

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DAUGAVET ÖZELLİKLİ BANACH UZAYLARI

Matematikçi Didem TETİK

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ömer GÖK

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	4
3. DAUGAVET ÖZELLİĞİ.....	9
4. L_1 'in BÖLÜMLERİ.....	27
5. ANTI-DAUGAVET ÖZELLİĞİ.....	35
6. SONUÇLAR.....	40
KAYNAKLAR.....	41
ÖZGEÇMİŞ.....	43

SİMGE LİSTESİ

$C[0,1]$	$[0,1] \subset \mathbb{R}$ üzerindeki sürekli fonksiyonların kümesi
$[f]$	f 'nin denklik sınıfı
$L_1[0,1]$	$[0,1]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların kümesi
$\ell_\infty(K)$	K üzerinde sınırlı reel değerli fonksiyonların sup-normlu uzayı
$L(X,Y)$	X 'den Y 'ye tanımlı sürekli lineer operatörlerin uzayı
$\ T\ $	T 'nin normu
I	Birim operatör
$\text{FIN}(\square)$	$\square$ 'nin alt kümesi olan sonlu bir küme
$S(x^*, \varepsilon)$	$x^* \in S_{X^*}$ ve $\varepsilon > 0$ ile belirlenmiş B_{X^*} 'in dilimi
$\text{lin}(e_1, e_2, \dots, e_n)$	$e_1, e_2, \dots, e_n$ vektörlerinin gerdiği lineer alt uzay
$\cap$	Arakesit (kesişim)
μ	Ölçüm
$\sigma(T)$	T operatörünün spektrumu
X^U	X 'in ultra gücü
$Y^\perp$	Y 'nin diki
$Y^{\perp\perp}$	Y 'nin ikinci diki
X^*	X uzayının duali
X^{**}	X uzayının ikinci duali
B_X	X Banach Uzayının birim yuvarı
B_{X^*}	X^* uzayının birim yuvarı
$S _X$	S 'nin X 'e kısıtlanması
$\sup$	Supremum
$\inf$	İnfimum
$\text{ex}C$	C kümesinin uç(extrem) noktalarının kümesi
χ_B	B 'nin karakteristik fonksiyonu
$\langle x, x^* \rangle$	Dual çift
$\mathbb{Q}$	Reel sayılar kümesi
h.h.h.y.	hemen hemen her yerde
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Ömer GÖK'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca manevi desteklerini esirgemeyen aileme de çok teşekkür ediyorum.

ÖZET

Eğer rankı 1 olan her T operatörü $T : X \rightarrow X$ $\|I + T\| = 1 + \|T\|$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman Banach Uzayına, Daugavet özelliğine sahiptir, denir.

Biz her zayıf kompakt operatörün bu eşitliği sağladığını ve bu X kümesinin ℓ_1 'in bir kopyasını da kapsadığını göstereceğiz. Buna rağmen L_1 'in kopyasını kapsamaz.

Ayrıca;

$J : X \rightarrow Y$ bir doğal gömme olmak üzere,

$\|J + T\| = 1 + \|T\|$ denklemini sağlayan $T : X \rightarrow Y$ operatörleri ve $X \subset Y$ uzaylarının çiftleri üzerinde çalışıldı.

Bu bizi, Daugavet özellikli bir Banach Uzayının şartsız tabanlı bir uzay içerisine gömülemeyeceği sonucuna ulaştırır.

Diğer yönden;

$\|I + T\| = 1 + \|T\|$ şartını sağlayan operatörlerin kümesi oldukça küçük ve düzgünlük şartı terimlerinde karakterizasyonlarını veren uzaylar incelendi.

Anahtar Kelimeler: Banach Uzayı, Rank-1 operatörler, kompakt operatör, zayıf kompakt operatör, uç nokta.

ABSTRACT

A Banach space X is said to have the Daugavet property if every operator $T : X \rightarrow X$ of rank 1 satisfies $\|I + T\| = 1 + \|T\|$. We show that then every weakly compact operator satisfies this equation as well and that X contains a copy of ℓ_1 . However, X need not contain a copy of L_1 . Also, pairs of spaces $X \subset Y$ are studied and operators $T : X \rightarrow Y$ satisfying $\|J + T\| = 1 + \|T\|$, where $J : X \rightarrow Y$ is the natural embedding. This leads to the result that a Banach space with the Daugavet property does not embed into a space with an unconditional basis. In another direction, it is investigated spaces where the set of operators with $\|I + T\| = 1 + \|T\|$ is as small as possible and give characterisations in terms of a smoothness condition.

Keywords: Banach space, Rank-1 operators, compact operator, weakly compact operator, extreme point.

1. GİRİŞ

Daugavet denklemi olarak bilinen norm eşitliği, T lineer operatör olmak üzere;

$$\|I + T\| = 1 + \|T\| \quad (1.1)$$

denklemi $C[0,1]$ üzerindeki kompakt operatörler için sağlanır. Aynı sonuç, $L_1[0,1]$ üzerindeki kompakt operatörler için de elde edilmiştir ve bunu Lozanovskii bulmuştur.

Yıllar geçtikçe bu çeşitli uzaylar üzerindeki operatörlerin daha geniş sınıflara yayıldığı görülüyor. Bu konuda yapılmış başka çalışmalar için, (Abramovich, 1991), (Foiş ve Singer, 1965), (Kadets, 1996), (Plichko ve Popov, 1990), (Weis, 1984), (Werner, 1997), (Wojtaszczyk, 1992) kaynaklar önerilir.

Özellikle $L_1[0,1]$ 'in belli büyük alt uzayları üzerindeki tanımlı $L_1[0,1]$ 'in sabit olmayan bir kopyası üzerindeki operatörleri için ayrık noktasız K , kompakt uzay olmak üzere $C(K)$ 'nin belli kapsamaya göre büyük alt uzayları üzerinde tanımlı $C[0,1]$ 'in sabit olmayan bir kopyasındaki operatörleri için Daugavet denklemi sağlanır.

Bu tezin 3. bölümünde, değişen Rank-1 operatörleri için uygun bir durumu izleyerek zayıf kompakt operatörleri (Güçlü Radon Nikodym operatörleri için bile bir problem.) basit bir lemma aracılığı ile geçerliliğini gösteririz.

Bunun çeşitli enteresan sonuçları var. Örneğin, eğer X üzerindeki bütün rankı 1 olan operatörler Daugavet özelliğini sağlarsa bu, X 'in ℓ_1 'in bir kopyasını da kapsadığını gerektirir.

Rank-1 operatörleri için Daugavet denkleminin araştırılması Wojtaszczyk'nin çalışmasındaki sonuçlarla önerilir.

Aslında biz daha geniş bir yaklaşım gösterip bir kapalı alt uzay X ile birlikte bir Y Banach uzayı ve $J : X \rightarrow Y$ doğal gömmesini düşünüyoruz ve $J : X \rightarrow Y$ 'den sınıfı için

$$\|J + T\| = 1 + \|T\| \quad (1.2)$$

denklemi üstünde çalışıyoruz.

Eğer rankı 1 olan operatörler (1.2) denklemini sağlarsa (X,Y) çiftine Daugavet özelliğine sahiptir, deriz.

Bu tezde, Daugavet çiftlerinin ve uzaylarının kalıtsal özelliklerini çalışıyoruz ve Daugavet özelliğinin bir ayrılabilir “0”lı alt uzaylarla ve M-idealleriyle kalıtsal olduğunu ispatlayacağız.

Ne $C[0,1]$ ne de $L_1[0,1]$ ’in şartsız tabanları olmadığı iyi bilinen gerçeği, bu uzaylar üzerindeki sonlu Rank operatörleri için Daugavet özelliğinden kolaylıkla elde edilir.

Daha genel sonuç elde etmek için $C[0,1]$ ve $L_1[0,1]$ ’in bile bir şartsız tabana sahip uzaylara gömülemediğini ve (1.2) denklemini araştırmak gerekir. Bu (Kadets ve Shvidkoy)’da yapılmıştır. O makaledeki teknikleri kullanarak eğer X ayrılabilir Y uzayının bir alt uzayı ve X Daugavet özelliğine sahipse, Y yeniden normlanabilir ki bu yeni norm X ’in üzerindeki başlangıç normu ile uyuşur ve (X,Y) ikilisi Daugavet özelliğini sağlar. Bu Daugavet özellikli hiçbir uzayın koşulsuz tabanlı uzay içine gömülemeyeceğini gösterir.

Bölüm 4’de $L_1 = L_1[0,1]$ ’nin kapsamaya göre küçük alt uzayları ile L_1 ’in bölüm uzayları ile ilgileneceğiz.

Özellikle, Daugavet özelliğine sahip L_1 ’in bir kopyasını içermeyen bir uzay sergileyeceğiz.

Örneğimiz, 3 uzay(Y bir uzay olmak üzere) problemi üzerindeki çalışmasında Talagrand tarafından oluşturulmuş L_1/Y dir, (Talagrand, 1990).

Bölüm 5’de (Abramovich, 1991) ve (Kadets, 1996)’ın sonuçlarını şu soru üzerine genişleteceğiz.

Eğer $T : X \rightarrow X$, $\|T\| \in \sigma(T)$, bir operatör ise T ’nin kolayca (1.1)’i sağladığı görülür.

Bu sınıftaki hiçbir operatör (1.1)’i sağlamıyorsa X ’in anti-Daugavet özelliğine sahip olduğu söylenir.

Anti-Daugavet özelliğinin Tanım 5.1’de vereceğimiz X ’in, düzgünlük özelliği ile yakından ilgisi olacağını göstereceğiz.

Gerçekten, anti-Daugavet özelliğini kompakt operatörler için karakterize edebileceğiz. Bu çizgiler ışığında standart notasyonları kullanacağız.

Örneğin, X Banach uzayının birim yuvarını B_X , birim küreyi de S_X ile göstereceğiz.

X^* , X 'in Banach duali olmak üzere,

$x^* \in X^*$ için

$S(x^*, \varepsilon) = \{x \in B_X : x^*(x) \geq 1 - \varepsilon\}$ notasyonunu $x^* \in S_{X^*}$ ve $\varepsilon > 0$ tarafından belirlenen B_X 'in dilimi için, exC ile de C kümesinin uç noktalarının kümesini göstereceğiz. Bu çalışmada sonuçlarımız küçük değişikliklerle kompleks Banach uzayları için geçerli olsa da biz reel Banach uzayları ile ilgileneceğiz.

Bu çalışmanın ana sonucu (Kadets, Shvidkoy, Sirotkin ve Werner, 1997)'da vardır.

2. ÖN BİLGİLER

Burada, tezde geçen bazı önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1: E bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \|x\|$ tanımlı dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa E üzerinde bir norm denir.

1. Her $x \in E$ için $\|x\| \geq 0$
2. $x \in E$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. Her $x \in E$ ve $a \in K$ için $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$
4. Her $x, y \in E$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

Tanım 2.2: X bir normlu lineer uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisinin bu uzaya ait limiti varsa, X 'e Banach Uzayı denir.

X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ lineer operatörünün normu, $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ şeklindedir.

K kompakt Hausdorf Uzayı olmak üzere, K üzerinde tanımlı, sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonların kümesi $C(K)$ ile gösterilir. Burada, $f \in C(K)$ için $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$ 'dir.

X bir Banach uzayı olsun. $C(K, X)$; K 'dan X 'e sürekli fonksiyonların uzayıdır. $f \in C(K)$ için $\|f\| = \sup \|f(x)\|$ 'dir.

Tanım 2.3: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli sürekli ise f 'ye sürekli, lineer fonksiyonel denir.

X 'de tanımlı, sürekli, lineer fonksiyonellerin uzayına X 'in topolojik duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2.4: Bir Banach Uzayı X 'de bir $\{x_n\}$ dizisi, eğer her bir $x^* \in X^*$ için $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ sağlarsa $x_n \rightarrow x$, $x \in X$ 'e zayıf yakınsıyor, denir.

Tanım 2.5: Bir X Banach Uzayının X^* dualinde bir $\{x_n^*\}$ dizisi, eğer her bir $x \in X$ için $x_n^*(x) \rightarrow x^*(x)$ sağlarsa $x_n^* \rightarrow x^*$, $x^* \in X^*$ 'a zayıf* yakınsıyor, denir.

Tanım 2.6: $T : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör, X ve Y normlu uzaylar olsun. X 'deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y 'de bir yakınsak alt dizisi varsa T 'ye kompakt operatör, denir.

