

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİYATLARIN ARALIKLI VERİLMESİ DURUMUNDA
TAŞIMA PROBLEMİNE ÇÖZÜM ÖNERİSİ**

Matematik Müh. Erol TEZCAN

**FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOĞLU
Prof. Dr. Adnan MAZMANOĞLU (M.Ü.)

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ.....	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. LİNEER PROGRAMLAMA.....	3
2.1 Giriş.....	3
2.2 Lineer Programlama Probleminin Matematiksel Modeli.....	3
2.2.1 Lineer Programlama Probleminin Diğer Gösterimleri.....	6
2.3 Grafik Çözüm.....	7
2.3.1 Maksimizasyon Modelinin Çözümü.....	8
2.3.2 Minimizasyon Modelinin Çözümü.....	10
2.4 Uygun Çözüm.....	12
2.5 Temel Çözüm.....	13
2.6 Uygun Temel Çözüm.....	13
2.7 Simpleks Yöntem.....	14
2.7.1 Bir Ekstrem Nokta Çözümünden Diğerine Atlamak.....	17
3. TAŞIMA PROBLEMİ MODELİ VE ÇEŞİTLİ ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....	26
3.1 Taşıma Problemi Modelinin Tanımı.....	26
3.2 Uygun Temel Çözümlerden Birinin Bulunması.....	30
3.3 Optimal Çözüm.....	32
3.4 Taşıma Modeli Algoritması.....	41
3.4.1 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi.....	43

3.4.2	En Düşük Maliyetler Yöntemi.....	44
3.4.3	Vogel Yaklaşım Yöntemi.....	45
4.	ARALIK FİYATLI İKİ VE ÜÇ BOYUTLU TAŞIMA PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN OLUŞTURULMASI.....	48
4.1	İki Boyutlu Taşıma Probleminin Matematiksel Modelinin Oluşturulması.....	48
4.2	Matematiksel Modelin Oluşturulmasında Kullanılan Genel Tanımlar.....	49
4.3	Aralık Aritmetiği.....	50
4.4	Aralıklar Arasındaki Sıra İlişkileri.....	51
4.4.1	Maksimizasyon Problemleri İçin Sıra İlişkileri.....	51
4.4.2	Minimizasyon Problemleri İçin Sıra İlişkileri.....	54
4.5	Çok Amaçlı Problemlerin Formüle Edilmesi.....	56
4.5.1	Maksimizasyon Problemleri İçin Formülasyon.....	56
4.5.2	Minimizasyon Problemleri İçin Formülasyon.....	58
4.6	Üyelik Fonksiyonları.....	60
4.7	Üç Boyutlu Taşıma Probleminin Matematiksel Modelinin Oluşturulması.....	64
5.	SAYISAL UYGULAMALAR.....	69
5.1	İki Boyutlu Aralık Fiyatlı Taşıma Problemi.....	69
5.2	Üç Boyutlu Aralık Fiyatlı Taşıma Problemi.....	77
6.	SONUÇ.....	91
	KAYNAKLAR.....	92
	EKLER.....	93
Ek1	WINQSB Programı Hakkında Bilgiler.....	94
	ÖZGEÇMİŞ.....	95

SİMGE LİSTESİ

a_i	i kaynağının arz miktarı
b_j	j hedefinin talep ettiği miktar
x_{ij}	i 'den j 'ye taşıma maliyetini minimum yapan miktarlar
c_{ij}	i 'den j 'ye birim taşıma fiyatları
z	Amaç fonksiyonu
$\mu(z_1)$	z_1 'in üyelik fonksiyonu
$\mu(z_2)$	z_2 'nin üyelik fonksiyonu
c_{ijk}	i . kaynaktan j . hedefe k farklı yolların birim taşıma fiyat aralığının alt değeri
d_{ijk}	i . kaynaktan j . hedefe k farklı yolların birim taşıma fiyat aralığının üst değeri
x_{ijk}	i . kaynaktan j . hedefe k farklı yollar ile bilinmeyen taşınacak mal miktarı
V_j	Baz vektörleri

KISALTMA LİSTESİ

ÇATP	Çok Amaçlı Taşıma Problemi
EMY	En Düşük Maliyetler Yöntemi
KKY	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi
LP	Lineer Programlama
TP	Taşıma Problemi
VAM	Vogel Yaklaşım Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1	Taşıma problemi modeli genel hali 1
Şekil 2.1	Uygun çözüm uzayı 8
Şekil 2.2	Optimum çözüm 9
Şekil 2.3	Minimizasyon modeli grafiği 12
Şekil 5.1	İki boyutlu problemin WINQSB programında çözülmesi 71
Şekil 5.2	z_1 fonksiyonunun üyelik fonksiyonu grafiği 73
Şekil 5.3	z_2 fonksiyonunun üyelik fonksiyonu grafiği 73
Şekil 5.4	Problemin son halinin çözüm kümesi 76
Şekil 5.5	$\min z_1$ probleminin WINQSB programı ile çözümü 80
Şekil 5.6	$\min z_2$ probleminin WINQSB programı ile çözümü 82
Şekil 5.7	$\mu(z_1')$ üyelik fonksiyonu grafiği 84
Şekil 5.8	$\mu(z_2')$ üyelik fonksiyonu grafiği 84
Şekil 5.9	Problemin yeni halinin WINQSB de çözülmesi ve çözüm kümesi 89

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 2.1 Temel veriler	4
Tablo 2.2 Yem bileşim oranları	10
Tablo 3.1 Taşıma problemi modeli tablosu	27
Tablo 3.2 Örnek taşıma problemi tablosu	29
Tablo 3.3 Örnek taşıma problemi başlangıç tablosu	30
Tablo 3.4 Örnek taşıma problemi dağıtım tablosu	31
Tablo 3.5 Örnek taşıma problemi tablosu	34
Tablo 3.6 Örnek taşıma problemi tablosu	35
Tablo 3.7 Örnek taşıma problemi tablosu	35
Tablo 3.8 Örnek taşıma problemi tablosu	36
Tablo 3.9 Örnek taşıma problemi tablosu	37
Tablo 3.10 Örnek taşıma probleminde yeni çözüme atlama	37
Tablo 3.11 Örnek taşıma problemi yeni dağıtım tablosu	38
Tablo 3.12 Örnek taşıma problemi yeni dağıtım tablosu	39
Tablo 3.13 Örnek taşıma problemi tablosu	39
Tablo 3.14 Örnek taşıma problemi optimal çözüm tablosu	40
Tablo 3.15 Taşıma modeli tablosu	41
Tablo 3.16 Başlangıç temel çözümü	44
Tablo 3.17 Başlangıç çözümü sonucu	45
Tablo 3.18 İlk ceza grubunun hesaplanması	46
Tablo 3.19 Yeni cezaların belirlenmesi	47

ÖNSÖZ

“Fiyatların aralıklı verilmesi durumunda taşıma problemine çözüm önerisi” konulu bu çalışmada, yardım ve önerilerini benden hiç esirgemeyen, bilgi ve birikimlerini bana eksiksiz aktaran tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Mustafa Sivri’ye çok teşekkür ederim.

Bugüne kadar üzerimde emeği olan herkese, özellikle aileme ve tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmam sırasında bana her türlü manevi desteği sağlayarak sürekli yanımda olan sevgili eşime de çok teşekkür ederim.

Ağustos 2005

Erol TEZCAN

ÖZET

Klasik taşıma problemi i 'den j 'ye tek tip malın taşınmasıyla ilgilenir. Burada i 'den j 'ye birim taşıma maliyetleri sabittir. Ancak gerçek dünyada bir taşıma probleminde i 'den j 'ye taşınacak malın birim fiyatları her zaman sabit olmayabilir. Piyasa koşulları gözönüne alındığında fiyatların sabit olmaması gerektiği ise bilinen bir gerçektir.

Bu çalışmada taşıma birim fiyatlarının bir aralık halinde olması göz önüne alınmıştır. Aralık aritmetiğinden (Ishibuchi ve Tanaka, 1990) faydalanarak, problemimiz iki amaçlı taşıma problemi haline getirilmiş, üyelik fonksiyonları da dikkate alınıp amaçlara uygulanmış ve üyelik fonksiyonlarının kesişimi yapılarak ve kısıt sayısı orijinale göre bir kısıt düşürülerek probleme bir çözüm getirilmiştir.

Bu yöntem iki boyutlu taşıma probleminden başka üç boyutlu taşıma problemine de (solid problem) uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: aralık aritmetiği, iki boyutlu taşıma problemi, üç boyutlu taşıma problemi, solid problem, üyelik fonksiyonları

ABSTRACT

Classical transportation problem interests transporting of a unique material from i to j . In the classical transportation problem, transportation cost from i to j are stable. But for real world, in transportation problem, unit costs of material which are transported from i to j can not be stable. According to market conditions, the costs should not be stable.

In this thesis, multiobjective transportation problems whose objective functions have interval coefficients are investigated. The problem with the interval objective function is converted into a multiobjective problem using “interval arithmetic” (Ishibuchi and Tanaka, 1990). The membership functions of objective functions are found, and equalized them. Consequently, it is found a new constraint. The founded constraint is added to original problem and it is given a solution proposal.

This method are applied to three dimensional transportation problem (solid problem) other than two dimensional transportation problem.

Keywords: interval arithmetic, two dimensional transportation problem, three dimensional transportation problem, solid problem, membership functions

1. GİRİŞ

Taşıma problemi modeli, doğrusal programlama probleminin özel bir şeklidir. Bu modelde, malların kaynaklardan (fabrika gibi) hedeflere (depo gibi) taşınmasıyla ilgilenilir. Buradaki amaç, bir taraftan hedefin talep gereksinimleri ve kaynakların arz miktarlarında denge sağlarken, diğer taraftan da her bir kaynaktan her bir hedefe yapılan taşımaların toplam maliyetini minimum kılacak taşıma miktarını belirlemektir. Modelde, verilen rota üzerindeki taşıma maliyetlerinin aynı rota üzerindeki taşıma miktarlarıyla doğru orantılı olduğu kabul edilmektedir. Taşıma problemi modeli, malların bir yerden bir yere taşınmasından başka, stok kontrolü, işgücü programlama, personel atama gibi alanlarda da kullanılabilmektedir.

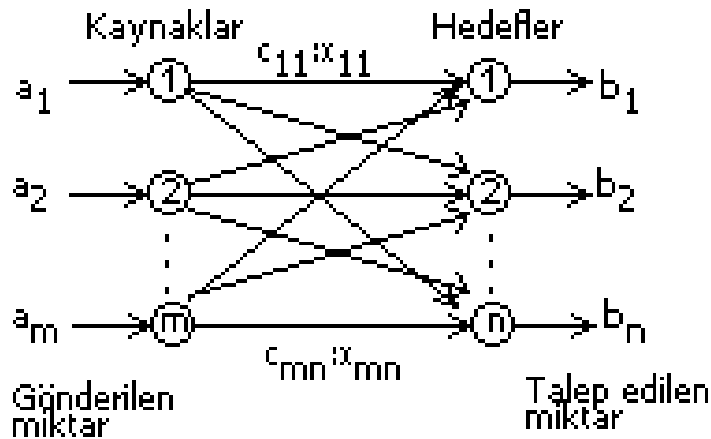
(Taha, 2000)

Problemin genel hali Şekil 1.1’de verilmiştir. Her biri birer düğüm olarak gösterilen m kaynak ve n hedef vardır. Bağlantılar, kaynaklarla hedefler arasındaki rotaları belirten ifadelerdir. (i, j) bağlantısı, i kaynağını j hedefine bağlarken iki tür bilgi içermektedir:

(1) c_{ij} birim taşıma maliyeti

(2) x_{ij} taşıma miktarı

i kaynağının arz miktarı a_i , j hedefinin talep ettiği miktarda b_j olsun. Modelin amacı, tüm arz ve talep kısıtlarını sağlayan, ayrıca toplam taşıma maliyetlerini minimum yapan x_{ij} bilinmeyen miktarlarını belirlemektir. (Taha, 2000)



Şekil 1.1 : Taşıma problemi modeli genel hali (Taha, 2000)

Taşıma probleminin (TP) tarihçesi 1930'lu yıllara dayanır. TP, 1941 yılında Frank L. Hitchcock tarafından “Bir ürünün birçok kaynaktan birçok varış yerine dağıtılması“ isimli makalesinde ortaya konulmuştur.

T. C. Koopmans 1949 yılında “Taşıma sistemlerinden optimum faydalanma” isimli makalesini yayımlamıştır. (Dantzig, 1963)

Charnes ve Cooper, 1954 yılında TP de “atlama taşı yöntemi” ni geliştirmişlerdir. (Liu, 2003)

Aneja ve Nair 1979'da, iki kriterli bir TP modeli üzerinde çalışmışlardır. (Li ve Lai, 2000)

Ishibuchi ve Tanaka 1990 yılında “aralık amaç fonksiyonlu optimizasyonda çok amaçlı programlama” adlı makaleyi yayımlamışlardır ve Abd El-Wahed 2001 yılında çok amaçlı lineer taşıma probleminin (ÇALTP) optimal uzlaşık çözümünü elde eden bir bulanık programlama yaklaşımı geliştirmiştir.

Bölüm 2'de klasik taşıma problemi, Bölüm 3'de çok amaçlı taşıma problemi ve çözüm yöntemleri, Bölüm 4'de aralık aritmetiği ve aralık fiyatlı taşıma probleminin matematiksel modeli anlatılmıştır. Bölüm 5'te aralık fiyatlı taşıma problemine ait iki ve üç boyutlu problemler için sayısal uygulamalar yapılmıştır.

(1.3) amaç fonksiyonundaki c_j ($1 \leq j \leq n$) katsayılarına **fiyat** denir.

Örnek 2.1

Bir şirket, M1 ve M2 hammaddelerinin karışımından elde edilen iç ve dış duvar boyaları üretmektedir. Aşağıdaki tabloda problemin temel verileri sunulmuştur. (Taha, 2000)

Tablo 2.1 : Temel veriler

	Hammadde miktarları(ton)		Günlük maksimum kullanılabilirlik
	Dış boyada	İç boyada	(ton)
M1 hammaddesi	6	4	24
M2 hammaddesi	1	2	6
Ton başına kar (1000 pb)	5	4	

Yapılan bir pazar araştırmasından da, günlük iç boya talebinin en çok 2 ton olduğu belirlenmiştir. Yine aynı araştırmadan, günlük iç boya talebinin günlük dış boya talebinden fazla olduğu ve bu fazlalığın günde en çok 1 ton olduğu saptanmıştır. Bu şirket günlük karını maksimum kılacak şekilde, dış ve iç boyanın optimum üretim miktarlarını belirlemek istemektedir.

Doğrusal programlama modeli bir Yöneylem Araştırması problemi olarak düşünüldüğünde üç temel elemanı olacaktır.

1. Belirlenecek karar değişkenleri
2. Optimal yapılacak amaç
3. Problemin kısıtları

Modeli geliştirmede ilk adım karar değişkenlerinin açıkça tanımlanmasıdır. Önce değişkenler tanımlanırsa, amaç fonksiyonunun ve kısıtların oluşturulması çok zor olmayacaktır.

Bu şirket için, üretilecek iç ve dış boya miktarlarının belirlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla modelin değişkenleri,

x_1 : Dış boyanın günlük üretim miktarı (ton)

x_2 : İç boyanın günlük üretim miktarı (ton)

olmalıdır.

Karar değişkenleri bu şekilde tanımlandıktan sonra, bundan yararlanarak amaç fonksiyonu oluşturulur. Bu şirket için mantıklı bir amaç, iç ve dış boyadan elde edilecek günlük karı olabildiğince artırmak yani karı maksimum yapmaktır.

z 'nin günlük karı gösterdiği kabul edilirse,

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

olacaktır. Dolayısıyla şirketin amacı,

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

şeklinde yazılabilir.

Modelin son elemanı ise, hammadde ve taleple ilgili olarak içinde bulunulan duruma ait kısıtlardır. Hammadde kısıtlarını sözle ifade edecek olursak,

(bir hammaddenin her iki boya içindeki kullanımı) $\leq$ (maksimum hammadde kullanılabilirliği)

yazarız. Problemdeki verilerden yararlanarak,

M1 hammaddesinin kullanımı : $6x_1 + 4x_2$

M2 hammaddesinin kullanımı : $1x_1 + 2x_2$

ton olarak yazabiliriz.

M1 ve M2 hammaddelerinin günlük kullanımları sırasıyla 24 ve 6 ton olarak sınırlandırıldığından kısıtları aşağıdaki şekilde yazmalıyız.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

Ayrıca, iki tip talep kısıtı vardır:

- (1) iç duvar boyasına ait talebin günde en çok 2 tonla sınırlı olması,
- (2) iç boyanın günlük üretiminin dış boyanınkinden fazla olması ve bu fazlalılığın en çok 1 tona ulaşması.

Bu kısıtların ilki son derece açıktır ve hemen $x_2 \leq 2$ yazabiliriz. İkinci kısıtı ise, iç ve dış boyaların günlük üretim farklarının 1 tonu geçemeyeceğini belirtmek üzere, $x_2 - x_1 \leq 1$ şeklinde yazılır.

Modelde doğrudan yer almayan ve değişkenlerin negatif değerler alamayacağını ifade eden bir başka kısıt daha vardır. Bunlara negatif olmama koşulunu sağlayan kısıtlar denilir ve $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ şeklinde ifade edilir.

Bu şirketin modelini bir bütün olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modeli bütünüyle ele aldığımızda, aslında toplam karı maksimum yapan optimum uygun çözümü aramamız gerektiği açıktır. Buna kalkıştığımızda sonsuz denebilecek sayıda uygun çözüm bulabileceğimizi görürüz. Dolayısıyla, optimum çözümü bulacak sistematik çözümler aramak daha doğru olacaktır.

2.2.1 Lineer Programlama Probleminin Diğer Gösterimleri

1) $\sum$ Operatörüyle Gösterim

$$(1.1) \text{ koşulları} \quad : \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$(1.2) \text{ koşulları} \quad : x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$(1.3) \text{ amaç fonksiyonu} \quad : z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

yazılarak lineer programlama problemi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} .x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq m) \quad (1.1)$$

$$x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \quad (1.2)$$

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j .x_j \quad (1.3)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2) Matrisyel Gösterim

(1.1) sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ve } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$$

olmak üzere

$$A.X = b \quad (1.1)$$

$$X \geq 0 \quad (1.2)$$

$$\min z = C.X \quad (1.3)$$

lineer programlama probleminin matrisyel gösterimidir.

2.3 Grafik Çözüm

Bu bölümde iki değişkenli bir doğrusal programlama modelinin grafik olarak nasıl çözüleceği ele alınmıştır. Uygulamada iki değişkenli modellerle nadiren karşılaşılsa da (bir doğrusal programlama problemi binlerce kısıt ve değişken içerebilir) grafik yöntem, temel fikirlerin oluşması için yararlı olacaktır.

Grafik yöntemde iki temel adım vardır:

1. Modelin tüm kısıtlarının sağlandığı uygun çözümleri içeren çözüm uzayının belirlenmesi,
2. Belirlenen bu uygun çözüm uzayındaki bütün noktalar arasından optimum çözümün belirlenmesi.

Yöntem, amaç fonksiyonunun hem maksimum hem de minimum olduğu durumlar için açıklanmıştır.

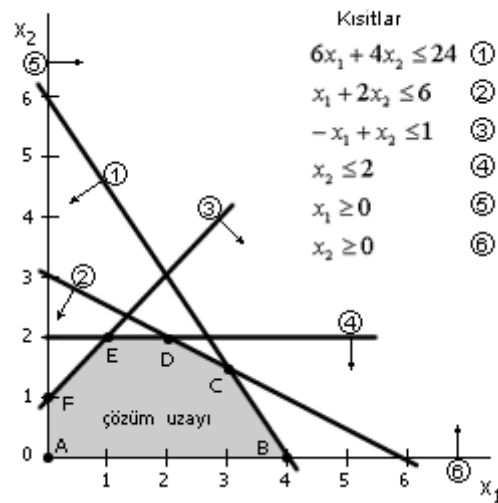
2.3.1 Maksimizasyon Modelinin Çözümü

Bu bölüm Örnek 2.1 ele alınarak anlatılmıştır.

Uygun çözüm uzayını belirleyelim:

x_1 ' i yatay eksen, x_2 ' yi de düşey eksen gösterelim. x_1 değişkeni dış boyayı, x_2 değişkeni de iç boyayı göstermektedir. $x_1 \geq 0$ ve $x_2 \geq 0$ negatif olmama kısıtları uyarınca çözüm uzayı kartezyen koordinat sisteminin 1. bölgesinde olacaktır. Kalan dört kısıtı bu koordinat sisteminde göstermek için, eşitsizlikleri eşitlik olarak düşünürüz ve bunların doğrularını çizeriz.

Buna göre oluşacak şekil aşağıdaki gibi olacaktır.



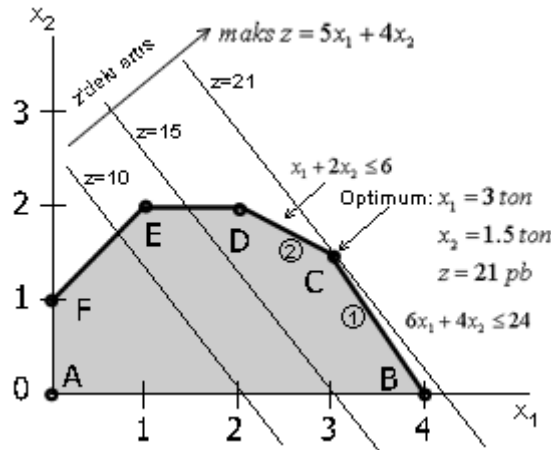
Şekil 2.1 : Uygun çözüm uzayı (Taha, 2000)

Optimum çözümü belirleyelim.

Şekil 2.1 'deki uygun çözüm uzayı, modelin tüm kısıtlarını sağlar. Bu uzay A, B, C, D, E, F köşe noktalarını birleştiren doğru parçaları tarafından biçimlendirilmiştir. Bu uzayın sınırlarındaki ve içindeki her nokta, tüm kısıtları sağlayan uygun bir çözüm noktasıdır.

Uygun çözüm bölgesi sonsuz sayıda uygun nokta içerdiğinden, optimal çözümü bulmak için bazı işlemler yapılmalıdır.

Optimum çözümü belirlemek için $z = 5x_1 + 4x_2$ kar fonksiyonunun artış yönünün bilinmesi gerekir. Bunu da pratikte z' ye 10 ve 15 gibi iki keyfi değer atayarak yapabiliriz. Önce $5x_1 + 4x_2 = 10$, sonrada $5x_1 + 4x_2 = 15$ doğruları çizilir. Modelin çözümüne bu durumun da dahil edilmiş hali Şekil 2.2' de görülmektedir. Şekilde z karındaki artış yönü de görülmektedir. z' nin ilk değeri 10 iken, ikinci seferde 15'e çıkarılarak maksimuma doğru gidilmiştir. Amaç fonksiyonunun daha da artırılması halinde ABCDEF uygun çözüm uzayının dışına çıkılacaktır. Şekilden çözüm uzayının dışına C noktasından çıktığı anlaşılmaktadır. Dolayısıyla optimum çözüm C noktasında gerçekleşecek demektir.



Şekil 2.2 : Optimum çözüm

C noktası, Şekil 2.2 'de 1 ve 2 numarayla gösterilen doğruların kesişim noktasıdır.

Bu doğrulara ait

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

denklemlerinin bir arada çözülmesiyle $x_1 = 3$ ve $x_2 = 1.5$ bulunur.

Amaç fonksiyonu ise $z = 21$ olarak hesaplanır.

Günlük üretimde 3 ton dış boya, 1.5 ton da iç boya üretilmesi halinde günlük kar 21000 pb ile maksimum olacaktır.

Optimum çözümün çözüm uzayına ait bir köşe noktasında meydana gelmesi rastlantı değildir. z amaç fonksiyonunun eğimi değiştirilse bile yeni çözümün yine köşe noktalarından birinde olduğu görülecektir.

2.3.2 Minimizasyon Modelinin Çözümü

Bu modelin incelenmesinde aşağıdaki örnek kullanılmıştır.

Örnek 2.2 :

Bir çiftlikte günde en az 800 kg yem kullanılmaktadır. Bu özel tip yem, mısır ve soya ununun karışımından Tablo 2.2 deki bileşime uygun olarak elde edilmektedir:

Tablo 2.2 : Yem bileşim oranları (Taha, 2000)

	1 kg yemde kg cinsinden miktarlar		
	Protein	Lif	Maliyet (pb/kg)
Mısır	0.09	0.02	0.30
Soya Unu	0.60	0.06	0.90

Bu özel yemin bileşiminde en az %30 protein, en çok %5 lif bulunması zorunluluğu vardır. Minimum maliyetli günlük yem karışımı nasıl belirlenmelidir?

Yem, mısır ve soya unundan oluşmaktadır. Buna göre karar değişkenlerini şöyle tanımlarız.

x_1 : Günlük yem karışımı içindeki mısır miktarı (kg)

x_2 : Günlük yem karışımı içindeki soya unu miktarı (kg)

Amaç fonksiyonumuz, toplam günlük yem maliyetinin (pb-birim miktar) minimum değerini aramaktır.

Bunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\min z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

Bu çiftlikte günde en az 800 kg yeme ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durumu şöyle ifade edebiliriz

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

Protein diyeti ile ilgili ihtiyaçlara ait kısıtlar şu şekilde tanımlanmıştır :

x_1 kg mısır ve x_2 kg soya unundaki protein miktarı $(0.009x_1 + 0.60x_2)$ kg'dır. Bu miktarın toplam ürün karışımının en az % 30' u olması istendiğine göre,

$$0.09x_1 + 0.60x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$$

olacaktır. Benzer şekilde, lif miktarı da

$$0.02x_1 + 0.60x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2)$$

olacaktır. Tüm kısıtları, değişkenler alt alta gelecek şekilde düzenleyerek, modeli aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\min z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

$$0.21x_1 - 0.30x_2 \leq 0$$

$$0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modelin grafik çözümü Şekil 2.3' te gösterilmiştir.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)$ vektörüne , yada $X(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)$ noktasına lineer programlama probleminin bir **uygun çözüm**ü adı verilir.

2.5 Temel Çözüm

(1.1) sistemindeki n tane $n > m$ $(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)$ değişkeni içinden $n - m$ tanesini keyfi değişken olarak seçelim ve bunları sıfır yapalım; geriye kalan m tane satırdan oluşan lineer denklem sisteminin katsayılar determinantı sıfırdan farklı olmak koşuluyla, elde edilen çözüm (1.1) sisteminin bir **temel çözüm**üdür.

Örnek olarak,

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ler keyfi seçilip

$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$ yapılarak, (1.1) sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= b_m \end{aligned} \quad (1.1)$$

sistemine dönüşür.

Eğer bu sistemin katsayılar determinantı $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$ ise elde edilecek

$X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ çözümü bir temel çözümdür. Bu temel çözümdeki $x_1, x_2, \dots, x_m$ değişkenleri de “**temel değişkenler**” adını alırlar.

2.6 Uygun Temel Çözüm

(1.1) sisteminin “temel çözümleri” arasından $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ (1.2) koşullarını da sağlayanların her biri “**uygun temel çözüm**” adını alır. Başka bir deyişle bir temel çözümdeki değişkenlerden hiç biri “negatif değilse” bu temel çözüm bir “uygun temel çözüm”dür.

2.7 Simpleks Yöntem

Bu bölümde, bir B_0 başlangıç bazına karşılık olan X_0 ekstrem nokta çözümünden (başlangıç uygun temel çözüm'den) hareket edilerek, amaç fonksiyonunu daha küçük yapan X_1 ekstrem nokta çözümüne atlamak için bir yöntem oluşturulacaktır. Şimdi sadece bir ekstrem nokta çözümünden başka bir ekstrem nokta çözümüne atlatmak için bir yöntem oluşturulacaktır. Aşağıdaki teorem bu amaca yöneliktir.

Teorem 2.1:

$V_1, V_2, \dots, V_r, \dots, V_m, \dots, V_n$ vektörleri arasından, mesela ilk m tanesi ($m < n$)

$B_0 = (V_1, V_2, \dots, V_r, \dots, V_m)$ bazını oluşturuyorsa V_k ($m+1 \leq k \leq n$) vektörünün

$$V_k = x_1.V_1 + x_2.V_2 + \dots + x_r.V_r + \dots + x_m.V_m \quad (2.1)$$

olarak tek bir şekilde ifade edilebileceği bilindiğine göre $x_r \neq 0$ olmak koşuluyla, B_0 bazından V_r vektörünü atıp yerine V_k vektörünü almak suretiyle oluşan $B_0 = (V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m)$ de bir baz'dır.

İspat:

Birinci adımda $V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörlerinin lineer bağımsız oldukları; ikinci adımda da V_j ($1 \leq j \leq n$) vektörlerinden her birinin $V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörlerinin lineer kombinezonu olarak tek bir şekilde ifade edilebileceği gösterilecektir.

Birinci Adım:

$V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörleri lineer bağımsızdır; çünkü aksi takdirde α_i ($1 \leq i \leq m$) katsayılarından en az bir tanesi sıfırdan farklı olmak üzere

$$\alpha_1.V_1 + \alpha_2.V_2 + \dots + \alpha_{r-1}.V_{r-1} + \alpha_k.V_k + \alpha_{r+1}.V_{r+1} + \dots + \alpha_m.V_m = 0 \quad (2.2)$$

yazılabilirdi.

Burada iki durum olabilir:

(1) $a_k = 0$ ise (2.2) bağıntısı

$$\alpha_1.V_1 + \alpha_2.V_2 + \dots + \alpha_{r-1}.V_{r-1} + \alpha_{r+1}.V_{r+1} + \dots + \alpha_m.V_m = 0$$

şeklini alır.

Yani

$V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörleri lineer bağımlı olurdu; oysa B_0 lineer bağımsız vektör kümesinin hiçbir alt kümesi lineer bağımlı olmaz; bu bir çelişkidir.

(2) $a_k \neq 0$ ise (2.1) eşitliğini (2.2) de yerleştirerek

$$(\alpha_1 + \alpha_k x_1).V_1 + \dots + (\alpha_{r-1} + \alpha_k x_{r-1}).V_{r-1} + \alpha_k x_r.V_k + (\alpha_{r+1} + \alpha_k x_{r+1}).V_{r+1} + \dots + (\alpha_m + \alpha_k x_m).V_m = 0 \quad (2.3)$$

yazılabilir.

$a_k \neq 0$ ve $x_r \neq 0$ varsayımlardan dolayı V_r vektörünün katsayısı $\alpha_k x_r \neq 0$ dır. Bu taktirde (2.3) bağıntısından $V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörlerinin lineer bağımlı olmaları gerekirdi. Oysa bu sonuç daha başlangıçta $V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörlerinin lineer bağımsız oldukları ve B_0 bazını oluşturdıkları varsayımıyla çelişmektedir.

Sonuç:

$V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörleri lineer bağımsızdır

İkinci Adım:

V_j ($1 \leq j \leq n$) vektörlerinden her biri $V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörlerinin lineer kombinezonu olarak tek bir şekilde ifade edilebilir; çünkü V_j ($1 \leq j \leq n$) vektörlerinden her biri B_0 bazı cinsinden

$$V_j = \gamma_1.V_1 + \gamma_2.V_2 + \dots + \gamma_{r-1}.V_{r-1} + \gamma_r.V_r + \gamma_{r+1}.V_{r+1} + \dots + \gamma_m.V_m \quad (2.4)$$

olarak tek bir şekilde yazılabilir.

(2.1) den V_r vektörünü çekip (2.4) de yerine yazarsak

$$V_j = (\gamma_1 - \frac{\gamma_r \cdot x_1}{x_r}) \cdot V_1 + \dots + (\gamma_{r-1} - \frac{\gamma_r \cdot x_{r-1}}{x_r}) \cdot V_{r-1} + \frac{\gamma_r}{x_r} \cdot V_k + (\gamma_{r+1} - \frac{\gamma_r \cdot x_{r+1}}{x_r}) \cdot V_{r+1} + \dots + (\gamma_m - \frac{\gamma_r \cdot x_m}{x_r}) \cdot V_m \quad (2.5)$$

buluruz.

Yani V_j ($1 \leq j \leq n$) vektörlerinden her biri $V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörlerin cinsinden

$$\lambda_i = \gamma_i - \frac{\gamma_r \cdot x_i}{x_r} \quad (i \neq r) \text{ ve } \lambda_r = \frac{\gamma_r}{x_r} \text{ olmak üzere}$$

$$V_j = \lambda_1 \cdot V_1 + \lambda_2 \cdot V_2 + \dots + \lambda_{r-1} \cdot V_{r-1} + \lambda_r \cdot V_k + \lambda_{r+1} \cdot V_{r+1} + \dots + \lambda_m \cdot V_m \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu yazış şekli tekdir; çünkü mesela

$$V_j = \mu_1 \cdot V_1 + \mu_2 \cdot V_2 + \dots + \mu_{r-1} \cdot V_{r-1} + \mu_r \cdot V_k + \mu_{r+1} \cdot V_{r+1} + \dots + \mu_m \cdot V_m \quad (2.7)$$

gibi başka bir yazılış olsaydı (2.6) ve (2.7) eşitliklerini taraf tarafa çıkararak

$$(\lambda_1 - \mu_1) \cdot V_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \cdot V_2 + \dots + (\lambda_{r-1} - \mu_{r-1}) \cdot V_{r-1} + (\lambda_r - \mu_r) \cdot V_k + (\lambda_{r+1} - \mu_{r+1}) \cdot V_{r+1} + \dots + (\lambda_m - \mu_m) \cdot V_m = 0$$

elde edilirdi.

$\lambda_i - \mu_i$ ($1 \leq i \leq m$) katsayılarından en az bir tanesi sıfırdan farklı olacağından $V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m$ vektörlerinin lineer bağımlı oldukları sonucuna varılırdı. Bu ise birinci adımdaki sonuç ile çelişir.

Sonuç:

$$B_1 = (V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_k, V_{r+1}, \dots, V_m) \text{ baz'dır}$$

2.7.1 Bir Ekstrem Nokta Çözümünden Diğetine Atlamak

$B_0 = (V_1, V_2, \dots, V_r, \dots, V_m)$ bazına karşılık olan $X_0 = (x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ ekstrem nokta çözümünü göz önüne alalım; (1.1) koşulları

$$x_1.V_1 + x_2.V_2 + \dots + x_r.V_r + \dots + x_m.V_m = V_0 \quad (2.8)$$

şeklini alır ve B_0 bazında bulunmayan V_k vektörlerinden her biri

$$V_k = y_{1k}.V_1 + y_{2k}.V_2 + \dots + y_{rk}.V_r + \dots + y_{mk}.V_m \quad (2.9)$$

olarak tek bir şekilde ifade edilebilir.

(2.9) eşitliğini $\lambda > 0$ sayısı ile çarpıp (2.8) den çıkarırsak

$$(x_1 - \lambda y_{1k}).V_1 + (x_2 - \lambda y_{2k}).V_2 + \dots + (x_r - \lambda y_{rk}).V_r + \dots + (x_m - \lambda y_{mk}).V_m + \lambda V_k = V_0 \quad (2.10)$$

Amacımız (2.10) eşitliğindeki $x_j - \lambda y_{jk}$ ($1 \leq j \leq m$) katsayılarının her biri

$$x_j - \lambda y_{jk} \quad (1 \leq j \leq m) \quad (2.11)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $\lambda > 0$ sayısını belirtmektir

X_0 bir ekstrem nokta olduğundan (2.8) deki x_j ler $x_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq m$) koşulunu sağlarlar.

Şimdi $y_{jk} \leq 0$ yada $y_{jk} > 0$ durumlarını ayrı ayrı irdeleyelim:

1) $y_{jk} \leq 0$ koşulunu sağlayan y_{jk} lar için $x_j \geq 0$ ve $\lambda > 0$ oldukları hatırlanarak

$$x_j - \lambda y_{jk} \geq 0 \quad (2.12)$$

2) $y_{jk} > 0$ koşulunu sağlayan y_{jk} lar için $x_j - \lambda y_{jk}$ ifadesi negatif, sıfır ya da pozitif olabilir.

$y_{jk} > 0$ olmak koşuluyla

$x_j - \lambda y_{jk} \geq 0$ koşulu $\lambda \leq \frac{x_j}{y_{jk}}$ koşuluna dönüşür.

Şu halde j indisi sadece pozitif y_{jk} lara ait olmak üzere

$\min(\frac{x_j}{y_{jk}}) = \frac{x_r}{y_{rk}}$ yani $j = r$ için $\frac{x_j}{y_{jk}}$ oranı minimum olsun.

Bu koşullar altında

$$\lambda = \frac{x_r}{y_{rk}} \quad (2.13)$$

seçilirse pozitif y_{jk} lar için de

$$x_j - \lambda y_{jk} \geq 0$$

koşulu sağlanır.

Sonuç:

j indisi sadece pozitif y_{jk} ait olmak üzere $\frac{x_j}{y_{jk}}$ oranı mesela $j = r$ için minimum olsun; bu

koşul altında $\lambda = \frac{x_r}{y_{rk}}$ seçilirse :

1) (2.10) bağıntısında V_r vektörünün katsayısı sıfır olur ve böylece de V_r vektörünün B_0 bazından çıkmasına karar verilir.

2) (2.10) bağıntısındaki vektörlerden hiç birinin katsayısı negatif olamaz.

3) (2.10) bağıntısında, V_k vektörü $\lambda = \frac{x_r}{y_{rk}} > 0$ katsayısıyla baza girer yani $x_k = \lambda$ olur

4) Teorem (2.1) den dolayı

$V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_{r+1}, \dots, V_m, V_k$ vektörleri yeni $B_1 = (V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_{r+1}, \dots, V_m, V_k)$ bazını oluşturur.

5) $\lambda = \frac{x_r}{y_{rk}}$ olmak üzere, yeni B_1 bazı yeni bir

$$X_1 = (x_1 - \lambda y_{1k}, x_2 - \lambda y_{2k}, \dots, x_{r-1} - \lambda y_{r-1,k}, x_{r+1} - \lambda y_{r+1,k}, \dots, x_m - \lambda y_{m,k}, \lambda, 0, 0, \dots, 0)$$

ekstrem nokta çözümüne karşılıktır, burada $x_k = \lambda$ olduğuna dikkat edilmelidir.

6) Böylece bu yöntemle B_0 başlangıç bazından yeni bir B_1 bazına ve dolayısıyla da X_0 başlangıç ekstrem nokta çözümünden yeni bir X_1 ekstrem nokta çözümüne atlanmış olur.

7) X_0 çözümü için amaç fonksiyonu

$$z_0 = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_r c_r + \dots + x_m c_m$$

X_1 çözümü için de amaç fonksiyonu

$$z_1 = (x_1 - \lambda y_{1k})c_1 + (x_2 - \lambda y_{2k})c_2 + \dots + (x_{r-1} - \lambda y_{r-1,k})c_{r-1} + (x_{r+1} - \lambda y_{r+1,k})c_{r+1} + \dots + (x_m - \lambda y_{m,k})c_m + \lambda c_k$$

değerini alır.

Uyarı:

Henüz bu aşamada $z_1 < z_0$ olup olmadığı hakkında hiçbir kritere sahip olmadığımıza dikkat edilmelidir.

Örnek 2.3 :

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$6x_1 + x_2 + x_5 = 4$$

$$x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq 5) \quad (1.2)$$

$$\max z = 5x_1 + 2x_2 \quad (1.3)$$

lineer programlama probleminde B_0 başlangıç bazından yeni bir B_1 bazına atlayalım; başka bir deyişle X_0 başlangıç ekstrem nokta çözümünden (uygun temel çözümden) yeni bir X_1 ekstrem nokta çözümüne (uygun temel çözüme) atlayalım.

Baza giren vektör ile bazdan çıkması gereken vektörü vurgulamak için * işareti kullanılacaktır.

* işaretinin bulunduğu sütundaki vektör baza girecek ve * işaretinin bulunduğu satırdaki vektör bazdan çıkacaktır.

Başlangıç tablosu:

Baz vektörleri (V_j)	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	$y_{jk} > 0$ lar için x_j / y_{jk} oranı
V_3	8	3	-7	1	0	0	8/3
V_4	3	1	2	0	1	0	3/1
V_5	4	6*	1	0	0	1	4/6

$B_0 = (V_3, V_4, V_5)$ başlangıç bazına karşılık X_0 başlangıç ekstrem nokta çözümü

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = 8, x_4 = 3, x_5 = 4 \\ x_1 = 0, x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X_0 = (0, 0, 8, 3, 4) \text{ olup}$$

$$8V_3 + 3V_4 + 4V_5 = V_0 \quad (2.14)$$

yazılabilir.

B_0 bazı dışındakilerden, mesela V_1 vektörünü baza sokmak isteyelim. Bu durumda oluşan sorun şudur: Yeni bir B_1 bazına yani yeni bir X_1 ekstrem nokta çözümüne atlamak için B_0 bazından hangi vektör atılmalıdır?.

Cevap:

$$\text{Tablodaki } V_1 \text{ sütundan } 3V_3 + 1V_4 + 6V_5 = V_1 \quad (2.15)$$

eşitliği $\lambda > 0$ sayısı ile çarpılıp (2.14) den çıkarılarak

$$(8 - 3\lambda)V_3 + (3 - 1\lambda)V_4 + (4 - 6\lambda)V_5 + \lambda V_1 = V_0 \quad (2.16)$$

bulunur.

Yeni X_1 ekstrem nokta çözümüne ulaşmak için V_0, V_1 sütunlarını ($y_{j1} > 0$ olmak koşuluyla) oranlayarak x_j / y_{j1} oranının hangi j indisi için minimum olduğunu saptayalım:

$$\min(8/3, \quad 3/1, \quad 4/6) = 4/6 \rightarrow (j = 5) \text{ dolayısıyla } V_5 \text{ vektörünün bazdan çıkmasına ve yerine } \lambda = 4/6 \text{ katsayısıyla } V_1 \text{ vektörünün girmesine karar verilir; (2.16) eşitliği } 6V_3 + \frac{7}{4}V_4 + \frac{2}{3}V_1 = V_0 \text{ eşitliğine dönüşür.}$$

Böylece V_5 vektörü bazdan atılıp yerine V_1 vektörü girerek yeni $B_1 = (V_3, V_4, V_1)$ bazına ve dolayısıyla da yeni

$$x_3 = 6, \quad x_4 = 7/3, \quad x_1 = 2/3, \quad x_2 = x_5 = 0 \rightarrow X_1 = (2/3, 0, 6, 7/3, 0)$$

ekstrem nokta çözümüne atlanmış olur.

Bütün bu işlemler

$$V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ vektörünü } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ birim vektörüne dönüştüren elementer satır işlemleri başlangıç}$$

tablosunun gövdesine (matrisine) uygulanarak tablo üzerinde yapılabilir ve aşağıdaki birinci tablo elde edilir.

Birinci tablo:

Baz vektörleri (V_j)	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	$y_{jk} > 0$ lar için x_j / y_{jk} oranı
V_3	6	0	-15/2	1	0	-1/2	/
V_4	7/3	0	11/6*	0	1	-1/6	7/3:11/6
V_1	2/3	1	1/6	0	0	1/6	2/3:11/6

$$\text{Tablodan } 6V_3 + 7/3V_4 + 2/3V_1 = V_0 \quad (2.17)$$

yazılabilir.

X_1 den yeni bir X_2 çözümüne atlamak için mesela V_2 vektörünün baza girmesini isteyelim; bu taktirde B_1 bazından hangi vektör atılmalıdır?

Cevap:

$-15/2V_3 + 11/6V_4 + 1/6V_1 = V_2$ eşitliğini $\lambda > 0$ sayısıyla çarpıp (2.17) den çıkararak

$$(6 + 15/2\lambda)V_3 + (7/3 - 11/6\lambda)V_4 + (2/3 - 1/6\lambda)V_1 + \lambda V_2 = V_0 \quad (2.18)$$

Tablodaki V_0, V_2 sütunlarını V_2 sütununun sadece pozitif elemanları için oranlayalım:

$$\min\left(\frac{7/3}{11/6}, \frac{2/3}{1/6} \cdot 3/1\right) = \frac{7/3}{11/6} = \frac{14}{11} \rightarrow j = 4$$

V_4 vektörünün bazdan atılıp yerine $\lambda = 14/11$ katsayısıyla V_2 vektörünün girmesine karar verilir.

(2.18) de $\lambda = 14/11$ yazarak $171/11V_3 + 5/11V_1 + 14/11V_2 = V_0$ olur.

Böylece $B_1 = (V_3, V_4, V_1)$ bazından yeni bir $B_2 = (V_3, V_1, V_2)$ bazına; başka bir deyişle X_1 den yeni bir $X_2 = (5/11, 14/11, 171/11, 0, 0)$ ekstrem nokta çözümüne (uygun temel çözüme) atlanmıştır.

Yapılan tüm bu işlemler tablo üzerinde yapılarak pratikleştirilebilir.

Örnek 2.4 :

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 16 \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (1.2)$$

$$\max z = x_1 + x_2 + 2x_3 \quad (1.3)$$

Lineer programlama probleminde bir ekstrem nokta çözümünden diğerine atlayınız.

Cevap :

Önce (1.1) eşitsizlik sistemini lineer denklem sistemine dönüştürelim.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_5 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_6 \leq 16 \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

$$x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq 6) \quad (1.2)$$

$$\max z = x_1 + x_2 + 2x_3 \quad (1.3)$$

Başlangıç Tablosu :

Baz vektörleri (V _j)	V ₀	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆	$y_{jk} > 0$ lar için x_j / y_{jk}
V ₄	10	1	2*	0	1	0	0	10/2
V ₅	20	1	-1	1	0	1	0	/
V ₆	16	2	1	4	0	0	1	16/1

Başlangıç bazı $B_0 = (V_4, V_5, V_6)$ ve buna karşılık olan başlangıç ekstrem nokta çözümü (uygun temel çözüm)

$$x_4 = 10, \quad x_5 = 20, \quad x_6 = 16, \quad x_1 = x_2 = 0 \rightarrow X_0 = (0, 0, 10, 20, 16) \text{ dır.}$$

Mesela V_2 nin baza girmesini isteyelim ve bu taktirde hangi vektörün bazdan çıkması gerektiğini arayalım.

V_0 sütununu V_2 sütununa bölelim (V_2 nin sadece pozitif elemanları için);

$$\min_{(j)} (10/2, 16/1) = 10/2 \rightarrow (j = 4) \rightarrow V_4 \text{ vektörünün bazdan çıkmasına karar verilir.}$$

Böylece B_0 bazından $B_1 = (V_2, V_5, V_6)$ bazına atlanır.

$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörünü $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ birim vektörüne dönüştüren elementer satır işlemlerini başlangıç tablosunun gövdesine uygulayalım.

Birinci İterasyon:

Baz vektörleri (V_j)	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	$y_{jk} > 0$ lar için x_j / y_{jk}
V_2	5	1/2	1	0	1/2	0	0	5:(1/2)
V_5	25	3/2	0	1	1/2	1	0	25:(3/2)
V_6	11	3/2*	0	4	-1/2	0	1	11:(3/2)

Yeni X_1 ekstrem nokta çözümü:

$$x_2 = 5, \quad x_5 = 25, \quad x_6 = 11, \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0 \rightarrow X_1 = (0, 5, 0, 25, 11)$$

Yeni bir X_2 ekstrem nokta çözümüne atlamak için mesela V_1 vektörünü baza sokmak isteyelim. Buna göre hangi vektör bazdan çıkmalıdır?

Buna oran testi ile karar verilir.

$$\min_{(j)} \left(\frac{5}{1/2}, \frac{25}{3/2}, \frac{11}{3/2} \right) = \frac{11}{3/2} \rightarrow (j=6) \rightarrow V_6$$

vektörünün bazdan çıkmasına karar verilir

Böylece $B_2 = (V_2, V_5, V_1)$ bazına atlanır.

B_2 bazına karşılık olan X_2 ekstrem nokta çözümüne ulaşmak için tablonun gövdesine

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \text{ vektörünü } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ birim vektörüne dönüştüren elemanter satır işlemleri uygulanır.}$$

İkinci İterasyon:

Baz vektörleri (V _j)	V ₀	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆	$y_{jk} > 0$ lar için x_j / y_{jk}
V ₂	4/3	0	1	-4/3	2/3	0	-1/3	
V ₅	14	0	0	-3	1	1	-1	
V ₁	22/3	1	0	8/3	-1/3	0	2/3	

$$x_1 = 22/3, \quad x_2 = 4/3, \quad x_5 = 14, \quad x_3 = x_4 = x_6 = 0 \rightarrow X_2 = (22/3, 4/3, 0, 0, 14, 0)$$

Böylece X_0 başlangıç ekstrem nokta çözümünden (uygun temel çözümünden) X_1 ekstrem nokta çözümüne ve oradan da X_2 uygun temel çözümüne atlanılabileceği gösterilmiştir.

3. TAŞIMA PROBLEMİ MODELİ VE ÇEŞİTLİ ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

3.1 Taşıma Problemi Modelinin Tanımı

m tane kaynak (üretim merkezi) ve n tane varış noktası (pazar) göz önüne alalım. i ($1 \leq i \leq m$) numaralı kaynaktaki mal miktarı a_i ($1 \leq i \leq m$) ve j ($1 \leq j \leq n$) numaralı pazarın istemi b_j ($1 \leq j \leq n$) ile gösterilsin; sorun, kaynaklardaki malların pazarlara en ucuza dağıtılmasıdır. Bu problem şimdilik aşağıdaki varsayımlar altında çözülecektir.

1.Varsayım :

i ($1 \leq i \leq m$) kaynaklarının her birinde aynı cins mal üretilmektedir(mevcuttur).

