratejisinin getirisi $\sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i(j)$ dir.

Teorem 6.1 : (Arbitraj) Aşağıdakilerden tam bir tanesi doğrudur:

- Öyle bir $\vec{p}=(p_1,...,p_m)$ olasılık vektörü vardır ki $\sum_{j=1}^m p_j \cdot r_i(j)=0, \forall i=1,...,n$ dir.
- Öyle bir $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ bahis stratejisi vardır ki $\sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i(j)>0, \forall j=1,...,m$ dir.

[Teoremin ispatı bu bölümün sonunda paragraf 6.8'de yapılacaktır.]

Eğer X , bir deneyin sonucu ise arbitraj teoremi şunu ifade etmektedir: Ya öyle bir $(p_1,...,p_m)$ olasılık vektörü vardır ki, $p\{X=j\}=p_j, \forall j=1,...,m$ ise $E[r_i(X)]=0, \forall i=1,...,n$ dir.

Veya öyle bir bahis stratejisi vardır ki bu kesin bir kazanca götürür.

Örnek 6.3 : Bazı durumlarda, i ($i=1, \dots, m$) sonuçlardan yalnız bir tanesi üzerine oynamaya müsaade edilen bahisler vardır. Böyle bir bahisten gelen getiri “odd” terimi ile ifade edilir ve i sonucuna karşı gelen odd o_i ile gösterilir. Buna göre eğer deneyin sonucu i ise bir birimlik bahis oynamanın getirisi o_i veya eğer i sonuç değilse getiri -1’dir. Buna göre getiri fonksiyonu

$$r_i(j) = \begin{cases} o_i, & j = i \text{ ise} \\ -1, & j \neq i \text{ ise} \end{cases} \text{ ile ifade edilir.}$$

$o_1, o_2, o_3, \dots, o_m$ oddları verilmiş olsun. Kesin bir kazancın olmaması için öyle bir $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ olasılık vektörü mevcut olmalı ki, her i ($i=1, \dots, m$) için

$$0 = E_p[r_i(X)] = o_i p_i - (1 - p_i) \text{ olmalıdır, yani } p_i = \frac{1}{1 + o_i} \text{ olmalıdır.}$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1 \text{ olması gerektiğinden, herhangi bir arbitrajın olmamasının koşulu } \sum_{i=1}^m \frac{1}{1 + o_i} = 1$$

olmasıdır. Buna göre eğer $\sum_{i=1}^m \frac{1}{1 + o_i} \neq 1$ ise mutlaka bir kazanç mümkündür.

Örneğin 3 sonuçlu bir deneydeki oddlar şu şekilde verilsin:

Sonuçlar	Oddlar
1	1
2	2
3	3

Yani, 1 sonucuna karşı odd 1’e 1; 2 sonucuna karşı odd 2’ye 1; 3 sonucuna karşı odd 3’e 1 dir.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \neq 1$ olduğundan kesin bir kazanç mümkündür. Kazanç elde etmesi mümkün olan bir strateji: 1 sonucuna -1 oynamak (yani sonuç 1 değilse 1 kazanılıyor, eğer sonuç 1 ise 1 kaybediliyor.) ve 2 sonucuna -0,7 oynamak (yani sonuç 2 değilse 0,7 kazanılıyor veya eğer sonuç 2 ise $1,4 = 2 \cdot 0,7$ kaybediliyor) ve -0,5’i 3 sonucuna oynamak (yani eğer sonuç 3 değilse 0,5 kazanılıyor eğer sonuç 3 ise $3 \cdot 0,5 = 1,5$ kaybediliyor.)

Eğer deney sonucu 1 ise, $-1 + 0,7 + 0,5 = 0,2$ kazanılıyor.

Eğer deney sonucu 2 ise $1 - 1,4 + 0,5 = 0,1$ kazanılıyor.

Eğer deney sonucu 3 ise $1 + 0,7 - 1,5 = 0,2$ kazanılıyor.

Buna göre sonuç ne olursa olsun pozitif bir kazanç elde ediliyor.

Örnek 6.4 : Daha önceki bölümdeki örneği ele alalım. c 'nin hangi değeri için kesin kazancın olmayacağını hesaplayalım.

Çözüm : Bu bölüme göre deney sonuçları $t=1$ zamanındaki hisse senedi fiyatlarıdır. Buna göre 2 sonuç mümkündür. İki farklı bahis vardır. Bunlar hisse senedi satın almak (veya satmak) ve option satın almak (veya satmak). Arbitraj teoremine göre, beklenen getirinin şimdiki değerini her iki bahiste de sıfır yapan $(p, 1-p)$ olasılıkları varsa kesin kazanç elde edilmeyecektir. Bir hisse senedinin satın alınmasından elde edilen getirinin şimdiki değeri

$$\text{Getiri} = \begin{cases} 200(1+r)^{-1} - 100 & , \text{ eğer } t=1 \text{ de fiyat } 200 \text{ ise} \\ 50(1+r)^{-1} - 100 & , \text{ eğer } t=1 \text{ de fiyat } 50 \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer fiyatın $t=1$ 'de 200 olmasının olasılığı p ise

$$E[\text{Getiri}] = p \left[\frac{200}{1+r} - 100 \right] + (1-p) \left[\frac{50}{1+r} - 100 \right] = p \frac{150}{1+r} + \frac{50}{1+r} - 100$$

Bunu sıfıra eşitlersek $p = \frac{1+2r}{3}$ elde edilir. Buna göre hisse senedi satın alınmasında sıfır

beklenen getiri veren olasılık vektörü $(p, 1-p)$ 'yi $p = \frac{1+2r}{3}$ için elde ederiz.

Opsiyon satın alınmasının getirisinin şimdiki değeri

$$\text{Getiri} = \begin{cases} 50(1+r)^{-1} - c & , \text{ eğer } t=1 \text{ deki fiyat } 200 \text{ ise} \\ -c & , \text{ eğer } t=1 \text{ deki fiyat } 50 \text{ ise} \end{cases}$$

$p = \frac{1+2r}{3}$ için, bir option satın alınmasından beklenen getiri

$$E[\text{getiri}] = \frac{1+2r}{3} \cdot \left[\frac{50}{1+r} - c \right] + \left(1 - \frac{1+2r}{3} \right) [-c] = \frac{1+2r}{3} \cdot \frac{50}{1+r} - c \text{ dir.}$$

Buradan arbitraj teoremine göre kesin kazancın olmaması için

$c = \frac{1+2r}{3} \cdot \frac{50}{1+r} = \frac{50+100r}{3(1+r)}$ elde edilir ki, daha önceki örnekte söz konusu edilen değer ile aynıdır.