Tanım 2.7: X, Y Banach Uzayı ve $T : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. X 'deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y 'de bir zayıf yakınsak bir alt dizisi varsa T 'ye zayıf kompakt operatör, denir.

X 'den Y 'ye tanımlı lineer, sürekli, normlu uzayların kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir.

Bir X Banach Uzayındaki bütün sınırlı dizilerin vektör uzayı, $\ell_\infty(X)$ ile gösterilir. $\ell_\infty(X)$ supremum normuna göre bir Banach Uzayıdır. Yani $x = (x_n) \in \ell_\infty(X)$ için $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$ dir.

Tanım 2.8: E ve F normlu uzaylar olsun. $T : E \rightarrow F$ dönüşümü bire-bir, örten, lineer, sürekli ve her $x \in E$ için $\|Tx\| = \|x\|$ oluyorsa T dönüşümüne bir örten izometri ve E ile F uzaylarına da izomorfik olarak izometrik uzaylar denir.

Tanım 2.9: Eğer V, W vektör uzayının bir alt uzayı ise $w \in W$ için $[w] = w + V = \{w + v : v \in V\}$ şeklinde tanımlanan tüm denklik sınıflarının vektör uzayına $\{[w] : w \in W\}$, W/V bölüm vektör uzayı denir.

X normlu lineer uzay, $M \subset X$ 'in kapalı özalt uzayı ise X/M , $[x] \in X/M$ için $\|[x]\| = \inf \{\|x + m\| : m \in M\}$ normuna göre bir normlu uzayıdır.

X Banach Uzayı ise X/M de bir Banach Uzayıdır.

Tanım 2.10: Ω bir küme; Σ, Ω kümesinin alt kümesinin bir σ -cebiri; Π, Σ üzerinde σ -toplamsal ölçü olmak üzere, ölçü uzayı (Ω, Σ, Π) şeklinde gösterilir. Eğer Π 'de her bir B Borel alt kümesi için $f^{-1}(B) \in \Sigma$ ise $f : \Omega \rightarrow B$ fonksiyonuna ölçülebilir, denir.

Tanım 2.11: E ve F Banach Uzayları olsun. E ile F arasındaki Banach-Mazur uzaklığı;

$d(E, F) = \inf \{\|T\| \|T^{-1}\| : T : E \rightarrow F \text{ izomorfizm}\}$ 'dir.

Geometrik olarak, B_E ve B_F , E ve F uzaylarının birim kürelerini ve d , B_E ile B_F birim küreleri arasındaki uzaklığı gösterebilir. Eğer $T: E \rightarrow F$ bir izomorfizma ise o zaman $d(E, F) < d$ 'dir. Öyle ki, $B_F \subset T(B_E) \subset d B_F$.

Eğer E ve F sonlu boyutlu uzaylar ve E ve F uzaylarının boyutları eşitse o zaman $T: E \rightarrow F$ izomorfizmi vardır ki, $\|T\| \|T^{-1}\| = d(E, F)$ 'dir.

Tanım 2.12: X topolojik uzayının açık kümeleri ile üretilen σ -cebiri Borel σ -cebiri, elemanlarına da Borel kümeleri denir.

Tanım 2.13: Eğer F , X topolojik uzayı üzerinde tanımlı bir Borel σ -cebiri ise o zaman $m: F \rightarrow \mathbb{R}$ ölçümüne Borel ölçüsü, denir.

Tanım 2.14: μ , Ω kompakt topolojik uzay üstünde bir Borel ölçüsü olmak üzere, $w \in \Omega$ için eğer $\mu(\{w\}) = 0$ ise μ 'ye atomik olmayan ölçüm denir.

Tanım 2.15: V , W vektör uzayları $T: V \rightarrow W$ bir operatör olsun. Eğer T operatörünün görüntüsü bir boyutlu ise T operatörüne rank-1 operatörü denir.

Eğer $T: V \rightarrow W$ rank-1 operatörü ve w , T 'nin görüntüsünde sıfırdan farklı bir vektör ise $v \in V$ için $T(v) = f(v)w$ eşitliğini sağlayan V üzerinde f lineer fonksiyoneli vardır. $f(v)w = (f \otimes w)v$ ve $T = f \otimes w$ şekillerinde de yazılabilir.

Dikkat edelim ki, X ve Y Banach Uzaylarında tanımlı $T = x^* \otimes y: X \rightarrow Y$ rank-1 operatörünün norm adjointi $T^* = y \otimes x^*$ 'dir. Burada y , Y^* 'da tanımlı lineer, sürekli fonksiyoneldir. Aşağıda dualite eşitliği verilmiştir.

$$\langle (x^* \otimes y) x, y^* \rangle = x^*(x) y^*(y) = \langle x, (y \otimes x^*) y^* \rangle$$

Tanım 2.16: Δ sonsuz bir küme olsun. Δ 'nın alt kümelerinin boş olmayan bir F koleksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa F 'ye süzgeç denir.

1. $\emptyset \notin F$
2. $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$
3. $A \in F$ ve $A \subseteq B \Rightarrow B \in F$ dir.

F bir süzgeç olsun. Kapsamaya göre maksimal ise F 'ye ultrasüzgeç denir. Yani bir ultrasüzgeç demek başka bir ultrasüzgeçte kapsanılmazdır.

$F \subseteq G$ ve G bir süzgeç ise $F=G$ 'dir.

Bir ultrasüzgeç F için, eğer $\bigcap_{A \in F} A = \emptyset$ ise F 'ye serbest ultrasüzgeç denir.

Tanım 2.17: $\ell_\infty(X)$ vektör uzayındaki tüm dizilerin U serbest ultrasüzgeci boyunca sıfıra yakınsamasıyla oluşan N_U , $\ell_\infty(X)$ 'in bir kapalı vektör alt uzayıdır ve $N_U = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty(X) : x_n \xrightarrow{u} 0 \right\}$ 'dir.

$\ell_\infty(X) / N_U$ bölüm Banach Uzayına, serbest ultrasüzgeç U 'ya göre X 'in ultragücü denir. $X_U = \ell_\infty(X) / N_U$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.18: $\{X_n\}$, Banach Uzaylarının bir dizisi olsun. O zaman $\{X_n\}$ 'in L_p -toplamı,

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_p := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in X_n, \|x\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.19: X herhangi bir lineer uzay ve $T(A) \subset X$, A 'nın tanım kümesi olmak üzere, $A : T(A) \rightarrow X$ 'e bir lineer operatör olsun. $Ax_0 = \lambda_0 \cdot x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in T(A)$, $x_0 \neq 0$ vektörü ve bir λ_0 sayısı varsa λ_0 sayısına A operatörünün bir özdeğeri, x_0 'a da bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü denir.

Tanım 2.20: X, Y Banach Uzayları, $T : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Eğer $x \in X$ için $K\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|$ eşitsizliğini sağlayan $K > 0$ ve $M > 0$ sabitleri bulunabiliyorsa T operatörüne gömme operatör, denir.

Teorem 2.21 (Banach-Steinhaus): E, F Banach Uzayları, $T_n : E \rightarrow F$ lineer, sınırlı, operatörlerin bir dizisi olsun. Her $x \in E$ için $\lim_n T_n x = Tx$ ise T lineer ve sınırlıdır.

Teorem 2.22 (Baire-Kategori): (X, d) tam bir metrik uzay ve A_n ($n \in \mathbb{N}$), X içinde kapalı alt kümelerin bir dizisi olsun. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesinin içi boş değilse en az bir A_n kümesinin içi boş değildir.

Teorem 2.23 (Krein-Milman): Bir X vektör uzayının bir F konveks kümesi X 'deki bir yerel konveks topoloji τ için kompaktsa, o zaman F bir uç noktaya sahiptir.

Ayrıca F , uç noktaların bir τ -kapalı konveks kabuğudur.

Tanım 2.24: $\square$ üzerinde V bir vektör uzayı ve $X \subset V$ olsun. X 'in elemanlarının bir konveks kombinasyonu; $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, $n > 0$, $x_i \in X$ toplamının bir lineer kombinasyonudur.

X 'in bütün konveks kombinasyonlarının kümesi $\text{co}(X)$ ile gösterilir ve buna X 'in kapalı konveks kabuğu denir.

Tanım 2.25: E Banach latis, X ile Y Banach Uzayı, gerçekçe sınırlı, λ -ölçülebilir fonksiyonlarının $f : \Omega \rightarrow X$ bir koleksiyonunu $L^\infty(\lambda, X)$ ile gösterelim.

Bochner integrallenebilir fonksiyonlar $f : \Omega \rightarrow X$ kolleksiyonunu $L^1(\lambda, X)$ ile gösterelim.

Sınırlı, lineer operatör $T : L^1(\lambda) \rightarrow X$ için eğer bir $g \in L^\infty(\lambda, X)$ varsa ki her $f \in L^1(\lambda)$ için $Tf = \int f g d\lambda$ ise T 'ye temsil edilebilir operatör, denir.

Eğer tüm sonlu ölçülebilir $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ uzayı için tüm sınırlı, lineer operatörleri $T : L^1(\lambda) \rightarrow X$ temsil edilebilir ise X 'e Radon-Nikodym özelliğine sahiptir, denir.

Tanım 2.26: C , reel Banach Z Uzayının boş olmayan bir konveks alt kümesi olsun. Bir $c \in C$ noktası için,

1. Eğer her $u, v \in C$ ve bir $\alpha \in (0, 1)$ için $c = \alpha u + (1 - \alpha)v$ ise $u = v = c$ sağlanırsa c 'ye bir uç nokta denir.
2. Her $z \in C \setminus \{c\}$ için $z^*(c) > z^*(z)$ eşitsizliğini sağlayan $z^* \in Z^*$ bulunursa c 'ye bir çukur nokta denir.
3. Eğer c bir çukur nokta ve $\|z_n - c\| \rightarrow 0$ ancak ve ancak $z^*(z_n) \rightarrow z^*(c)$ sağlayan $z^* \in Z^*$ fonksiyoneli ve C 'de $\{z_n\}$ dizisi bulunursa, c 'ye bir güçlü çukur nokta denir.

3. DAUGAVET ÖZELLİĞİ

X , bir Y Banach uzayının alt uzayı olsun ve $J : X \rightarrow Y$ içine dönüşüm operatörü olsun.

(X, Y) ikilisi operatörlerin M sınıfı için $M \subset L(X, Y)$ eğer bütün $T \in M$

$$\|J + T\| = 1 + \|T\| \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlıyorsa (X, Y) çifti Daugavet özelliğine sahiptir, denir.

Eğer $X=Y$ ise, X 'in M 'ye göre Daugavet özelliğine sahip olduğunu söyleriz.

Eğer M rank-1 operatörlerinin sınıfı ise X veya (X, Y) çiftine Daugavet özelliğine sahiptir, denir.

Eğer T , (3.1)'i sağlıyorsa her $\lambda > 0$ değerleri için $\lambda \cdot T$ (3.1)'i sağlar.

M bir koni ise, (3.1)'i doğrulamak için her $T \in M$, $\|T\| = 1$ için (3.1)'i sağlamak yeterlidir.

X^* , Daugavet özelliğine sahipse X 'in de sahip olduğu açıktır. Fakat bunun tersi yanlıştır (Örneğin: $X=C[0,1]$). Ayrıca, Daugavet özellikli 1-tamamlanmış alt uzayı bu şartı sağlamayabilir, (1 boyutlu alt uzayları örnek olarak verebiliriz).

Buradaki, çalışmamızın ana lemması aşağıdadır.

Lemma 3.1: (X, Y) Daugavet özelliğine sahip olsun. O zaman

(a) Her $y_0 \in S_Y$ ve B_X 'in her dilimi $S(x_0^*, \varepsilon_0)$ için B_X 'in başka bir $S(x_1^*, \varepsilon_1) \subset S(x_0^*, \varepsilon_0)$ dilimi var ki her $x \in S(x_1^*, \varepsilon_1)$ için $\|x + y_0\| \geq 2 - \varepsilon_0$ eşitsizliğini sağlar.

(b) Her $x_0^* \in S_{X^*}$ ve her zayıf* dilim B_{Y^*} 'in $S(y_0, \varepsilon_0)$ ($y_0 \in S_Y \subset S_{Y^{**}}$) dilimi için B_{Y^*} 'in başka bir $S(y_1, \varepsilon_1) \subset S(y_0, \varepsilon_0)$ zayıf* dilimi vardır ki her $y^* \in S(y_1, \varepsilon_1)$ için $\|x_0^* + y^*|_X\| \geq 2 - \varepsilon_0$ eşitsizliğini sağlar.