2.Varsayım :

b_j ($1 \leq j \leq n$) pazarlarının istemi de sadece a_i ($1 \leq i \leq m$) kaynaklarında üretilen (mevcut olan) maldır.

3.Varsayım :

j ($1 \leq j \leq n$) pazarlarının istemleri tamamen karşılandığı zaman, i ($1 \leq i \leq m$) kaynaklarındaki a_i ($1 \leq i \leq m$) malları da tamamen tükenmiş olacaktır; yani

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \text{ dir. (dengeli taşıma modeli)}$$

4.Varsayım :

i ($1 \leq i \leq m$) kaynaklarındaki malların j ($1 \leq j \leq n$) pazarlarına dağıtılması sürecinde aktarma noktaları yoktur.

5.Varsayım :

i numaralı kaynaktan j numaralı varış noktasına taşıma ücreti, taşınan x_{ij} miktarıyla orantılıdır.

Problemin çözümü :

i ($1 \leq i \leq m$) numaralı kaynaktan, j ($1 \leq j \leq n$) numaralı pazara birim taşıma fiyatı c_{ij} ve taşınan mal miktarı x_{ij} ile gösterilsin; bu takdirde x_{ij} miktarındaki malın taşıma masrafı $c_{ij} \cdot x_{ij}$ dir.

Bu düşüncüyü aşağıdaki tablonun her hücreğine uygularsak, toplam dağıtım masrafı

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \text{ dir.}$$

Amaç, z amaç fonksiyonunun minimum yapılmasıdır.

Tablo 3.1: Taşıma Problemi modeli tablosu (Sezginman, 1993)

varış							
(i / j)	(1)	(2)		(j)		(n)	a_i
(1)	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{11}		X_{1j} C_{1j}		X_{1n} C_{1n}	a_1
(2)	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}		X_{2j} C_{2j}		X_{2n} C_{2n}	a_2
.....							
(i)	X_{i1} C_{i1}	X_{i2} C_{i2}		X_{ij} C_{ij}		X_{in} C_{in}	a_i
.....							
(m)	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}		X_{mj} C_{mj}		X_{mn} C_{mn}	A_m
b_j	b_1	b_2		b_i		b_m	

kaynak

$$\sum a = \sum b$$

Kısıtlar:

Tablo 3.1 in satır toplamlarından

$$\begin{array}{l}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1j} + \dots + x_{1n} = a_1 \\
 x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2j} + \dots + x_{2n} = a_2 \\
 \dots\dots\dots \\
 x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{in} = a_i \\
 \dots\dots\dots \\
 x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mj} + \dots + x_{mn} = a_m
 \end{array}
 \rightarrow \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (1 \leq i \leq m)$$

Tablo 3.1 in sütun toplamlarından

$$\begin{array}{l}
 x_{11} + x_{21} + \dots + x_{i1} + \dots + x_{m1} = b_1 \\
 x_{12} + x_{22} + \dots + x_{i2} + \dots + x_{m2} = b_2 \\
 \dots\dots\dots \\
 x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{mj} = b_j \\
 \dots\dots\dots \\
 x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{jn} + \dots + x_{mn} = b_n
 \end{array}
 \rightarrow \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (1 \leq j \leq n)$$

Sonuç olarak taşıma problemi

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (1 \leq i \leq m) \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \tag{1.2}$$

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} . x_{ij} \tag{1.3}$$

şeklinde bir lineer programlama problemidir.

Burada (1.1) kısıtlarını oluşturan $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (1 \leq i \leq m)$ satırlarına “**satır denklemleri**” ;

$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (1 \leq j \leq n)$ koşullarına da “**sütun denklemleri**” denir.

Örnek olarak, aşağıda verilen bir taşıma probleminin matematik modelini kuralım:

Tablo 3.2: Örnek taşıma problemi tablosu

(i / j)	varış				a_i
	(1)	(2)	(3)	(4)	
(1)	X_{11} 17	X_{12} 11	X_{13} 15	X_{14} 12	$a_1 = 43$
(2)	X_{21} 16	X_{22} 14	X_{23} 11	X_{24} 11	$a_2 = 55$
(3)	X_{31} 14	X_{32} 13	X_{33} 14	X_{34} 10	$a_3 = 30$
b_j	$b_1 = 31$	$b_2 = 32$	$b_3 = 45$	$b_4 = 20$	

kaynak $\sum a = \sum b = 128$

Problemin matematik modeli :

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 43 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 55 \quad \text{satır denklemleri} \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 30
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
 x_{11} &+ x_{21} &+ x_{31} &= 31 \\
 x_{12} &+ x_{22} &+ x_{32} &= 32 \\
 x_{13} &+ x_{23} &+ x_{33} &= 45 \\
 x_{14} &+ x_{24} &+ x_{34} &= 20
 \end{aligned} \quad \text{sütun denklemleri}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n) \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
 \min z = & 17x_{11} + 11x_{12} + 15x_{13} + 12x_{14} + 16x_{21} + 14x_{22} + 11x_{23} + 11x_{24} + 14x_{31} + \\
 & 13x_{32} + 14x_{33} + 10x_{34}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Bu bir lineer programlama problemidir.

Ancak (1.1) kısıtlarındaki değişkenlerin katsayılarının 1 ya da 0 olmaları nedeniyle simpleks yöntemin dışında ve daha pratik yöntemlerle de çözülebilir.

Temel Özellik:

(1.1) kısıtları m tane satır ve n tane sütun denklemi olmak üzere $m + n$ tane denklemden oluşmuştur. Fakat bu $m + n$ tane denklemden ancak $m + n - 1$ tanesi lineer bağımsızdır. Çünkü m tane satır denkleminin toplamını, n tane sütun denkleminin $n - 1$ tanesinden çıkarırsak geriye sütun denklemlerinden biri kalır. Mesela, yukarıdaki örnekte satır denklemlerinin toplamını sütun denklemlerinin ilk üçünden çıkarırsak geriye dördüncü sütun denklemi kalır. Şu halde (1.1) koşullarını oluşturan $m + n$ tane denklem “**lineer bağımlı**” olup bu denklemlerden herhangi bir tanesi atılabilir.

3.2 Uygun Temel Çözümlerden Birinin Bulunması:

Tablo 3.2 ile verilen ve yukarıda matematik modeli kurulan taşıma probleminin uygun çözümlerinden birini bulalım (başlangıç çözümü):

Örnek 3.1 :**Tablo 3.3:** Örnek taşıma problemi başlangıç tablosu

		varış			
(i / j)	(1)	(2)	(3)	(4)	a_i
(1)	31 →	12 ↓	15	12	43
(2)	17	20 →	35 ↓	11	55
(3)	16	14	10 →	20	30
	14	13	14	10	
b_j	31	32	45	20	

$$\sum a = \sum b = 128$$

Önce (1.1) hücresi, yani sol üst hücre (kuzey-batı) doldurulur; bunun için de $b_1 = 31$ istemi $a_1 = 43$ den tamamen karşılanır ve a_1 de kalan $a_1' = 12$ miktarı $b_2 = 32$ istemini karşılamada kullanılarak $a_1 = 43$ tüketilir; işlemin devamı oklarla kolayca izlenebilir.

Uyarı:

1-) $\sum a = \sum b$ yani dengelenmiş bir taşıma problemi olduğundan, pazarların istemi karşılandığı zaman kaynaklardaki malların da tükendiği görülmektedir.

2-) $m = 3$ satır, $n = 4$ sütun olduğundan (1.1) sistemindeki denklemlerin sayısı $m + n = 7$ dir; fakat bu denklemlerden en fazla $m + n - 1 = 6$ tanesi lineer bağımsız olabilir. Bu aşamada 6 tane temel değişken olduğu görülmektedir.

Temel değişkenler:

$$x_{11} = 31, \quad x_{12} = 12, \quad x_{22} = 20, \quad x_{23} = 35, \quad x_{33} = 10, \quad x_{34} = 20$$

Temel olmayan değişkenler:

$$x_{13} = x_{14} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = 0$$

3-) Tablo 3.3 deki dağıtımın maliyeti

$$z = 31.17 + 12.11 + 20.14 + 35.11 + 10.14 + 20.10 = 1664$$

4-) Başka bir hücreden başlayarak da bu yöntemle başka bir çözüme (dağıtıma) ulaşabiliriz. Örnek olarak (1.3) hücresinden, $b_3 = 45$ istemini karşılamaya çalışarak dağıtıma başlayalım:

Tablo 3.4: Örnek taşıma problemi dağıtım tablosu

		varış			
(i / j)	(1)	(2)	(3)	(4)	a_i
(1)			43 ↓ 15	12	43
(2)	21 ← ↓ 16	32 ← 14	2 11	11	55
(3)	10 → 14	13	14	20 10	30
b_j	31	32	45	20	

Hücrelerin dolduruluş sırası (1.3) hücresinden başlanarak oklardan izlenebilir. Bu dağıtımda da (çözümde) temel değişkenlerin sayısı 6 olup temel değişkenler

$$x_{13} = 43, \quad x_{21} = 21, \quad x_{22} = 32, \quad x_{23} = 2, \quad x_{31} = 10, \quad x_{34} = 20$$

temel olmayan değişkenler ise

$$x_{11} = x_{12} = x_{14} = x_{24} = x_{32} = x_{33} = 0 \text{ dır.}$$

Bu dağıtımın maliyeti, yani amaç fonksiyonunun aldığı değer ise

$$z = 43.15 + 21.16 + 32.14 + 2.11 + 10.14 + 20.10 = 1791 \text{ olacaktır.}$$

3.3 Optimal Çözüm

Konunun daha iyi anlaşılması için $m = 3$, $n = 4$ olan bir taşıma modeli seçerek (1.1) koşullarıyla z amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazalım:

$$\begin{aligned} s_1 : x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= a_1 \\ s_2 : \quad \quad \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= a_2 \\ s_3 : \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= a_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} k_1 : x_{11} \quad \quad \quad + x_{21} \quad \quad \quad + x_{31} &= b_1 \\ k_2 : \quad x_{12} \quad \quad \quad + x_{22} \quad \quad \quad + x_{32} &= b_2 \\ k_3 : \quad \quad x_{13} \quad \quad \quad + x_{23} \quad \quad \quad + x_{33} &= b_3 \\ k_4 : \quad \quad \quad x_{14} \quad \quad \quad + x_{24} \quad \quad \quad + x_{34} &= b_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11}.x_{11} + c_{12}.x_{12} + c_{13}.x_{13} + c_{14}.x_{14} + c_{21}.x_{21} + c_{22}.x_{22} + c_{23}.x_{23} + c_{24}.x_{24} + c_{31}.x_{31} + c_{32}.x_{32} + \\ c_{33}.x_{33} + c_{34}.x_{34} = z \end{aligned} \tag{1.3}$$

Mesela, temel değişkenlerin $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{33}, x_{34}$ olduğunu kabul edelim ve bu varsayım altında simpleks çarpanları yöntemiyle amaç fonksiyonunda temel değişkenleri yok edelim. Bunun için satır denklemlerini s_1, s_2, s_3 ile sütun denklemlerini de k_1, k_2, k_3, k_4 ile çarparak z amaç fonksiyonuyla taraf tarafa toplayalım.

Eğer $s_1, s_2, s_3, k_1, k_2, k_3, k_4$ simpleks çarpanları, bu toplamdaki $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{33}, x_{34}$ temel değişkenlerinin katsayıları sıfır olacak şekilde belirtilirse, bu toplamda temel değişkenler yok olur ve z amaç fonksiyonu sadece temel olmayan değişkenler cinsinden ifade edilir.

Bu toplamda

$$\begin{aligned}
 x_{11} \text{ temel değişkeninin katsayısı : } s_1 + k_1 + c_{11} &= 0 \\
 x_{21} \text{ temel değişkeninin katsayısı : } s_2 + k_1 + c_{21} &= 0 \\
 x_{22} \text{ temel değişkeninin katsayısı : } s_2 + k_2 + c_{22} &= 0 \\
 x_{31} \text{ temel değişkeninin katsayısı : } s_3 + k_1 + c_{31} &= 0 \\
 x_{33} \text{ temel değişkeninin katsayısı : } s_3 + k_3 + c_{33} &= 0 \\
 x_{34} \text{ temel değişkeninin katsayısı : } s_3 + k_4 + c_{34} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

olmalıdır.

Yukarıdaki (3.1) lineer denklem sistemi 6 denklem ve 7 bilinmeyenden oluşmuştur. Şu halde bilinmeyenlerden bir tanesi keyfî olarak seçilebilir. Mesela, $s_1 = 0$ olarak seçilirse diğer $s_1, s_3, k_1, k_2, k_3, k_4$ simpleks çarpanları hesaplanabilir.

Amaç fonksiyonunda temel olmayan değişkenlerin katsayıları:

$$\begin{aligned}
 x_{12} \text{ nin katsayısı : } c'_{12} &= s_1 + k_2 + c_{12} \\
 x_{13} \text{ ün katsayısı : } c'_{13} &= s_1 + k_3 + c_{13} \\
 x_{14} \text{ ün katsayısı : } c'_{14} &= s_1 + k_4 + c_{14} \\
 x_{23} \text{ ün katsayısı : } c'_{23} &= s_2 + k_3 + c_{23} \\
 x_{24} \text{ ün katsayısı : } c'_{24} &= s_2 + k_4 + c_{24} \\
 x_{32} \text{ nin katsayısı : } c'_{32} &= s_3 + k_2 + c_{32}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tanım:

Temel olmayan değişkenlerin c'_{ij} katsayılarına “**gölge fiyatlar**” adı verilir. (3.1) den bulunan $s_1, s_2, s_3, k_1, k_2, k_3, k_4$ simpleks çarpanlarının değerleri (3.2) de yerleştirilerek $c'_{12}, c'_{13}, c'_{14}, c'_{23}, c'_{24}, c'_{32}$ gölge fiyatları hesaplanır.

Bu c'_{ij} gölge fiyatları içinde negatif olanların en küçüğü mesela c'_{gh} ise aynı indisli x_{gh} temel değişken yapılarak daha ucuz bir dağıtıma (taşımaya) atlanır. Eğer c'_{ij} ler içinde negatif olanlar tükenmiş ise optimal çözüme (en ucuz taşımaya) ulaşılmıştır. Örnek olarak, Tablo 3.2 ile verilen taşıma problemini ele alalım ve Tablo 3.3 deki çözümle işe başlayarak optimal çözüme (en ucuz dağıtıma) ulaşmaya çalışalım. Tablo 3.3 deki başlangıç dağıtımının maliyeti

$$z_0 = 31.17 + 12.11 + 20.14 + 35.11 + 10.14 + 20.10 = 1664 \text{ dür.}$$

Tablo 3.5 : Örnek taşıma problemi tablosu

varış					
(i / j)	(1)	(2)	(3)	(4)	a_i
(1)	31 17	12 11	 15	 12	43
(2)	 16	20 14	35 11	 11	55
(3)	 14	 13	10 14	20 10	30
b_j	31	32	45	20	

Dolu hücrelerin indisleri temel değişkenlerin indisleri olduğundan, dolu hücrelerin her birinden (3.1) sisteminin bir denklemi yazılabilir

$$\begin{aligned} s_1 + k_1 + 17 = 0, \quad s_1 + k_2 + 11 = 0, \quad s_2 + k_2 + 14 = 0 \\ s_2 + k_3 + 11 = 0, \quad s_3 + k_3 + 14 = 0, \quad s_3 + k_4 + 10 = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$s_1 = 0$ seçilerek

$$\begin{aligned} k_1 = -17, \quad k_2 = -11, \quad s_2 = -3, \\ k_3 = -8, \quad s_3 = -6, \quad k_4 = -4 \end{aligned}$$

k_j ($1 \leq j \leq 4$) lerin bulunan değerleri Tablo 3.4 ün en son satırına;

s_i ($1 \leq i \leq 3$) lerin değerleri de en son sütununa yazılır.

Tablo 3.6 : Örnek taşıma problemi tablosu

(i / j)	varış				a_i	s_i
	(1)	(2)	(3)	(4)		
(1)	31 17	12 11	 15	 12	43	0
(2)	 16	20 14	35 11	 11	55	-3
(3)	 14	 13	10 14	20 10	30	-6
b_j	31	32	45	20		
k_j	-17	-11	-8	-4		

c'_{ij} gölge fiyatlarının bulunması:

i, j indisleri boş hücelere ait olmak üzere $c'_{ij} = s_i + k_j + c_{ij}$ eşitliğinden dolayı, (i, j) boş hücrelerinin satırındaki s_i ile sütundaki k_j toplanır ve bu boş hücredeki c_{ij} fiyatı eklenerek bulunan c'_{ij} gölge fiyatı o boş hücrelerin sol üst köşesine yazılır. Bu işlem Tablo 3.6 nın bütün boş hücrelerinde yapılarak Tablo 3.7 oluşturulur.

Tablo 3.7: Örnek taşıma problemi tablosu

(i / j)	varış				a_i	s_i
	(1)	(2)	(3)	(4)		
(1)	31 17	12 11	7 15	8 12	43	0
(2)	-4 16	20 14	35 11	4 11	55	-3
(3)	-9 14	-4 13	10 14	20 10	30	-6
b_j	31	32	45	20		
k_j	-17	-11	-8	-4		

Boş hücrelerin sol üst köşelerinde duran c'_{ij} gölge fiyatlarında negatif olanlar tükenmediğinden henüz optimal çözüme ulaşılmamıştır. Bunların en küçüğü $c'_{31} = -9$ olduğundan x_{31} temel değişken yapılır ve $x_{31} = t > 0$ değeriyle çözüme (dağıtıma) girer.

(3.1) boş hücresine $x_{31} = t > 0$ yazılırsa satır ve sütun toplamlarında dengeler bozulur; bozulan dengenin nasıl kurulduğu Tablo 3.8 de (3.1) hücresinden başlayan çevrimdeki oklar izlenerek görülebilir.

Tablo 3.8: Örnek taşıma problemi tablosu

(i / j)	varış				a_i	s_i
	(1)	(2)	(3)	(4)		
(1)	$31-t$ $\uparrow$ 17 $\rightarrow$ 12+t $\downarrow$ 11		7 15	8 12	43	0
(2)	-4 16	$20-t$ $\downarrow$ 14 $\rightarrow$ 35+t $\downarrow$ 11		4 11	55	-3
(3)	-9 t 14	-4 13	$10-t$ $\downarrow$ 14	20 10	30	-6
b_j	31	32	45	20		
k_j	-17	-11	-8	-4		

Dağıtımdan (çözümünden) çıkacak temel değişken:

$x_{33} = 10 - t, x_{22} = 20 - t, x_{11} = 31 - t$ de $t = 10$ seçersek x_{33} temel değişkeni çözümden atılır (dağıtımdan çıkar) ve $x_{22} = 10, x_{11} = 21, x_{12} = 22, x_{23} = 45, x_{31} = 10, x_{34} = 20$ değerleriyle yeni ve daha ucuz bir dağıtıma atlanır. Bu dağıtım Tablo 3.9 da gösterilmiştir.

Uyarı:

Uygulamada, Tablo 3.5, Tablo 3.6, Tablo 3.7 ve Tablo 3.8 deki işlemler ayrı ayrı tablolarda gösterilmez; bunların hepsi aynı tabloda yapılır ve böylece Tablo 3.8 oluşur

Tablo 3.9: Örnek taşıma problemi tablosu

varış					
(i / j)	(1)	(2)	(3)	(4)	a_i
(1)	21 17	22 11	15	12	43
(2)	16	10 14	45 11	11	55
(3)	10 14	13	14	20 10	30
b_j	31	32	45	20	

Bu dağıtımın maliyeti

$$z_1 = 21.17 + 22.11 + 10.14 + 45.11 + 10.14 + 20.10 = 1574 \text{ olup } z_1 < z_0 \text{ olduğu görülmektedir.}$$

Tablo 3.9 daki dağıtımın optimal (minimum) dağıtım olup olmadığını anlamak için önce $s_1, s_2, s_3, k_1, k_2, k_3, k_4$ simpleks çarpanları sonrada boş hücrelere ait c'_{ij} gölge fiyatları hesaplanır. Gölge fiyatları içinde negatif olanlar tükenmiş ise Tablo 3.9 daki dağıtımın optimum (minimum) dağıtım olduğuna karar verilir; eğer c'_{ij} gölge fiyatları içinde negatif olanlar tükenmemiş ise dağıtım optimum (minimum) dağıtım değildir ve z amaç fonksiyonunu daha küçük yapan yeni bir çözüme (dağıtım) atlanır. Bu işlemlerin tümü Tablo 3.10 da görülmektedir.

Tablo 3.10 : Örnek taşıma probleminde yeni çözüme atlama

varış						
(i / j)	(1)	(2)	(3)	(4)	a_i	s_i
(1)	21-t 17	22+t 11	7 15	-1 12	43	0
(2)	-4 16	10-t 14	45 11	-5 t 11	55	-3
(3)	t 14	5 13	9 14	20-t 10	30	-6
b_j	31	32	45	20		
k_j	-17	-11	-8	-4		

Boş hücrelerin sol üst köşelerindeki c'_{ij} gölge fiyatlarında negatif olanlar tükenmediğinden optimal çözüme ulaşılmamıştır

$\min(c'_{14} = -1, c'_{21} = -4, c'_{24} = -5) = -5 \rightarrow x_{24}$ değişkeni $x_{24} = t > 0$ değeriyle temel değişken yapılır.

(2,4) hücresinden başlayan çevrimde $x_{34} = 20 - t, x_{22} = 10 - t, x_{11} = 21 - t, \rightarrow t = 10$ seçilerek x_{22} değişkenin çözümden (dağıtımdan) çıkmasına ve x_{24} değişkenin $x_{24} = 10$ olarak çözüme (dağıtıma) girmesine karar verilir.

Yeni dağıtım Tablo 3.11 de görülmektedir.

Tablo 3.11: Örnek taşıma problemi yeni dağıtım tablosu

(i / j)	varış				a_i
	(1)	(2)	(3)	(4)	
(1)	11 17	32 11	15	12	43
(2)	16	14	45 11	10 11	55
(3)	20 14	13	14	10 10	30
b_j	31	32	45	20	

Bu taşımanın maliyeti

$z_2 = 11.17 + 32.11 + 45.11 + 10.11 + 20.14 + 10.10 = 1524$ dür ve $z_2 < z_1 < z_0$ olduğu görülmektedir.

Tablo 3.11 deki dağıtım için önce $s_1, s_2, s_3, k_1, k_2, k_3, k_4$ simpleks çarpanları, sonra boş hücrelere ait c'_{ij} gölge fiyatları hesaplanır ve bu c'_{ij} gölge fiyatları ait oldukları boş hücrelerin sol üst köşelerine yazılır. Bu hesapların tümü dağıtımdan (çözümünden) çıkacak değişkeni verecek çevrim Tablo 3.12 de görülmektedir.

Tablo 3.12 : Örnek taşıma problemi yeni dağıtım tablosu

varış						
(i / j)	(1)	(2)	(3)	(4)	a_i	s_i
(1)	11-t 17	32 11	2 15	-1 t 12	43	0
(2)	1 16	5 14	45 11	10 11	55	2
(3)	20+t 14	5 13	4 14	10-t 10	30	3
b_j	31	32	45	20		
k_j	-17	-11	-13	-13		

c'_{ij} gölge fiyatlarında negatif olanlar tükenmediğinden optimal çözüme ulaşılmamıştır.

$c'_{14} = -1 \rightarrow x_{14} = t > 0$ temel değişken yapılır.

(1.4) hücre sine $x_{14} = t > 0$ yazarak (x_{14} değişkenini pozitif bir değerle dağıtım a sokarak) bozulan denge nin tekrar nasıl kurulduğu Tablo 3.12 deki çevrimde oklar izlenerek görülebilir.

Çevrimde $11-t, 10-t \rightarrow t=10$ yapılır ve x_{34} dağıtımdan çıkarken $x_{14}=10$ değeriyle dağıtıma (çözüme) girer; bu dağıtım Tablo 3.13 de görölmektedir.

Tablo 3.13: Örnek taşıma problemi tablosu

varış						
(i / j)	(1)	(2)	(3)	(4)	a_i	
(1)	1 17	32 11		10 12	43	
(2)			45 11	10 11	55	
(3)	30 14				30	
b_j	31	32	45	20		

Bu dağıtım için amaç fonksiyonunun alacağı değer

$$z_3 = 1.17 + 32.11 + 10.12 + 45.11 + 10.11 + 30.14 = 1514 \text{ olup } z_3 < z_2 < z_1 < z_0$$

olduğu görülmektedir.

Bu dağıtıma ait $s_1, s_2, s_3, k_1, k_2, k_3, k_4$ simpleks çarpanları ve boş hücelere ait c'_{ij} gölge fiyatları Tablo 3.14 de görülmektedir.

Tablo 3.14 : Örnek taşıma problemi optimal çözüm tablosu

(i / j)	varış				a_i	s_i
	(1)	(2)	(3)	(4)		
(1)	1 17	32 11	3 15	10 12	43	0
(2)	0 16	4 14	45 11	10 11	55	1
(3)	30 14	5 13	5 14	1 10	30	3
b_j	31	32	45	20		
k_j	-17	-11	-12	-12		

c'_{ij} gölge fiyatlarında negatif olanlar tükendiğinden optimal (minimum) çözüme ulaşılmıştır.