6.7 Çok Periyotlu Binom Modeli

Aşağıdaki hisse senedi opsiyonu senaryosunu göz önüne alalım: opsiyonda n periyot olsun ve her bir periyot için nominal faiz oranı r olsun. $S(0)$ ise hisse senedinin başlangıç fiyatı olsun. $i=1,2,\dots,n$ için, $S(i)$ ise hisse senedinin i periyot sonraki fiyatı olsun. $d < 1+r < u$ olmak üzere ya $S(i)=uS(i-1)$ veya $dS(i-1)$ olduğunu farz edelim. Yani bir zaman periyodundan diğerine geçerken fiyat ya u çarpanı ile artmakta veya d çarpanı ile azalmaktadır. Ayrıca, $t=0$ 'da hisse senedini n periyot sonra K değerinde satın alabilecek bir opsiyon satın alınabilsin. Ayrıca hisse senedinin n periyot esnasında satın alınabileceğini ve satılabileceğini kabul edelim. X_i random değişkenini şu şekilde tanımlayalım:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{eğer } S(i) = uS(i-1) \\ 0, & \text{eğer } S(i) = dS(i-1) \end{cases}$$

Deneyin sonuçlarını $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vektörünün değerleri ile gösterebiliriz. Herhangi bir arbitraj fırsatının olmaması için, bu sonuçlara ait öyle

$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$, $x_i = 0, 1$, $i = 1, \dots, n$ olasılıkları mevcut olmalı ki, bütün bahisler geçerli olsun.

Şimdi aşağıdaki tipteki bir bahsi göz önüne alalım: Önce bir i değeri ($i=1, \dots, n$) 0 ve 1'lerden oluşan bir $(x_1, \dots, x_{i-1})$ vektörü seçelim ve daha sonra ilk $i-1$ değişimi gözleyelim. Eğer her bir $j=1, \dots, i-1$ için $X_j=x_j$ ise, derhal bir birim hisse satın alınıp ve gelecek periyotla satılsın.

Hisse senedi satın alınınca, onun $t=i-1$ için maliyeti $S(i-1)$ olup, $t=i$ 'de satıldığında elde edilen değer $t=i-1$ zamanındaki karşılığı

a) Eğer hisse senedi yükselirse $(1+r)^{-1}uS(i-1)$

b) Eğer hisse senedi düşerse $(1+r)^{-1}dS(i-1)$ 'dir.

Dolayısıyla $\alpha = P\{X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}\}$ ile hisse senedinin satın alınma olasılığını gösterirsek ve $P = P\{X_i = 1 \mid X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}\}$ ile satın alınan hisse senedinin $t=i$ periyodunda yükselmesinin olasılığını gösterirsek bu bahisin $(i-1)$ birim zamandaki beklenen kazancı $\alpha \left[p(1+r)^{-1}uS(i-1) + (1-p)(1+r)^{-1}dS(i-1) - S(i-1) \right]$ olur.

Buna göre, bu bahisteki beklenen kazancın sıfır olması için $\frac{pu}{1+r} + \frac{(1-p)d}{1+r} = 1$ olmalıdır

veya $p = \frac{1+r-d}{u-d}$ olmalıdır.

$Y = \sum_{i=1}^n X_i$ olmak üzere, Y , n ve p parametrelili bir binom random değişken olur. Çünkü Y , $X_i=1$ olanların sayısını gösterir. $t=n$ zamanda, hissenin fiyatı Y defa yükselmiş ve $n-Y$ defa düşmüş olacaktır. Dolayısıyla hissenin n periyot sonraki fiyatı $S(n) = u^Y d^{n-Y} S(0)$ olacaktır.

n periyot sonra opsiyona sahip olmanın değeri $(S_n - K)^+ = \begin{cases} S_n - K, & \text{eğer } S_n - K \geq 0 \\ 0, & \text{eğer } S_n - K < 0 \end{cases}$

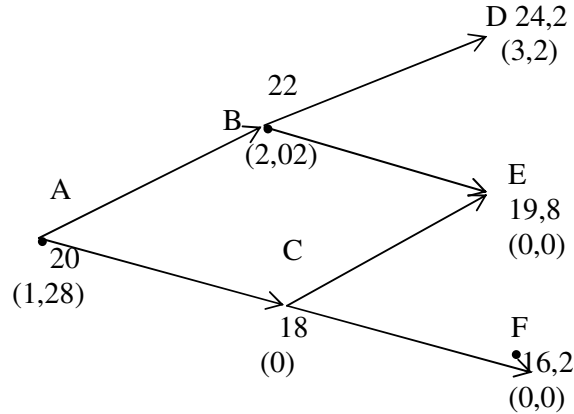
olacaktır. Dolayısıyla opsiyona sahip olmanın şimdiki değeri ($t=0$) $(1+r)^{-n} (S(n) - K)^+$

ve opsiyona sahip olmanın şimdiki değerinin beklenen değeri $(1+r)^{-n} E[(S(n) - K)^+] = (1+r)^{-n} E[(S(0)u^Y d^{n-Y} - K)^+]$ dir.

Böylece, arbitraj oluşturmamayan opsiyon maliyeti yalnız ve yalnız $C = (1+r)^{-n} E[(S(0)u^Y d^{n-Y} - K)^+]$ değerinde olacaktır.

Örnek 6.5 : Bir hissenin $t=0$ için fiyatı 20\$ olsun. $n=2$ periyodun her biri için fiyat ya %10 artsın veya azalsın her periyodun süresi 3 ay olsun ve sabit yıllık faiz %12 olsun. Hisse senedini 2 periyot sonra 21\$'a satın alan bir opsiyonu göz önüne alalım.

2 periyot içinde hisse senedinin fiyat şeması şöyledir :



$$p = \frac{1 + 0,12 \cdot \frac{1}{4} - 0,9}{1,1 - 0,9} = \frac{1 + 0,03 - 0,9}{0,2} = \frac{0,13}{0,2} = 0,65$$

D deki hisse fiyatı 24,2\$ ve opsiyona sahip olmanın değeri $24,2 - 21 = 3,2$ 'dir . E ve F deki opsiyona sahip olma değeri 0'dır. B noktasındaki opsiyona sahip olma değerini şöyle hesaplayabiliriz: $(1 + 0,03)^{-1} \cdot (3,2 \cdot 0,65 + 0 \cdot 0,35) = 2,02$

Benzer şekilde C deki opsiyon değeri $(1 + 0,03)^{-1} \cdot (0 \cdot 0,65 + 0 \cdot 0,35) = 0$ 'dır.

A noktasındaki opsiyon değeri hesaplırsak $(1 + 0,03)^{-1} \cdot [0,65 \cdot 2,02 + 0,35 \cdot 0] = 1,28$ 'dir.