İspat: İki bölümün de ispatı benzerdir. Bundan dolayı sadece (a)'nın ispatını vereceğiz.

$T : X \rightarrow Y$, $Tx = x_0^*(x)y_0$ dönüşümünü tanımlayalım. O zaman $\|J^* + T^*\| = \|J + T\| = 2$ dolayısı ile bir $y^* \in S_{Y^*}$ fonksiyoneli vardır ki $\|J^*y^* + T^*y^*\| \geq 2 - \varepsilon_0$ ve $y^*(y_0) \geq 0$ ’dır.

$$x_1^* = \frac{J^*y^* + T^*y^*}{\|J^*y^* + T^*y^*\|}, \quad \varepsilon_1 = 1 - \frac{2 - \varepsilon_0}{\|J^*y^* + T^*y^*\|}$$

olarak alalım.

Verilen $x \in S(x_1^*, \varepsilon_1)$ için

$$\langle (J^* + T^*)y^*, x \rangle \geq (1 - \varepsilon_1) \|J^*y^* + T^*y^*\| = 2 - \varepsilon_0 \text{ eşitsizliğine sahibiz.}$$

O halde,

$$y^*(x) + y^*(y_0) x_0^*(x) \geq 2 - \varepsilon_0 \quad (3.2)$$

eşitsizliği $x_0^*(x) \geq 1 - \varepsilon_0$ olmasını gerektirir. Yani $x \in S(x_0^*, \varepsilon_0)$ ’dır. Üstelik (3.2)’den $y^*(x) + y^*(y_0) \geq 2 - \varepsilon_0$ ve dolayısıyla $\|x + y_0\| \geq 2 - \varepsilon_0$ eşitsizliklerine sahibiz.

Ters cümleinin geçerli olduğu gerçektir. İleri kaynaklar için Lemma 3.1’in aşağıdaki basitleşmiş versiyonu da şu şekilde verilir.

Lemma 3.2: Aşağıdaki iddialar birbirine denktir:

(i) (X, Y) ikilisi Daugavet özelliğine sahiptir.

(ii) Her $y \in S_Y$ ve $\varepsilon > 0$ için bir $x^* \in S_{X^*}$ vardır ki $x^*(x) \geq 1 - \varepsilon$ ve $\|x + y\| \geq 2 - \varepsilon$ eşitsizliklerini sağlayan bir $x \in S_X$ vardır.

(iii) Her $y \in S_Y$, $x^* \in S_{X^*}$ ve $\varepsilon > 0$ için bir $y^* \in S_{Y^*}$ vardır ki $y^*(y) \geq 1 - \varepsilon$ ve $\|x^* + y^*\|_X \geq 2 - \varepsilon$ eşitsizliklerini sağlayan bir $x \in S_X$ vardır.

Bu lemmaların bir sonucu, eğer (X, Y) Daugavet özelliğine sahip ise B_X ’in her dilimi ve B_{X^*} ’in her zayıf* dilimi 2 çapına sahiptir.

Özellikle, (Wojtaszczyk, 1992)'ye ait bir gerçek, X 'in Radon-Nikodym özelliğinde kusurlu olduğunu gösterir.

Teorem 3.3: Eğer, (X,Y) çifti Daugavet özelliğine sahip ise, o zaman (X,Y) zayıf kompakt operatörler için de Daugavet özelliğine sahiptir.

Aslında ispat, Daugavet özelliğinin operatörlerin daha geniş sınıfı için sağlandığını gösterecektir. Yani, $\overline{T(B_X)}$ 'in Radon-Nikodym kümesi olduğu T operatörleri anlamına gelen kuvvetli Radon-Nikodym operatörleridir.

Bu sonucun ℓ_1 'in bir kopyasını sabit tutulmayan operatörlere genişletilip genişletmediğine karar vermek ilginç olacak.

İspat: $T : X \rightarrow Y$, $\|T\|=1$, olmak üzere zayıf kompakt bir operatör olsun. Öyleyse $K = \overline{T(B_X)}$ zayıf kompakttır ve bunun için çukur noktalarının kapalı konveks kabuğu ile çıkarılır. Gerçekten K , onun kuvvetli kapalı konveks kabuğudur, (Bourgain, 1976).

Her $\varepsilon > 0$ için K 'nin y_0 çukur noktası vardır ki, $\|y_0\| > \sup \{ \|y\| : y \in K \} - \varepsilon = 1 - \varepsilon$ ve bir δ için $(0 < \delta < \varepsilon)$ $S = \{y \in K : y^*(y) \geq 1 - \delta\}$ dilimi ε 'dan yapısal olarak küçük çaplı y_0 'ı kapsayan S dilimi vardır.

Burada $y^* \in Y^*$ ve $\sup_{y \in K} y^*(y) = 1$ dir. $x^* = T^* y^*$ olduğunu düşünelim.

$$\|x^*\| = 1 \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} T(S(x^*, \delta)) &= \{Tx : x \in B_X, x^*(x) \geq 1 - \delta\} \\ &= \{Tx : x \in B_X, y^*(Tx) \geq 1 - \delta\} \subset S \text{ 'dır.} \end{aligned}$$

Sonuç olarak her $x \in S(x^*, \delta)$ için $\|Tx\| \geq 1 - 2\varepsilon$ 'a sahibiz. Şimdi Lemma 3.2'yi kullanarak bir $x_0 \in S(x^*, \delta)$ elemanını seçelim, öyle ki $\|x_0 + y_0 / \|y_0\|\| \geq 2 - \delta$ ve bu nedenle $\|x_0 + y_0\| \geq 2 - 2\varepsilon$ 'dır. Ama $Tx_0 \in S$, $\|Tx_0 - y_0\| < \varepsilon$ ve istenildiği gibi

$$\|J + T\| \geq \|x_0 + Tx_0\| \geq \|x_0 + y_0\| - \varepsilon \geq 2 - 3\varepsilon$$

ifadesine sahibiz.

Örnek: Eğer X bir Banach uzayı ve (Ω, Σ, μ) bir atomik olmayan ölçü uzayı ise $Y := L_1(\mu, X)$ zayıf kompakt operatörler için Daugavet özelliğine sahiptir. Bu Nazarenko'ya ait olan bir sonucun özel durumudur.

Sayı değerli fonksiyon uzayı $L_1(\mu)$ 'nin durumunda bile diğer ispatlar örneğin, (Babenko ve Pichugov, 1981), (Holub, 1987) ya da (Lozanovskii, 1966)'da gösterildiği için bizim iddiamız daha da kısadır.

Gerçekten $y \in S_Y$ ve $y^* \in S_{Y^*}$ olsun. y^* fonksiyoneli X^* 'da değerler alan bir zayıf* ölçülebilir ϕ fonksiyonu ile temsil edilebilir.

$\varepsilon > 0$ için Ω nın bir ölçülebilir alt kümesi B 'yi bulalım, öyle ki $\|\chi_B y\|_{L_1} \leq \varepsilon/2$ ve $\|\chi_B \phi\|_{L_\infty} \geq 1 - \varepsilon/2$ olan ölçülebilir alt kümesini bulabiliriz.

$x \in S_Y$ sonuç olarak $\chi_B x = x$ ve $\langle \phi, x \rangle \geq 1 - \varepsilon$ olan $x \in S_Y$ alalım. $\|x + y\| \geq 2 - \varepsilon$ olduğundan Lemma 3.2 (ii) şartı tamamlanır.

Bir benzer tartışmayla, K kompakt uzayının ayrık noktaları yoksa, $C(K, X)$ 'in Daugavet özelliğine sahip olduğu sonucunu yeniden ispatlayabiliriz, (Kadets, 1996).

Şimdi Daugavet özelliğinin otomatik olarak daha geniş uzaylara genişlediğini gösterelim.

Eğer K bir kompakt topolojik uzay ise K üzerinde sınırlı reel değerli fonksiyonların sup-normlu uzayını $\ell_\infty(K)$ ve $\{t : f(t) \neq 0\}$ 1. kategoriden olmak üzere böyle $f \in \ell_\infty(K)$ 'lardan oluşan kapalı alt uzayı da $m(K)$ ile gösterelim. $m_0(K) := \ell_\infty(K)/m(K)$ bölüm uzayını düşünelim. Baire-Kategori Teoreminden bölüm dönüşümünü $Q : \ell_\infty(K) \rightarrow m_0(K)$ 'nın $C(K)$ 'ya kısıtlamasının bir izometri olduğu görülür.

(Kadets ve Shvidkoy)'de ispat edilmiştir ki K zayıf* topolojisinde $C[0,1]^*$ 'ın birim yuvarı olmak üzere $(C[0,1], m_0(K))$ çiftinin Daugavet özelliği vardır. Bu daraltma operatörleri olarak bilinen sınıf için bile doğrudur. Benzer şekilde $L_1[0, 1]$ için bu geçerlidir.

Önerme 3.4: (X, Y) çifti Daugavet özelliğine sahip olsun ve Y^* 'da exB_{Y^*} 'ın zayıf* kapanışını K ile gösterelim. Bu durumda, $(X, m_0(K))$ 'nın da Daugavet özelliği vardır.

İspat: Y 'den $m_0(K)$ 'ya J_1 kanonik dönüşümü QJ_0 , $J_0 : Y \rightarrow C(K)$ bileşkesidir. Burada J_0 , $(J_0 y)(y^*) = y^*(y)$ ile tanımlıdır ve Q yukarıdaki bölüm dönüşümünün kısıtlamasıdır.

Yukarıda işaret edildiği gibi J_1 bir izometridir. İspatlamak için Lemma 3.2'yi kullanacağız. Böylece $x^* \in S_{X^*}$, $\varepsilon > 0$ verilsin. $[f] \in S_{m_0(K)}$, $[f]$ 'nin denklik sınıfını gösterebiliriz. Şüphesiz; $[f]$, $m_0(K)$ 'da $f \in \ell_\infty(K)$ 'nın denklik sınıfını gösterir. Genelliği bozmaksızın

$$A = \{t \in K : f(t) > 1 - \varepsilon/2\}$$

kümesini 2. kategoriden varsayalım.

Şimdi $U \subset V$ açık olduğu zaman $U \cap A$ arakesiti 2. kategoriden olan $V \subset K$ açık kümesi vardır, (Kelley, 1955, sayfa.202).

Bir kompakt ve kompleks kümesinin uç noktası dilimlerden oluşan bir komşuluk tabanının varolduğu gerçeğini kullanacağız. Bu Krein-Milman Teoreminin ters durumundan elde edilir, (Choquet, 1969, sayfa.107).

Böylece V bir zayıf* dilimi kapsar. Yani $y_0 \in S_Y$ ve $\varepsilon_1 < \varepsilon/2$ vardır ki,

$$w^* \in K, w^*(y_0) > 1 - \varepsilon_1 \Rightarrow w^* \in V \quad (3.3)$$

sağlanır.

(X, Y) çifti Daugavet özelliğine sahip olduğundan Lemma 3.2'den $\|x_0 + y_0\| > 2 - \varepsilon_1$ eşitsizliğini sağlayan bir $x_0 \in S_X \cap S(x^*, \varepsilon/2)$ alırız.

$\| [J_0 x_0 + f] \| \geq 2 - \varepsilon$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Gerçekten bir $w_0^* \in K$ için $w_0^*(x_0) + w^*(y_0) > 2 - \varepsilon_1$ vardır ve o halde $w_0^*(y_0) > 1 - \varepsilon_1$ 'dir. (3.3)'den $w_0^* \in V$ 'dir. w_0^* 'ın $U \subset V$ komşuluğunu, her $w^* \in U$ için $w_0^*(x_0) + w^*(y_0) > 2 - \varepsilon_1$, olacak biçimde alalım.

Özellikle $w^*(x_0) > 1 - \varepsilon_1$ 'dir ve V 'nin yapısıyla $U \cap A$ 2.kategoriden olduğundan

$$\| [J_0 x_0 + f] \| \geq \inf \left\{ |w^*(x_0) + f(w^*)| : w^* \in U \cap A \right\}$$

$$\geq 1 - \varepsilon_1 + 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq 2 - \varepsilon$$

eşitsizliğine sahibiz ve ispat tamamlanır.

Açıkçası Y ve $m_0(K)$ arasındaki her uzay için Daugavet özelliği sağlanır. Özellikle $(X, \overline{C(\text{ex} B_{Y^*})})$ çifti Daugavet özelliğine sahiptir. Genelde $(X, C(B_{Y^*}))$ çiftinin Daugavet özelliğine sahip olup olmadığı açık bir sorudur.