Şu halde bu dağıtım (Tablo 3.14 deki dağıtım) optimal (minimum) dağıtımdır ve $\min z = 1514$ olur.

3.4 Taşıma Modeli Algoritması

Bu bölümde taşıma modeli algoritmasının detayları anlatılmıştır. Algoritma simpleks yöntemin adımlarını aynen takip eder.

Normal simpleks tablosu kullanılmayıp onun yerine, ulaştırma modelinin özel yapısının avantajını kullanarak algoritma daha uygun bir hale getirilir. Algoritmanın ayrıntılarını detaylı bir şekilde göstermek için bazı sayısal örneklerden faydalanılmıştır.

Örnek 3.2:

Bir şirket üç silodan dört işleme merkezine kamyonlarla hububat taşımaktadır. Arz ve talep miktarları (kamyon sayısı cinsinden) eşit olup, farklı rotalardaki kamyon başına taşıma maliyetleriyle birlikte taşıma modeli olarak Tablo 3.15 'de gösterilmiştir. c_{ij} birim taşıma fiyatları her kutunun kuzeydoğusunda yer almaktadır.

Tablo 3.15 : Taşıma modeli tablosu

İşleme Merkezleri					
	1	2	3	4	Arz
Silo 1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
Silo 2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
Silo 3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	10
Talep	5	15	15	15	

Modelin amacı, silolarla işleme merkezleri arasındaki taşıma maliyetlerini minimum kılan taşıma problemini belirlemektir. Bu da, i silosundan j işleme merkezine taşınan x_{ij} miktarını belirlemekle aynıdır.

Ulaştırma algoritmasının adımları simpleks algoritmasıyla tamamen benzerdir.

Buna göre;

Adım 1: Başlangıç uygun temel çözümünü belirleyerek Adım 2'ye git.

Adım 2: Tüm temel dışı değişkenler içinden giren değişkeni belirlemek üzere simpleks yöntemin optimumluk koşulunu kullan. Optimumluk koşulları sağlanmışsa dur, aksi halde Adım 3'e git.

Adım 3: Mevcut tüm temel değişkenler içinden çıkan değişkeni belirlemek üzere simpleks yöntemin uygunluk koşulunu kullan ve yeni temel çözümü bul. Adım 2'ye geri dön.

Bundan sonra bu adımların her biri detaylandırılmıştır.

Başlangıç Çözümünün Belirlenmesi

m kaynaklı, n hedefli genel bir ulaştırma problemi, her kaynak için bir tane ve her hedef için bir tane olmak üzere $m + n$ sayıda kısıt denkleminde sahiptir.

Bununla birlikte, ulaştırma probleminin daima dengelenmiş olması sebebiyle (arzların toplamı = taleplerin toplamı) bu denklemlerden biri **lineer bağımlıdır**. Dolayısıyla modelin $(m + n - 1)$ tane **lineer bağımsız** kısıt denklemi olacaktır. Bu da başlangıç temel çözümün $(m + n - 1)$ temel değişkenden oluşması demektir.

Bir önceki 3.2 numaralı örnek başlangıç temel çözümü $3 + 4 - 1 = 6$ temel değişken içermektedir.

Ulaştırma probleminin özel yapısı, yapay olmayan bir başlangıç temel çözümünü sağlayan üç yöntemden birini kullanmamıza olanak sağlar.

Bunlar,

1. Kuzeybatı Köşesi Yöntemi (KKY)
2. En Düşük Maliyetler Yöntemi (EMY)
3. Vogel Yaklaşım Yöntemi dir. (VAM)

Bu üç yöntem arasında oluşturdukları başlangıç temel çözümün “kalitesi” açısından farklılık vardır. Daha iyi çözüm daha küçük bir amaç fonksiyonu değeri anlamına gelmektedir.

Genelde, en iyi başlangıç temel çözümünü Vogel Yöntemi, en kötüsünü ise Kuzeypatı Köşesi Yöntemi vermektedir. Buna karşılık en az hesaplama Kuzeypatı Köşesi Yöntemi'nde yapılmaktadır.

3.4.1 Kuzeypatı Köşesi Yöntemi.

Yöntem, tablonun x_{11} değişkeninin yer aldığı kuzeypatıdaki hücreden (kutudan) başlar.

Adım 1 : Seçilen kutuya mümkün olduğunca fazla atama yap ve ardından bu atanan miktarı arz ve talep miktarlarından çıkararak gerekli düzenlemeleri yap.

Adım 2 : İleride tekrar atama yapılmasını önlemek için çıkarma sonucu sıfır arz ya da talebe ulaşan satır ya da sütunu iptal et. Hem satır hem de sütun aynı anda sıfıra gelmişse birini seç ve iptal edilmeyen satır (sütun) daki sıfır arzı (talebi) dikkate alma.

Adım 3 : İptal edilmeden sadece bir satır ya da sütun kaldığında dur. Aksi halde, bir önceki işlemde sütun iptal edilmişse sağ kutuya, satır iptal edilmişse bir aşağıdaki kutuya geç. Adım 1'e git.

Örnek 3.3

Örnek 3.2 'deki model için bu prosedürün uygulanması Tablo 3.16'daki başlangıç temel çözümünü verecektir. Oklar dağıtım sırasını gösterirken, dağıtılan miktarlar da koyu renkle yazılmıştır.

Bu durumda başlangıç temel çözümü

$$x_{11} = 5, x_{12} = 10, x_{22} = 5, x_{23} = 15, x_{24} = 5, x_{34} = 10$$

olmaktadır.

Tablo 3.16 : Başlangıç temel çözümü

	1	2	3	4	Arz
Silo 1	10	2	20	11	15
	5 →	10			
Silo 2	12	7	9	20	25
		5 ↓	15 →	5 ↓	
Silo 3	4	14	16	18	10
				10 ↓	
Talep	5	15	15	15	

Bu problemin maliyeti, $z = 5.10 + 10.2 + 5.7 + 15.9 + 5.20 + 10.18 = 520$ birim olacaktır.

3.4.2 En Düşük Maliyetler Yöntemi

En Düşük Maliyetler Yöntemi, en ucuz yol üzerine yoğunlaştığından daha iyi bir başlangıç çözümü bulmaktadır. Kuzeybatı Köşesi Yönteminde olduğu gibi kuzeybatı kutusuyla başlamak yerine, en düşük birim maliyetli kutuya mümkün olduğunca fazla atama yapmak suretiyle başlangıç çözümü oluşturmaya başlanır. (eşitlik durumunda rasgele bir atama yapılır).

Daha sonra, arz ve talep miktarları ayarlanır ve yapacağı atama tamamlanan satır yada sütun iptal edilir. Eğer, aynı anda satır ya da sütun iptali gerekirse, kuzeybatı köşesi yönteminde olduğu gibi bunlardan sadece biri iptal edilir. Ardından, iptal edilmemiş kutular içinden en düşük maliyetlisi bulunur ve süreç bu şekilde iptal edilmeyen bir satır ya da sütun kalıncaya kadar tekrarlanır.

Örnek 3.4 (Taha, 2000)

Örnek 3.2 'ye bu yöntemi aşağıdaki gibi uygulayalım:

1. (1, 2) kutusu, 2 birim ile tablodaki en düşük maliyetli kutudur. Bu kutuda kesişen 1. satır ile 2. sütundaki arz ve talep miktarları aynı olduğundan $x_{12} = 15$ ataması yapılır ve ardından keyfi olarak (eşitlik olduğu için) 2. sütun iptal edilir. 1. satırdaki arz miktarına 0 (sıfır) yazılır.

2. 2. sütunun kapatılmasından sonra, geriye kalan kutular içinden en düşük maliyetlisi (3,1) kutusudur. Buraya $x_{31} = 5$ atması yapılarak 1. sütun iptal edilir. Çünkü, 1. sütunun talebi karşılanmıştır. 3. satırın arzı $10-5=5$ olarak ayarlanır.
3. Aynı şekilde devam edilerek (2, 3) kutusuna 15, (1, 4) kutusuna 0, (3, 4) kutusuna 5, (2, 4) kutusuna da 10 atması yapılır.

Başlangıç çözümünün sonucu aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.17 : Başlangıç çözümü sonucu

	1	2	3	4	Arz
Silo 1	10	2	20	11	15
Silo 2	12	7	9	20	25
Silo 3	4	14	16	18	10
Talep	5	15	15	15	

Oklar dağıtım sırasını göstermektedir. Başlangıç çözümü 6 temel değişkenden oluşmaktadır ve aşağıdaki değerler bulunmuştur.

$$x_{12} = 15, x_{14} = 0, x_{32} = 15, x_{24} = 10, x_{23} = 5, x_{34} = 5$$

Amaç değeri de : $z = 15.2 + 0.11 + 15.9 + 10.20 + 5.4 + 5.18 = 475$ birim olarak hesaplanır.

En Düşük Maliyetler Yöntemi, amaç değerini 520 birim yerine 475 birim gibi daha düşük bir değer yaptığından Kuzeybatı Köşesi Yöntemi'nden daha iyidir.

3.4.3 Vogel Yaklaşım Yöntemi (VAM)

VAM, En Düşük Maliyetler Yönteminin geliştirilmiş hali olup, genelde en iyi başlangıç çözümünü vermektedir.

Adım 1 : Pozitif arzlı (talepli) her satır için satırdaki (sütundaki) en küçük birim maliyeti aynı satırın (sütunun) ikinci en küçük birim maliyetinden çıkararak bir ceza ölçüsü belirle.

Adım 2 : En büyük cezaya sahip satır ya da sütunu sapta. Eşitlik halinde rasgele seçim yapılabilir. Bu satır ya da sütundaki en düşük maliyetli kutuya mümkün olduğunca fazla miktarda atama yap. Kalan arz ve talepleri hesapla ve sıfırlanan satır ya da sütunu iptal et. Aynı anda sıfırlanan satır ya da sütunlar varsa, sadece birini iptal ederek kalan satıra (sütuna) sıfır miktarda arz (talep) ata.

Adım 3 :

(a) : İptal edilmemiş arz ya da talebe sahip tam bir satır (sütun) kalmışsa dur .

(b) : İptal edilmemiş pozitif arzlı (talepli) bir satır (sütun) kalmışsa en düşük maliyetler yöntemiyle satırdaki (sütundaki) temel değişkenleri belirle ve dur.

(c) : İptal edilmemiş satır ve sütunların tümü sıfır arz ve talebe sahipse en düşük maliyetler yöntemiyle sıfır temel değişkenleri belirle ve dur.

(d) : Aksi halde Adım 1'e git.

Örnek 3.5 :

Tablo 3.18: İlk ceza grubunun hesaplanması (Taha, 2000)

	1	2	3	4	Satır Cezaları	
1	10	2	20	11	15	10-2=8
2	12	7	9	20	25	9-7=2
3	4	14	16	18	10	14-4=10
	5					
	5	15	15	15		
Sütun cezaraları	10-4=6	7-2=5	16-9=7	18-11=7		

En yüksek ceza değeri 10 ile üçüncü satırda olup, bu satırdaki en düşük maliyetli kutu ise 4 birim ile (3,4) kutusudur. Bu kutuya 5 birim atanır. Bu durumda birinci sütunda karşılanacak talep kalmadığından bu sütun iptal edilir ve Tablo 3.19'da görüldüğü gibi cezalar yeniden belirlenir.

En yüksek ceza şimdi birinci satırdadır. Dolayısıyla, bu satırdaki en düşük taşıma maliyetine (=2) sahip olan kutu (1,2) ye olabildiğince yüksek miktarda atama yapılır. (1,2) kutusuna yapılan $x_{12} = 15$ 'lik atama sonunda hem birinci satır hem de ikinci sütun sıfırlanmış olur. Burada keyfi olarak ikinci sütun iptal edilir ve birinci satırdaki arz sıfır olarak yazılır.

Aynı şekilde devam edildiğinde, en yüksek cezaya ikinci satır (=11) sahip olacağından $x_{23} = 15$ ataması gerçekleştirilir. Böylelikle üçüncü sütunda iptal edilir ve ikinci satırda da 10 birim kalır. Artık, sadece dördüncü sütun kalmıştır ve 15 birimlik pozitif bir arza sahiptir. En Düşük Maliyetler Yöntemi uygulandığında önce $x_{14} = 0$, ardında da $x_{34} = 5$ ve $x_{24} = 10$ ataması yapılır.

Tablo 3.19 : Yeni cezaların belirlenmesi (Taha, 2000)

	1	2	3	4	Satır Cezaları	
1	10	2 15	20	11	15	9
2	12	7	9	20	25	2
3	4 5	14	16	18	10	10
	5	15	15	15		
Sütun cezaları	--	5	7	7		

Bu çözüm için amaç fonksiyonu değeri,

$$z = 15.2 + 0.11 + 15.9 + 10.20 + 5.4 + 5.18 = 475$$

olarak belirlenir. Bu sonuç En Düşük Maliyetler Yöntemiyle aynı amaç değerini vermiştir. Bununla birlikte, genelde VAM 'ın taşıma modelleri için en iyi başlangıç çözümünü vermesi beklenir.

4. ARALIK FİYATLI İKİ VE ÜÇ BOYUTLU TAŞIMA PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN OLUŞTURULMASI

4.1 İki Boyutlu Taşıma Probleminin Matematiksel Modelinin Oluşturulması

4.1.1 Giriş

Fiyatların aralıklı olması durumunda iki boyutlu taşıma problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
 \min z &= \sum_i \sum_j [c_{ij}, d_{ij}] \cdot x_{ij} \\
 \sum_j x_{ij} &= a_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \\
 \sum_i x_{ij} &= b_j \quad , \quad j = 1, \dots, m \\
 a_i &\geq 0, \quad b_j \geq 0 \\
 x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Verilen bu aralıklı fiyatların oluşturduğu problem, iki amaç fonksiyonundan oluşacak şekilde ifade edilebilir. Bunun için birinci amaç fonksiyonu verilen aralıklı fiyatların ortalamasından (orta noktasından) oluşacak şekilde oluşturulurken, ikinci amaç fonksiyonu ise fiyatların maksimum değerinden (en yüksek fiyat) oluşacak şekilde oluşturulur. (Ishibuchi ve Tanaka, 1990)

En genel haliyle aralıklı amaç fonksiyonuna sahip bir minimizasyon problemi şu şekilde yazılabilir.

$$\min(z(x) = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n \quad : \quad x \in S \subset R^n) \tag{4.2}$$

Burada S , n boyutlu reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olup, x bu kümenin uygun bir bölgesidir. A_n ise aralıklı fiyatlardır.

(4.2) denklemi uygun tanımlamalar ile iki farklı amaç fonksiyonundan oluşacak şekle getirilebilir.

Sonraki bölümlerde bu tezin temelini oluşturan bazı konulardan bahsedilecektir.

4.2 Genel Tanımlar

Genel matematik programlama problemlerinin katsayıları sabit sayılardan oluşur. Fakat sebebi önceden bilinmeyen çevre koşulları nedeniyle bu yaklaşımın doğru olmadığı açıktır. Bu gibi durumlarda, bazı karar verme yöntemlerinin geliştirilmesi gerekmektedir. Karar vermenin gerektiği bu gibi durumlara çözüm getirmek amacıyla stokastik programlama ve fuzzy programlama yöntemleri geliştirilmiştir.

Stokastik programlamada katsayılar rasgele değişkenler olup, katsayıların olasılık dağılımlarının bilindiği düşünülmektedir. Diğer taraftan, fuzzy programlama problemlerinde, katsayılar ve amaç fonksiyonları fuzzy kümeleri olarak gösterilir. Ayrıca bunların üyelik fonksiyonlarının bilindiği kabul edilmektedir.

Olasılık dağılımları ve üyelik fonksiyonları her iki yöntem için çok önemli rol oynamaktadır. Bu yüzden bunları tanımlamak, karar verici için her zaman kolay değildir.

Genel olarak incelenecek matematik programlama modeli aşağıdaki gibidir.

$$\max z(x) = A_1.x_1 + A_2.x_2 + \dots + A_n.x_n \quad : \quad x \in S \subset R^n \quad (4.3)$$

Burada S , n boyutlu reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olup x in uygun bölgesini gösterir. A_1 ise x_1 den kaynaklanacak faydanın aralıklı halini gösterir.

Bu denkleme bilinen konservatif yöntemler uygulanırsa maksimizasyon problemi aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir.

$$\max(\min z(x) = A_1.x_1 + A_2.x_2 + \dots + A_n.x_n) \quad : \quad x \in S \subset R^n \quad (4.4)$$

(4.4) probleminin çözümü, max-min çözümü olarak adlandırılır. Bu çözüm optimal çözüm olup (4.3) deki $z(x)$ fonksiyonunun sol limitine karşılık gelmektedir. (4.3) de verilen maksimizasyon problemi, çok amaçlı problemlerin **Pareto Optimal Çözümleri** kullanılarak, tanımlanmış çözüm setleri aracılığıyla, çok amaçlı problemlere dönüştürülmektedir. (4.3) de verilen problemi çok amaçlı problem olarak formüle edebilmek için sol limit, sağ limit, merkez ve yarıçap olarak adlandırılmış fiyat aralığına ait bazı bilgileri bilinmelidir.

Aralık fiyatlı minimizasyon problemi de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\min z(x) = A_1.x_1 + A_2.x_2 + \dots + A_n.x_n \quad : \quad x \in S \subset R^n \quad (4.5)$$

Bu problem de sıra ilişkileri kullanılarak çok amaçlı probleme dönüştürülebilir.

4.3 Aralık Aritmetiği

Bu bölümde denklemlerde yer alan küçük harfler sayının gerçek değerini, büyük harfler ise sayı aralığını göstermektedir.

Tüm reel sayılar da R ile gösterilmektedir.

Bir aralık sıralı çiftler şeklinde aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$A = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_R, a \in R\} \quad (4.6)$$

Burada a_L aralığın sol limitini, a_R ise sağ limitini gösterir.

Ayrıca bu aralık, orta noktası ve genişliği yardımıyla da temsil edilebilir. Bu gösterim aşağıda verilmiştir.

$$A = \langle a_C, a_W \rangle = \{a : a_C - a_W \leq a \leq a_C + a_W, a \in R\} \quad (4.7)$$

Burada orta nokta ve genişlik aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$a_C = \frac{1}{2}(a_R + a_L) \quad (4.8)$$

$$a_W = \frac{1}{2}(a_R - a_L) \quad (4.9)$$

Tanım 4.1 : $*$ $\in \{+, -, \times, \div\}$ işlemi, reel sayılar üzerinde tanımlanmış ikili bir işlemdir. Eğer A ve B kapalı iki aralık ise aşağıdaki denklem kapalı bu iki aralık üzerinde bir ikili işlem tanımlar. Bölme işleminde $0 \notin B$ olduğu kabul edilmektedir.

$$A * B = \{a * b : a \in A, b \in B\} \quad (4.10)$$

Bu tanıma göre kapalı aralıklar üzerinde aşağıdakine benzer işlemler yapılabilir.

$$A + B = [a_L, a_R] + [b_L, b_R] = [a_L + b_L, a_R + b_R] \quad (4.11)$$

$$A + B = \langle a_C, a_W \rangle + \langle b_C, b_W \rangle = \langle a_C + b_C, a_W + b_W \rangle \quad (4.12)$$

$$k.A = k.[a_L, a_R] = \begin{cases} [k.a_L, k.a_R] & k \geq 0 \text{ için} \\ [k.a_R, k.a_L] & k < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$k.A = k. \langle a_C, a_W \rangle = \langle k.a_C, |k|.a_W \rangle \quad (4.14)$$

k burada gerçel sayıdır.

4.4 Aralıklar Arasındaki Sıra İlişkileri

4.4.1 Maksimizasyon Problemleri İçin Sıra İlişkileri

İlk olarak Tanım 4.2 de aralığın sol ve sağ limitleri arasındaki sıralama tanımlanmıştır.

Tanım 4.2 : $A = [a_L, a_R]$ ve $B = [b_L, b_R]$ olarak tanımlanmış iki aralık arasındaki sıra ilişkisi $\leq_{LR}$ ile gösterilsin.

$$A \leq_{LR} B \Rightarrow a_L \leq b_L \text{ ve } a_R \leq b_R \quad (4.15)$$

$$A <_{LR} B \Rightarrow A \leq_{LR} B \text{ ve } A \neq B \quad (4.16)$$

Yukarıda verilen sıra ilişkileri en yüksek minimum fayda ile maksimum fayda arasından karar vericinin tercih yapmasını sağlar. (4.15) denkleminde yola çıkarak aşağıdaki ilişkilere de kolayca ulaşılabilir.

(1) a_C ve b_C , A ve B aralıklarının orta noktaları olmak üzere

$$A \leq_{LR} B \Rightarrow a_C \leq b_C \text{ yazılabilir.}$$

Bu ifadeyi şu şekilde ispat edebiliriz.

İspat :

$A \leq_{LR} B \Rightarrow a_L \leq b_L$ ve $a_R \leq b_R$ olup sol ve sağ limitleri taraf tarafa toplarsak eşitsizlik bozulmaz. Buna göre;

$$A \leq_{LR} B \Rightarrow a_L + a_R \leq b_L + b_R \text{ olur.}$$

Toplamları ikiye bölersek orta noktaları elde edilir. Orta noktalar a_C ve b_C ile gösterilirse,

$$A \leq_{LR} B \Rightarrow \frac{a_L + a_R}{2} = a_C \leq \frac{b_L + b_R}{2} = b_C$$

olarak bulunacaktır.

(2) Eğer $a_L = a_R$ ve $b_L = b_R$ ise bunlar birer nokta tanımlar. Bu nokta reel sayılar kümesi üzerinde olup sıralamayı bozmaz.

Ayrıca $\leq_{LR}$ sıra ilişkisinin geçişme, dönüşlü ve antisimetrik özellikleri de mevcuttur.

Bazı durumlarda gerçek aralık $\leq_{LR}$ sıra ilişkisine göre karşılaştırılmaz. Bu duruma ait bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.1 : $A = [100, 200]$ ve $B = [160, 180]$ olarak verilen iki aralık, normal bir karşılaştırma işlemine sokulamaz. Burada ne $A \leq_{LR} B$ ne de $B \leq_{LR} A$ karşılaştırması yapılamaz. Böyle bir durumda B aralığı tercih edilir. Çünkü A aralığı, B 'yi de kapsayan bir aralıktır.

Tanım 4.3 :

$A = \langle a_C, a_W \rangle$ ve $B = \langle b_C, b_W \rangle$ şeklinde verilmiş iki aralık arasındaki sıra ilişkisi $\leq_{CW}$ ile gösterilsin.

$$A \leq_{CW} B \Rightarrow a_C \leq b_C \text{ ve } a_W \geq b_W \quad (4.17)$$

$$A <_{CW} B \Rightarrow A \leq_{CW} B \text{ ve } A \neq B \quad (4.18)$$

Tanım 4.3 de verilen denklemler yardımıyla 3 ve 4 numaralı ifadeler de kolayca elde edilebilir.

(3) a_C ve b_C , A ve B aralıklarının orta noktaları olmak üzere

$A \leq_{CW} B \Rightarrow a_L \leq b_L$ olup burada a_L ve b_L , A ve B aralıklarının orta noktalarını temsil eder.

Bunu aşağıdaki gibi ispat edebiliriz.

İspat :

$A \leq_{CW} B \Rightarrow a_C \leq b_C$ dir. a_C ve b_C yi açık olarak yazarsak,

$$\frac{a_L + a_R}{2} = a_C \leq \frac{b_L + b_R}{2} = b_C \Rightarrow a_L + a_R \leq b_L + b_R \Rightarrow a_L \leq b_L, a_R \leq b_R \text{ elde edilir.}$$

(4) Eğer $a_W = b_W = 0$ ise $\leq_{CW}$ işlemi reel sayılar kümesi üzerinde bir eşitsizlik ilişkisine dönüşür. Bu ise bir nokta belirtir.

Yukarıda verilen $\leq_{LR}$ ve $\leq_{CW}$ işlemleri asla birbirleriyle çelişmezler. Öyleki, $A \neq B$ iken $A \leq_{LR} B$ ve $B \leq_{CW} A$ şeklinde hiçbir sıra ilişkisi yoktur. Bunu aşağıdaki şekilde ispatlayabiliriz.

İspat:

$$A \leq_{LR} B \text{ ve } B \leq_{CW} A \tag{4.19}$$

olabilmesi için $A = B$ olmak zorundadır.

$A \neq B$ iken

$$A \leq_{LR} B \text{ ve } B \leq_{CW} A \tag{4.20}$$

olamaz.

Eğer $A \leq_{LR} B$ ise $a_L = a_C - a_W \leq b_L = b_C - b_W$ olur.

Diğer taraftan

$$B \leq_{CW} A \text{ ise } b_C \leq a_C \text{ ve } b_W \geq a_W \quad (4.21)$$

dir.

