

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Gözlenebi, İçin Ceb. bir Karak,

Yüksek Lisans Tezi

Faruk Yılmaz

2007

209
305

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GÖZLENEBİLİRLİK İÇİN CEBİRSEL BİR
KARAKTERİZASYON**

Matematikçi Faruk YILMAZ

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ayşe KARA

İSTANBUL, 2007

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC) : R209-305

Kayıt No : 3644

Geldiği Yer : Fen Bilimleri

Enstitüsü

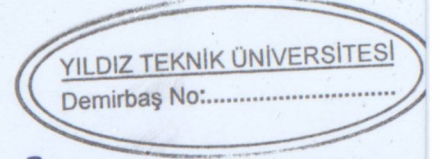
Tarih : 06/12/2007

Fiyat : 19,00

Fatura No :

Ayniyat No :

Ek :



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2550702039999550070 000

vi - 38

GÖZLENEBİLİRLİK İÇİN CEBİRSEL BİR KARAKTERİZASYON

Matematikçi Faruk YILMAZ

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ayşe KARA

(Doç. Dr. Ayşe KARA)

(Doç. Dr. R. H. KARAGÖZ)

(Doç. Dr. R. H. KARAGÖZ)

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	3
2.1 Manifold	3
2.2 Lie Grubu.....	9
2.3 Lie Cebiri	14
2.4 Üstel Tasvir.....	16
2.5 Adjoint Gösterilim.....	19
2.6 Lie Türevi	20
3. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ	22
3.1 Gözlenebilirlik	24
3.2 R^n Üzerindeki Lineer Kontrol Sistemlerinin Gözlenebilirlik Karakterizasyonu..	25
4. LIE GRUBU ÜZERİNDEKİ LINEER KONTROL SİSTEMLERİNİN GÖZLENEBİLİRLİĞİ	27
5. SONUÇLAR.....	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	38

SİMGE LİSTESİ

A^{-1}	A matrisinin tersi
A^t	A matrisinin transpozesi
$\bar{A}$	A matrisinin kompleks eşleniği
Ad	Adjoint tasvir
$Aut(g)$	g ' den g ' ye otomorfizmalar kümesi
C^∞	Her mertebeden türevi olan fonksiyonlar ailesi
$\det A$	A matrisinin determinanı
$\dim(M)$	M uzayının boyutu
$dom(X)$	X fonksiyonunun tanım kümesi
$f \circ g$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
$G \times G$	G ile G ' nin kartezyen çarpımı
Id	Birim tasvir
$Im(f)$	f ' nin görüntü kümesi
$Ker(A)$	A ' nın çekirdeği
R^n	Öklid uzayı
R	Reel sayılar
$\subset$	Alt küme
$\cup$	Birleşim
$\in$	Eleman
$\cap$	Kesişim
$\leq$	Küçük eşittir
Σ	Toplam sembolü
$\dot{\gamma}$	γ fonksiyonunun türevi
$[.,]$	Lie parentezi
$\cong$	İzomorf
$\sim$	Denklik sınıfı
Δ_a	a alt cebirinin yayılması
$\Rightarrow$	İse

ÖNSÖZ

Bu tezi hazırlamamda benden yardımlarını esirgemeyen ve bana yol gösteren çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ayşe KARA' ya sonsuz teşekkürler. Ayrıca yüksek lisans eğitimim sırasında beni destekleyen TÜBİTAK' a teşekkürler.

ÖZET

“Gözlenebilirlik için Cebirsel bir Karakterizasyon” adlı bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, manifold yapısı, manifold yapısına sahip olan Lie grubu ve bir vektör uzayı olan Lie cebiri verilmektedir. Daha sonra, Lie grupları ve Lie cebirlerinin üstel tasvir ve adjoint gösterilim ile olan ilişkileri ve Lie türevi incelenmektedir.

İkinci bölümde, genel kontrol sistemi ve gözlenebilirlik tanımları ile birlikte R^n üzerindeki lineer kontrol sistemleri için gözlenebilirlik karakterizasyonu olan rank koşulu verilmektedir.

Son bölümde ise, tezin asıl inceleme konusu olan bağlantılı bir G Lie grubu üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği incelenmektedir. Sapan vektör alanı sonsuz küçük otomorfizma olan ve çıkış fonksiyonu bir çeşit izdüşüm tasviri olan bu tip sistemler için yerel ve genel gözlenebilirlik karakterizasyonları verilmektedir. Sonuçlar örnekler üzerinde gösterilmektedir.