Buna göre opsiyonun başlangıçtaki değeri 1,28\$'dır. Aynı sonucu tek adımda şöyle hesaplayabilirdik:

$$(1 + 0,03)^{-2} \cdot \left[(0,65)^2 \cdot (3,2) + (2) \cdot (0,65) \cdot (0,35) \cdot (0,0) + (0,35)^2 \cdot (0,0) \right] = 1,28$$

6.8 Arbitraj Teoreminin İspatı

Arbitraj teoremini ispat etmek için lineer programlamanın dualite teoremini aşağıdaki gibi ifade edelim.

c_i , b_j ve $a_{i,j}$ ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$) sabitleri verilmiş olsun. Buna karşı $x_1, \dots, x_n$ değerlerini

öyle seçelim ki $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ ifadesi $\sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i \leq b_j$, $j=1, \dots, m$ kısıtları altında maksimum olsun.

Bu probleme primal (birincil) lineer program denir. Her primal lineer programın bir dual programı vardır. Yukarıda lineer programın duali, öyle $y_1, \dots, y_m$ değerlerini belirlemek ki,

$$\sum_{j=1}^m b_j y_j \text{ ifadesi } \sum_{j=1}^m a_{i,j} y_j = c_i \quad i=1, \dots, n, \quad y_j \geq 0, \quad j=1, \dots, m$$

kısıtları altında minimum olsun. Bu durumda bir lineer programa tatbik edilebilir denir. Eğer kısıtları sağlayan $x_1, \dots, x_n$ değişkenleri (veya $y_1, y_2, \dots, y_m$) değerleri mevcutsa lineer programlamanın temel teorik sonucu dualite teoremidir. Bu teoremi aşağıda ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 6.2 : (Lineer Programlamanın Dualite Teoremi)

Eğer bir primal lineer program ve onun duali tatbik edilebilir ise her ikisinin de optimal çözümü vardır ve primalin maximal değeri dualin minimal değerine eşittir. Eğer bir problem tatbik edilebilir değil ise diğerinin bir optimal çözümü yoktur. Dualite teoreminin bir sonucu arbitraj teoremidir.

Teorem 6.3 : (Arbitraj Teoremi)

Aşağıdakilerden tam bir tanesi doğrudur.

a) $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ öyle bir $\vec{p}$ olasılık vektörü vardır ki

$$\sum_{j=1}^m p_j r_i(j) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \text{veya}$$

b) Öyle bir $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ bahis stratejisi vardır ki $\sum_{i=1}^n x_i r_i(j) > 0, \quad \forall j = 1, \dots, m$ dir.

Yani, ya öyle bir olasılık vektörü vardır ki buna göre bütün bahisçiler 0 (sıfır) kazancı beklemektedir. Veya öyle bir bahis stratejisi vardır ki daima pozitif bir kazanç oluşturur.

İspat : x_{n+1} değeri oyuncunun kazanmasını garanti kılacak bir değer olsun. Bu miktarı maksimize edecek problemi göz önüne alalım. Eğer oyuncu $(x_1, \dots, x_n)$ bahis stratejisini kullanırsa deneyinin sonucu j ise oyuncunun kazancı $\sum_{i=1}^n x_i r_i(j)$ dir.

Böylece oyuncu stratejisini, yani $(x_1, \dots, x_n)$ ve x_{n+1} 'i öyle seçmek ister ki aşağıdaki program gerçekleşsin.

Maksimize x_{n+1}

$$\text{Kısıtlar: } \sum_{i=1}^n x_i r_i(j) \geq x_{n+1}, \quad j = 1, \dots, m$$

$$a_{i,j} = -r_i(j), \quad i = 1, \dots, n \quad a_{n+1,j} = 1 \text{ alalım.}$$

Buna göre yukarıdaki ifadeyi tekrar şöyle yazabiliriz.

Maksimize x_{n+1}

$$\text{Kısıtlar: } \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} x_i \leq 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Yukarıdaki lineer programda $c_1=c_2=\dots=c_n=0, c_{n+1}=1$ 'dir. Ve kısıtların üst sınır değerleri hepsi 0 (sıfır) (yani tüm $b_j=0$)'dır. Bunun sonucunda yukarıdaki programın dualinde

Minimize 0 (sıfır)

$$\text{Kısıtlar: } \sum_{j=1}^m a_{i,j} y_j = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^m a_{n+1,j} y_j = 1 \quad y_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

$a_{i,j}$ 'lerin tanımını kullanarak dual lineer programı şu şekilde yazabiliriz.

Minimize 0 (sıfır)

$$\text{Kısıtlar: } \sum_{j=1}^m r_i(j) y_j = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^m y_j = 1 \quad y_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

Bu dual programın tatbik edilebilir olması ve onun minimum değerinin 0 (sıfır) olması ancak ve ancak öyle bir olasılık vektörünün bulunabilmesidir ki $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ bu olasılık altında her oyuncunun beklenen getirisi 0 (sıfır) olsun. Primal problem tatbik edilebilirdir. Çünkü $x_i=0$ ($i=1, \dots, n+1$) kısıtları gerçeklerler. Böylece dualite teoreminden şunu elde ederiz: Eğer dual problem de tatbik edilebilir ise primal programın optimal değeri 0 (sıfır)'dır ve böylece kesin kazanç mümkün değildir.

Diğer taraftan dual program tatbik edilebilir değil ise primal problemin hiçbir optimal çözümü yoktur. Fakat bu 0 (sıfır)'ın optimal çözüm olmadığını gerektirir. Ve böylece öyle bir bahis stratejisi vardır ki, onun minimal getirisi pozitifdir. (Dualin tatbik edilebilir olmaması halinde primal optimal çözümün olmamasının nedeni, primal programın bu durumda sınırsız olmasıdır. Yani eğer bir bahis stratejisi $\bar{x}$ en az $v > 0$ pozitif bir getiriyi garanti etseydi, bu takdirde $c \cdot \bar{x}$ bahis stratejisi en az $c \cdot v$ garanti getirisi verecekti.)

6.9 Black–Scholes Formülleri

Bir call opsiyonun çözülme fiyatı K ve süresi t olsun. Yani bu opsiyonla, bir kişi t süre sonra sözleşmede geçen varlığın 1 birimini K fiyatından satın alma hakkına sahiptir. Ayrıca nominal faiz oranı birleşik sürekli olarak r olsun. Varlığın fiyatı bir geometrik brown hareketi yapsın, öyle ki varyans parametresi σ^2 olsun. Bütün bu kabuller altında, aşağıda, opsiyonun herhangi bir arbitraj imkânı vermeyen tek türlü belirli maliyet fiyatını bulacağız.