(4.17) den dolayı (4.20) ve (4.21) denklemlerini kullanarak tekrar bir düzenleme yaparsak

$$a_C - a_W \leq b_C - b_W \leq a_C - b_W \leq a_C - b_W \quad (4.22)$$

Bu ifade de gösterir ki

$$a_C - a_W = b_C - b_W \text{ dir.}$$

Ayrıca $a_L = a_C - a_W$ ve $b_L = b_C - b_W$ olduğundan $a_L = b_L$ olduğu görülür. Benzer şekilde $a_R = b_R$ eşitliği de gösterilebilir. Buda $A = B$ olduğunun ispatıdır.

4.4.2 Minimizasyon Problemleri İçin Sıra İlişkileri

Maksimizasyon problemleri için uygulanan yöntem burada da uygulanabilir. Tanım 4.2' deki benzer işlemleri minimum problemlerinde de uygulayabiliriz.

Tanım 4.4: $A = [a_L, a_R]$ ve $B = [b_L, b_R]$ ise sıra ilişkisi $\leq_{LR}^*$ ile gösterilsin.

$$A \leq_{LR}^* B \text{ ise } a_L \leq b_L \text{ ve } a_R \leq b_R \quad (4.23)$$

$$A <_{LR}^* B \text{ ise } A \leq_{LR}^* B \text{ ve } A \neq B \quad (4.24)$$

$\leq_{LR}^*$ sıra ilişkisi en düşük minimum fiyatı ve maksimum fiyatı seçmeye yardımcı olur. Eğer $A \leq_{LR}^* B$ ise A aralığı B ye tercih edilir.

Tanım 4.5: $A = \langle a_C, a_W \rangle$ ve $B = \langle b_C, b_W \rangle$ arasındaki sıra ilişkisi $\leq_{CW}^*$ ile gösterilsin.

$$A \leq_{CW}^* B \text{ ise } a_C \leq b_C \text{ ve } a_W \leq b_W \quad (4.25)$$

$$A <_{CW}^* B \text{ ise } A \leq_{CW}^* B \text{ ve } A \neq B \quad (4.26)$$

Burada verilen $\leq_{CW} *$ sıra ilişkisi, Tanım 4.3' de verilen $\leq_{CW}$ ilişkisinden farklıdır. Eğer $A \leq_{CW} * B$ ise A aralığı B ye tercih edilir.

Bu sıra ilişkisi ele alındığında aşağıdaki çıkarımlarda kolayca elde edilebilecektir

(5) Eğer $A \leq_{CW} * B$ ise $a_R \leq b_R$ dir. a_R ve b_R , A ve B 'nin sağ limitleridir.

(6) Eğer $a_W = b_W = 0$ ise $\leq_{CW} *$ işlemi, reel sayılar üzerinde bir eşitsizlik işlemi tanımlar.

Buda bir nokta tanımlar.

Minimum problemi için tanımlanan tüm bu işlemler asla birbirleriyle zıtlık haline düşmezler.

$A \neq B$ iken $A \leq_{LR} * B$ ve $B \leq_{CW} * A$ işlemleri asla gerçekleşmez. Bu ifade şu şekilde ispat edilebilir.

İspat:

Eğer,

$$A \leq_{LR} * B \text{ ve } B \leq_{CW} * A \text{ ise } A = B \quad (4.27)$$

olmak zorundadır.

$$A \leq_{LR} * B \Rightarrow a_L = a_C - a_W \leq b_L = b_C - b_W \quad (4.28)$$

$$B \leq_{CW} * A \Rightarrow b_C \leq a_C \text{ ve } b_W \leq a_W \quad (4.29)$$

(4.29) dan $b_C - b_W \leq a_C - a_W$ yazılabilir.

$$a_C - a_W \leq b_C - b_W \leq b_C - b_W \leq a_C - a_W$$

olur ki buda $a_L = b_L$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $a_R = b_R$ ispatlanabilir. Buda $A = B$ demektir.

4.5 Çok Amaçlı Problemlerin Formüle Edilmesi

4.5.1 Maksimizasyon Problemleri İçin Formülasyon

Tanım 4.6: $x \in S'$ nin (4.3) probleminin basılamaz bir çözümü olması için, $x' \in S$ için $z(x) <_{LR} z(x')$ veya $z(x) <_{CW} z(x')$ ifadeleri sağlanmalıdır.

Bu tanımı daha basitçe anlatmak için $\leq_{LC}$ sıra ilişkisi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$A \leq_{LC} B \text{ ise } a_L \leq b_L \text{ ve } a_C \leq b_C \quad (4.30)$$

$$A <_{LC} B \text{ ise } A \leq_{LC} B \text{ ve } A \neq B \quad (4.31)$$

Önerme 4.1:

$$A \leq_{LC} B \text{ ise } A \leq_{LR} B \text{ veya } A \leq_{CW} B \quad (4.32)$$

$$A <_{LC} B \text{ ise } A <_{LR} B \text{ ve } A <_{CW} B \quad (4.33)$$

İspat :

(4.32) kullanılarak (4.33) kolayca çıkarılabilir. (4.32)'yi ispat etmek yeterlidir. Öncelikle (4.32) ispat edilmelidir.

$$A \leq_{LC} B \text{ ise } a_L \leq b_L \text{ ve } a_C \leq b_C \text{ dir.} \quad (4.34)$$

(4.34) den de ayrıca $a_W \geq b_W$ olduğu çıkarılabilir.

Eğer $a_W \leq b_W$ kabul edilirse (4.34) den $A \leq_{LR} B$ bulunur. Böylece aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$a_R = a_L + 2a_W \leq b_L + 2b_W = b_R \quad (4.35)$$

Öte yandan $A \leq_{LC} B$ ise $A \leq_{LR} B$ veya $A \leq_{CW} B$ olduğu gösterilebilir. Sonra, eğer $A \leq_{LR} B$ ise $A \leq_{LC} B$ dir.

$A \leq_{LR} B$ yi ele alırsak;

$$a_L \leq b_L \vee a_R \leq b_R \quad (4.36)$$

Buradan

$$a_C = \frac{1}{2}(a_R + a_L) \leq \frac{1}{2}(b_R + b_L) = b_C \text{ bulunur.} \quad (4.37)$$

Öte yandan (4.36) ve (4.37) kullanılarak $A \leq_{LC} B$ olduğu bulunabilir.

Son olarak, eğer $A \leq_{CW} B$ ise $A \leq_{LC} B$ dir.

$$A \leq_{CW} B \text{ ise } a_C \leq b_C \text{ ve } a_W \geq b_W \text{ dir.} \quad (4.38)$$

$$(4.9) \text{ dan } a_L = a_C - a_W \leq b_C - b_W = b_L \text{ bulunur.} \quad (4.39)$$

(4.38) ve (4.39) kullanılarak da $A \leq_{LC} B$ bulunur.

Tanım 4.7 : x in bir baskın çözüm olabilmesi için gerek ve yeter şart bu çözümden daha iyi bir çözüm olmamasıdır. Bu $z(x) <_{LC} z(x')$ ile gösterilebilir.

A_i aralığı, $\langle a_{Ci}, a_{Wi} \rangle$ ile gösterilebilsin. (4.3) de verilmiş $z(x)$ denkleminin sol limiti $z_L(x)$ ve merkezi $z_C(x)$ olmak üzere (4.12) ve (4.14) denklemleri kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$z_L(x) = \sum_{i=1}^n (a_{Ci} - a_{Wi}) \cdot x_i = (a_{C1} \cdot x_1 + \dots + a_{Cn} \cdot x_n) - (a_{W1} \cdot |x_1| + \dots + a_{Wn} \cdot |x_n|) \quad (4.40)$$

$$z_C(x) = (a_{C1} \cdot x_1 + \dots + a_{Cn} \cdot x_n) \quad (4.41)$$

$x \geq 0$ için (4.40) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$z_L(x) = (a_{C1} \cdot x_1 + \dots + a_{Cn} \cdot x_n) - (a_{W1} \cdot x_1 + \dots + a_{Wn} \cdot x_n) \quad (4.42)$$

Buraya kadar verilen tüm tanımlar düşünüldüğünde Tanım 4.2 de verilen çözüm seti **Pareto Otimal Çözüm** olarak adlandırılır. Buna göre maksimizasyon problemi aşağıdaki gibi hesaplanabilecektir.

$$\max(z_L(x), z_C(x)) : x \in S \subset R^n \quad (4.43)$$

4.5.2 Minimizasyon Problemleri İçin Formülasyon

Minimizasyon problemleri Bölüm 4.5.1 de anlatılanlara benzer olarak analiz edilebilir. (4.5) e ait çözüm kümesi Tanım 4.8' de verilmiştir.

Tanım 4.8 : $z(x') <_{LR} *z(x)$ veya $z(x') <_{CW} *z(x)$ denklemlerini sağlayan herhangi bir $x' \in S$ mevcut değilse, $x \in S$ ifadesi problemin bir basılamaz çözümüdür.

Minimizasyon problemi için $\leq_{RC} *$ sıra ilişkisi şu şekilde tanımlanmıştır.

$$A \leq_{RC} *B \text{ ise } a_R \leq b_R \text{ ve } a_C \leq b_C \quad (4.44)$$

$$A <_{RC} *B \text{ ise } A \leq_{RC} *B \text{ ve } A \neq B \quad (4.45)$$

Önerme 4.2:

$$A \leq_{RC} *B \text{ ise } A \leq_{LR} *B \text{ veya } A \leq_{CW} *B \quad (4.17)$$

$$A <_{RC} *B \text{ ise } A <_{LR} *B \text{ veya } A <_{CW} *B \quad (4.18)$$

Bu önerme, Önerme 4.1'deki gibi benzer yolla ispatlanabilir.

Tanım 4.8 ve Önerme 4.2 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki Tanım 4.9 kolayca elde edilecektir.

Tanım 4.9: $z(x') <_{RC} *z(x)$ olacak şekilde $x' \in S$ şeklinde bir değer bulunamıyorsa $x \in S$ değeri (4.5) probleminin bir basılamaz çözümüdür.

$z(x)$ aralıklı amaç fonksiyonunun sağ limiti $z_R(x)$ olmak üzere (4.12) ve (4.14) denklemleri kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$z_R(x) = \sum_{i=1}^n (a_{Ci} + a_{Wi}) \cdot x_i = (a_{C1} \cdot x_1 + \dots + a_{Cn} \cdot x_n) + (a_{W1} \cdot |x_1| + \dots + a_{Wn} \cdot |x_n|) \quad (4.46)$$

Burada a_{Ci} , A_i aralığının merkezi, a_{Wi} ise yarıçapını göstermektedir. $x \geq 0$ olması durumunda (4.46) denklemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$z_R(x) = (a_{C1} \cdot x_1 + \dots + a_{Cn} \cdot x_n) + (a_{W1} \cdot x_1 + \dots + a_{Wn} \cdot x_n) \quad (4.47)$$

Tanım 4.9 da bahsedilen (4.5) denkleminde ait çözüm kümesi **Pareto Optimal Çözüm** olarak isimlendirilir ve aşağıdaki şekilde formülize edilebilir.

$$\min(z_R(x), z_C(x)) \quad : \quad x \in S \subset R^n \quad (4.48)$$

Son olarak maksimizasyon ve minimizasyon problemleri arasındaki ilişkiyi düşünecek olursak, tek değere sahip $z(x)$ maksimum problemi, $-z(x)$ minimum problemine denktir.

Önerme 4.3 : Aralıklı fiyatlı aşağıdaki iki problem, aynı çözüm kümesine sahiptir

$$\max(z(x) = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n \quad : \quad x \in S \subset R^n) \quad (4.3)$$

$$\min(-z(x) = -A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 - \dots - A_n \cdot x_n \quad : \quad x \in S \subset R^n) \quad (4.49)$$

İspat : Bu önermeyi ispatlamak için aşağıdaki denklemin ispatlanması yeterlidir.

$$z(x) <_{LC} z(x') \text{ ise } -z(x') <_{RC} * -z(x) \quad (4.50)$$

(4.50) denklemini ispatlamak için aşağıdaki denklemi ispatlamak gerekir.

$$z(x) <_{LC} z(x') \text{ ise } Y(x') <_{RC} * Y(x) \quad (4.51)$$

Burada $Y(x) = -z(x)$ ve $Y(x') = -z(x')$ dir. Bu ilişkiyi $<_{LC}$ ve $<_{RC} *$ tanımlarından kolayca çıkarabiliriz.

$$Y_R(x) = -z_L(x) \quad , \quad Y_R(x') = -z_L(x') \quad (4.52)$$

$$Y_C(x) = -z_C(x) \quad , \quad Y_C(x') = -z_C(x') \quad (4.53)$$

(Ishibuchi ve Tanaka, 1990)

Buraya kadar değinilen konular bu tezin temelini oluşturan konular olup, tez içinde faydalanılan bir diğer konu **Üyelik Fonksiyonları** dır. Bir sonraki bölümde Üyelik Fonksiyonları anlatılmıştır.

4.6 Üyelik Fonksiyonları

Fuzzy sistemlerinin temeli, fuzzy logic içinde gerçek değerler ile, fuzzy kümeleri içinde ise üyelik fonksiyonları ile $[0.0, 1.0]$ aralığında gösterilir. 0.0 değeri kesin Yanlış, 1.0 değeri ise kesin Doğru yu gösterir. Örneğin aşağıdaki ifadeyi göz önüne alalım.

“İrem yaşlıdır.”

Eğer İrem’in yaşı 75 olsaydı, bu ifadenin 0.80 değerinde doğru olduğunu düşünebiliriz. Yukarıdaki ifade şu şekilde ifade edilebilirdi.

“İrem yaşlı insanlar topluluğunun bir üyesidir.”

Bu cümle fuzzy kümesi olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\mu_{\text{YAŞLI}}(\text{İrem}) = 0.80$$

Burada μ , üyelik fonksiyonunu temsil etmekte olup, yaşlı insanlar fuzzy kümesi üzerinde işlem yapar ve geriye 0.0 ile 1.0 arasında bir değer döndürür.

Bu durumda fuzzy sistemler ile olasılık arasındaki ayırma dikkat etmek gerekir. Her ikiside aynı aralık üzerinde çalışır ve ilk olarak aynı değerle yani 0.0 ile başlar. 0.0 değeri Yanlış, 1.0 değeri ise Doğru yu temsil eder. Bununla birlikte iki cümle arasında aşağıdaki gibi bir ayırım bulunmaktadır.

Olasılık yaklaşımı doğal dilin yapısını kabul eder. Buna göre yukarıdaki ifade aşağıdaki gibi de söylenebilir.

“İrem’ in yaşlı olma şansı %80 dir.”

Öte yandan fuzzy yaklaşımı bu ifadeyi şöyle tanımlar.

“İrem’in yaşlı insanlar topluluğu içindeki üyelik derecesi 0.80 dir.”

Fuzzy logic sistemleri üzerinde çeşitli işlemler tanımlanabilir. Bu işlemler **boş, eşit, tümleyen, kapsama, birleşim, kesişim** işlemleridir.

Tanım 4.10 : X bir nesneler kümesi olup bu küme x elementlerinden oluşsun. Bu $X = \{x\}$ şeklinde gösterilebilir.

Tanım 4.11 : A , X içinde tanımlı olan bir fuzzy kümesi olsun. Bu kümeyi temsil eden üyelik fonksiyonu ise $\mu_A(x)$ ile gösterilsin. $\mu_A(x)$, $[0.0, 1.0]$ aralığı üzerinde değerlere sahiptir. $\mu_A(x)$ değeri 1.0 ' a yaklaştıkça, x in üyelik derecesi artar.

Tanım 4.12 : $\forall x$ için $\mu_A(x) = 0.0$ ise A kümesi BOŞ tur.

Tanım 4.13 : $\forall x$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ veya $\mu_A = \mu_B$ ise $A = B$ dir.

Tanım 4.14 : $\mu_{A'} = 1 - \mu_A$ dır.

Tanım 4.15 : Eğer $\mu_A \leq \mu_B$ ise B kümesi A 'yı KAPSAR.

Tanım 4.16 : $C = A$ BİRLEŞİM B ise $\mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ dir.

Tanım 4.17 : $C = A$ KESİŞİM B ise $\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ dir.

Bu kısımdan itibaren verilen ara bilgiler ışığında iki boyutlu taşıma probleminin matematiksel modelinin oluşturulmasına devam edilecektir. Buna göre;

z_1 amaç fonksiyonu aralığın orta noktasından oluşturulur.

$$\min z_1 = \sum_j \sum_i \left(\frac{c_{ij} + d_{ij}}{2} \right) \cdot x_{ij} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

2. amaç fonksiyonu z_2 ise c_{ij} ve d_{ij} fiyatlarının en büyüğünden yani d_{ij} den oluşacaktır.

$$\min z_2 = \sum_j \sum_i d_{ij} \cdot x_{ij}$$

Böylece (4.1) denkleminin iki amaç fonksiyonu içerecek şekilde oluşturulduğu yeni hali aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} \min z_1 &= \sum_j \sum_i \left(\frac{c_{ij} + d_{ij}}{2} \right) \cdot x_{ij} \\ \min z_2 &= \sum_j \sum_i d_{ij} \cdot x_{ij} \\ \sum_j x_{ij} &= a_i \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_i x_{ij} &= b_j \quad j = 1, \dots, m \\ a_i &\geq 0, \quad b_j \geq 0 \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j \end{aligned} \tag{4.54}$$

Oluşan bu problemin amaç fonksiyonlarının katsayılarına L2 normu uygulanır.

$$\begin{aligned} \min z_1' &= \frac{\sum_j \sum_i \left(\frac{c_{ij} + d_{ij}}{2} \right) \cdot x_{ij}}{\left(\sum_j \sum_i \sqrt{\left(\frac{c_{ij} + d_{ij}}{2} \right)^2} \right)} \\ \min z_2' &= \frac{\sum_j \sum_i d_{ij} \cdot x_{ij}}{\left(\sum_j \sum_i \sqrt{d_{ij}^2} \right)} \\ \sum_j x_{ij} &= a_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i x_{ij} &= b_j \quad j = 1, \dots, m \\
\sum_i a_i &= \sum_j b_j \\
a_i &\geq 0, \quad b_j \geq 0 \\
x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

(4.55) denkleminin amaç fonksiyonlarının üyelikleri bulunur. z_1' nün üyeliği $\mu(z_1')$, z_2' nün üyeliği $\mu(z_2')$ olsun.

Bulunan bu üyelikler eşitlenerek, oluşan ifade, (4.55) denklemine yeni bir kısıt olarak eklendiğinde ve amaç fonksiyonu olarak üyeliklerden herhangi birisi ($\mu(z_1')$ veya $\mu(z_2')$) maksimum yapılmaya çalışıldığında oluşacak yeni problem aşağıdaki şekli alacaktır.

$$\begin{aligned}
&\max \mu(z_1') \\
&\mu(z_1') = \mu(z_2') \\
&\sum_j x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n \\
&\sum_i x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, m \\
&\sum_i a_i = \sum_j b_j \\
&a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0 \\
&x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Böylece aralıklı fiyatlardan oluşan taşıma problemi öncelikle iki amaçlı bir taşıma problemine çevrilmiş, daha sonra bu amaçların üyelik fonksiyonları bulunarak ve bu üyelik fonksiyonları eşitlenerek tek bir amaç fonksiyonundan oluşacak şekilde yeni bir problem olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
&\max \mu(z_1') \\
&\mu(z_1') = \mu(z_2') \\
&\sum_j x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n \\
&\sum_i x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, m \\
&\sum_i a_i = \sum_j b_j \\
&a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0 \\
&x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j
\end{aligned} \tag{4.57}$$

4.7 Üç Boyutlu Taşıma Probleminin Matematiksel Modelinin Oluşturulması

Normalde 3 boyutlu ve sabit taşıma maliyetine sahip bir taşıma problemi aşağıdaki denklemde olduğu gibi ifade edilebilir. (Gen vd. 1994)

$$\begin{aligned}
 \min z &= \sum_i^m \sum_j^n \sum_k^t c_{ijk} \cdot x_{ijk} \\
 \sum_j \sum_k x_{ijk} &= a_i, \quad \forall_i \\
 \sum_i \sum_k x_{ijk} &= b_j, \quad \forall_j \\
 \sum_i \sum_j x_{ijk} &= e_k, \quad \forall_k \\
 x_{ijk} &\geq 0, \quad \forall_{i,j,k} \\
 a_i &\geq 0, \quad \forall_i \\
 b_j &\geq 0, \quad \forall_j \\
 e_k &\geq 0, \quad \forall_k \\
 c_{ijk} &\geq 0, \quad \forall_{i,j,k} \\
 \sum_i a_i &= \sum_j b_j = \sum_k e_k
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

3 boyutlu (solid) taşıma probleminde m adet kaynağın, n adet hedefe, t farklı biçimde taşınabileceği gösterilmektedir.

Örneğin, bir bilgisayar parçası üreticisi 30 farklı bilgisayar parçası üretsün. Bu üreticinin dünya üzerinde 4 farklı ülkede üretim merkezleri olsun. Bu üretici ürettiği 30 farklı üründen sadece 10 tanesini bu 4 üretim yerinin hepsinde üretebilsin. 10 adet parçanın dünya ülkelerine dağıtımını bu 4 üretim merkezinden yapılabilsin.

Buna göre bu 10 ürünün üretildikleri 4 farklı (m adet) ülkeden, dünya üzerindeki n adet (5 ülkeye, Türkiye, Almanya, İtalya, Fransa, İngiltere) ülkeye göndermek istesin. Ancak üretici bu parçaları tek bir yöntemle değil t adet (3 yöntem, kara, hava, deniz) farklı yöntemle yollamak istesin. İşte burada tanımlanan 10 parça ürünün üretildikleri 4 farklı ülke üzerinden 5 farklı ülkeye 3 farklı yöntemle yollanmak istemesi solid probleme bir örnek olarak verilebilir.

(4.58) de belirtilen a_i ürün miktarını, b_j hedef sayısını, e_k yöntemi temsil eder. c_{ijk} , i . kaynaktan j . hedefe k farklı yöntemin taşıma fiyatını belirtir. x_{ijk} ise, i . kaynaktan j . hedefe k farklı yöntem ile bilinmeyen taşınacak miktarı belirtir. (Gen vd. 1994)

Taşıma maliyetleri çoğu zaman sabit olmayabilir. Taşıma maliyetlerinin alt ve üst sınırlardan oluştuğu bir aralık şeklinde verilmesi durumunda problemin yapısı (4.59) da görülen şekli alır.

$$\begin{aligned}
 \min z &= \sum_i \sum_j \sum_k [c_{ijk} \quad d_{ijk}] \cdot x_{ijk} \\
 \sum_j \sum_k x_{ijk} &= a_i, \quad \forall_i \\
 \sum_i \sum_k x_{ijk} &= b_j, \quad \forall_j \\
 \sum_i \sum_j x_{ijk} &= e_k, \quad \forall_k \\
 x_{ijk} &\geq 0, \quad \forall_i, j, k \\
 a_i &\geq 0, \quad \forall_i \\
 b_j &\geq 0, \quad \forall_j \\
 e_k &\geq 0, \quad \forall_k \\
 c_{ijk} &\geq 0, \quad \forall_i, j, k \\
 \sum_i a_i &= \sum_j b_j = \sum_k e_k
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ishibuchi ve Tanaka (1990), fiyatların c_{ijk} ve d_{ijk} olarak aralıklı verilmesi durumunda tek amaç fonksiyonundan iki adet amaç fonksiyonu oluşturmayı önermiştir.

Birinci amaç fonksiyonu fiyat aralıklarının orta noktalarından oluşur. Bu amaç fonksiyonu matematiksel olarak şu şekilde gösterilebilir.

$$\min z_1 = \sum_i \sum_j \sum_k \left(\frac{c_{ijk} + d_{ijk}}{2} \right) x_{ijk}$$

İkinci amaç fonksiyonunu oluştururken, verilen fiyat aralığının üst sınırı taşıma fiyatı olarak alınır. İkinci amaç fonksiyonu da matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir.

$$\min z_2 = \sum_i \sum_j \sum_k d_{ijk} \cdot x_{ijk}$$

Oluşan bu iki amaç fonksiyonu yardımıyla (4.59) numaralı denklem iki amaç fonksiyonundan oluşan yeni bir problem halini alacaktır. Yeni problem aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned}
\min z_1 &= \sum_i \sum_j \sum_k \left(\frac{c_{ijk} + d_{ijk}}{2} \right) x_{ijk} \\
\min z_2 &= \sum_i \sum_j \sum_k d_{ijk} \cdot x_{ijk} \\
\sum_j \sum_k x_{ijk} &= a_i, \quad \forall_i \\
\sum_i \sum_k x_{ijk} &= b_j, \quad \forall_j \\
\sum_i \sum_j x_{ijk} &= e_k, \quad \forall_k \\
x_{ijk} &\geq 0, \quad \forall_i, j, k \\
a_i &\geq 0, \quad \forall_i \\
b_j &\geq 0, \quad \forall_j \\
e_k &\geq 0, \quad \forall_k \\
c_{ijk} &\geq 0, \quad \forall_i, j, k \\
\sum_i a_i &= \sum_j b_j = \sum_k e_k
\end{aligned} \tag{4.60}$$

(4.60) problemindeki, amaç fonksiyonlarının katsayılarına L2 normu uygulanır.