Bu $X=Y=C[0,1]$ ve $X=Y=L_1[0,1]$ için de doğru olur, (Kadets ve Shvidkoy).

Önerme 3.4 tekrar normlanan teoremi üretir.

Teorem 3.5: $X \subset Y$ ayrılabilir Banach uzayları ve X 'in Daugavet özelliğine sahip olduğunu varsayalım.

a) $K = \overline{\text{ex} B_{X^*}}$ ve $m_0(K)$ yukarıdaki gibi ise o zaman $S: Y \rightarrow m_0(K)$, $S|_X = Q|_X$ $\ell_\infty(K)$ 'dan $m_0(K)$ üzerine bölüm kısıtlanması olan bir S izomorfik gömmesi vardır.

b) Y uzayı tekrar normlaştırılabilir öyle ki yeni normu orjinal norm ile uyuşur ve (X,Y) çiftinin de yeni norma göre Daugavet özelliğine sahip olduğu görülür.

İspat: (a)'nın ispatı için (Kadets ve Shvidkoy, Teorem.3.1)'de $K = B_{X^*}$ için yapıldı (X Daugavet özelliğine sahip olsun, olmasın). Fakat buradaki ispat ayırık noktaları olmayan tüm

simetrik izometrik kapalı zayıf* normlu B_{X^*} alt kümeleri için geçerlidir. Bu nedenle, burada exB_{X^*} 'ın ayırık noktaları kapsamadığını kontrol etmek yeterli olacaktır.

Farzedelim ki x_0^* bir ayırık uç nokta olsun.

x_0^* , dilimlerin bir komşuluk tabanına sahip olduğundan bir $\xi \in S_X$ ve $\varepsilon > 0$ bulabiliriz ki, sadece $x^*(\xi) \geq 1 - \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan uç nokta $x^* = x_0^*$ 'dır. Daugavet özelliğinden $x_0^*(x) \geq 1 - \varepsilon$ ve $\|x - \xi\| \geq 2 - \varepsilon$ eşitsizliklerini sağlayan bir $x \in S_X$ elemanı vardır.

$x^*(x - \xi) = \|x - \xi\|$ eşitsizliğini sağlayan bir x^* uç noktasını alalım.

O zaman $(-x^*)(\xi) \geq 1 - \varepsilon$ 'dır. Sonuç olarak $x^* = -x_0^*$ ve dolayısıyla $1 - \varepsilon \leq x^*(x) = -x_0^*(x) \leq 0$ 'dır ve bu bir çelişkidir.

(b) (a) bölümü ve Önerme 3.4 ile istenilen özelliklere sahip $\|y\| = \|Sy\|$ bir norm tanımlar.

Bu teorem, şartsız genişlemelerin varolması üzerine bazı bilgiler gerektirir. İlk olarak kaynak (Kadets ve Popov, 1996, Lemma 3.6]'a bir nicel biçimini veren bir lemma formülize edelim.

Lemma 3.6: $J : X \rightarrow Y$ doğal gömmesi ve $X \subset Y$ Banach uzayları olsun.

(X, Y) ikilisinin, operatörlerin bir $M \subset L(X, Y)$ alt uzayına göre Daugavet özelliğine sahip olduğunu farz edelim.

$T_n \in M$ operatörlerinin bir noktasal, şartsız yakınsak serisi $T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ olsun.

Bu durumda, $\|J + T\| \geq 1$ 'dir.

Özellikle; $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \in M$ ile J noktasal şartsız yakınsak toplamı $J = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ olarak temsil edilemez.

İspat: $\text{FIN}(\square)$, $\square$ 'nin alt kümesi olan sonlu bir küme olsun.

Banach-Steinhaus Teoremi'ne göre, $\alpha = \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in A} T_n \right\| : A \in \text{FIN}(\square) \right\}$ sonludur ve $B \subset \square$ olduğu zaman

$$\left\| \sum_{n \in B} T_n \right\| \leq \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in A} T_n \right\| : A \in \text{FIN}(\square), A \subset B \right\} \leq \alpha \text{ dir.}$$

$\varepsilon > 0$ olsun ve $\left\| \sum_{n \in A_0} T_n \right\| \geq \alpha - \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $A_0 \in \text{FIN}(\square)$ alalım.

O zaman, Daugavet özelliğinden bu lemmayı ispatlayan

$$\|J + T\| \geq \left\| J + \sum_{n \in A_0} T_n \right\| - \left\| \sum_{n \notin A_0} T_n \right\| \geq 1 + \left\| \sum_{n \in A_0} T_n \right\| - \alpha \geq 1 - \varepsilon \text{ eşitsizliği elde edilir.}$$

Genel olarak, Lemma 3.6'da $\|J + T\| = 1 + \|T\|$ olup olmadığına karar veremeyiz. Bu genişleme, 1-şartsız durumudur. Çünkü $n \in A_0$ olduğunda $\lambda_n = -1$ ve diğer durumlarda $\lambda_n = 1$ için

$$\|J + T\| \geq 1 + 2 \left\| \sum_{n \in A_0} T_n \right\| - \left\| \sum_{n \in \square} \lambda_n T_n \right\| \geq 1 + 2(\alpha - \varepsilon) - \|T\| \geq 1 + \|T\| - 2\varepsilon \text{ 'dır.}$$

Sonuç 3.7: Eğer X , Daugavet özellikli ayrılabilir bir Banach uzayı ise X yansıyan uzayların şartsız toplamı içine gömülemez. Özellikle, X bir şartsız tabanlı uzay içine gömülemez.

İspat: X 'i, Y 'den X_n üzerine P_n izdüşümleriyle $Y = \bigoplus_n X_n$ direkt toplamı Banach uzaylarının şartsız toplamı içine gömüldüğünü kabul edelim.

$P_n(X)$ 'de X_n yerleştirildikten sonra X_n ve Y 'nin ayrılabilir olduğunu kabul edelim. Teorem 3.5'e göre, Y 'yi tekrar normlaştırarak kabul edebiliriz. Teorem 3.3'den X 'den Y 'ye her zayıf kompakt operatör Daugavet Denklemini (1.2) sağlayan (X, Y) çiftinin Daugavet özelliğine sahip olduğunu kabul edelim

$J: X \rightarrow Y$ gömme dönüşümünün $J = \sum_{n=1}^{\infty} P_n|_X$ bir noktasal, şartsızyakınsak serisine bir açılımına sahip olduğundan Lemma 3.6'dan bir n_0 için $P_{n_0}|_X$ 'in zayıf kompakt olmadığını ve X_{n_0} 'in refleksif olmadığı sonucunu çıkarırız.

Şimdi, Daugavet özellikli uzaylarda, ℓ_1 -kopyalarını üretmek için Lemma 3.1'i kullanıyoruz. Önce o lemmanın bir genişlemesini verelim.

Lemma 3.8: Eğer (X, Y) 'nin Daugavet özelliği varsa, her $\varepsilon_0 > 0$ ve her B_X 'in $S(x_0^*, \varepsilon_0)$ dilimi ve Y 'nin her sonlu boyutlu alt uzayı Y_0 için B_X 'in $S(x_1^*, \varepsilon_1)$ dilimi var ki;

$$\|y + tx\| \geq (1 - \varepsilon_0)(\|y\| + |t|) \quad \forall y \in Y_0, \quad x \in S(x_1^*, \varepsilon_1) \quad (3.4)$$

dir.

İspat: $\delta = \varepsilon_0 / 2$ ve S_{Y_0} 'da bir sonlu δ -net $\{y_1, \dots, y_n\}$ alalım. Lemma 3.1(a)'yı tekrar uygulayarak $S(x_0^*, \varepsilon_0) \supset S(x^{*(1)}, \varepsilon^{(1)}) \supset \dots \supset S(x^{*(n)}, \varepsilon^{(n)})$

dilimlerinin bir dizisini elde ederiz ki, her $x \in S(x^{*(k)}, \varepsilon^{(k)})$

$$\|y_k + x\| \geq 2 - \delta \quad (3.5)$$

dır.

$x_1^* = x^{*(n)}$ ve $\varepsilon_1 = \varepsilon^{(n)}$ yerine koyarsak, o zaman (3.5) her $x \in S(x_1^*, \varepsilon_1)$ ve $k=1, \dots, n$ için geçerli olur. Bu gerektirir ki, her $x \in S(x_1^*, \varepsilon_1)$ ve $y \in S_{Y_0}$ için

$$\|y + x\| \geq 2 - 2\delta = 2 - \varepsilon_0 \text{ şartı sağlanır.}$$

$t_1 + t_2 = 1$ eşitliğini sağlayan $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ alalım. Eğer $t_1 \geq t_2$ ise x ve y için yukarıdaki gibi,

$$\|t_1 x + t_2 y\| = \|t_1(x + y) + (t_2 - t_1)y\|$$

$$\geq t_1 \|x + y\| - |t_2 - t_1| \|y\|$$

$$\geq t_1(2 - \varepsilon_0) + t_2 - t_1$$

$$= t_1 + t_2 - t_1 \varepsilon_0 \geq 1 - \varepsilon_0 \text{ dır.}$$

Benzer şekilde, bu hesaplamalar $t_1 < t_2$ için sağlanır.

Bu, S_{Y_0} 'ın simetrisi ve normun homojenliğinden faydalanarak (3.4)'ü gerektirir.

Teorem 3.9: Eğer X Daugavet özelliğine sahipse, X, ℓ_1 'in bir kopyasını içerir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle Lemma 3.8 kullanılarak inşa etmek kolaydır. $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektörlerin bir dizisini ve $S(x_n^*, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n = 4^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ dilimlerin bir dizisini öyle ki $e_{n+1} \in S(x_{n+1}^*, \varepsilon_{n+1})$ ve $S(x_{n+1}^*, \varepsilon_{n+1})$ 'nin her elemanı -yukarı ε_n -'ye kadar $\text{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$ 'ye ℓ_1 -dikidir. Bu da, $\forall y \in \text{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $x \in S(x_{n+1}^*, \varepsilon_{n+1})$ için $\|y + x\| \geq (1 - \varepsilon_n)(\|y\| + \|x\|)$ anlamına gelir. O zaman, (e_n) dizisi, ℓ_1 'deki birim taban vektörlerine denktir.

Bu ispat, ayrıca X 'in (Dowling, Johnson, Lennard ve Turett, 1997) kaynaktaki ℓ_1 'in asimptotik izometrik kopyalarını kapsadığını daha kuvvetli sonuç olduğunu bile gösterir.

Şimdi, Daugavet özelliğini genişleterek kalıcılığı üzerinde çalışacağız.

Bir X Banach Uzayındaki kapalı bir J alt uzayı eğer, X^* , X^* 'ın bir kapalı alt uzayı V için $X^* = V \oplus_1 J^\perp$ olarak ayrıştırılıyorsa J 'ye bir M -ideali denir. Burada $J^\perp = \{x^* \in X^* : x^*|_J = 0\}$ 'dır. O zaman $\{x^*|_J : x^* \in V\}$ J^* 'a lineer olarak izometriktir. Bunu da,

$$X^* = J^* \oplus_1 J^\perp \quad (3.6)$$

şeklinde yazarız.

Önerme 3.10: Daugavet özelliği M -idealleri ile kalıtsaldır.

İspat: J 'nin Daugavet özellikli X Banach Uzayında bir M -ideali olduğunu farz edelim.

$\|x^*\| = 1$ eşitliğini sağlayan $x^* \in J^* \subset X^*$, $\varepsilon > 0$ ve $y \in S_J$ olsun.

$$S_1 = \{ \xi \in J : \|\xi\| \leq 1, x^*(\xi) \geq 1 - \varepsilon \}$$

$$S = \left\{ \xi \in X : \|\xi\| \leq 1, x^*(\xi) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

dilimlerini göz önünde bulunduralım.

Lemma 3.2'den bir $x \in S$ vardır ki $\|x + y\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{3}$ 'dir. Öyleyse, bir $y^* \in S_{X^*}$ vardır ki,

$$y^*(x + y) \geq 2 - \frac{\varepsilon}{3} \text{ 'dür. } 1 = \|y^*\| = \|y_1^*\| + \|y_2^*\| \text{ sağlayacak şekilde } y^* = y_1^* + y_2^* \in J^* \oplus_1 J^\perp$$

ayrıştırılabilir. Bundan dolayı, $y^*(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ ve $y_1^*(y) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ eşitsizliklerini sağlayacak şekilde

$$y^*(x) + y_1^*(y) \geq 2 - \frac{\varepsilon}{3} \text{ 'dür.}$$

Sonuç olarak, $\|y_1^*\| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ ve böylece $\|y_2^*\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur.