Bir geometrik brown hareketi ilk t zaman biriminde aşağıdaki prosesle her $\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \dots, \frac{nt}{n}$

zaman noktasında yaklaşılabilir: ya $u = e^{\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1 + \sigma\sqrt{t/n} + \frac{\sigma^2 t}{2n}$ faktörü ile yukarı doğru

hareket eder, veya $d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1 - \sigma\sqrt{t/n} + \frac{\sigma^2 t}{2n}$ faktörü ile aşağıya doğru hareket eder,

burada n büyük bir pozitif tamsayıdır. § 6.2'den biliyoruz ki, yukarıdaki yaklaşık model için tek türlü belirli ve arbitraja müsaade etmeyen C opsiyon maliyeti vardır.

Y ile parametreleri n ve p olan binomial random değişkeni gösterebiliriz, burada

$$p = \frac{1 + \frac{rt}{n} - d}{u - d} \approx \frac{\frac{rt}{n} + \sigma\sqrt{t/n} - \sigma^2 t / 2n}{2\sigma\sqrt{t/n}} = \frac{1}{2} + \frac{r\sqrt{t/n}}{2\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{t/n}}{4}$$

§ 6.2'den arbitraj yaratmayan opsiyon maliyeti için

$$\begin{aligned} C &= \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^{-n} E\left[\left(S(0)u^Y d^{n-Y} - K\right)^+\right] = \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^{-n} E\left[\left(S(0)\left(\frac{u}{d}\right)^Y d^n - K\right)^+\right] \\ &= \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^{-n} E\left[\left(S(0)e^{2\sigma\sqrt{t/n} Y} e^{-\sigma\sqrt{nt}} - K\right)^+\right] = \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^{-n} E\left[\left(S(0)e^W - K\right)^+\right] \end{aligned}$$

burada $W = 2\sigma\sqrt{t/n} Y - \sigma\sqrt{nt}$ 'dir.

Y binomial olduğundan, n büyüdükçe Y bir normal random değişken olur. Dolayısıyla n büyüdükçe W de bir normal random değişkendir. Ayrıca $E[Y] = np$ olduğundan

$$\begin{aligned} E[W] &= 2\sigma\sqrt{t/n} E[Y] - \sigma\sqrt{nt} = 2\sigma\sqrt{t/n} \cdot np - \sigma\sqrt{nt} = 2\sigma\sqrt{nt} \left(p - \frac{1}{2}\right) \\ &\approx 2\sigma\sqrt{nt} \left(\frac{r\sqrt{t/n}}{2\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{t/n}}{4}\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \quad \text{'dir.} \end{aligned}$$

Ayrıca büyük n 'ler için

$\text{Var}(Y) = np(1-p)$ ve $p \approx \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\text{Var}(W) = (2\sigma\sqrt{t/n})^2 \text{Var}(Y) = 4\sigma^2 tp(1-p) \approx \sigma^2 t \quad \text{'dir.}$$

$n \rightarrow \infty$ için $\lim \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^{-n} = e^{-rt}$ olduğundan $C = e^{-rt} E\left[\left(S(0)e^W - K\right)^+\right]$ elde edilir.

Burada W , ortalama değeri $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ ve varyansı $\sigma^2 t$ olan bir normal random değişkendir.

Standart normal dağılım $\Phi(x)$ ile yukarıdaki C değerini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$C = S(o)\Phi(d_1) - Ke^{-rt}\Phi(d_1 - \sigma\sqrt{t}), \text{ burada } d_1 = \frac{rt + \frac{\sigma^2 t}{2} - \log(K/S(o))}{\sigma\sqrt{t}} \text{ 'dır.}$$

Bu ifadeye Black-Scholes opsiyon fiyatlama formülü denir.

Örnek 6.6 : Bir varlık şu an 30\$'dan satılsın. Nominal yıllık faiz oranı %8 olsun. Varlığın volatilitesi 0,20 olsun. 3 aylık bir call-opsiyonunun 34\$'dan çözülme fiyatı olması halinde, call opsiyonun arbitrajsız fiyatı ne olur?

Çözüm : $t=0,25$, $r=0,08$, $\sigma=0,20$, $K=34$, $S(o)=30$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{0,02 + 0,005 - \log(34/30)}{(0,2)(0,5)} \approx -1,0016$$

$$\Rightarrow C = 30\Phi(-1,0016) - 34e^{-0,02}\Phi(-1,1016) = 30 \cdot (0,15827) - 34 \cdot 0,9802 \cdot 0,13532 \approx 0,24\$$$

6.10 Black – Scholes Opsiyon Fiyatının Özellikleri

Arbitrajsız opsiyon fiyatı $C=C(s, t, K, \sigma, r)$ beş parametreye bağlı bir fonksiyondur. Bu parametreler artınca C'nin nasıl davrandığını aşağıda ele alacağız. Bunun için önce ortalama

değeri $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ ve varyansı $\sigma^2 t$ olan normal random değişkeni W'yi şu şekilde yazalım:

$$W = rt - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma\sqrt{t} Z, \text{ burada } Z \text{ bir standart normal random değişkeni göstermektedir.}$$

Buna göre

$$C(s, t, K, \sigma, r) = e^{-rt} E[(se^W - K)^+] = E[(se^{W-rt} - Ke^{-rt})^+] = E\left[\left(se^{-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma\sqrt{t}Z} - Ke^{-rt}\right)^+\right]$$

elde edilir.

a) C, s'e göre artandır. Yani değer 4 değişken sabit tutulursa, başlangıç fiyatı s arttıkça C nin değeri de artar. Çünkü W, s'e bağlı olmadığından $(se^{W-rt} - Ke^{-rt})^+$ ifadesi s arttıkça artar.

b) C, K'ya göre azalır. Çünkü K arttıkça $(se^{W-rt} - Ke^{-rt})^+$ azalır.

c) C, t'ye göre artar.

d) C, σ 'ya göre artar.

e) C, r'ye göre artar, çünkü $(se^{-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma\sqrt{t}Z} - Ke^{-rt})^+$ ifadesi r ile artandır.

6.11 σ 'nin tahmini

Varlığın geçmişteki datalarından standart sapmasını hesaplamak için aşağıdaki yolu takip ederiz:

$n+1$ = Data sayısı.

S_i = i. periyot sonundaki fiyat.

τ = Yıl olarak gözlem uzunluğu.

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

$$u_i\text{'lerin standart sapması } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^2}$$

Burada $\bar{u}$, u_i 'lerin ortalamasıdır. u_i 'lerin standart sapması $\sigma\sqrt{\tau}$ 'dir. Yani S , $\sigma\sqrt{\tau}$ 'nın bir tahminidir. Buradan σ tahmin edilebilir.