$\min z_1$ amaç fonksiyonunun katsayılarına L2 normu uygulanırsa

$$\min z_1' = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\left(\frac{c_{ijk} + d_{ijk}}{2} \right)}{\sqrt{\sum_i \sum_j \sum_k \left(\frac{c_{ijk} + d_{ijk}}{2} \right)^2}} \cdot x_{ijk}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\min z_2$ amaç fonksiyonunun katsayılarına L2 normu uygulanırsa,

$$\min z_2' = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{d_{ijk}}{\sqrt{\sum_i \sum_j \sum_k d_{ijk}^2}} \cdot x_{ijk}$$

şeklinde ifade edilebilir.

L2 normu uygulanarak elde edilen bu yeni eşitlikler (4.60) da yerine konulursa aşağıdaki yeni problem elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
 \min z_1' &= \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\left(\frac{c_{ijk} + d_{ijk}}{2} \right)}{\sqrt{\sum_i \sum_j \sum_k \left(\frac{c_{ijk} + d_{ijk}}{2} \right)^2}} \cdot x_{ijk} \\
 \min z_2' &= \sum_i \sum_j \sum_k \frac{d_{ijk}}{\sqrt{\sum_i \sum_j \sum_k d_{ijk}^2}} \cdot x_{ijk} \\
 \sum_j \sum_k x_{ijk} &= a_i, \quad \forall_i \\
 \sum_i \sum_k x_{ijk} &= b_j, \quad \forall_j \\
 \sum_i \sum_j x_{ijk} &= e_k, \quad \forall_k \\
 x_{ijk} &\geq 0, \quad \forall_{i,j,k} \\
 a_i &\geq 0, \quad \forall_i \\
 b_j &\geq 0, \quad \forall_j \\
 e_k &\geq 0, \quad \forall_k \\
 c_{ijk} &\geq 0, \quad \forall_{i,j,k} \\
 \sum_i a_i &= \sum_j b_j = \sum_k e_k
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

(4.61) probleminde üyelik fonksiyonları bulunup üyeliklerin eşitlenmesiyle yeni bir kısıt oluşturulur. $\min z_1$ ve $\min z_2$ fonksiyonlarının ikisi yerine, üyeliklerden herhangi birini maksimum yapacak şekilde oluşturulacak yeni fonksiyon konulur ve ilave olarak bulunan yeni kısıt eklenirse yeni bir problem yapısı oluşturulmuş olacaktır. Bu problem yapısı aşağıda (4.62) de gösterilmiştir. Oluşan bu problemin çözümü ilk başta tanımlanan problemin çözümünü verecektir.

$$\begin{aligned}
& \max \mu(z_1') \\
& \mu(z_1') = \mu(z_2') \\
& \sum_j \sum_k x_{ijk} = a_i, \quad \forall_i \\
& \sum_i \sum_k x_{ijk} = b_j, \quad \forall_j \\
& \sum_i \sum_j x_{ijk} = e_k, \quad \forall_k \\
& x_{ijk} \geq 0, \quad \forall_{i,j,k} \\
& a_i \geq 0, \quad \forall_i \\
& b_j \geq 0, \quad \forall_j \\
& e_k \geq 0, \quad \forall_k \\
& c_{ijk} \geq 0, \quad \forall_{i,j,k} \\
& \sum_i a_i = \sum_j b_j = \sum_k e_k
\end{aligned} \tag{4.62}$$

5. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde iki ve üç boyutlu, aralıklı fiyatlardan oluşmuş taşıma problemlerinin çözümünde önerdiğimiz çözüm yöntemi kullanılarak örnekler çözülmüş ve bu örnekler detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

5.1 İki Boyutlu Aralık Fiyatlı Taşıma Problemi

Örnek 5.1 :

2 6	3 5	1 7	$a_1 = 11$
3 9	1 9	5 9	$a_2 = 9$
7 11	3 7	2 6	$a_3 = 17$
$b_1 = 8$	$b_2 = 14$	$b_3 = 15$	

Taşıma maliyetleri aralıklar halinde verilmiş yukarıdaki problemi, önerdiğimiz yöntem ile çözelim.

Çözüm:

Öncelikle verilen problem iki amaç fonksiyonundan oluşacak şekilde ifade edilir.

Birinci amaç fonksiyonunda taşıma fiyatı olarak, aralıklı verilen taşıma maliyetlerinin orta noktası alınır ve bulunan bu değerler kullanılarak amaç fonksiyonu oluşturulur.

Orta noktalar sırayla belirlenir. Orta noktaları o_{ij} olarak gösterelim.

$$x_{11} \text{ için : } o_{11} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_{12} \text{ için : } o_{12} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{bulunur.}$$

Benzer şekilde diğerleri de hesaplanacak olursa,

$$x_{13} = 4, \quad x_{21} = 6, \quad x_{22} = 5, \quad x_{23} = 7, \quad x_{31} = 9, \quad x_{32} = 5, \quad x_{33} = 4 \quad \text{bulunur.}$$

Orta noktaları alarak oluşturulan yeni fiyatlar ile birinci fonksiyon aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$z_1 = 4x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 9x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33}$$

İkinci amaç fonksiyonu ise verilen aralıklı taşıma fiyatlarının üst fiyat değeri alınarak oluşturulur. Buna göre ikinci amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$z_2 = 6x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 9x_{21} + 9x_{22} + 9x_{23} + 11x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33}$$

Elde edilen bu iki amaç fonksiyonu ile problem şu şekilde ifade edilebilir.

$$\min z_1 = 4x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 9x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33}$$

$$\min z_2 = 6x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 9x_{21} + 9x_{22} + 9x_{23} + 11x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 9$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 17$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 8$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 14$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0, \quad \forall_{i,j}$$

Verilen kısıtlar altında z_1 ve z_2 fonksiyonlarının maksimum ve minimum değerleri WINQSB programı yardımıyla çözülmüştür.

Problemlerin çözümünde kullanılan WINQSB programı ile ilgili detaylı bilgi Ek 1' de anlatılmıştır.

WINQSB programında probleme ait değişkenlerin yazılmasının ve okunmasının kolay olması için $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}$ olarak değil $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ olarak ifade edilmiştir.

z_1 fonksiyonunun minimum değerini bulmak için WINQSB de problem uygun şekilde tanımlandıktan sonra çözülürse Şekil 5.1 ' de görülen sonuçlar elde edilir.

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	8,0000	4,0000	32,0000	0	basic	-M	5,0000
2	X2	3,0000	4,0000	12,0000	0	basic	3,0000	5,0000
3	X3	0	4,0000	0	1,0000	at bound	3,0000	M
4	X4	0	6,0000	0	1,0000	at bound	5,0000	M
5	X5	9,0000	5,0000	45,0000	0	basic	-M	5,0000
6	X6	0	7,0000	0	3,0000	at bound	4,0000	M
7	X7	0	9,0000	0	4,0000	at bound	5,0000	M
8	X8	2,0000	5,0000	10,0000	0	basic	5,0000	9,0000
9	X9	15,0000	4,0000	60,0000	0	basic	-M	5,0000
	Objective Function		(Min.) =	159,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	11,0000	=	11,0000	0	-1,0000	11,0000	13,0000
2	C2	9,0000	=	9,0000	0	0	9,0000	11,0000
3	C3	17,0000	=	17,0000	0	0	17,0000	M
4	C4	8,0000	=	8,0000	0	5,0000	6,0000	8,0000
5	C5	14,0000	=	14,0000	0	5,0000	12,0000	14,0000
6	C6	15,0000	=	15,0000	0	4,0000	0	15,0000

Şekil 5.1 : İki boyutlu problemin WINQSB programında çözülmesi

Şekil 5.1 ' den de görüleceği üzere $z_{1\min} = 159$ olarak bulunur. Ayrıca çözüm kümesi olarak da aşağıdaki değerler elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{11} = 8 \\
x_2 &= x_{12} = 3 \\
x_3 &= x_{13} = 0 \\
x_4 &= x_{21} = 0 \\
x_5 &= x_{22} = 9 \\
x_6 &= x_{23} = 0 \\
x_7 &= x_{31} = 0 \\
x_8 &= x_{32} = 2 \\
x_9 &= x_{33} = 15
\end{aligned}$$

WINQSB programı ile z_1 fonksiyonunun maksimum değeri ve çözüm kümesi hesaplanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
z_{1\max} &= 224 \\
x_1 &= x_{11} = 0 \\
x_2 &= x_{12} = 5 \\
x_3 &= x_{13} = 6 \\
x_4 &= x_{21} = 0 \\
x_5 &= x_{22} = 0 \\
x_6 &= x_{23} = 9 \\
x_7 &= x_{31} = 8 \\
x_8 &= x_{32} = 9 \\
x_9 &= x_{33} = 0
\end{aligned}$$

Benzer şekilde ve aynı program yardımıyla z_2 fonksiyonunun minimum ve maksimum değerleri ve çözüm kümeleri hesaplanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
z_{2\min} &= 240 \\
x_1 &= x_{11} = 0 \\
x_2 &= x_{12} = 11 \\
x_3 &= x_{13} = 0 \\
x_4 &= x_{21} = 8 \\
x_5 &= x_{22} = 1 \\
x_6 &= x_{23} = 0 \\
x_7 &= x_{31} = 0 \\
x_8 &= x_{32} = 2 \\
x_9 &= x_{33} = 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{2\max} &= 309 \\
x_1 &= x_{11} = 0 \\
x_2 &= x_{12} = 0 \\
x_3 &= x_{13} = 11 \\
x_4 &= x_{21} = 0 \\
x_5 &= x_{22} = 5 \\
x_6 &= x_{23} = 4 \\
x_7 &= x_{31} = 8 \\
x_8 &= x_{32} = 9 \\
x_9 &= x_{33} = 0
\end{aligned}$$

Oluşan bu problemin katsayılarına L2 normu uygulanmış ve bu normu uygulamak için norm katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\alpha = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16 + 16 + 36 + 25 + 49 + 81 + 25 + 16} \\ = \sqrt{280} = \underline{16,7332}$$

$$\beta = \sqrt{6^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 11^2 + 7^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 25 + 49 + 81 + 81 + 81 + 121 + 49 + 36} \\ = \sqrt{559} = \underline{23,6432}$$

Amaç fonksiyonları bu katsayılar ile bölünürse yeni fonksiyonlar oluşur.

Katsayıları normalize edilmiş amaç fonksiyonları z_1' ve z_2' olarak gösterilsin. Buna göre;

$$z_1' = \frac{z_1}{\alpha} \text{ ve } z_2' = \frac{z_2}{\beta} \text{ olarak gösterilebilir.}$$

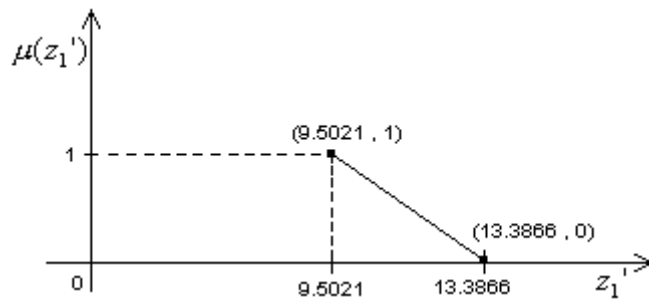
$$z_1'_{\min} = \frac{z_{1\min}}{\alpha} = \frac{159}{16,7332} = 9,5021$$

$$z_1'_{\max} = \frac{z_{1\max}}{\alpha} = \frac{224}{16,7332} = 13,3866$$

$$z_2'_{\min} = \frac{z_{2\min}}{\beta} = \frac{240}{23,6432} = 10,1509$$

$$z_2'_{\max} = \frac{z_{2\max}}{\beta} = \frac{309}{23,6432} = 13,0693$$

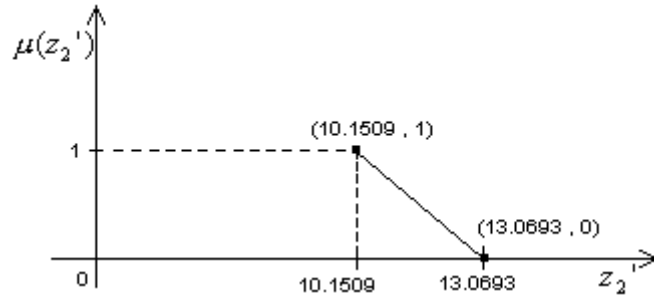
Normalizasyon uygulanmış bu fonksiyonların **Üyelik Fonksiyonları** hesaplanmıştır.



Şekil 5.2 : z_1 fonksiyonunun üyelik fonksiyonu grafiği

Aşağıdaki denklem $\mu(z_1')$ üyelik fonksiyonunu verir.

$$\mu(z_1') - 0 = \frac{1}{9.5021 - 13.3866} \cdot (z_1' - 13.3866) \Rightarrow \underline{\mu(z_1') = -\frac{1}{3.8845} \cdot (z_1' - 13.3866)}$$



Şekil 5.3 : z_2 fonksiyonunun üyelik fonksiyonu grafiği

Aşağıdaki denklem $\mu(z_2')$ üyelik fonksiyonunu verir.

$$\mu(z_2') - 0 = \frac{1}{10.1509 - 13.0693} \cdot (z_2' - 13.0693) \Rightarrow \mu(z_2') = -\frac{1}{2.9184} \cdot (z_2' - 13.0693)$$

Üyelik fonksiyonları kesiştirilmiş ve yeni bir denklem elde edilmiştir. Daha sonra bulunan bu denklem probleme ilave kısıt olarak eklenmiştir.

$$-\frac{1}{3.8845} \cdot (z_1' - 13.3866) = -\frac{1}{2.9184} \cdot (z_2' - 13.0693) \Rightarrow$$

$$0.2574(z_1' - 13.3866) = 0.3427 \cdot (z_2' - 13.0693)$$

$$0.2574 \cdot \left[\frac{1}{16.7332} \cdot (4x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 9x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33}) - 13.3866 \right] =$$

$$0.3427 \cdot \left[\frac{1}{23.6432} \cdot (6x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 9x_{21} + 9x_{22} + 9x_{23} + 11x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33}) - 13.0693 \right]$$

$$0.0154 \cdot (4x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 9x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} - 224.0007) =$$

$$0.0145 \cdot (6x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 9x_{21} + 9x_{22} + 9x_{23} + 11x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} - 309.0001)$$

$$(0.087 - 0.0616)x_{11} + (0.0725 - 0.0616)x_{12} + (0.1015 - 0.0616)x_{13} + (0.1305 - 0.0924)x_{21} +$$

$$(0.1305 - 0.077)x_{22} + (0.1305 - 0.1078)x_{23} + (0.1595 - 0.1386)x_{31} + (0.1015 - 0.077)x_{32} +$$

$$(0.087 - 0.0616)x_{33} = 4.4805 - 3.4496$$

$$0.0254 \cdot x_{11} + 0.0109 \cdot x_{12} + 0.0399 \cdot x_{13} + 0.0381 \cdot x_{21} + 0.0535 \cdot x_{22} + 0.0227 \cdot x_{23} + 0.0209 \cdot x_{31} +$$

$$0.0245 \cdot x_{32} + 0.0254 \cdot x_{33} = 1.0309 \rightarrow \text{YENİ KISIT}$$

Üyelik fonksiyonlarının eşitlenmesiyle elde edilen yeni kısıt bu probleme eklenirse yeni problemin denklemleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$z_1' = \frac{1}{16.7332} \cdot (4x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 9x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33}) \Rightarrow$$

$$z_1' = 0.2390x_1 + 0.2390x_2 + 0.2390x_3 + 0.3585x_4 + 0.2988x_5 + 0.4183x_6 + 0.5378x_7 + 0.2988x_8 + 0.2390x_9$$

$$0.0254.x_{11} + 0.0109.x_{12} + 0.0399.x_{13} + 0.0381.x_{21} + 0.0535.x_{22} + 0.0227.x_{23} + 0.0209.x_{31} + 0.0245.x_{32} + 0.0254.x_{33} = 1.0309$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 9$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 17$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 8$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 14$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0, \quad \forall_{i,j}$$

Elde edilen bu yeni problem WINQSB programı yardımıyla çözülür.

Program yardımıyla problem çözüldüğünde oluşacak çözüm kümesi ve sonuç değeri aşağıdaki şekil üzerinde görülmektedir.

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	3,0000	0,2390	0,7170	0	basic
2	X2	3,9929	0,2390	0,9543	0	basic
3	X3	4,0071	0,2390	0,9577	0	basic
4	X4	1,0000	0,3585	0,3585	0	basic
5	X5	4,0000	0,2988	1,1952	0,2988	at bound
6	X6	4,0000	0,4183	1,6732	0	basic
7	X7	4,0000	0,5378	2,1512	0	basic
8	X8	6,0071	0,2988	1,7949	0	basic
9	X9	6,9929	0,2390	1,6713	0	basic
	Objective Function		(Min.) =	11,4733		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C7	1,0309	=	1,0309	0	2,1281
2	C1	11,0000	=	11,0000	0	-0,2159
3	C2	9,0000	=	9,0000	0	0
4	C3	17,0000	=	17,0000	0	-0,1850
5	C4	8,0000	=	8,0000	0	0,6784
6	C5	14,0000	=	14,0000	0	0,4317
7	C6	15,0000	=	15,0000	0	0,3700

Şekil 5.4 : Problemin son halinin çözüm kümesi

Buna göre elde edilen çözüm değerleri aşağıdaki gibidir.

$$z_1' = 11.4733$$

$$x_1 = x_{11} = 3.0000$$

$$x_2 = x_{12} = 3.9929$$

$$x_3 = x_{13} = 4.0071$$

$$x_4 = x_{21} = 1.0000$$

$$x_5 = x_{22} = 4.0000$$

$$x_6 = x_{23} = 4.0000$$

$$x_7 = x_{31} = 4.0000$$

$$x_8 = x_{32} = 6.0071$$

$$x_9 = x_{33} = 6.9929$$

Buna göre üyelik fonksiyonu değerini hesaplırsak;

$$\mu(z_1') = -\frac{1}{3.8845}(z_1' - 13.3866) = -\frac{1}{3.8845} \cdot (11.4733 - 13.3866) = \frac{1.9133}{3.8845} \cong 0.4925$$

bulunur.

5.2 Üç Boyutlu Aralık Fiyatlı Taşıma Problemi

Burada ele alınacak problem modeli oluşturulurken fiyat aralıklarının seçilmesinde, orta noktaların tam sayı olmasına dikkat edilmiştir.

Bu problem modelini çözmek için önerdiğimiz yöntem kullanılarak bir sonuç elde edilmeye çalışılmıştır.

Fiyatlar A_{ijk} ile gösterilsin ve aşağıdaki şekilde verilmiş olsun.

$A_{111} = [2, 28]$	$A_{121} = [6, 18]$	$A_{131} = [5, 15]$	$A_{141} = [4, 12]$
$A_{112} = [6, 30]$	$A_{122} = [10, 34]$	$A_{132} = [2, 6]$	$A_{142} = [4, 18]$
$A_{113} = [9, 25]$	$A_{123} = [8, 18]$	$A_{133} = [3, 21]$	$A_{143} = [7, 19]$
$A_{211} = [11, 23]$	$A_{221} = [10, 32]$	$A_{231} = [14, 38]$	$A_{241} = [20, 40]$
$A_{212} = [12, 28]$	$A_{222} = [11, 31]$	$A_{232} = [15, 23]$	$A_{242} = [6, 14]$
$A_{213} = [8, 30]$	$A_{223} = [18, 26]$	$A_{233} = [16, 20]$	$A_{243} = [17, 29]$
$A_{311} = [3, 25]$	$A_{321} = [20, 30]$	$A_{331} = [5, 35]$	$A_{341} = [12, 30]$
$A_{312} = [6, 16]$	$A_{322} = [24, 40]$	$A_{332} = [12, 20]$	$A_{342} = [20, 26]$
$A_{313} = [8, 16]$	$A_{323} = [20, 46]$	$A_{333} = [6, 24]$	$A_{343} = [16, 28]$
$A_{411} = [4, 40]$	$A_{421} = [18, 30]$	$A_{431} = [12, 24]$	$A_{441} = [11, 15]$
$A_{412} = [8, 28]$	$A_{422} = [25, 45]$	$A_{432} = [19, 23]$	$A_{442} = [17, 29]$
$A_{413} = [12, 14]$	$A_{423} = [24, 40]$	$A_{433} = [8, 20]$	$A_{443} = [12, 28]$

Verilen bu aralıklı fiyatlardan ve kısıtlardan oluşan problemin temel hali aşağıdaki gibidir.

$$\min z = \sum_i \sum_j \sum_k [c_{ijk} \ d_{ijk}] \cdot x_{ijk}$$

$$\sum_j \sum_k x_{ijk} = a_i \ , \ \forall_i$$

$$\sum_i \sum_k x_{ijk} = b_j \ , \ \forall_j$$

$$\sum_i \sum_j x_{ijk} = e_k \ , \ \forall_k$$

$$x_{ijk} \geq 0 \ , \ \forall_{i,j,k}$$

$$a_i \geq 0 \ , \ \forall_i$$

$$b_j \geq 0 \ , \ \forall_j$$

$$e_k \geq 0 \ , \ \forall_k$$

$$c_{ijk} \geq 0 \ , \ \forall_{i,j,k}$$

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = \sum_k e_k$$

Gen vd. (1994) tarafından yayımlanan bu makaleye göre yukarıdaki problem iki ayrı amaç fonksiyonu halinde yazılabilir.

Birinci amaç fonksiyonunda fiyatlar aralığın orta noktalarından oluşurken, ikinci amaç fonksiyonunda fiyatlar aralığın üst noktasından oluşturulmuştur.

Birinci amaç fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \min z_1 = & 15x_{111} + 18x_{112} + 17x_{113} + 12x_{121} + 22x_{122} + 13x_{123} + 10x_{131} + 4x_{132} + 12x_{133} + 8x_{141} + \\ & 11x_{142} + 13x_{143} + 17x_{211} + 20x_{212} + 19x_{213} + 21x_{221} + 21x_{222} + 22x_{223} + 21x_{231} + 19x_{232} + 18x_{233} + \\ & 30x_{241} + 10x_{242} + 23x_{243} + 14x_{311} + 11x_{312} + 12x_{313} + 25x_{321} + 34x_{322} + 33x_{323} + 20x_{331} + 16x_{332} + \\ & 15x_{333} + 21x_{341} + 23x_{342} + 22x_{343} + 22x_{411} + 18x_{412} + 13x_{413} + 24x_{421} + 35x_{422} + 32x_{423} + 18x_{431} + \\ & 21x_{432} + 14x_{433} + 13x_{441} + 23x_{442} + 20x_{443} \end{aligned}$$

İkinci amaç fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \min z_2 = & 28x_{111} + 30x_{112} + 25x_{113} + 18x_{121} + 34x_{122} + 18x_{123} + 15x_{131} + 6x_{132} + 21x_{133} + 12x_{141} + \\ & 18x_{142} + 19x_{143} + 23x_{211} + 28x_{212} + 30x_{213} + 32x_{221} + 31x_{222} + 26x_{223} + 28x_{231} + 23x_{232} + 20x_{233} + \\ & 40x_{241} + 14x_{242} + 29x_{243} + 25x_{311} + 16x_{312} + 16x_{313} + 30x_{321} + 40x_{322} + 46x_{323} + 35x_{331} + 20x_{332} + \\ & 24x_{333} + 30x_{341} + 26x_{342} + 28x_{343} + 40x_{411} + 28x_{412} + 14x_{413} + 30x_{421} + 45x_{422} + 40x_{423} + 24x_{431} + \\ & 23x_{432} + 20x_{433} + 15x_{441} + 29x_{442} + 28x_{443} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Verilen kısıtlar ise aşağıdaki gibi olsun :

$$\begin{aligned}x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{121} + x_{122} + x_{123} + x_{131} + x_{132} + x_{133} + x_{141} + x_{142} + x_{143} &= 24 \\x_{211} + x_{212} + x_{213} + x_{221} + x_{222} + x_{223} + x_{231} + x_{232} + x_{233} + x_{241} + x_{242} + x_{243} &= 8 \\x_{311} + x_{312} + x_{313} + x_{321} + x_{322} + x_{323} + x_{331} + x_{332} + x_{333} + x_{341} + x_{342} + x_{343} &= 18 \\x_{411} + x_{412} + x_{413} + x_{421} + x_{422} + x_{423} + x_{431} + x_{432} + x_{433} + x_{441} + x_{442} + x_{443} &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{211} + x_{212} + x_{213} + x_{311} + x_{312} + x_{313} + x_{411} + x_{412} + x_{413} &= 11 \\x_{121} + x_{122} + x_{123} + x_{221} + x_{222} + x_{223} + x_{321} + x_{322} + x_{323} + x_{421} + x_{422} + x_{423} &= 19 \\x_{131} + x_{132} + x_{133} + x_{231} + x_{232} + x_{233} + x_{331} + x_{332} + x_{333} + x_{431} + x_{432} + x_{433} &= 21 \\x_{141} + x_{142} + x_{143} + x_{241} + x_{242} + x_{243} + x_{341} + x_{342} + x_{343} + x_{441} + x_{442} + x_{443} &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{111} + x_{121} + x_{131} + x_{141} + x_{211} + x_{221} + x_{231} + x_{241} + x_{311} + x_{321} + x_{331} + x_{341} + x_{411} + x_{421} + x_{431} + x_{441} &= 17 \\x_{112} + x_{122} + x_{132} + x_{142} + x_{212} + x_{222} + x_{232} + x_{242} + x_{312} + x_{322} + x_{332} + x_{342} + x_{412} + x_{422} + x_{432} + x_{442} &= 31 \\x_{113} + x_{123} + x_{133} + x_{143} + x_{213} + x_{223} + x_{233} + x_{243} + x_{313} + x_{323} + x_{333} + x_{343} + x_{413} + x_{423} + x_{433} + x_{443} &= 12\end{aligned}$$

Problemin WINQSB programında tanımlanıp çözülebilmesi için problemde yer alan x değişkenleri aşağıdaki şekilde tekrar tanımlanmıştır. Çünkü her bir koşul için girilebilecek karakter sayısı program içinde sınırlandırılmıştır. Bu karakter sınırlaması problemin bazı kısıtları için yeterli olmadığından bu tür bir değişken ismi değişikliğine gidilmiştir.