Şimdi, X üzerinde $\sigma(X, J^*)$ -topolojisini düşünelim. Hahn-Banach Teoremi'nin bir uygulaması gösterir ki, B_J 'nin B_X (Harmand, Werner ve Werner, 1993 Uyarı I.1.13]'de bir $\sigma(X, J^*)$ yoğun olduğunu gösterir.

O halde $|y_1^*(\xi - x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ve $|x^*(\xi - x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ eşitsizliklerini sağlayan bir $\xi \in B_J$ bulabiliriz.

Yani, $\xi \in S_1$ ve

$$\|\xi + y\| = y^*(\xi + y) = y_1^*(\xi) + y_1^*(y)$$

$$\geq y_1^*(x) + y_1^*(y) - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\geq y_1^*(x) + y_2^*(x) + y_1^*(y) - \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\|y_2^*\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ 'den}$$

$$= y^*(x) + y_1^*(y) - \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\geq 2 - \varepsilon \text{ olur.}$$

Lemma 3.2'nin bir uygulanması önermenin ispatını tamamlar.

Açıkça, X Daugavet özelliğine sahip ve $J \subset X$, M -ideali ise o zaman X/J 'nin Daugavet özelliğini sağlaması gerekmez.

Örneğin eğer, $X=C[0,1]$ ve $J = \{f \in X: f(0) = 0\}$ ise o zaman X/J 1-boyutludur ve Daugavet özelliğini sağlamaz.

Kuvvetli geometrik hipotezler altında Daugavet özelliği için 3-uzay özelliğinin bir versiyonu olarak dikkat edilen Önerme 3.10'a bir ters önerme ve ispatını veriyoruz.

Önerme 3.11: J ve X/J Daugavet özelliğini paylaşan ve J , X 'de bir M -ideali ise X 'de M -idealidir.

İspat: $y \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ ve $\varepsilon > 0$ Lemma 3.2(ii)'deki gibi verilsin.

$x^* = x_1^* + x_2^* \in J^* \oplus J^\perp$ 'den $\|x^*\| = \|x_1^*\| + \|x_2^*\|$ olacak şekilde ayrıştırırız. (3.6)'dan

$$\|y\| = \max \left\{ \sup_{y^* \in B_{J^*}} |y^*(y)|, \sup_{y^* \in B_{J^\perp}} |y^*(y)| \right\} = 1 \text{ olduğu sonucu çıkarılır.}$$

İlk önce

$$\|[y]\|_{X/J} = \sup_{y^* \in B_{J^*}} |y^*(y)| = 1 \text{ farzedeceğiz.}$$

X/J Daugavet özelliğine sahip ve $(X/J)^* = J^\perp$ olduğundan

$$\|[x_0]\| = 1, \quad x_2^*(x_0) \geq (1-\varepsilon)\|x_2^*\|, \quad \|[x_0 + y]\| \geq 2 - \varepsilon \text{ sağlayan bir } x_0 \in X \text{ vardır.}$$

Sonra

$$x_1^*(\xi) \geq (1-\varepsilon) \|x_1^*\| \tag{3.7}$$

ile $\xi \in B_J$ alalım.

$$\|x_0 \pm \xi - \eta\| \leq 1 + \varepsilon \tag{3.8}$$

ile bir $\eta \in J$ bulmak için M -ideallerinin 2-yuvar özelliğini kullanalım.

Açıkça görüldüğü gibi,

$$x := x_0 + \xi - \eta, \quad \|x\| \leq 1 + \varepsilon$$

$$x_2^*(x) = x_2^*(x_0) \geq (1 - \varepsilon) \|x_2^*\|$$

$$\|x + y\| \geq \|[x + y]\| = \|[x_0 + y]\| \geq 2 - \varepsilon$$

özelliklerine sahiptir ve $x_1^*(x)$ hesaplanacaktır.

Şimdi (3.8)'den

$$|x_1^*(\xi) \pm x_1^*(x_0 - \eta)| \leq (1 + \varepsilon) \|x_1^*\| \text{ ifadesine sahibiz ve öyleyse (3.7)'den}$$

$$|x_1^*(x_0 - \eta)| \leq 2\varepsilon \|x_1^*\| \text{ öyle ki}$$

$$x_1^*(x) \geq (1 - 3\varepsilon) \|x_1^*\| \text{ 'dir ve son olarak}$$

$$x^*(x) \geq (1 - 3\varepsilon) \|x_1^*\| + (1 - \varepsilon) \|x_2^*\| \geq 1 - 3\varepsilon \text{ 'dır.}$$

x 'i uygun olarak hesapladıktan sonra Lemma 3.2(ii)'yi elde ederiz.

İspatın 2. kısmında, $Q := \sup_{y^* \in B_{J^\perp}} |y^*(y)| < \sup_{y^* \in B_{J^*}} |y^*(y)| = 1$ olduğunu farzedelim.

Aşağıdaki iddiaya ihtiyacımız var,

$\xi(y) \geq 1 - 3\varepsilon$ olduğu zaman $\xi^* \in S_J^*$ ve $\xi^*(\xi) \geq 1 - \varepsilon$ ifadesini sağlayan bir $\xi \in S_J$ vardır.

Gerçekten, ikinci dual uzayının ayrıştırması $X^{**} = J^{\perp\perp} \oplus_\infty J^{*\perp}$ 'dır. $X^{**} \rightarrow J^{\perp\perp}$ izdüşümünü Q ile gösterelim. Şimdi,

$$1 = \|y\| = \max \{ \|Qy\|, \|y - Qy\| \} = \max \{ \|Qy\|, \theta \} \text{ ve öyleyse } \|Qy\| = 1 \text{ dir.}$$

Yerel yansıma ilkesinden (Behrends, 1991)'in versiyonunda bir $L : \text{lin}\{y, Qy\} \rightarrow X$ doğrusal operatörü vardır, öyle ki

$\xi := L(Qy) \in S_J$, $Ly = y$ ve $\|L\| \leq 1 + \varepsilon$ 'dir. Buradaki nokta, $Qy \in J^{\perp\perp} \setminus J$ içine götüren L dönüşümüdür.

Açıkçası,

$$\xi = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(2\xi - y) \text{ ve}$$

$$\|2\xi - y\| = \|L(2Qy - y)\| \leq (1 + \varepsilon) \|2Qy - y\| = 1 + \varepsilon.$$

Öyleyse, eğer $\xi^* \in S_{J^*}$ ise $\xi^*(y) \leq 1$ ve $\xi^*(2\xi - y) \leq 1 + \varepsilon$ 'dir. Sonuç olarak, $\xi^*(\xi) \geq 1 - \varepsilon$ olduğunda, $\xi^*(y) \geq 1 - 3\varepsilon$ 'dur.

J ve Lemma 3.2 üzerindeki varsayımdan $x_0 \in J$ vardır ki,

$$\|x_0\| = 1, \quad x_1^*(x_0) \geq (1 - \varepsilon) \|x_1^*\|, \quad \|x_0 + \xi\| \geq 2 - \varepsilon \quad (3.9)$$

sağlanır.

Sonra aşağıdaki özelliklerle,

$$x_2^*(z) \geq (1 - \varepsilon) \|x_2^*\|, \quad \xi_0^*(x_0 + \xi) \geq 2 - \varepsilon \text{ özellikli } z \in B_X \text{ ve } \xi_0^* \in S_{J^*} \text{ alalım ki,}$$

$$\xi_0^*(x_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \xi_0^*(\xi) \geq 1 - \varepsilon \quad (3.10)$$

sağlansın.

ξ 'nın yapısıyla, $\xi_0^*(y) \geq 1 - 3\varepsilon$ 'a sahibiz. Tekrar M -ideallerinin 2-yuvar özelliğini kullanarak bir $\eta \in J$ bulabiliriz ki $\|z \pm x_0 - \eta\| \leq 1 + \varepsilon$ ve $x := z + x_0 - \eta$ olsun. İspatın 1.bölümündeki gibi (3.9) ve (3.10)'dan

$$|x_1^*(z - \eta)| \leq 2\varepsilon \|x_1^*\|, \quad |\xi_0^*(z - \eta)| \leq 2\varepsilon \text{ elde ederiz ve öyleyse}$$

$$x_1^*(x) \geq x_1^*(x_0) - 2\varepsilon \|x_1^*\| \geq (1 - 3\varepsilon) \|x_1^*\|$$

$$x_2^*(x) = x_2^*(z) \geq (1 - \varepsilon) \|x_2^*\| \text{ öyle ki}$$

$$\|x\| \leq 1 + \varepsilon$$

$$x^*(x) \geq 1 - 3\varepsilon$$

$$\|x + y\| \geq \xi_0^*(x + y) = \xi_0^*(z - \eta) + \xi_0^*(x_0 + y) \geq 2 - 6\varepsilon \text{ dır.}$$

Tekrar Lemma 3.2(ii)'nin tamamlandığını görürüz.

Bir ayrılabilir sıfırlayıcıya sahip olan Daugavet Uzaylarının alt uzaylarının da Daugavet özelliğine sahip olduğunu ispat etmek şimdiki amacımızdır. Aşağıdaki lemmada açıklandığı gibi yerel ℓ_1 -tamlamalarını kullanırız.

Lemma 3.12: Eğer X Daugavet özelliğine sahip ise, her $x \in S_X$, her $\varepsilon > 0$ ve her X^* 'in ayrılabilir V alt uzayı için bir $x^* \in S_{X^*}$ elemanı vardır, öyle ki her $v^* \in V$ için $x^*(x) \geq 1 - \varepsilon$ ve $\|x^* + v^*\| = 1 + \|v^*\|$ sağlanır.

İspat: S_V 'de (v_n^*) yoğun dizisi ve $S(x, \varepsilon) \supset S(x_1, \varepsilon_1) \supset \dots$ zayıf* kompakt dilimlerin dizisini alalım ki,

$$\|x^* + v_k^*\| \geq 2 - \frac{1}{n}, \quad \forall x^* \in S(x_n, \varepsilon_n) \quad k = 1, \dots, n \text{ sağlansın.}$$

Lemma 3.8'in ispatındaki gibi, bu durum Lemma 3.1(b)'nin tekrar uygulanmasıyla mümkündür.

Açıkça bir $x^* \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S(x_n, \varepsilon_n)$ çalışır.

Sonuç 3.13: Eğer X Daugavet özelliğine sahipse X^* , ℓ_1 'in bir izometrik kopyasını içerir. Özellikle X^* , ne tam konvektir ne de düzgündür.

İspat: Tümevarım yöntemiyle Lemma 3.12'den bir izometrik ℓ_1 -kopyası üretilebilir.

Teorem 3.14: X 'in Daugavet özelliğine sahip ve $Y \subset X$ 'in bir ayrılabilir sıfırlayıcı $Y^\perp$ 'li bir alt uzay olduğunu kabul edelim. O zaman, Y Daugavet özelliğine sahiptir.

İspat: $y \in S_Y$ sabiti ve $\varepsilon > 0$ alalım.

$S = \{y^* \in Y^* = X^* / Y^\perp : \|y^*\| \leq 1, y^*(y) \geq 1 - \varepsilon\}$ dilimini düşünelim.

Ayrıca $[x_1^*] \in S_{X^*/Y^\perp}$ elemanı alalım. Teoremi ispatlamak için, Lemma 3.2(ii) ile bir $\|[x_1^* + x_2^*]\| = 2$ eşitsizliğini sağlayan $[x_2^*] \in S$ bulmak yeterlidir. Bunu başarmak için $x=y$ ve $V = \text{lin}(\{x_1^*\} \cup Y^\perp)$ ile Lemma 3.12'yi uygulayalım.

$$x_2^*(y) \geq 1 - \varepsilon \text{ ve } \|x_2^* + v^*\| = 1 + \|v^*\|, \quad \forall v^* \in V$$

olacak şekilde bir $x_2^* \in S_{X^*}$ fonksiyoneli alalım.

Bu durumda, $[x_2^*] \in S$ ve

$$\begin{aligned} \|[x_1^* + x_2^*]\| &= \inf \left\{ \|x_1^* + x_2^* + z^*\| : z^* \in Y^\perp \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 + \|x_1^* + z^*\| : z^* \in Y^\perp \right\} \end{aligned}$$

$x_1^* + z \in V$ 'den

$$= 1 + \|[x_1^*]\| = 2 \text{ 'dir ve bu teoremin ispatını tamamlar.}$$

Aşağıdaki özellik (Kadets, 1996)'da incelenmiştir. X 'in her sonlu eş-boyutlu alt uzayının sıradan Daugavet özelliği varsa X 'in kalıtsal Daugavet özelliği vardır.