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\tau}} \text{ olmak üzere, bu tahmindeki standart hata yaklaşık olarak } \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} \text{ 'dir.}$$

Örnek 6.7 : Aşağıdaki tabloda bir hisse senedinin kapanış fiyatları, izafi fiyatlar ve günlük getiriler gösterilmektedir.

Çizelge 6.1 Volatilete'nin hesaplanması

Gün	Kapanış Fiyatları (\$)	İzafi Oran S_i/S_{i-1}	Günlük Getiri $u_i = \ln (S_i/S_{i-1})$
0	20		
1	$20 \frac{1}{8}$	1,00625	0,00623
2	$19 \frac{7}{8}$	0,98758	-0,01250
3	20	1,00629	0,00627
4	$20 \frac{1}{2}$	1,02500	0,02469
5	$20 \frac{1}{4}$	0,98781	-0,01227
6	$20 \frac{7}{8}$	1,03086	0,03040
7	$20 \frac{7}{8}$	1,00000	0,00000
8	$20 \frac{7}{8}$	1,00000	0,00000
9	$20 \frac{3}{4}$	0,99401	-0,00601
10	$20 \frac{3}{4}$	1,00000	0,00000
11	21	1,01205	0,01198
12	$21 \frac{1}{8}$	1,00595	0,00593
13	$20 \frac{7}{8}$	0,98817	-0,01190
14	$20 \frac{7}{8}$	1,00000	0,00000
15	$21 \frac{1}{4}$	1,01796	0,01780
16	$21 \frac{3}{8}$	1,00588	0,00587
17	$21 \frac{3}{8}$	1,00000	0,00000
18	$21 \frac{1}{4}$	0,99415	-0,00587
19	$21 \frac{3}{4}$	1,02353	0,02326

20	22	1,01149	0,01143
----	----	---------	---------

Bu hisse senedi için $\sum u_i = 0,09531$, $\sum u_i^2 = 0,00333$

Buradan günlük getirinin standart sapmasının tahmini olarak $\sqrt{\frac{0,00333}{19} - \frac{0,09531^2}{380}} = 0,0123$ elde edilir.

Her yılda 252 iş günü olduğunu kabul edersek $\tau = \frac{1}{252}$ olur ve datanın yıllık standart sapmasının bir tahmini olarak $0,0123\sqrt{252} = 0,195$ elde edilir. Yani yıllık volatilitenin tahmin edilen değeri 0,195'dir. Bu tahminin standart hatası $\frac{0,195}{\sqrt{2 \cdot 20}} = 0,031$ 'dir veya yıllık %3,1'dir.

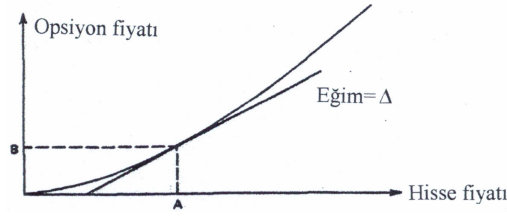
Eğer hisse senedinin temettü ödediği dikkate alınırsa yukarıdaki model şu şekilde adapte edilir. Temettü verilen günler için u_i getirisi $u_i = \ln \frac{S_i + L}{S_{i-1}}$ olarak hesaplanır. Diğer zaman periyotları için $u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$ 'den hesaplanır.

6.12 Korunma Pozisyonları

Opsiyon veya diğer finansal türevleri satan finansal kurumlar pozisyonlarını koruma problemi ile karşı karşıyadır. Bir opsiyonu korumak zordur, çünkü opsiyon fiyatı sattığı varlığın fiyatının değişimine çok duyarlıdır. Ayrıca opsiyon fiyatı volatilitenin değişimlerine karşıda çok duyarlıdır.

6.12.1 Delta Koruması

Bir türev varlığının deltası; kullandığı varlığın fiyatına göre türevinin fiyatının değişim oranı olarak tanımlanır.



Şekil 6.6 Deltanın hesaplanması

Bir hisse senedi üzerine yazılan bir call-opسیونunu ele alalım. A noktası hisse senedinin fiyatı ise, B noktası buna karşı gelen call opsiyonun fiyatıdır. Delta ile bu noktadaki teğetin eğimi verilir. $\Delta = \frac{\Delta c}{\Delta S}$

Buradaki ΔS ; hisse senedi fiyatlarındaki küçük değişimleri, Δc 'de buna karşı gelen call-opسیون fiyatındaki değişimleri gösterir. Bir call-opسیونun deltası 0,6 olsun. Opsiyonun fiyatı 10\$ ve hisse fiyatı 100\$ olsun. Bir yatırımcının 20 opsiyon sözleşmesi, yani 2.000 hisse senedi (her opsiyon için 100 hisse senedi) olacak olan sözleşmeyi sattığını düşünelim. Yatırımcının pozisyonu $(0,6) - (2.000) = 1.200$ hisse senedi alınarak korunabilir. Eğer hisse fiyatı 1\$ artarsa satın alınan hisse senetlerinden 1.200\$ kazanılır ve opsiyon fiyatı $(0,6) \cdot 1\$ = 0,6\$$ artar. Ayrıca yazılan opsiyondan $(0,6) - (2.000) = 1.200\$$ kaybedilmiştir. Eğer hisse fiyatı 1\$ düşerse 1.200\$ satın alınan hisselerden kaybedilir. Fakat opsiyon fiyatı $(0,6) \cdot 1\$ = 0,6\$$ azalacağından opsiyonlardan $(0,6) \cdot 2.000 = 1.200\$$ kazanılmış olur.

Bu örnekte yatırımcının opsiyon pozisyonunun deltası $(0,6) \cdot (-2.000) = -1.200$ 'dür, diğer bir deyimle hisse senedi ΔS kadar artarsa yatırımcı 1.200 ΔS kadar opsiyonda kaybeder. Hisse senedinin deltası tanım gereği 1,0'dır. $\left(\frac{\Delta S}{\Delta S} = 1 \right)$ 1.200 hissedeki long-pozisyonlarının deltası

$(+1.200)$ 'dür. Buna göre yatırımcının korunmuş pozisyonunun deltası 0 (sıfır)'dır. Böyle bir duruma nötr delta denir. Burada yatırımcının delta korumasının nötr olması kısa bir süre içindir. Çünkü delta hisse fiyatları değiştikçe ve zaman geçtikçe değişir. Dolayısıyla delta korunumu kullanılırsa korunma periyodik olarak ayarlanmalıdır. Buna tekrar dengeleme denir. Verdiğimiz örnekte 3 (üç) gün sonra hisse fiyatı 110\$ olabilir. Şekil 6.6'ya göre hisse fiyatındaki artış deltada da bir değişime neden olur. Deltanın 3 (üç) gün sonra 0,6'dan 0,65'e arttığını varsayalım. Buna göre korumanın devam etmesi için ekstradan $(0,05) \cdot (2.000) = 100$ hisselerin daha satın alınması gerekli olur.