Program içinde kullanılan yeni değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}x_{111} = x_1 \quad x_{112} = x_2 \quad x_{113} = x_3 \quad x_{121} = x_4 \quad x_{122} = x_5 \quad x_{123} = x_6 \\x_{131} = x_7 \quad x_{132} = x_8 \quad x_{133} = x_9 \quad x_{141} = x_{10} \quad x_{142} = x_{11} \quad x_{143} = x_{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{211} = y_1 \quad x_{212} = y_2 \quad x_{213} = y_3 \quad x_{221} = y_4 \quad x_{222} = y_5 \quad x_{223} = y_6 \\x_{231} = y_7 \quad x_{232} = y_8 \quad x_{233} = y_9 \quad x_{241} = y_{10} \quad x_{242} = y_{11} \quad x_{243} = y_{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{311} = k_1 \quad x_{312} = k_2 \quad x_{313} = k_3 \quad x_{321} = k_4 \quad x_{322} = k_5 \quad x_{323} = k_6 \\x_{331} = k_7 \quad x_{332} = k_8 \quad x_{333} = k_9 \quad x_{341} = k_{10} \quad x_{342} = k_{11} \quad x_{343} = k_{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{411} = t_1 \quad x_{412} = t_2 \quad x_{413} = t_3 \quad x_{421} = t_4 \quad x_{422} = t_5 \quad x_{423} = t_6 \\x_{431} = t_7 \quad x_{432} = t_8 \quad x_{433} = t_9 \quad x_{441} = t_{10} \quad x_{442} = t_{11} \quad x_{443} = t_{12}\end{aligned}$$

Değişkenlerin yeniden tanımlanması işleminden sonra z_1 ve z_2 için problemin minimum ve maksimum çözüm değerleri ve çözüm kümesi WINQSB programı ile bulunmuştur.

Minimum problem için oluşan çözüm kümesi Şekil 5.5'de gösterilmiştir.

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	15,0000	0	19,0000	at bound	-4,0000	M
2	X2	0	18,0000	0	19,0000	at bound	-1,0000	M
3	X3	0	17,0000	0	20,0000	at bound	-3,0000	M
4	X4	16,0000	12,0000	192,0000	0	basic	12,0000	13,0000
5	X5	0	22,0000	0	7,0000	at bound	15,0000	M
6	X6	3,0000	13,0000	39,0000	0	basic	10,0000	14,0000
7	X7	0	10,0000	0	9,0000	at bound	1,0000	M
8	X8	5,0000	4,0000	20,0000	0	basic	3,0000	4,0000
9	X9	0	12,0000	0	10,0000	at bound	2,0000	M
10	X10	0	8,0000	0	7,0000	at bound	1,0000	M
11	X11	0	11,0000	0	7,0000	at bound	4,0000	M
12	X12	0	3,0000	0	1,0000	at bound	2,0000	M
13	Y1	0	17,0000	0	15,0000	at bound	2,0000	M
14	Y2	0	20,0000	0	15,0000	at bound	5,0000	M
15	Y3	0	19,0000	0	16,0000	at bound	3,0000	M
16	Y4	0	21,0000	0	3,0000	at bound	18,0000	M
17	Y5	0	21,0000	0	0	at bound	21,0000	M
18	Y6	0	22,0000	0	3,0000	at bound	19,0000	M
19	Y7	0	21,0000	0	14,0000	at bound	7,0000	M
20	Y8	0	19,0000	0	9,0000	at bound	10,0000	M
21	Y9	0	18,0000	0	10,0000	at bound	8,0000	M
22	Y10	0	30,0000	0	23,0000	at bound	7,0000	M
23	Y11	8,0000	10,0000	80,0000	0	basic	-M	10,0000
24	Y12	0	23,0000	0	15,0000	at bound	8,0000	M
25	K1	0	14,0000	0	6,0000	at bound	8,0000	M
26	K2	11,0000	11,0000	121,0000	0	basic	-M	14,0000
27	K3	0	12,0000	0	3,0000	at bound	9,0000	M
28	K4	0	25,0000	0	1,0000	at bound	24,0000	M
29	K5	0	34,0000	0	7,0000	at bound	27,0000	M
30	K6	0	33,0000	0	8,0000	at bound	25,0000	M
31	K7	0	20,0000	0	7,0000	at bound	13,0000	M
32	K8	7,0000	16,0000	112,0000	0	basic	16,0000	17,0000
33	K9	0	15,0000	0	1,0000	at bound	14,0000	M
34	K10	0	21,0000	0	8,0000	at bound	13,0000	M
35	K11	0	23,0000	0	7,0000	at bound	16,0000	M
36	K12	0	22,0000	0	8,0000	at bound	14,0000	M
37	T1	0	22,0000	0	14,0000	at bound	8,0000	M
38	T2	0	18,0000	0	7,0000	at bound	11,0000	M
39	T3	0	13,0000	0	4,0000	at bound	9,0000	M
40	T4	0	24,0000	0	0	basic	23,0000	24,0000
41	T5	0	35,0000	0	8,0000	at bound	27,0000	M
42	T6	0	32,0000	0	7,0000	at bound	25,0000	M
43	T7	0	18,0000	0	5,0000	at bound	13,0000	M
44	T8	0	21,0000	0	5,0000	at bound	16,0000	M
45	T9	9,0000	14,0000	126,0000	0	basic	7,0000	15,0000
46	T10	1,0000	13,0000	13,0000	0	basic	13,0000	14,0000
47	T11	0	23,0000	0	7,0000	at bound	16,0000	M
48	T12	0	20,0000	0	6,0000	at bound	14,0000	M
	Objective Function		(Min.) =	703,0000	(Note: Alternate Solution Exists!)			
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	24,0000	=	24,0000	0	-12,0000	24,0000	31,0000
2	C2	8,0000	=	8,0000	0	-6,0000	8,0000	9,0000
3	C3	18,0000	=	18,0000	0	0	18,0000	M
4	C4	10,0000	=	10,0000	0	0	10,0000	17,0000
5	C5	11,0000	=	11,0000	0	-16,0000	11,0000	11,0000
6	C6	19,0000	=	19,0000	0	0	19,0000	M
7	C7	21,0000	=	21,0000	0	-11,0000	21,0000	21,0000
8	C8	9,0000	=	9,0000	0	-11,0000	9,0000	9,0000
9	C9	17,0000	=	17,0000	0	24,0000	10,0000	17,0000
10	C10	31,0000	=	31,0000	0	27,0000	31,0000	31,0000
11	C11	12,0000	=	12,0000	0	25,0000	9,0000	12,0000

Şekil 5.5 : $\min z_1$ probleminin WINQSB programı ile çözümü

Problemin çözülmesiyle elde edilen değerler şöyledir.

$$\min z_1 = 703$$

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 16 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 3 \quad x_7 = 0 \quad x_8 = 5 \quad x_9 = 0 \quad x_{10} = 0 \quad x_{11} = 0 \quad x_{12} = 0 \\ y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 0 \quad y_5 = 0 \quad y_6 = 0 \quad y_7 = 0 \quad y_8 = 0 \quad y_9 = 0 \quad y_{10} = 0 \quad y_{11} = 8 \quad y_{12} = 0 \\ k_1 = 0 \quad k_2 = 11 \quad k_3 = 0 \quad k_4 = 0 \quad k_5 = 0 \quad k_6 = 0 \quad k_7 = 0 \quad k_8 = 7 \quad k_9 = 0 \quad k_{10} = 0 \quad k_{11} = 0 \quad k_{12} = 0 \\ t_1 = 0 \quad t_2 = 0 \quad t_3 = 0 \quad t_4 = 0 \quad t_5 = 0 \quad t_6 = 0 \quad t_7 = 0 \quad t_8 = 0 \quad t_9 = 9 \quad t_{10} = 1 \quad t_{11} = 0 \quad t_{12} = 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\max z_1$ çözümü WINQSB ile hesaplanırsa,

$$\max z_1 = 1431$$

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad x_2 = 11 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0 \quad x_7 = 1 \quad x_8 = 0 \quad x_9 = 12 \quad x_{10} = 0 \quad x_{11} = 0 \quad x_{12} = 0 \\ y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 0 \quad y_5 = 0 \quad y_6 = 0 \quad y_7 = 0 \quad y_8 = 0 \quad y_9 = 0 \quad y_{10} = 8 \quad y_{11} = 0 \quad y_{12} = 0 \\ k_1 = 0 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 0 \quad k_4 = 0 \quad k_5 = 9 \quad k_6 = 0 \quad k_7 = 8 \quad k_8 = 0 \quad k_9 = 0 \quad k_{10} = 0 \quad k_{11} = 1 \quad k_{12} = 0 \\ t_1 = 0 \quad t_2 = 0 \quad t_3 = 0 \quad t_4 = 0 \quad t_5 = 10 \quad t_6 = 0 \quad t_7 = 0 \quad t_8 = 0 \quad t_9 = 0 \quad t_{10} = 0 \quad t_{11} = 0 \quad t_{12} = 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

İkinci amaç fonksiyonunun verilen kısıtlar altında minimum ve maksimum çözümü WINQSB ile bulunmuş ve çözüm kümesi Şekil 5.6 'da gösterilmiştir.

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	28,0000	0	30,0000	at bound	-2,0000	M
2	X2	0	30,0000	0	28,0000	at bound	2,0000	M
3	X3	0	25,0000	0	25,0000	at bound	0,0000	M
4	X4	0	18,0000	0	2,0000	at bound	16,0000	M
5	X5	0	34,0000	0	14,0000	at bound	20,0000	M
6	X6	3,0000	18,0000	54,0000	0	basic	12,0000	24,0000
7	X7	0	15,0000	0	13,0000	at bound	2,0000	M
8	X8	21,0000	6,0000	126,0000	0	basic	0	8,0000
9	X9	0	21,0000	0	17,0000	at bound	4,0000	M
10	X10	0	12,0000	0	11,0000	at bound	1,0000	M
11	X11	0	18,0000	0	13,0000	at bound	5,0000	M
12	X12	0	19,0000	0	16,0000	at bound	3,0000	M
13	Y1	0	23,0000	0	17,0000	at bound	6,0000	M
14	Y2	0	28,0000	0	18,0000	at bound	10,0000	M
15	Y3	0	30,0000	0	22,0000	at bound	8,0000	M
16	Y4	0	32,0000	0	8,0000	at bound	24,0000	M
17	Y5	0	31,0000	0	3,0000	at bound	28,0000	M
18	Y6	8,0000	26,0000	208,0000	0	basic	M	27,0000
19	Y7	0	28,0000	0	18,0000	at bound	10,0000	M
20	Y8	0	23,0000	0	9,0000	at bound	14,0000	M
21	Y9	0	20,0000	0	8,0000	at bound	12,0000	M
22	Y10	0	40,0000	0	31,0000	at bound	9,0000	M
23	Y11	0	14,0000	0	1,0000	at bound	13,0000	M
24	Y12	0	29,0000	0	18,0000	at bound	11,0000	M
25	K1	0	25,0000	0	13,0000	at bound	12,0000	M
26	K2	10,0000	16,0000	160,0000	0	basic	14,0000	17,0000
27	K3	0	16,0000	0	2,0000	at bound	14,0000	M
28	K4	8,0000	30,0000	240,0000	0	basic	30,0000	32,0000
29	K5	0	40,0000	0	6,0000	at bound	34,0000	M
30	K6	0	46,0000	0	14,0000	at bound	32,0000	M
31	K7	0	35,0000	0	19,0000	at bound	16,0000	M
32	K8	0	20,0000	0	0	basic	18,0000	22,0000
33	K9	0	24,0000	0	6,0000	at bound	18,0000	M
34	K10	0	30,0000	0	15,0000	at bound	15,0000	M
35	K11	0	26,0000	0	7,0000	at bound	19,0000	M
36	K12	0	28,0000	0	11,0000	at bound	17,0000	M
37	T1	0	40,0000	0	28,0000	at bound	12,0000	M
38	T2	0	28,0000	0	12,0000	at bound	16,0000	M
39	T3	1,0000	14,0000	14,0000	0	basic	13,0000	16,0000
40	T4	0	30,0000	0	0	basic	28,0000	30,0000
41	T5	0	45,0000	0	11,0000	at bound	34,0000	M
42	T6	0	40,0000	0	8,0000	at bound	32,0000	M
43	T7	0	24,0000	0	8,0000	at bound	16,0000	M
44	T8	0	23,0000	0	3,0000	at bound	20,0000	M
45	T9	0	20,0000	0	2,0000	at bound	18,0000	M
46	T10	9,0000	15,0000	135,0000	0	basic	M	16,0000
47	T11	0	29,0000	0	10,0000	at bound	19,0000	M
48	T12	0	28,0000	0	11,0000	at bound	17,0000	M
	Objective	Function	(Min.) =	937,0000	(Note: Alternate Solution Exists!!)			
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	24,0000	=	24,0000	0	-14,0000	24,0000	24,0000
2	C2	8,0000	=	8,0000	0	-6,0000	8,0000	8,0000
3	C3	18,0000	=	18,0000	0	0	18,0000	M
4	C4	10,0000	=	10,0000	0	0	10,0000	18,0000
5	C5	11,0000	=	11,0000	0	-18,0000	11,0000	11,0000
6	C6	19,0000	=	19,0000	0	0	19,0000	M
7	C7	21,0000	=	21,0000	0	-14,0000	21,0000	21,0000
8	C8	9,0000	=	9,0000	0	-15,0000	9,0000	9,0000
9	C9	17,0000	=	17,0000	0	30,0000	9,0000	17,0000
10	C10	31,0000	=	31,0000	0	34,0000	31,0000	31,0000
11	C11	12,0000	=	12,0000	0	32,0000	12,0000	12,0000

Şekil 5.6 : $\min z_2$ probleminin WINQSB programı ile çözümü

Problemin çözülmesiyle elde edilen değerler şöyledir.

$$\min z_2 = 937$$

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 3 \quad x_7 = 0 \quad x_8 = 21 \quad x_9 = 0 \quad x_{10} = 0 \quad x_{11} = 0 \quad x_{12} = 0 \\
 y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 0 \quad y_5 = 0 \quad y_6 = 8 \quad y_7 = 0 \quad y_8 = 0 \quad y_9 = 0 \quad y_{10} = 0 \quad y_{11} = 0 \quad y_{12} = 0 \\
 k_1 = 0 \quad k_2 = 10 \quad k_3 = 0 \quad k_4 = 8 \quad k_5 = 0 \quad k_6 = 0 \quad k_7 = 0 \quad k_8 = 0 \quad k_9 = 0 \quad k_{10} = 0 \quad k_{11} = 0 \quad k_{12} = 0 \\
 t_1 = 0 \quad t_2 = 0 \quad t_3 = 1 \quad t_4 = 0 \quad t_5 = 0 \quad t_6 = 0 \quad t_7 = 0 \quad t_8 = 0 \quad t_9 = 0 \quad t_{10} = 9 \quad t_{11} = 0 \quad t_{12} = 0
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\max z_2$ çözümü WINQSB ile hesaplanırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$$\max z_2 = 2051$$

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad x_2 = 11 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 5 \quad x_6 = 0 \quad x_7 = 0 \quad x_8 = 0 \quad x_9 = 8 \quad x_{10} = 0 \quad x_{11} = 0 \quad x_{12} = 0 \\ y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 0 \quad y_5 = 0 \quad y_6 = 0 \quad y_7 = 0 \quad y_8 = 2 \quad y_9 = 0 \quad y_{10} = 6 \quad y_{11} = 0 \quad y_{12} = 0 \\ k_1 = 0 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 0 \quad k_4 = 0 \quad k_5 = 0 \quad k_6 = 4 \quad k_7 = 11 \quad k_8 = 0 \quad k_9 = 0 \quad k_{10} = 0 \quad k_{11} = 3 \quad k_{12} = 0 \\ t_1 = 0 \quad t_2 = 0 \quad t_3 = 0 \quad t_4 = 0 \quad t_5 = 10 \quad t_6 = 0 \quad t_7 = 0 \quad t_8 = 0 \quad t_9 = 0 \quad t_{10} = 0 \quad t_{11} = 0 \quad t_{12} = 0 \end{aligned}$$

Oluşan bu problemin katsayılarına L2 normu uygulanmıştır. Bunun için normalizasyon katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{15^2 + 18^2 + 17^2 + 12^2 + 22^2 + 13^2 + 10^2 + 4^2 + 12^2 + 8^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 + 20^2 + 19^2 + \\ &21^2 + 21^2 + 22^2 + 21^2 + 19^2 + 18^2 + 30^2 + 10^2 + 23^2 + 14^2 + 11^2 + 12^2 + 25^2 + 34^2 + \\ &33^2 + 20^2 + 16^2 + 15^2 + 21^2 + 23^2 + 22^2 + 22^2 + 18^2 + 13^2 + 24^2 + 35^2 + 32^2 + 18^2 + 21^2 + \\ &14^2 + 13^2 + 23^2 + 20^2} \\ \alpha &= \sqrt{18847} \\ \alpha &= 137.2844 \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{28^2 + 30^2 + 25^2 + 18^2 + 34^2 + 18^2 + 15^2 + 6^2 + 21^2 + 12^2 + 18^2 + 19^2 + 23^2 + 28^2 + 30^2 + \\ &32^2 + 31^2 + 26^2 + 28^2 + 23^2 + 20^2 + 40^2 + 14^2 + 29^2 + 25^2 + 16^2 + 16^2 + 30^2 + 40^2 + \\ &46^2 + 35^2 + 20^2 + 24^2 + 30^2 + 26^2 + 28^2 + 40^2 + 28^2 + 14^2 + 30^2 + 45^2 + 40^2 + 24^2 + 23^2 + \\ &20^2 + 15^2 + 29^2 + 28^2} \\ \beta &= \sqrt{35642} \\ \beta &= 188.7909 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Amaç fonksiyonları bu katsayılar ile bölünürse yeni fonksiyonlar oluşur. Normalize olmuş amaç fonksiyonları z_1' ve z_2' olarak gösterilsin. Buna göre;

$$z_1' = \frac{z_1}{\alpha} \text{ ve } z_2' = \frac{z_2}{\beta} \text{ olarak gösterilebilir.}$$

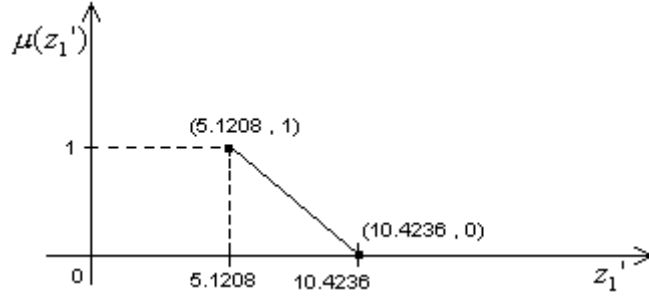
$$z_1'_{\min} = \frac{z_{1\min}}{\alpha} = \frac{703}{137,2844} = 5,1208$$

$$z_1'_{\max} = \frac{z_{1\max}}{\alpha} = \frac{1431}{137,2844} = 10,4236$$

$$z_2'_{\min} = \frac{z_{2\min}}{\beta} = \frac{937}{188,7909} = 4,9632$$

$$z_2'_{\max} = \frac{z_{2\max}}{\beta} = \frac{2051}{188,7909} = 10,8639$$

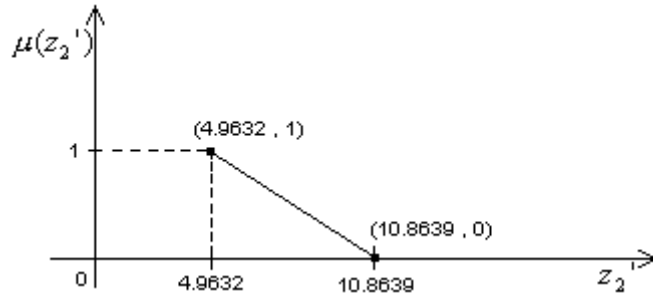
Normalizasyon uygulanmış bu fonksiyonların **Üyelik Fonksiyonları** hesaplanmıştır.