Önceki teorem kalıtsal Daugavet özelliğinin alışılmışı ile uyuştüğünü gösterir. Bu bölüm sonunda Daugavet özellikli çiftlerin toplamalarına çalışacağız.

Lemma 3.15: (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) Daugavet özelliğine sahipse, $(X_1 \oplus_1 X_2, Y_1 \oplus_1 Y_2)$ ve $(X_1 \oplus_\infty X_2, Y_1 \oplus_\infty Y_2)$ 'de Daugavet özelliğine sahiptir.

İspat: İlk önce $(X_1 \oplus_\infty X_2, Y_1 \oplus_\infty Y_2)$ ile ilgilenelim.

$$\|(y_1, y_2)\| = \max \{\|y_1\|, \|y_2\|\} = 1$$

$\|(x_1^*, x_2^*)\| = \|x_1^*\| + \|x_2^*\| = 1$ ile $x_j^* \in X_j^*$, $y_j \in Y_j$ ($j=1,2$) ifadelerini göz önünde bulunduralım.

$\|y_1\| = 1$ olsun. Lemma 3.2'den verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\|x_1\| = 1, \quad x_1^*(x_1) \geq \|x_1^*\| (1 - \varepsilon)$$

$\|x_1 + y_1\| \geq 2 - \varepsilon$ sağlayan bir $x_1 \in X_1$ vardır.

$\|x_2\| = 1$, $x_2^*(x_2) \geq \|x_2^*\| (1 - \varepsilon)$ olacak şekilde $x_2 \in X_2$ alalım.

O zaman,

$\|(x_1, x_2)\| = 1$, $\langle (x_1^*, x_2^*), (x_1, x_2) \rangle \geq 1 - \varepsilon$ ve $\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| \geq \|x_1 + y_1\| \geq 2 - \varepsilon$ 'dır. Sonuç olarak,

$(X_1 \oplus_\infty X_2, Y_1 \oplus_\infty Y_2)$ Daugavet özelliğine sahiptir.

Bir benzer hesap (Lemma 3.2(iii)'ye dayanan), gösterir ki, $(X_1 \oplus_1 X_2, Y_1 \oplus_1 Y_2)$ Daugavet özelliğine sahiptir.

Yukarıdaki lemmanın zıttının da geçerli olduğuna işaret ediyoruz.

Önerme 3.16: Daugavet özellikli Banach uzay çiftleri $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ olsun. O zaman $(c_0(X_j), c_0(Y_j))$ ve $(\ell_1(X_j), \ell_1(Y_j))$ Daugavet özelliğine sahiptir.

İspat: Lemma 3.15'den $(X_1 \oplus_\infty \dots \oplus_\infty X_n, Y_1 \oplus_\infty \dots \oplus_\infty Y_n)$ sırasıyla $(X_1 \oplus_1 \dots \oplus_1 X_n, Y_1 \oplus_1 \dots \oplus_1 Y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için Daugavet özelliğine sahiptir.

Bu uzayların birleşimi, sırasıyla $c_0(X_j)$, $c_0(Y_j)$, $\ell_1(X_j)$ veya $\ell_1(Y_j)$ yoğun olduğundan ispat sağlanır.

$X_j = Y_j$ için sonuçlar ilk kez (Wojtaszczyk, 1992) tarafından ispat edilmiştir ve bir özel durumu da farklı yaklaşımlar kullanılarak (Abramovich, 1991) tarafından yapılmıştır.

4. L_1 'in BÖLÜMLERİ

Bu kısımda, $L_1 = L_1[0,1]$ uzayını düşünelim. Lebesgue ölçümünü μ ile ve $[0,1]$ 'deki Borel σ -cebirini Σ ile gösterelim.

L_1 'in bir alt uzayı X 'in sahip olduğu veya olmadığı aşağıdaki iki özellik için L_1/X 'in Daugavet özelliği için ilgili olabilir veya olmayabilir.

(I) Her $A \subset [0,1]$ Borel kümesi ve $\varepsilon > 0$ için bir f pozitif fonksiyonu vardır ki, $\|f\| = 1$ ve $\forall h \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(1 - \varepsilon) (|\lambda| + \|h\|) \leq \|\lambda f + h\| \leq |\lambda| + \|h\| \quad (4.1)$$

dir.

(II) Her $f_0 \in L_1$, her $A \subset [0,1]$ Borel kümesi ve her $\varepsilon > 0$ için $\|f\| = 1$ olacak şekilde bir pozitif $f \in L_1(A)$ fonksiyonu vardır ve (4.1), her $h \in \text{lin}(X \cup \{f_0\})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için sağlanır.

Lemma 4.1: L_1 'in alt uzayı X olsun.

(a) (I), (II)'yi gerektirir.

(b) Eğer X , (II)'yi sağlarsa, o zaman L_1/X Daugavet özelliğine sahiptir.

İspat:

(a) $f_0 \notin X$ olsun ve X boyunca $\text{lin}(X \cup \{f_0\})$ 'dan $\text{lin}\{f_0\}$ üzerine P bir projeksiyonu gösterebiliriz.

$\varepsilon > 0$ verildiğinde bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \|\chi_B f_0\| \leq \frac{\varepsilon}{4\|P\|} \text{ dir.}$$

(II)'deki gibi A için ölçümü $< \delta$ 'den küçük bir Borel kümesi $B \subset A$ olsun. A 'nın yerine B ile

(I)'in uygulaması ve ε yerine $\varepsilon_1 = \varepsilon/(4 + 2\|P\|)$ alırsak,

$$\|\alpha f + g\| \geq (1 - \varepsilon_1) (|\alpha| + \|g\|), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad g \in X$$

olacak şekilde $\|f\|=1$ bir pozitif $f \in L_1(B)$ 'i sağlar. $\|h\|=1$ ile $\text{lin}(X \cup \{f_0\})$ 'daki bir fonksiyon $h = \lambda f_0 + g$, $Ph = \lambda f_0$ ve $|\lambda| \leq \|P\|$ olsun.

(4.1)'i elde etmek için $\|f + h\| \geq 2 - \varepsilon$ olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 3.8'in ispatının son kısmına bakalım. Gerçekten,

$$\begin{aligned} 2 - \|f + h\| &= \|f\| + \|h\| - \|f + h\| \\ &= \int_B (|f| + |\lambda f_0 + g| - |f + \lambda f_0 + g|) \, d\mu \end{aligned}$$

($[0,1] \setminus B$ üzerinde $f=0$ olduğundan)

$$\begin{aligned} &\leq \int_B (|f| + |g| - |f + g|) + 2|\lambda| \int_B |f_0| \, d\mu \\ &\leq (\|f\| + \|g\| - \|f + g\|) + 2|\lambda| \frac{\varepsilon}{4\|P\|} \\ &\leq \varepsilon_1 (1 + \|g\|) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq (1 + \|I - P\|) \|h\| \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Lemma 3.2'nin (ii).şartının doğruluğunu kontrol edeceğiz. $[f_0] \in S_{L_1/X}$, $F \in S_{X^\perp} \subset S_{L_\infty}$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$\|[f_0 + f_1]\| \geq 2 - 2\varepsilon$ sağlayan $S(F, \varepsilon)$ diliminde $[f_1]$ denklik sınıfını bulacağız.

$A \subset [0,1]$ Borel kümesi vardır ki,

$$1 - \varepsilon \leq F|_A \leq 1 \quad \text{h. h. h. y.} \tag{3.2}$$

veya

$$-1 \leq F|_A \leq -1 + \varepsilon \quad \text{h. h. h. y. dir.}$$

Önceki durumu farzedelim. Eğer f , (II)'deki şartı sağlarsa o zaman,

$$\langle F, f \rangle = \int_A F(t) f(t) dt \geq 1 - \varepsilon, \text{ yani}$$

$[f] \in S(F, \varepsilon)$ 'a sahibiz. Eğer $f_1 = f$ koyarsak,

$$\begin{aligned} \|[f_0 + f_1]\| &= \inf \{ \|f_1 + f_0 + g\| : g \in X \} \\ &\geq \inf \{ (1 - \varepsilon)(1 + \|f_0 + g\|) : g \in X \} \\ &= (1 - \varepsilon) (1 + \|[f_0]\|) \\ &= 2 - 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz.

(4.2)'de sözü edilen 2.şart için aynı sonucu elde etmek için $f_1 = -f$ yazarız.

Önerme 4.2: Eğer X , L_1 'in bir yansımali alt uzayı ise o zaman L_1/X Daugavet özelliğine sahiptir.

İspat: Önceki lemma ve onun gösterimlerini kullanalım.

Şimdi, B_X (Beauzamy, 1985, sayfa.162]'den zayıf kompakt olduğundan düzgün integrallenebilir. O zaman $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$\mu(B) \leq \delta \Rightarrow \int_B |h(t)| dt \leq \varepsilon / 2, \quad \forall h \in B_X.$$

Bir A Borel kümesi ve ölçümü $\leq \delta$ olan bir $B \subset A$ Borel kümesini alalım ve $f = \chi_B / \mu(B)$ olsun. O zaman her $h \in B_X$ ve $|\lambda| + \|h\| = 1$ için

$$\begin{aligned}
\|\lambda f + h\| &= \int_B |\lambda f(t) + h(t)| \, dt + \int_{[0,1] \setminus B} |h(t)| \, dt \\
&\geq |\lambda| - 2 \int_B |h(t)| \, dt + \int_0^1 |h(t)| \, dt \\
&\geq 1 - \varepsilon \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Özellik (I) ispat edilmiştir.

Bu bölümdeki ana düşüncemiz; L_1 'in kopyasını içermeyen Daugavet özellikli bir Banach uzayı örneğini vermektir. Böylece Teorem 3.9'un geçerli olmadığı gösterilir. Örneğimiz, L_1 için 3 uzay problemine bir zıt örnek olarak (Talagrand, 1990) tarafından bulunan bir Y uzaylı L_1/Y bölüm uzayı olacaktır. Y 'nin birkaç önemli özelliğini sunmadan önce lemmayı formüle edelim.

Lemma 4.3: $\sup_m \|f_m\|_{L_\infty} =: M_1 < \infty$ olacak şekilde $[0,1]$ 'de $g_m = f_m + h_m \in L_1$ sınırlı fonksiyonların bir dizisini alalım. Aynı zamanda $\sum_{m=1}^\infty \mu(\Delta_m) < \infty$ anlamında h_m 'nin Δ_m desteklerinin küçük olduğunu ve (g_m) dizisinin standart ℓ_1 -tabanına denk olduğunu farzedelim.

Bir $M_2 < \infty$ ve her $(\lambda_m) \in \ell_1$ için

$$\left\| \sum_{m=1}^\infty \lambda_m g_m \right\| \leq \sum_{m=1}^\infty |\lambda_m| \leq M_2 \left\| \sum_{m=1}^\infty \lambda_m g_m \right\|.$$

Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta \in (0, \varepsilon/2)$ vardır ki, $A \in \Sigma$, $\mu(A) > \varepsilon$ olduğu zaman $\mu(B) = \delta$ dır.

$$\|\chi_B f\| \leq \varepsilon \|f\|, \quad \forall f \in X : = \overline{\text{lin}}\{g_m : m \in \mathbb{N}\} \quad (4.3)$$

sağlayan $B \subset A$ vardır.

İspat: $N \in \mathbb{N}$ seçelim ki $\sum_{m>N} \mu(\Delta_m) < \varepsilon/2$ olsun.

$M_3 := \max_{k \leq N} \|h_k\|_{L_\infty}$ şeklinde alalım ve $\delta = \varepsilon / (2 + M_2(M_1 + M_3))$ koyalım. Bunun için her $A \in \Sigma$, $\mu(A) > \varepsilon$ için $B \subset A$, $\mu(B) = \delta$ alt kümesi vardır ki $\delta \leq \varepsilon/2$ olduğundan $B \cap \left(\bigcup_{m > N} \Delta_m \right) = \emptyset$ 'dir. Herhangi bir $f \in S_X$, $f = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m g_m$ alalım. O zaman $\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m| \leq M_2$ ve

$$\|\chi_B f\| = \int_B \left| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m f_m + \sum_{m=1}^N \lambda_m h_m \right| d\mu \leq \mu(B) M_2 (M_1 + M_3) < \varepsilon$$

ifadesini elde ederiz. Böylece bu, (4.3)'ü ispatlar.