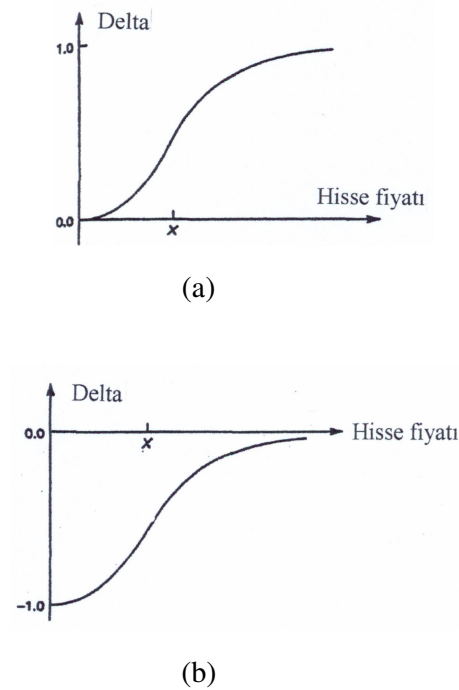
Bu türlü periyodik ayarlamalara dinamik koruma şemaları denir.

6.12.2 Avrupa Call ve Put Opsiyonlarının Deltaları

Kar payı ödemeyen hisse senedi üzerine yapılan Avrupa call opsiyonlarının deltaları için $\Delta = \Phi(d_1)$ olduğu ispat edilir. Buna göre bir Avrupa call opsiyonunda kısa (short) pozisyonunun delta koruması için $\Phi(d_1)$ tane hisse senedinin verilen bir zamanda bir long pozisyonunun elde bulundurulması gerekmektedir. Benzer şekilde bir Avrupa call opsiyonundaki long-pozisyonu korumak için $\Phi(d_1)$ adet hissenin short pozisyonun elde tutulması gerekir.

Kar payı ödemeyen hisse senedi üzerine yazılan Avrupa put-opsiyonlarının deltası $\Delta = \Phi(d_1) - 1$ 'dir.

Bu negatif bir sayıdır. Bunun anlamı bir put opsiyonundaki long pozisyonu korumak için söz konusu hisse üzerinde sürekli olarak long pozisyonlarının değişimi ile mümkündür. Benzer şekilde put opsiyonundaki bir short pozisyon ilgili hisse üzerinde short pozisyonlarının sürekli değişimi ile korunmalıdır.



Şekil 6.7 Bir call opsiyonlu (a) ve put opsiyonun (b) deltasının hisse fiyatlarına göre değişimi

6.12.3 Diğer Opsiyonlar İçin Delta

q kâr payı ödeyen hisse senetlerinin endeksi üzerine yazılan Avrupa call opsiyonları için delta $\Delta = e^{-qt} \cdot \Phi(d_1)$ olarak hesaplanır. Burada; d_1 § 6.9'daki gibi tanımlıdır. Hisse endeksi üzerinde Avrupa put opsiyonları için $\Delta = e^{-qt} \cdot [\Phi(d_1) - 1]$ 'dir.

Döviz üzerine yapılan Avrupa call opsiyonları için $\Delta = e^{-r_f t} \cdot \Phi(d_1)$ 'dir. Burada r_f , yabancı risksiz faiz oranıdır. Put opsiyonları için $\Delta = e^{-r_f t} \cdot [\Phi(d_1) - 1]$ 'dir.

Örnek 6.8 : Bir banka 1,6000 kurdan 1 milyon pound satmak için 6 aylık Avrupa opsiyonu yazsın. Kur 1,6200 ve U.K'de risksiz faiz oranı yıllık %13 olsun. A.B.D'de ise risksiz faiz oranı yıllık %10 olsun. Sterlinin volatilitesi %15 olsun. Buna göre:

$$\begin{aligned} S &= 1,6200 & t &= 0,5 \\ K &= 1,6000 & \sigma &= 0,15 \\ r &= 0,10 & r_f &= 0,13 \end{aligned}$$

Kur üzerindeki put opsiyonun deltası $e^{-r_f t} \cdot [\Phi(d_1) - 1]$ 'dir. Buna göre hesaplanan değerler

$d_1 = 0,0287$, $\Phi(d_1) = 0,5115$ ve $\Delta = -0,458$ 'dir. Bankanın toplam short-pozisyonunun deltası +458.000'dir. Bu nedenle Δ koruması 458.000 poundluk short-sterling pozisyonunun başlangıçta temin edilmesini gerektirir. Bu short-sterling pozisyonunun deltası -458.000 olup opsiyonun pozisyonunun deltasını nötr kılar. Zaman geçtikçe short-pozisyonu değişmelidir.

6.12.4 Bir portföyün deltası

Bir varlık üzerine yazılmış opsiyonlar ve diğer türevlerden oluşan bir portföy varsa, portföyün deltası her bir türevin, deltasının toplamıdır. Eğer π portföyü ω_i ($1 \leq i \leq n$) türevlerinin toplamından oluşuyorsa portföyün deltası $\Delta = \sum_{i=1}^n w_i \Delta_i$ 'dir. Burada Δ_i , i. inci türevin deltasıdır.

Örnek 6.9 : Bir finansal kurum aşağıdaki üç pozisyonda A.B.D doları almak veya satmak için opsiyon sözleşmelerine sahip olsun.

a) 100.000 call-opsiyonda long pozisyon, uygulama fiyatı 0,55 ve uygulama süresi 3 ay,

her opsiyonun deltası 0,533

b) 200.000 call-opsiyonda short pozisyon, uygulama fiyatı 0,56 ve uygulama süresi 5 ay,

her bir opsiyonun deltası 0,468

c) 50.000 put opsiyonda short pozisyon, uygulama fiyatı 0,56 ve uygulama süresi 2 ay, her opsiyonun deltası -0,508

Bütün portföyün deltası: $(0,533) \cdot (100.000) - (200.000) \cdot (0,468) - 50.000 \cdot (-0,508) = -14.900$ 'dir.

Buna göre portföyün deltasını nötr yapmak için 14.900 A.B.D dolarlık bir long pozisyona girilmelidir.

6.12.5 Theta

Türevlerden oluşan bir portföyün thetası θ , portföyün değerinin (π) zamana göre değişimidir. Yani $\theta = \frac{\partial \pi}{\partial t}$ 'dir.

Kar payı ödemeyen hisse senedi için yazılan Avrupa call opsiyon için $\theta = -\frac{S\Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{t}} - rKe^{-rt}\Phi(d_2)$. Burada $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$ ve $\Phi'(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$ 'dir.