Şekil 5.7 : $\mu(z_1')$ üyelik fonksiyonu

Yukarıdaki doğru grafiği $\mu(z_1')$ üyelik fonksiyonunu verir. Denklemi ise,

$$\mu(z_1') - 0 = \frac{1}{5.1208 - 10.4236} \cdot (z_1' - 10.4236) \Rightarrow \underline{\mu(z_1') = -\frac{1}{5.3028} \cdot (z_1' - 10.4236)}$$



Şekil 5.8 : $\mu(z_2')$ üyelik fonksiyonu

Yukarıdaki doğru grafiği $\mu(z_2')$ üyelik fonksiyonunu verir. Denklemi ise,

$$\mu(z_2') - 0 = \frac{1}{4.9632 - 10.8639} \cdot (z_2' - 10.8639) \Rightarrow \underline{\mu(z_2') = -\frac{1}{5.9007} \cdot (z_2' - 10.8639)}$$

Üyelik fonksiyonları kesiştirilip yeni bir denklem elde edilmeye çalışılır. Daha sonra bulunan bu denklem probleme ilave kısıt olarak eklenir.

$$-\frac{1}{5.3028} \cdot (z_1' - 10.4236) = -\frac{1}{5.9007} \cdot (z_2' - 10.8639) \Rightarrow$$

$$0.1886(z_1' - 10.4236) = 0.1695(z_2' - 10.8639)$$

Buradaki z_1' ve z_2' yerine yazılırsa.

$$0.1886 \cdot \left[\frac{1}{137.2844} \cdot (15x_{111} + 18x_{112} + 17x_{113} + 12x_{121} + 22x_{122} + 13x_{123} + 10x_{131} + 4x_{132} + 12x_{133} + 8x_{141} + \right.$$

$$11x_{142} + 13x_{143} + 17x_{211} + 20x_{212} + 19x_{213} + 21x_{221} + 21x_{222} + 22x_{223} + 21x_{231} + 19x_{232} + 18x_{233} +$$

$$30x_{241} + 10x_{242} + 23x_{243} + 14x_{311} + 11x_{312} + 12x_{313} + 25x_{321} + 34x_{322} + 33x_{323} + 20x_{331} + 16x_{332} +$$

$$15x_{333} + 21x_{341} + 23x_{342} + 22x_{343} + 22x_{411} + 18x_{412} + 13x_{413} + 24x_{421} + 35x_{422} + 32x_{423} + 18x_{431} +$$

$$21x_{432} + 14x_{433} + 13x_{441} + 23x_{442} + 20x_{443}) - 10.4236 \Big]$$

$$=$$

$$0.3427 \cdot \left[\frac{1}{188.7909} \cdot (28x_{111} + 30x_{112} + 25x_{113} + 18x_{121} + 34x_{122} + 18x_{123} + 15x_{131} + 6x_{132} + 21x_{133} + 12x_{141} + \right.$$

$$18x_{142} + 19x_{143} + 23x_{211} + 28x_{212} + 30x_{213} + 32x_{221} + 31x_{222} + 26x_{223} + 28x_{231} + 23x_{232} + 20x_{233} +$$

$$40x_{241} + 14x_{242} + 29x_{243} + 25x_{311} + 16x_{312} + 16x_{313} + 30x_{321} + 40x_{322} + 46x_{323} + 35x_{331} + 20x_{332} +$$

$$24x_{333} + 30x_{341} + 26x_{342} + 28x_{343} + 40x_{411} + 28x_{412} + 14x_{413} + 30x_{421} + 45x_{422} + 40x_{423} + 24x_{431} +$$

$$23x_{432} + 20x_{433} + 15x_{441} + 29x_{442} + 28x_{443}) - 10.8639 \Big]$$

Bu eşitliği düzenlersek;

$$(0.0210 - 0.0252)x_{111} + (0.0252 - 0.0270)x_{112} + (0.0238 - 0.0225)x_{113} + (0.0168 - 0.0162)x_{121}$$

$$+ (0.0308 - 0.0306)x_{122} + (0.0182 - 0.0162)x_{123} + (0.0140 - 0.0135)x_{131} + (0.0056 - 0.0054)x_{132}$$

$$+ (0.0168 - 0.0189)x_{133} + (0.0112 - 0.0108)x_{141} + (0.0154 - 0.0162)x_{142} + (0.0182 - 0.0171)x_{143}$$

$$+ (0.0238 - 0.0207)x_{211} + (0.0280 - 0.0252)x_{212} + (0.0266 - 0.0270)x_{213} + (0.0294 - 0.0288)x_{221}$$

$$+ (0.0294 - 0.0279)x_{222} + (0.0308 - 0.0234)x_{223} + (0.0294 - 0.0252)x_{231} + (0.0266 - 0.0207)x_{232}$$

$$+ (0.0252 - 0.0180)x_{233} + (0.0420 - 0.0360)x_{241} + (0.0140 - 0.0126)x_{242} + (0.0322 - 0.0261)x_{243}$$

$$+ (0.0196 - 0.0225)x_{311} + (0.0154 - 0.0144)x_{312} + (0.0168 - 0.0144)x_{313} + (0.0350 - 0.0270)x_{321}$$

$$+ (0.0476 - 0.0360)x_{322} + (0.0462 - 0.0414)x_{323} + (0.0280 - 0.0315)x_{331} + (0.0224 - 0.0180)x_{332}$$

$$+ (0.0210 - 0.0216)x_{333} + (0.0294 - 0.0270)x_{341} + (0.0322 - 0.0234)x_{342} + (0.0308 - 0.0252)x_{343}$$

$$+ (0.0308 - 0.0360)x_{411} + (0.0252 - 0.0252)x_{412} + (0.0182 - 0.0126)x_{413} + (0.0336 - 0.0270)x_{421}$$

$$+ (0.0490 - 0.0405)x_{422} + (0.0448 - 0.0360)x_{423} + (0.0252 - 0.0216)x_{431} + (0.0294 - 0.0207)x_{432}$$

$$+ (0.0196 - 0.0180)x_{433} + (0.0182 - 0.0135)x_{441} + (0.0322 - 0.0261)x_{442} + (0.0280 - 0.0252)x_{443}$$

$$= 1.9659 - 1.8414$$

$$\begin{aligned}
& (-0.0042)x_{111} + (-0.0018)x_{112} + (0.0013)x_{113} + (0.0006)x_{121} + (0.0002)x_{122} + (0.0002)x_{123} + \\
& (0.0005)x_{131} + (0.0002)x_{132} + (-0.0021)x_{133} + (0.0004)x_{141} + (-0.0008)x_{142} + (0.0011)x_{143} + \\
& (0.0031)x_{211} + (0.0028)x_{212} + (-0.0004)x_{213} + (0.0006)x_{221} + (0.0015)x_{222} + (0.0074)x_{223} + \\
& (0.0042)x_{231} + (0.0059)x_{232} + (0.0072)x_{233} + (0.0060)x_{241} + (0.0014)x_{242} + (0.0061)x_{243} + \\
& (0.0029)x_{311} + (0.0001)x_{312} + (0.0024)x_{313} + (0.0008)x_{321} + (0.0116)x_{322} + (0.0048)x_{323} + \\
& (0.0035)x_{331} + (0.0044)x_{332} + (-0.0006)x_{333} + (0.0024)x_{341} + (0.0088)x_{342} + (0.0056)x_{343} + \\
& (0.0052)x_{411} + (0)x_{412} + (0.0056)x_{413} + (0.0066)x_{421} + (0.0085)x_{422} + (0.0088)x_{423} + \\
& (0.0036)x_{431} + (0.0087)x_{432} + (0.0016)x_{433} + (0.0047)x_{441} + (0.0061)x_{442} + (0.0028)x_{443} \\
& = 0.1245 \quad \Rightarrow \quad YENİ KISIT
\end{aligned}$$

Bulunan bu denklem üyelik fonksiyonlarının eşitlenmesiyle oluşturulmuştur. Bu yeni kısıtın ve amaç fonksiyonunun WINQSB programı üzerinde kullanılabilmesi için yeni oluşan kısıtın değişkenlerinin katsayıları 10000 (on bin) ile genişletilmiş ve probleme o şekilde ilave edilmiştir. Bu denklem probleme ilave bir kısıt olarak eklenir ve problem bu haliyle ifade edilirse,

Amaç fonksiyonu :

$$\begin{aligned}
z_1' &= \frac{1}{137.2844} (15x_{111} + 18x_{112} + 17x_{113} + 12x_{121} + 22x_{122} + 13x_{123} + 10x_{131} + 4x_{132} + 12x_{133} + 8x_{141} + \\
& 11x_{142} + 13x_{143} + 17x_{211} + 20x_{212} + 19x_{213} + 21x_{221} + 21x_{222} + 22x_{223} + 21x_{231} + 19x_{232} + 18x_{233} + \\
& 30x_{241} + 10x_{242} + 23x_{243} + 14x_{311} + 11x_{312} + 12x_{313} + 25x_{321} + 34x_{322} + 33x_{323} + 20x_{331} + 16x_{332} + \\
& 15x_{333} + 21x_{341} + 23x_{342} + 22x_{343} + 22x_{411} + 18x_{412} + 13x_{413} + 24x_{421} + 35x_{422} + 32x_{423} + 18x_{431} + \\
& 21x_{432} + 14x_{433} + 13x_{441} + 23x_{442} + 20x_{443}) \\
& \Rightarrow \\
z_1' &= 0.1092x_{111} + 0.1311x_{112} + 0.1238x_{113} + 0.0874x_{121} + 0.1602x_{122} + 0.0946x_{123} + 0.0728x_{131} + \\
& 0.0291x_{132} + 0.0874x_{133} + 0.0582x_{141} + 0.0801x_{142} + 0.0946x_{143} + 0.1238x_{211} + 0.1456x_{212} + \\
& 0.1383x_{213} + 0.1529x_{221} + 0.1529x_{222} + 0.1602x_{223} + 0.1529x_{231} + 0.1383x_{232} + 0.1311x_{233} + \\
& 0.2185x_{241} + 0.0728x_{242} + 0.1675x_{243} + 0.1019x_{311} + 0.0801x_{312} + 0.0874x_{313} + 0.1821x_{321} + \\
& 0.2476x_{322} + 0.2403x_{323} + 0.1456x_{331} + 0.1165x_{332} + 0.1092x_{333} + 0.1529x_{341} + 0.1675x_{342} + \\
& 0.1602x_{343} + 0.1602x_{411} + 0.1311x_{412} + 0.0946x_{413} + 0.1748x_{421} + 0.2549x_{422} + 0.2330x_{423} + \\
& 0.1311x_{431} + 0.1529x_{432} + 0.1019x_{433} + 0.0946x_{441} + 0.1675x_{442} + 0.1456x_{443}
\end{aligned}$$

Kısıtlar:

$$-42x_{111} - 18x_{112} + 13x_{113} + 6x_{121} + 2x_{122} + 2x_{123} + 5x_{131} + 2x_{132} + 21x_{133} + 4x_{141} - 8x_{142} + 11x_{143} + 31x_{211} + 28x_{212} - 4x_{213} + 6x_{221} + 15x_{222} + 74x_{223} + 42x_{231} + 59x_{232} + 72x_{233} + 60x_{241} + 14x_{242} + 61x_{243} + 29x_{311} + 1x_{312} + 24x_{313} + 8x_{321} + 116x_{322} + 48x_{323} + 35x_{331} + 44x_{332} - 6x_{333} + 24x_{341} + 88x_{342} + 56x_{343} + 52x_{411} + 0x_{412} + 56x_{413} + 66x_{421} + 85x_{422} + 88x_{423} + 36x_{431} + 87x_{432} + 16x_{433} + 47x_{441} + 61x_{442} + 28x_{443} = 1245$$

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{121} + x_{122} + x_{123} + x_{131} + x_{132} + x_{133} + x_{141} + x_{142} + x_{143} &= 24 \\ x_{211} + x_{212} + x_{213} + x_{221} + x_{222} + x_{223} + x_{231} + x_{232} + x_{233} + x_{241} + x_{242} + x_{243} &= 8 \\ x_{311} + x_{312} + x_{313} + x_{321} + x_{322} + x_{323} + x_{331} + x_{332} + x_{333} + x_{341} + x_{342} + x_{343} &= 18 \\ x_{411} + x_{412} + x_{413} + x_{421} + x_{422} + x_{423} + x_{431} + x_{432} + x_{433} + x_{441} + x_{442} + x_{443} &= 10 \\ x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{211} + x_{212} + x_{213} + x_{311} + x_{312} + x_{313} + x_{411} + x_{412} + x_{413} &= 11 \\ x_{121} + x_{122} + x_{123} + x_{221} + x_{222} + x_{223} + x_{321} + x_{322} + x_{323} + x_{421} + x_{422} + x_{423} &= 19 \\ x_{131} + x_{132} + x_{133} + x_{231} + x_{232} + x_{233} + x_{331} + x_{332} + x_{333} + x_{431} + x_{432} + x_{433} &= 21 \\ x_{141} + x_{142} + x_{143} + x_{241} + x_{242} + x_{243} + x_{341} + x_{342} + x_{343} + x_{441} + x_{442} + x_{443} &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{121} + x_{131} + x_{141} + x_{211} + x_{221} + x_{231} + x_{241} + x_{311} + x_{321} + x_{331} + x_{341} + x_{411} + x_{421} + x_{431} + x_{441} &= 17 \\ x_{112} + x_{122} + x_{132} + x_{142} + x_{212} + x_{222} + x_{232} + x_{242} + x_{312} + x_{322} + x_{332} + x_{342} + x_{412} + x_{422} + x_{432} + x_{442} &= 31 \\ x_{113} + x_{123} + x_{133} + x_{143} + x_{213} + x_{223} + x_{233} + x_{243} + x_{313} + x_{323} + x_{333} + x_{343} + x_{413} + x_{423} + x_{433} + x_{443} &= 12 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Problem WINQSB ile çözülürken değişkenler aşağıdaki gibi yeniden adlandırılmıştır.

$$\begin{aligned} x_{111} = x_1 \quad x_{112} = x_2 \quad x_{113} = x_3 \quad x_{121} = x_4 \quad x_{122} = x_5 \quad x_{123} = x_6 \\ x_{131} = x_7 \quad x_{132} = x_8 \quad x_{133} = x_9 \quad x_{141} = x_{10} \quad x_{142} = x_{11} \quad x_{143} = x_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{211} = y_1 \quad x_{212} = y_2 \quad x_{213} = y_3 \quad x_{221} = y_4 \quad x_{222} = y_5 \quad x_{223} = y_6 \\ x_{231} = y_7 \quad x_{232} = y_8 \quad x_{233} = y_9 \quad x_{241} = y_{10} \quad x_{242} = y_{11} \quad x_{243} = y_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{311} = t_1 \quad x_{312} = t_2 \quad x_{313} = t_3 \quad x_{321} = t_4 \quad x_{322} = t_5 \quad x_{323} = t_6 \\ x_{331} = t_7 \quad x_{332} = t_8 \quad x_{333} = t_9 \quad x_{341} = t_{10} \quad x_{342} = t_{11} \quad x_{343} = t_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{411} = k_1 \quad x_{412} = k_2 \quad x_{413} = k_3 \quad x_{421} = k_4 \quad x_{422} = k_5 \quad x_{423} = k_6 \\ x_{431} = k_7 \quad x_{432} = k_8 \quad x_{433} = k_9 \quad x_{441} = k_{10} \quad x_{442} = k_{11} \quad x_{443} = k_{12} \end{aligned}$$

Üyelik fonksiyonlarının eşitlenmesiyle elde edilen yeni kısıt bu probleme eklenip değişkenlerin yeni adları kullanılarak problem aşağıdaki gibi yeniden tanımlanır. Buna göre;

Amaç fonksiyonu: amaç fonk gelecek

Kısıtlar:

$$-42x_1 - 18x_2 + 13x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 5x_7 + 2x_8 + 21x_9 + 4x_{10} - 8x_{11} + 11x_{12} + 31y_1 + 28y_2 - 4y_3 + 6y_4 + 15y_5 + 74y_6 + 42y_7 + 59y_8 + 72y_9 + 60y_{10} + 14y_{11} + 61y_{12} + 29t_1 + 1t_2 + 24t_3 + 8t_4 + 116t_5 + 48t_6 + 35t_7 + 44t_8 - 6t_9 + 24t_{10} + 88t_{11} + 56t_{12} + 52k_1 + 0k_2 + 56k_3 + 66k_4 + 85k_5 + 88k_6 + 36k_7 + 87k_8 + 16k_9 + 47k_{10} + 61k_{11} + 28k_{12} = 1245$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 24$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} = 8$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} + t_{12} = 18$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8 + k_9 + k_{10} + k_{11} + k_{12} = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 + t_1 + t_2 + t_3 + k_1 + k_2 + k_3 = 11$$

$$x_4 + x_5 + x_6 + y_4 + y_5 + y_6 + t_4 + t_5 + t_6 + k_4 + k_5 + k_6 = 19$$

$$x_7 + x_8 + x_9 + y_7 + y_8 + y_9 + t_7 + t_8 + t_9 + k_7 + k_8 + k_9 = 21$$

$$x_{10} + x_{11} + x_{12} + y_{10} + y_{11} + y_{12} + t_{10} + t_{11} + t_{12} + k_{10} + k_{11} + k_{12} = 9$$

$$x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} + y_1 + y_4 + y_7 + y_{10} + t_1 + t_4 + t_7 + t_{10} + k_1 + k_4 + k_7 + k_{10} = 17$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} + y_2 + y_5 + y_8 + y_{11} + t_2 + t_5 + t_8 + t_{11} + k_2 + k_5 + k_8 + k_{11} = 31$$

$$x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} + y_3 + y_6 + y_9 + y_{12} + t_3 + t_6 + t_9 + t_{12} + k_3 + k_6 + k_9 + k_{12} = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12},$$

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12} \geq 0$$

$$\forall_{i,j,k}$$

Problem WINQSB yardımıyla çözüldüğünde çözüm kümesi Şekil 5.9 daki gibi olacaktır. Burada görünen katsayılar WINQSB programında denklemlerin düzgün bir şekilde ifade edilmesi amacıyla norm katsayısı olan 137.2844 ile bölünmeden alınmıştır. Bu nedenle bulunan sonuç değeri ve değişkenlerin katsayıları 137.2844 ile bölünecektir.

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	0	15.0000	0	24.0577	at bound
2	X2	0	18.0000	0	16.7885	at bound
3	X3	0	17.0000	0	14.0192	at bound
4	X4	13.0000	12.0000	156.0000	5.3654	at bound
5	X5	0	22.0000	0	7.7885	at bound
6	X6	2.9904	13.0000	38.8750	0	basic
7	X7	0	10.0000	0	13.6731	at bound
8	X8	8.0096	4.0000	32.0385	0	basic
9	X9	0	12.0000	0	7.3846	at bound
10	X10	0	8.0000	0	9.0000	at bound
11	X11	0	11.0000	0	5.1923	at bound
12	X12	0	13.0000	0	6.5769	at bound
13	Y1	0	17.0000	0	16.9615	at bound
14	Y2	0	20.0000	0	12.2885	at bound
15	Y3	0	19.0000	0	15.5769	at bound
16	Y4	0	21.0000	0	12.2885	at bound
17	Y5	0	21.0000	0	3.4615	at bound
18	Y6	3.0096	22.0000	66.2115	0	basic
19	Y7	0	21.0000	0	19.0385	at bound
20	Y8	0	19.0000	0	7.4423	at bound
21	Y9	0	18.0000	0	6.4038	at bound
22	Y10	0	30.0000	0	23.5385	at bound
23	Y11	4.9904	10.0000	49.9038	0	basic
24	Y12	0	23.0000	0	9.6923	at bound
25	K1	0	22.0000	0	12.1538	at bound
26	K2	0	18.0000	0	5.1923	at bound
27	K3	3.0000	13.0000	39.0000	0	basic
28	K4	0	24.0000	0	1.7308	at bound
29	K5	0	35.0000	0	2.9423	at bound
30	K6	0	32.0000	0	0.8654	at bound
31	K7	0	18.0000	0	8.8269	at bound
32	K8	0	21.0000	0	21.0000	at bound
33	K9	3.0000	14.0000	42.0000	0	basic
34	K10	4.0000	13.0000	52.0000	0	basic
35	K11	0	23.0000	0	0.6923	at bound
36	K12	0	20.0000	0	2.0769	at bound
37	T1	0	14.0000	0	8.2692	at bound
38	T2	8.0000	11.0000	88.0000	0	basic
39	T3	0	12.0000	0	0	basic
40	T4	0	25.0000	0	10.2115	at bound
41	T5	0	34.0000	0	0.8654	at bound
42	T6	0	33.0000	0	7.6154	at bound
43	T7	0	20.0000	0	12.8269	at bound
44	T8	9.9904	16.0000	159.8462	0	basic
45	T9	0	15.0000	0	5.0192	at bound
46	T10	0	21.0000	0	12.1154	at bound
47	T11	0.0096	23.0000	0.2212	0	basic
48	T12	0	22.0000	0	3.2885	at bound
	Objective	Function	(Min.) =	724.0961		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	24.0000	=	24.0000	0	-9.8654
2	C2	8.0000	=	8.0000	0	-7.7885
3	C3	18.0000	=	18.0000	0	-1.9038
4	C4	10.0000	=	10.0000	0	0
5	C5	11.0000	=	11.0000	0	-11.0769
6	C6	19.0000	=	19.0000	0	0
7	C7	21.0000	=	21.0000	0	-10.2115
8	C8	9.0000	=	9.0000	0	-7.4423
9	C9	17.0000	=	17.0000	0	15.9231
10	C10	31.0000	=	31.0000	0	23.8846
11	C11	12.0000	=	12.0000	0	22.6731
12	C12	1,245.0000	=	1,245.0000	0	0.0962

Şekil 5.9 : Problemin yeni halinin WINQSB de çözülmesi ve çözüm kümesi

Bulunan sonuç değeri 137.2844 ile bölünürse elde edilen sonuç değeri yaklaşık 5.2744 olacaktır.

Problemin çözülmesiyle elde edilen çözümler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$z_1' = 5.2744$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 13 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 2.9904 \quad x_7 = 0 \quad x_8 = 8.0096 \quad x_9 = 0 \quad x_{10} = 0 \quad x_{11} = 0 \\ x_{12} = 0$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 0 \quad y_5 = 0 \quad y_6 = 3.0096 \quad y_7 = 0 \quad y_8 = 0 \quad y_9 = 0 \quad y_{10} = 0 \quad y_{11} = 4.9904 \\ y_{12} = 0$$

$$k_1 = 0 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 3 \quad k_4 = 0 \quad k_5 = 0 \quad k_6 = 0 \quad k_7 = 0 \quad k_8 = 0 \quad k_9 = 3 \quad k_{10} = 4 \quad k_{11} = 0 \quad k_{12} = 0$$

$$t_1 = 0 \quad t_2 = 8 \quad t_3 = 0 \quad t_4 = 0 \quad t_5 = 0 \quad t_6 = 0 \quad t_7 = 0 \quad t_8 = 9.9904 \quad t_9 = 0 \quad t_{10} = 0 \quad t_{11} = 0.0096 \quad t_{12} = 0$$

Buna göre üyelik fonksiyonu değerini hesaplırsak;

$$\mu(z_1') = -\frac{1}{5.3028} \cdot (z_1' - 10.4236) = -\frac{1}{5.3028} \cdot (5.2744 - 10.4236) = \frac{5.1492}{5.3028} \cong 0.9710$$

bulunur.

SONUÇ

Gerçek hayatta taşıma birim maliyetleri sabit olmayıp bir değişkenlik gösterdiği bilinen bir gerçektir.

Bu tezde taşıma birim fiyatlarının bir aralık halinde verilmesi durumunda çeşitli kaynaklardan faydalanılarak problem iki amaçlı taşıma problemi haline getirilmiştir. Daha sonra bu iki amaç için iki adet üyelik fonksiyonu oluşturulup, oluşan üyelik fonksiyonları kesiştirilerek kısıt sayısında bir adet artma olmuş, dolayısıyla amaç fonksiyonları üyeliklerinin aynı anda maksimize olmaları sağlanmıştır.

Önerilen bu çözüm yaklaşımı iki ve üç boyutlu örnekler üzerinde detaylı bir şekilde uygulanmıştır.

KAYNAKLAR

Abd El-Wahed, W. F., (2001), "A multi-objective transportation problem under fuzziness", Fuzzy Sets and Systems ,117(1): 27-33

Aneja, Y. P., ve Nair, K. P. K., (1979), "Bicriteria Transportation Problem", Management Science, 25: 73-78

Charnes, A. ve W.W. Cooper, (1954), "The Stepping Stone Method of Explaining Linear Programming Calculations in Transportation Problems", Management Science, 1: 49-69

Dantzig, G.B., (1974), Linear Programming and Extensions, Sixth Printing, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

Gen, M., Ida, K., ve Li, Y., (1994), IEEE

Hitchcock, F., (1941), "The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities", Journal of Mathematics and Physics, 20: 224-230.

Ishibuchi, H., ve Tanaka, H., (1990), "Multiobjective programming in optimization of the interval objective function", European Journal of Operational Research, 48: 219-225

Koopmans, T. C., (1949), "Optimum Utilization of the Transportation System", Proceedings of the International Statistical Conference Held in Washington, DC, September 6-18

Li, L. ve Lai, K.K, (2000), "A Fuzzy Approach to the Multiobjective Transportation Problem", Computers & Operations Research, 27: 43-57

Liu, S.T., (2003), "The Total Cost Bounds of the Transportation Problem with Varying Demand and Supply", Omega, 31: 247-251

Sezginman, İ., (1993), Lineer Programlama Teori ve Problemleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 2721, İstanbul

Taha, H. A., (2000), Yöneylem Araştırması (6. Basımdan Çeviri), Literatür Yayıncılık, İstanbul

EKLER

Ek 1 WINQSB Programı Hakkında Bilgiler

Ek 1 WINQSB Programı Hakkında Bilgiler

Tez içerisindeki problemlerin çözümünde WINQSB programı kullanılmıştır. Program Windows işletim sisteminde çalışacak şekilde geliştirilmiştir.

Bu QSB (Quantitative Systems for Business) programı Georgia Teknoloji Enstitüsü'nden Yih-Long Chang ve Memphis Üniversitesinden Kiran Desai tarafından geliştirilmiştir.

Program içerisinde Yöneylem Araştırması ve Yönetim Bilimleri (OR/MS) bilim dallarında sıkça kullanılan problem çözme algoritmaları yer almaktadır.

Kullanıcı dostu arayüzü sayesinde içerisindeki problem çözme araçlarının ne işe yaradığı ve nasıl kullanıldığı kolayca öğrenilebilir ve birçok iş dünyası problemine uygulanabilir.

Programın öğrenilmesi için bir öğrenme eğrisi gerekli olmayıp, kullanımının kolay olması nedeniyle sadece birkaç dakika içinde birçok kullanışlı özelliği öğrenilebilir.

Verilerin girilmesi için hücre tabanlı bir sayfa oluşturulmuş olup kullanımı oldukça yalındır. Ayrıca problemlerin çözüm sonuçları da kullanıcıya hücre tabanlı olarak yansıtılır ve çözüm üzerinde grafik analizleri de yaptırılabilir.

Gelişmiş yardım dosyaları sayesinde kullanıcıya her adımda yol gösterici destekler sağlar.

Aşağıdaki listede program içerisinde kullanılabilecek araçlar yer almaktadır.

1. WinQSB ye Giriş
2. Lineer ve Tamsayılı Programlama
3. Amaç Programlama
4. Kuadratik Programlama
5. Network Modelleme
6. Lineer Olmayan Programlama
7. Dinamik Programlama
8. Proje Planlama : PERT/CPM
9. Kuyruk Analizi
10. Kuyruk Sistem Simulasyonu
11. Stok Teori ve Sistemleri
12. Tahmin Yürütme
13. Karar Analizi
14. Markov Yöntemi
15. Kalite Kontrol Tablosu
16. Onay Örnekleme Analizi
17. Görev Planlama
18. Kümülatif Planlama
19. Hizmet Bölgesi ve Planlanması
20. Malzeme Gereksinim Planlanması

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	05.02.1980	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1994-1998	Haydarpaşa Teknik Lisesi
Lisans	1999-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fakültesi Matematik Mühendisliği
Yüksek Lisans	2003-	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği

Çalıştığı Kurumlar

2002-2005	DNA İnternet Çözümleri A.Ş. - Yazılım Müh.
2005-devam ediyor	Sistek Yazılım Danışmanlık - Yazılım Müh.