Şimdi de Talagrand örneğindeki yapıyı inceleyelim. (Talagrand, 1990)'da her sabit n için $(g_{m,n})_m$ dizisi, Lemma 4.3'ün şartlarını karşılayan $g_{m,n} = f_{m,n} + h_{m,n}$ çift dizisi ile üretilen bir uzay oluşturdu. Dahası eğer, $X_n = \overline{\text{lin}}\{g_{m,n} : m \in \mathbb{N}\} \subset L_1$ şeklinde ifade ediliyor ise her X_n , sonsuza yaklaşırken Banach-Mazur uzaklıklı ℓ_1 'e izomorftur. $\overline{\text{lin}} \bigcup_n X_n$ izomorfik sabiti ≤ 20 ile X_n 'nin ℓ_1 -toplamına izomorftur ve sadece her X_n değil, ama bu uzayların her sonlu toplamı Lemma 4.3 şartlarını karşılar. X_n 'ler sadece çok "zayıf" fonksiyonları içine alacak şekilde inşa edildi. Her $\varepsilon > 0$ için $n = n(\varepsilon)$ var ki [Talagrand, 1990, Teorem 3.1] ile

$$\mu(\{|f| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon \quad \forall f \in S_{X_n} \quad (3.4)$$

dir.

Sonuç olarak (Y_n) , (X_n) 'nin bir alt dizisi olduğu zaman $L_1 / \overline{\text{lin}} \bigcup_n Y_n$, L_1 [Talagrand, 1990, sayfa 26]'nın bir kopyasını içermeye yetmemektedir.

Teorem 4.4: L_1 'in öyle bir Y alt uzayı vardır ki, L_1/Y Daugavet özelliğine sahiptir. Ama L_1 'in bir kopyasını kapsamakta kusurludur.

İspat: Y uzayı, Talagrand dizisi (X_n) 'nin belli bir (Y_n) alt dizisinin kapalı, lineer, gerdiği alt uzayı olacaktır. Yukarıda anlatıldığı gibi L_1/Y 'nin L_1 'in bir kopyasını içermemesi Talagrand'a göre derin bir sonuçtur.

Lemma 4.1 vasıtasıyla L_1/Y için Daugavet özelliğini elde etmek için Y_n 'yi aşağıdaki gibi belirleriz. İlk olarak $Y_1 = X_1$ alırsak. Tümevarım yoluyla Lemma 4.3 ve (4.4) şartı kullanılarak aşağıdaki iki şartı yerine getiren (Y_n) alt dizisi seçeriz:

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için bir $\delta_n \in (0, 2^{-n-1})$ vardır ki, her $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) > 2^{-n}$ için bir $B \subset A$, $\mu(B) = \delta_n$ vardır öyle ki,

$$\|\chi_B f\| \leq 2^{-n} \|f\|, \quad \forall f \in Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n. \quad (4.5)$$

Ayrıca $\delta_n < \delta_{n-1}$ alırsak.

(b) Her $g \in S_{Y_{n+1}}$ için

$$\mu(\{|g| \geq 10^{-n} \delta_n\}) \leq 10^{-n} \delta_n \quad (4.6)$$

dır. Şimdi $Y = \overline{\lim} \bigcup_n Y_n$ 'yi koyalım ve Lemma 4.1'in I. şartının geçerliliğini ispat edelim.

$f_n \in S_{Y_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) 'nin her seçimi ve $(\lambda_n) \in \ell_1$ için gerçekten $M \leq 20$ (Talagrand, 1990, Önerme 4.2) için

$$M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n \right\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \quad (4.7)$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük sabiti M ile ifade edelim. Sabit $\varepsilon > 0$ ve $A \in \Sigma$ kümesi, $\mu(A) > \varepsilon$ 'dir ve $N \in \mathbb{N}$ olan N 'leri alalım ki,

$$2^{-N+1}(M+2) \leq \varepsilon \quad (4.8)$$

ve $n=N$ için (4.5)'i sağlayan bir $B \in \Sigma$ olan B 'ler için (a) şikkını uygulayalım.

$g_0 = \chi_B / \mu(B)$ 'yi koyalım ve her n 'ler ve $(\lambda_n) \in \ell_1$ için $f_n \in S_{Y_n}$ iken $\|h\| = 1$ ile $h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$

şeklinde bir fonksiyon düşünelim ve

$$\|g_0 + h\| \geq 2 - \varepsilon \quad (4.9)$$

olduğunu ispatlamaya ihtiyacımız var.

$$h_0 = \sum_{n=1}^N \lambda_n f_n, \quad h_1 = h - h_0, \quad D = \{ t \in B : |h_1(t)| \leq 2^{-N} \} \text{ ifade edelim.}$$

(4.7) ile

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq M$$

eşitsizliklerinden en az birinde her $t \in D$ şartı ile doğru

$|f_n(t)| \geq 10^{-n}$, $n = N+1, N+2, \dots$ olduğunu biliyoruz. (4.6) ile

$$\mu(D) \leq \sum_{n>N} \mu(\{|f_n| \geq 10^{-n}\}) \leq 10^{-N} \delta_N \quad (4.10)$$

dir.

(4.9)'u ispat etmek için şunlara dikkat edelim:

$$\begin{aligned} 2 - \|g_0 + h\| &= \|g_0\| + \|h\| - \|g_0 + h\| \\ &= \int_B (|g_0| + |h| - |g_0 + h|) \, d\mu \\ &= \int_{B \setminus D} (|g_0| + |h| - |g_0 + h|) \, d\mu + \int_D (|g_0| + |h| - |g_0 + h|) \, d\mu \\ &\leq \int_{B \setminus D} 2|h| \, d\mu + \int_D 2|g_0| \, d\mu \end{aligned}$$

Yukarıda geçen son iki integral aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \int_{B \setminus D} |h| \, d\mu &\leq \int_B |h_0| \, d\mu + \int_{B \setminus D} |h_1| \, d\mu \\ &\leq 2^{-N} \sum_{n=1}^N |\lambda_n| + 2^{-N} \delta_N \end{aligned}$$

((4.5) ve D'nin tanımı ile)

$$\leq 2^{-N} (M + 1).$$

İleride, (4.10) ve g_0 'in tanımını vasıtasıyla,

$$\int_D |g_0| \, d\mu = \frac{\mu(D)}{\mu(B)} \leq 10^{-N} \text{ dir ki,}$$

(4.8) ve (4.9)'un ispatıyla

$$2 - \|g_0 + h\| \leq 2^{-N} (M + 2) . 2 \leq \varepsilon$$

dir ve Teorem 4.4'ün ispatı tamamlanmıştır.

Önerme 4.2 ve Teorem 4.4'ün ortak özelliği şudur ki, Radon-Nikodym özellikli bir alt uzay tarafından çarparız. (Wojtaszczyk, 1992) veya (Werner, 1997)'den hatırlarsak, L_1/H_1 Daugavet özelliğine sahiptir, (Onun duali sağladığından). Bir doğal soru ki, Radon-Nikodym özellikli bir alt uzay ile L_1/X 'in Daugavet özellikli olup olmadığı veya en az birinin normlaştırılıp normlaştırılmadığıdır ve bir açık soru olarak kalır.

5. ANTI-DAUGAVET ÖZELLİĞİ

Bu bölümde bir X Banach Uzayından kendisine T operatörlerini düşünelim. $\|T\|$, T 'nin spektrumuna ait olmak üzere T sınırlı, lineer bir operatör ise

$$\|I + T\| = 1 + \|T\| \quad (5.1)$$

eşitliği elde edilir.

Tanım: X bir Banach uzayı ve operatörlerin bir sınıfı M olsun. Eğer $T \in M$ için

$$\|I + T\| = 1 + \|T\| \Leftrightarrow \|T\| \in \sigma(T)$$

denkliği sağlanırsa X 'e anti(karşı)-Daugavet özelliğine sahiptir, denir.

Tekrar, normu 1 olan operatörleri düşünmek yeterlidir.

Eğer $M=L(X)$ ise basitçe anti-Daugavet özelliğinden bahsedebiliriz.

Kaynak (Bcauzamy, 1985)'de bulunabilen süper yansılmalı, ultragüçleri sonlu temsil edilebilirlik üzerindeki bazı neticeleri kullanacağız. Geometrik durumlar örneğin; düzgün konvekslik ve düzgünlük de orada tartışılır. Bunun için (Diestel, 1975) veya (Habala, Hajek ve Zizler, 1996)'yi kaynak olarak verebiliriz.

(Abramovich, 1991)'de ispat edilir ki, düzgün konveks ve düzgün pürüzsüz uzaylar anti-Daugavet özelliğini paylaşır ve yerel düzgün konveks uzaylar kompakt operatörler için anti-Daugavet özelliğine sahiptir. (Kadets, 1996)'da sonlu boyutlu uzaylarda anti-Daugavet özelliği için bir denk geometrik şart olarak sunulmuştur(Bakınız, Kadets, 1996, Tanım 4.1(a)). Bu neticeleri genişletiyoruz ve birim kürenin bazı geometrik özelliklerini sunacağız.

Tanım 5.1:

(a) Bir Banach uzayı X 'e her $x, y \in S_X$ ve $x^* \in S_{X^*}$ için

$$x^*(x) = 1, \|x + y\| = 2 \Rightarrow x^*(y) = 1 \quad (5.2)$$

gerektirmesi sağlanırsa bir alterne konveks veya pürüzsüz (acs)'dir, denir.

(b) Bir Banach uzayı X 'e her $x_n, y \in S_X$ ve $x^* \in S_{X^*}$ için

$$x^*(x_n) \rightarrow 1, \|x_n + y\| \rightarrow 2 \Rightarrow x^*(y) = 1 \quad (5.3)$$

gerekirmesi sağlanırsa yerel düzgün alterne konveks veya pürüzsüz (luacs)'dir, denir.

(c) Bir Banach uzayı X 'e, her $x_n, y_n \in S_X$ ve $x_n^* \in S_{X^*}$ için

$$x_n^*(x_n) \rightarrow 1, \|x_n + y_n\| \rightarrow 2 \Rightarrow x_n^*(y_n) \rightarrow 1 \quad (5.4)$$

gerekirmesi sağlanırsa düzgün alterne konveks veya pürüzsüz (uacs)'dir, denir.

Geometrik olarak, (acs)-özellği birim kürede bir doğru üzerindeki bazı noktaların normunun pürüzsüz olduğu anlamına gelir. Tam olarak diyebiliriz ki, X 'in (acs) olması için gerek ve yeter koşul $\text{co}\{x, y\} \subset S_X$ olduğu zaman x ve y 'nin $\text{lin}\{x, y\}$ 'nin birim yuvarının pürüzsüz noktaları olmasıdır.

Şuna dikkat ederiz; yerel düzgün konveks uzaylar ve yerel düzgün pürüzsüz uzaylar (uacs)'dir ve yerel düzgün konveks uzaylar (luacs)'dir. (Kadets, 1996)'da ispatlanmıştır ki, sonlu boyutlu uzaylarda (kompaktlığın olduğu yerlerde (acs), (luacs) ve (uacs) denktir.) (acs) anti-Daugavet özelliği için gerekli ve yeterlidir. (luacs) özelliğinin anlamı yardımıyla sonsuz boyutlu uzaylardaki kompakt operatörlerinin sınıfı için anti-Daugavet özelliğini karakterize etmeyi planlıyoruz. Son olarak bir lemmaya ihtiyacımız olacaktır.

Lemma 5.2: X (acs) ve $T: X \rightarrow X$ 'nin $\|T\|=1$ ve $\|I+T\|=2$ olmak üzere zayıf kompakt operatör olduğunu varsayalım. İlave olarak bir $x \in S_X$ için $\|x + Tx\|=2$ olsun. O zaman 1, T 'nin bir özdeğeridir.

İspat: $x^*(x)=1$ olacak şekilde $x^* \in S_{X^*}$ fonksiyonelinı düşünelim. X 'in (acs)-özellğinden dolayı X , $x^*(Tx)=1$ eşitliğine sahiptir. Dolayısıyla $x_1^* := T^*(x^*)$ x 'de 1 değerine ulaşır ve S_{X^*} 'e aittir.