Avrupa put opsiyonu için $\theta = -\frac{S\Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{t}} + rK \cdot e^{-rt} \cdot \Phi(-d_2)$ 'dir. q kar payı ödeyen hisse endeksi üzerindeki Avrupa call opsiyonu için

$$\theta = -\frac{S\Phi'(d_1)\sigma e^{-qt}}{2\sqrt{t}} + qS\Phi(d_1)e^{-qt} - rKe^{-rt} \cdot \Phi(d_2) \text{ 'dir.}$$

Avrupa put opsiyonu için $\theta = -\frac{S\Phi'(d_1)\sigma e^{-qt}}{2\sqrt{t}} - qS\Phi(-d_1)e^{-qt} + rKe^{-rt} \cdot \Phi(-d_2)$ q yerine r_f yazmakla yukarıdaki formülle kur üzerindeki Avrupa call ve put opsiyonlarının thetasını verir.

Örnek 6.10 : Hisse endeksi üzerinde dört aylık put opsiyonu ele alalım. Endeksin şimdiki değeri 305, uygulama değeri 300 ve kâr payı yıllık %3 olsun. Yıllık risksiz faiz oranı %8 ve endeksin volatilitesi yıllık %25 olsun. Buna göre;

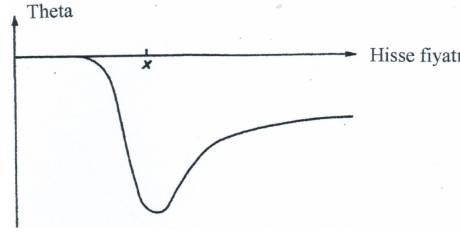
$$S=305 \quad r=0,08 \quad T-t=0,3333$$

$$X=300 \quad \sigma=0,25$$

$$q=0,03$$

$$\text{opsiyonun thetası } \frac{-S\Phi'(d_1)\sigma e^{-qt}}{2\sqrt{t}} - qS\Phi(-d_1)e^{-qt} + rKe^{-rt} \cdot \Phi(-d_2) = -18.15 \text{ 'dir.}$$

Yani eğer 0,01 yıl (veya 2,5 iş günü) içinde endeks veya volatilitenin değerinde herhangi bir değişiklik yoksa opsiyon değeri 0,1815 kadar azalır. Theta değeri bir opsiyon için hemen hemen daima negatiftir. Çünkü vade zamanı azaldıkça opsiyonun değeri azalır. Theta'nın hisse endeksi üzerindeki call-opsiyonu için değişimi Şekil 6.8'de gösterilmiştir. Stok hisse fiyatı çok düşük iken theta 0 (sıfır) a yakındır.



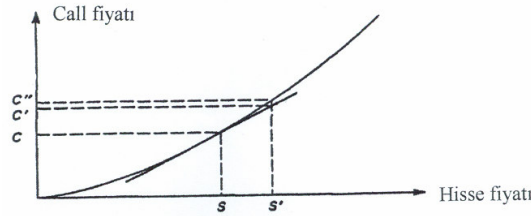
Şekil 6.8 Thetanın hisse endeksi üzerindeki call-opsiyonu için değişimi

6.12.6 Gamma

Bir varlık üzerinde yazılı türevlerden oluşan bir portföyün deltasının varlığın fiyatının

değişimine göre değişmesinin oranına gamma denir. Yani $\Gamma = \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}$, π = Portföyün değeri

Eğer gamma küçükse, delta yavaş değişmektedir. Dolayısıyla portföyü nötr delta muhafaza etmek için sık sık ayarlamaya gerek kalmaz. Eğer gamma mutlak değerce büyükse, deltanın varlığın fiyat değişimlerine hassas olduğunu gösterir. Bu nedenle nötr delta portföyünün uzun süre değişmeden bırakılması risklidir.

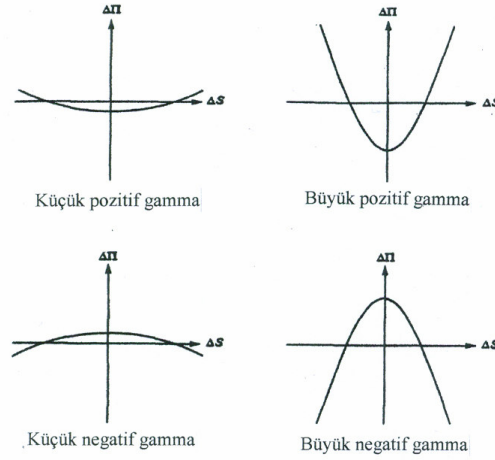


Şekil 6.9 Hisse fiyatı ile opsiyon fiyatı arasındaki bağıntı eğrisi

Şekil 6.9'da görüldüğü üzere hisse fiyatı S'den S'ye değişirse call opsiyonun fiyatı c'den c''ye değişir. Bu değişme gerçekte c'den c'''yedir.

c' ve c'' arasındaki fark bir koruma hatasına neden olur. Bu hata hisse fiyatı ile opsiyon fiyatı arasındaki bağıntının eğriliğine bağlıdır. Gamma bir eğriliği ölçer.

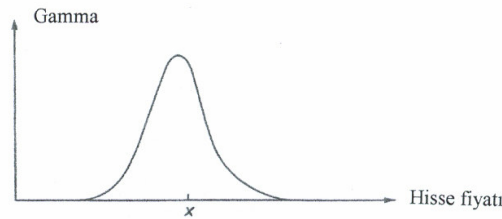
Δt zaman aralığında varlığın fiyatının değişimi ΔS olsun. $\Delta \pi$ 'de bu süre içinde portföyün değerinin değişimi olsun. $(\Delta t)^2$ ve daha yüksek mertebeden terimleri ihmal edersek nötr delta portföyü için $\Delta \pi = \theta \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2$ elde edilir.



Şekil 6.10 $\Delta \pi$ ve ΔS arasındaki bağıntılar

Şekil 6.10'da $\Delta \pi$ ve ΔS arasındaki bağıntılar incelenmektedir. Eğer gamma pozitif ise portföyün değeri azalır, eğer S'nin değerinde herhangi bir değişme yoksa. Fakat portföyün değeri artar, eğer S'nin değerinde pozitif veya negatif bir değişme varsa. Gamma negatif ise bunların tersi doğrudur. Kar payı ödemeyen hisse üzerinde olan call veya put opsiyonu için

$\Gamma = \frac{\Phi'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}}$ 'dir. Bu değer daima pozitiftir ve S ile değişimi Şekil 6.11'de verilmiştir.