Tekrar (5.2)'yi kullanarak $x_1^*(Tx)=1$ eşitliğini elde ederiz. Tümevarımla aynı savın uygulanması her $n \in \mathbb{N}$ için $x^*(T^n x)=1$ olduğunu gösterir. Bu şunu ifade eder;

$$K := \overline{\text{co}}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\} \subset \{v \in X : x^*(v) = 1\} \cap B_X \subset S_X$$

Özellikle $0 \notin K$ 'dır. Aynı zamanda $T; K$ 'dan K 'ya bir dönüşüm ve göreceli zayıf kompakt olan $\{T^n x : n \geq 1\} = T(\{T^n x : n \geq 0\})$ olduğundan K , bir zayıf kompakt, konveks kümedir. Schauder (veya Markov-Kakutani) Sabit Nokta Teoremini kullanarak T 'nin K 'da bir özdeğeri için sıfırdan farklı bir özvektörü olan K 'da sabit noktası vardır.

Teorem 5.3: Bir Banach uzayı X için aşağıdaki durumlar denktir:

- (i) X kompakt operatörleri için anti-Daugavet özelliğine sahiptir.
- (ii) X , rank-1 operatörler için anti-Daugavet özelliğine sahiptir.
- (iii) X (luacs)'dir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii) aşikardır. (ii) $\Rightarrow$ (iii)'nin ispatı için X 'in (luacs) olmadığını kabul edelim. Öyleyse $x^* \in S_{X^*}$ bir fonksiyoneli vardır ve $\|x + y_n\| \rightarrow 2$, $x^*(x_n) \rightarrow 1$ olacak şekilde $x_n, y \in S_X$ vardır, fakat $x^*(y) < 1$ 'dir. $Tv = x^*(v)$ y ile tanımlanmış $T : X \rightarrow X$ operatörünü düşünelim. O zaman,

$$\begin{aligned} \|I + T\| &\geq \limsup \|x_n + Tx_n\| \\ &= \limsup \|x_n + x^*(x_n)y\| \\ &= \limsup \|x_n + y\| = 2 \end{aligned}$$

olduğundan $\|T\| = 1$ ve $\|I + T\| = 2$ 'dir. Böylece T , (5.1)'i sağlar. Fakat $x^*(y) < 1$ 'den dolayı $1 \notin \sigma(T)$ 'dir. Öyleyse X , rank1 operatörleri için anti-Daugavet özelliğini sağlamaz.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\|T\| = 1$ ve $\|Id + T\| = 2$ olan T bir kompakt operatör olsun. O zaman $(x_n) \subset S_X$ bir dizisi vardır ki, $\|Tx_n + x_n\| \rightarrow 2$ 'dir.

T 'nin kompaktlığından dolayı $Tx_n \rightarrow y \in S_X$ olduğunu varsayabiliriz.

$x^*(y) = 1$ olacak şekilde $x^* \in S_{X^*}$ düşünelim. O zaman $x^*(Tx_n) \rightarrow 1$, $y^* = T^*x^*$ koyalım. O zaman $\|y^*\| \leq 1$ dir. Gerçekten $y^*(x_n) = x^*(Tx_n) \rightarrow 1$ 'den $\|y^*\| = 1$ olduğu sonucunu elde ederiz. $\|x_n + y\| \rightarrow 2$ ve $y^*(x_n) \rightarrow 1$ ifadelerine sahibiz ve (5.3)'den dolayı $y^*(y) = 1$ 'i alırız.

Fakat şimdi,

$$\|y + Ty\| \geq x^*(y + Ty) = x^*(y) + y^*(y) = 2,$$

Lemma 5.2, $1 \in \sigma(T)$ olduğunu ifade eder, bundan dolayı (i)'yi elde ederiz. Şimdi (uacs)-özellği ve anti-Daugavet özelliği arasındaki ilişkiye dönelim.

Lemma 5.4: Eğer X (uacs) ise X süper yansıyandır.

İspat: (uacs)-özellği, X 'in 2-boyutlu alt uzaylarının yapısında bir düzgün kısıtlama sağlar. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır. O zaman $\|x + y\| > 2 - \delta$, $x, y \in S_X$ $x^*(x) > 1 - \delta$ ile $x^* \in S_{(\text{lin}\{x, y\})^*}$ ise $x^*(y) > 1 - \varepsilon$ 'dir. Bundan dolayı her 2-boyutlu Banach Uzayı X 'de sonlu olarak temsil edilemezdir ve (Kadets, 1982)'den dolayı X süper yansıyan olmalıdır (Gerçekten, X düzgün kare değildir ki, O James'e ait bir teoremlle süper yansıyanlılığı gerektirir: Bakınız [Bcauzamy, 1985, sayfa:261]).

Teorem 5.5: Eğer X (uacs) ise, X anti-Daugavet özelliğine sahiptir.

İspat: $\|I + T\| = 2$ olacak şekilde $T: X \rightarrow X$ operatörünün normu 1 olsun. X 'in ultra gücü X^U 'yu düşünelim.

X^U , $l_\infty(X)/c_0^U(X)$ bölüm uzayıdır ki onun normu $\|[(x_n)]\| = \lim_U \|x_n\|$ $c_0^U(X)$, U ultra-filtre boyunca sıfıra yakınsayan X 'deki dizilerden oluşur.

$T^U[(x_n)] = [(Tx_n)]$ ile $T^U: X^U \rightarrow X^U$ tanımlansın.

T^U 'yu düşünmenin başlıca avantajı $I^U + T^U$ toplamının normuna yaklaşmasıdır. Gerçekten eğer $x_n^0 \in S_X$, $\|x_n^0 + Tx_n^0\| \rightarrow 2$ olacak şekilde seçilirse $x^0 := [(x_n^0)] \in S_{X^U}$ ve $\|x_0 + T^U(x^0)\| = 2$ dir. Lemma 5.4'e göre X^U yansıyandır ve bu nedenle T^U zayıf kompaktır.

Tanımdan dolayı aşıkardır ki, eğer X (uacs) ve Y, X' 'de sonlu temsil ise o zaman Y (uacs)'dir, yani (uacs) süper özelliktir. Böylece X^U 'nun (acs) olduğu sonucuna varırız ve Lemma 5.2'yi uygulayabiliriz. Böylece $T^U x^1 = x^1$ olan bir $x^1 = \left[\begin{pmatrix} x_n^1 \end{pmatrix} \right] \in S_{X^U}$ öz vektörü vardır. Bunun anlamı $\|Tx_n^1 - x_n^1\|$ U boyunca sıfıra yaklaştığı ve 1'in T 'nin bir yaklaşık özdeğeri olduğudur. Özellikle $1 \in \sigma(T)$ 'dir.

Daha önce de söylediğimiz gibi (uacs)'nin süper özellik olduğu aşıkardır. Aynı zamanda süper anti-Daugavet özelliği de (uacs) ile uyumludur, fakat anti-Daugavet özelliğinin kendisinin bir süper özellik olup olmadığı şüphe konusudur.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Daugavet özellikli çiftlerin ve uzayların üstünde çalıştık.

Daugavet özelliğinin ayrılabilir “0”lı alt uzaylarla ve M-idealleriyle kalıtsal olduğu ve Daugavet özellikli ayrılabilir bir Banach Uzayının yansıyan uzayların şartsız toplamı içine gömülemeyeceği sonuçlarını elde ettik.

Ayrıca, X 'in Daugavet özelliğine sahip olduğu takdirde X^* 'in ℓ_1 'in bir izometrik kopyasını kapsadığını gördük.

KAYNAKLAR

- Abramovich, Y. , (1991), “New classes of spaces on which compact operators satisfy the Daugavet equation”, J. Operator Theory 25, 331-345. MR 94a:47061
- Abramovich, Y. , Aliprantis, C. D. ve Burkinshaw, O. , (1991), “The Daugavet equation in uniformly convex Banach spaces”, J. Funct. Anal. 97, 215-230. MR 92i:47005
- Abramovich, Y. A. ve Aliprantis, C. D. , (2002), “An Invitation to Operator Theory”, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island.
- Babenko, V. F. ve Pichugov, S. A. , (1981), “On a property of compact operators in the space of integrable functions”, Ukrainian Math. J. 33, 374-376. MR 82m:47018
- Bcauzamy, B. , (1985), “Introduction to Banach Spaces and their Geometry”, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, second edition, MR 88f:46021
- Behrends, E. , (1991), “On the principle of local reflexivity”, Studia Math. 100, 109-128. MR 92j:46021
- Bourgain, J. , (1976), “Strongly exposed points in weakly compact convex sets in Banach spaces”, Proc. Amer. Math. Soc. 58, 197-200. MR 54:3363
- Choquet, G. , (1969), “Lectures on Analysis”, Vol. II. W. A. Benjamin, New York, MR 40:3253
- Daugavet, I. K. , (1963), “On a property of completely continuous operators in the space”, C. Uspekhi Mat. Nauk 18.5, 157-158 (Russian). MR 28:461
- Diestel, J. , (1975), “Geometry of Banach Spaces-Selected Topics.”, Lecture Notes in Math. 485. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, MR 57:1079
- Dowling, P. N. , Johnson, W. B. , Lennard, C. J. ve Turett, B. , (1997), “The optimality of Jarnes’s distortion theorem”, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 167-174. MR 97d:46010
- Foiaş, C. ve Singer, I. , (1965), “Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions”, Math. Z. 87, 434-450. MR 31:5093
- Habala, P. , Hajek, P. ve Zizler, V. , (1996), “Introduction to Banach Spaces”, Matfyz Pres, Prague
- Harmand, P. , Werner, D. ve Werner, W. , (1993), “M-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras”, Lecture Notes in Math. 1547. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, MR 94k:46022
- Holub, J. R. , (1987), “Daugavet’s equation and operators on $L_1(\mu)$ ”, Proc. Amer. Math. Soc. 100, 295-300. MR 88j:47037
- Kadets, V. M. , (1982), “Two-dimensional universal Banach spaces”, C. R. Acad. Bulgare Sci. 35, 1331-1332 (Russian). MR 86b:46024

- Kadets, V. M. , (1996), “Some remarks concerning the Daugavet equation”, *Questiones Math.* 19, 225-235. MR 97c:46015
- Kadets, V. M. ve Popov, M. M. , (1997), “The Daugavet property for narrow operators in rich sub-spaces of $C[0, 1]$ and $L_1[0, 1]$ ”, *Algebra i Analiz.* 8 (1996), 43-62; English transl., *St. Petersburg Math. J.* 8, 521-584. MR 97f:47030
- Kadets, V. M. ve Shvidkoy, R. V. , “The Daugavet property for pairs of Banach spaces”, *Math. Analysis, Algebra and Geometry* (to appear).
- Kadets, V. M. , Shvidkoy, R. V. , Sirotkin, G. G. ve Werner, D. , (1997), “Espaces de Banach ayant la propriete de Daugavet”, *C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. I*, 325, 1291-1294. MR 98i:46011
- Kadets, V. M., Shvidkoy, R. V. , Sirotkin, G.G. ve Werner, D., (2000), “Banach spaces with the Daugavet property”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352, 855-873
- Kelley, J. L. , (1955), “General Topology”, Van’Nostrand, MR 16:1136c
- Lozanovskii, G. Ya. , (1966), “On almost integral operators in KB-spaces”, *Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astr.* 21.7, 35-44 (Russian). MR 34:8185
- Nazarenko, I. , “Paper to appear.”
- Plichko, A. M. ve Popov, M. M. , (1990), “Symmetric function spaces on atomless probability spaces”, *Dissertationes Mathematicae* 306, MR 92f:46032
- Talagrand, M. , (1990), “The three-space problem for L^1 ”, *J. Amer. Math. Soc.* 3, 9-29. MR 90i:46059
- Weis, L. , (1984), “Approximation by weakly compact operators on L_1 ”, *Math. Nachr.* 119, 321-326. MR 86h:47070
- Weis, L. ve Werner, D. , (1998), “The Daugavet equation for operators not fixing a copy of $C[0,1]$ ”, *J. Operator Theory* 39, 89-98. MR 99b:47049
- Werner, D. , (1997), “The Daugavet equation for operators on function spaces”, *J. Funct. Anal.* 143, 117-128. MR 98c:47025
- Wojtaszczyk, P. , (1992), “Some remarks on the Daugavet equation”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 115, 1047-1052. MR 92k:47041

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 11.08.1975

Doğum yeri Leverkusen / Almanya

Lise 1987–1993 İstanbul Bahçelievler Lisesi

Lisans 1993–1998 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

1993–1995 Penta Bilgisayar A.Ş.

1995–1996 Polo Bilgisayar A.Ş.

1997–2000 Uğur Dersaneleri

2000–2001 Kavram Dersaneleri

2001–2002 Florya Dersaneleri

2003-Devam ediyor Med Dersaneleri