Şekil 6.11 Gammanın S ile değişimi

Sürekli olarak q kâr payı ödeyen hisse endeksi üzerindeki Avrupa call ve put opsiyonu için

$\Gamma = \frac{\Phi'(d_1)e^{-qt}}{S\sigma\sqrt{t}}$ 'dir.

Örnek 6.11 : Hisse endeksi üzerinde 4 aylık put opsiyonu ele alalım. Endeksin bugünkü değeri 305, ve uygulama fiyatı 300. Kâr payı yıllık %3, risksiz faiz oranı yıllık %8 ve endeksin volatilitesi yıllık %25 olsun. Yani

$$S=305 \quad q=0,03 \quad \sigma=0,25$$

$$K=300 \quad r=0,08 \quad t=0,3333$$

Buna göre $\Gamma = \frac{\Phi'(d_1)e^{-qt}}{S\sigma\sqrt{t}} = 0,00857$ 'dir.

Buna göre endeksin bir artması opsiyon deltasını yaklaşık 0,00857 arttırır.

6.12.7 Vega

Bir varlığa dayalı türevlerden oluşan bir portföyün değerlerinin varlığın volatilitelerinin değişime bağlı olarak değişme oranına portföyün vegası (Λ) denir. Vega'nın mutlak değerce büyük olması portföyün, volatilitenin değişimine hassas olduğunu gösterir.

$$\Lambda = \frac{\partial \pi}{\partial \sigma}$$

Kar payı ödemeyen hisse üzerindeki Avrupa call ve put opsiyonu için $\Lambda = S\sqrt{t} \cdot \Phi'(d_1)$ dir. q oranında kâr payı ödeyen hisse veya hisse endeksi üzerindeki Avrupa call veya put opsiyonunun vegası $\Lambda = S\sqrt{t} \cdot \Phi'(d_1)e^{-qt}$ 'dir.

6.12.8 Rho

Türevlerden oluşan bir portföyün Rho'su (ρ) portföyün değerinin faiz oranına göre değişimidir. Yani portföyün değerinin faiz oranlarına hassasiyetinin ölçüsüdür.

$$\rho = \frac{\partial \pi}{\partial r}$$

Kâr payı ödemeyen hisse üzerindeki Avrupa call-opsiyonları için $\rho = K \cdot te^{-rt} \cdot \Phi(d_2)$

ve hisse üzerindeki Avrupa put opsiyonu için $\rho = -Kt \cdot e^{-rt} \cdot \Phi(-d_2)$ 'dir.

7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada amaçlanan vadeli işlemlerin matematiksel yapısının incelenmesiydi. Çünkü bu yapının vadeli işlemlerle ilgilenenlerce bilinmesi gerekiyordu. Bu matematiksel yapı yurt dışında birçok kitap (Cox, J. ve Rubinstein M.,(1985), Elliott, R. J. ve Kopp, P.E., (2005), Hull, J. C., (1991–1993), Neftçi, S.N., (1996), Ross, S.M., (1999)) ve makaleler de (Black, F. ve Scholes, M., (1973), Merton, R. C., (1973), Stoll, H. R. ve Whaley R.E., (1986), Stoll, H. R., (1969)) incelenmiştir. Ancak yurdumuzda vadeli işlemlerin matematiksel yapısını anlatan çok az sayıda kitap ve makale vardır. (Erol, Ü., (1999), Kayacan, M., (1999a–1999b), Oryan, M. H., (2001)). Bu çalışma ile bu boşluğun bir nebze doldurulmuş olacağını ümit ediyorum. Dolayısıyla vadeli işlemlerle ilgilenenlerin konunun matematiksel yapısını en temel bilgilerle anlamaları bu çalışma ile sağlanmış olmaktadır.

Bu çalışmanın üzerine, kullanılan matematiksel yöntemlerin daha da karmaşıklarını kullanarak daha geniş çalışmaların yapılması mümkündür. Bunun için Elliott, R. J. ve Kopp, P. E., (2005)'nin kitabı temel alınarak bu çalışma yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Black, F. ve Scholes, M., (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy, 81, 637-654.
- Bachelier, Louis, (1900), “Theorie de la Speculation”, Annales de l’Ecole Normale Supérieure 17, 21-86.
- Cox, J. ve Rubinstein M., (1985), “Options Markets”, Prentice-Hall, New York.
- Elliott, R. J. ve Kopp, P. E., (2005), “Mathematics of Financial Markets”, Springer, New York.
- Erol, Ü., (1999), “Vadeli İşlem Piyasaları Teori ve Pratik”, İMKB, İstanbul.
- Hull, J. C., (1991), “Intoduction to Futures and Options Markets”, Prentice-Hall, New Jersey.
- Hull, J. C., (1993), “Options, Futures and Other Derivatives”, Prentice-Hall, New Jersey.
- İMKB, (2003), “Sermaye Piyasası ve Borsa Temel Bilgiler Kılavuzu”, İstanbul.
- Kayacan, M., Bolat, M., Yılmaz, M. K., Başaran, M. Y., Ustaoglu, Z. M., (1999a), “Sermaye Piyasası Araçlarına Dayalı Future ve Option Sözleşmelerinin Fiyatlanması”, İMKB, İstanbul.
- Kayacan, M., Bolat, M., Yılmaz, M. K., Başaran, M. Y., Ustaoglu, Z. M., (1999b), “Faiz Oranına Dayalı Vadeli İşlemler”, İMKB, İstanbul.
- Merton, R. C., (1973), “The Relationship Between Put and Call Prices: Comment”, Journal of Finance, 183-184.
- Neftçi, S. N., (1996), “An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives” Academic Pres, New York.
- Oryan, M. H., (2001), “Vadeli İşlemlerin Matematiksel Yapısı ve Uygulaması Eğitim Semineri”, İ.Ü.F.F., İstanbul.
- Ross, S. M., (1999), “An Introduction to Mathematical Finance”, Cambridge University Press, Cambridge.
- Stoll, H. R. ve Whaley, R. E., (1986), “New Option Instruments: Arbitrageable Linkages and Valuation”, Advances in Futures and Options Research 1(A), 25-62
- Stoll, H. R., (1969), “The Relationship Between Put and Call Option Prices”, Journal of Finance, 319-332.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 20.06.1978

Doğum yeri İstanbul

Lise 1989-1996 Özel Gürsoy Lisesi

Lisans 1996-2000 İstanbul Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Ped. Formasyon 2000-2001 İstanbul Üniversitesi Hasan Ali Yücel Eğitim Fak.

Çalıştığı kurumlar

2002-2005 Göztepe İlköğretim Okulu (Matematik Öğretmeni)
2005-Devam ediyor Necip Fazıl Kısakürek Lisesi
(Matematik Öğretmeni)