Anahtar kelimeler : gözlenebilirlik, yerel gözlenebilirlik, ayırt edilemezlik bağıntısı, sonsuz küçük otomorfizma, Lie cebiri, $\text{ad}(X)$ -invariantlığı.

ABSTRACT

This thesis with the title “An Algebraic Characterization for Observability” consists of three chapters.

In the first chapter, manifold structure, Lie group which has a manifold structure and Lie algebra which has a vector space structure are given. Then, relations between Lie groups and Lie algebras via exponential mapping and adjoint representation and the Lie derivative are studied.

In the second chapter, definitions of a general control system and observability and the rank condition which is the observability characterization for linear control systems on R^n are given.

In the last chapter, observability of linear control systems on a connected Lie group G which is the main research topic is studied. Local and global observability characterizations for this kind of systems with a drift vector field which is an infinitesimal automorphism and an output function which is a kind of projection are given. Results are illustrated by examples.

Key words : observability, local observability, indistinguishability relation, infinitesimal automorphism, Lie algebra, $\text{ad}(X)$ -invariance.

1. GİRİŞ

Kontrol Teorideki klasik temel iki problemten biri olan gözlenebilirlik problemi, Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemleri için diferansiyel geometrik bakış açısıyla incelenmiştir.

Üç bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde, Lie grupları ve Lie cebirinin oluşmasındaki temel yapı olan manifold kavramı ve ona bağlı olarak tanjant vektörü, tanjant uzayı ve vektör alanı tanımlarına yer verilmiştir. Ayrıca Lie grubu ve Lie cebirinin üstel tasvir ve adjoint gösterilim ile olan bağıntıları örneklerle incelenmiştir.

İkinci bölümde ise, genel kontrol sistemleri, yörünge, pozitif yörünge ve gözlenebilirlik problemi tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, bağlantılı bir Lie grubu üzerindeki lineer kontrol sisteminin gözlenebilirliği incelenmiştir. Bu tipteki kontrol sistemleri için gözlenebilirlik problemi göz önüne alındığında, gözlenebilirlik ile ilgili ilk karakterizasyon $\Sigma = (R^n, D, h, R^s)$ lineer kontrol sistemi için aşağıdaki şekilde verilmiştir;

$$\Sigma \text{ gözlenebilir} \Leftrightarrow \Sigma \text{ yerel gözlenebilir} \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

R^n üzerindeki lineer kontrol sisteminde yerel ve genel gözlenebilirlik aynı anlama gelmektedir. Ancak, Lie grubu üzerindeki sistemlerde yerel gözlenebilirlik genel gözlenebilirlik için gerekli olmasına karşın yeterli değildir. Lie grubu üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği için çıkış fonksiyonunun Lie grubu homomorfizması olması durumunda gözlenebilirlik karakterizasyonu, (Ayala, V., et. al, 1997), ve ayrıca, sapan (drift) vektör alanının cebirin normalizörünün elemanı olması durumu içinde, çıkış fonksiyonunun bir çeşit izdüşüm fonksiyonu olarak alındığı sistem için gözlenebilirlik karakterizasyonu, (Ayala, V., et. al, 2000), mevcuttur.

Bu bölümde, bağlantılı bir Lie grubu üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin sapan vektörü sonsuz küçük otomorfizma ve çıkış fonksiyonu da bir çeşit izdüşüm fonksiyonu olmak üzere yerel ve genel gözlenebilirliği incelenmiştir. Öncelikle, ayırt edilemeyen noktaların kümesi incelenerek, kapalı normal $\text{ad}(X)$ -invariant bir Lie grubu yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Bu Lie grubunun Lie cebiri yapısı ve özellikleri incelenmiş ve bu cebir yapısıyla yerel gözlenebilirlik elde edilmiştir. Sabit noktaların kümesi de göz önüne alınarak genel gözlenebilirlik sağlanmıştır. Elde edilen sonuçlar, iki örnek üzerinde gösterilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının temel kavramları olan manifold, Lie grubu ve Lie cebiri gibi bazı temel kavramlar yer almaktadır.

2.1 Manifold

Tanım

n boyutlu M yerel Öklid uzayı her bir noktasının komşuluğu R^n Öklid uzayının açık alt kümesine homeomorfik olan Hausdorff topolojik uzayıdır.

Eğer φ , bağlantılı açık $U \subset M$ alt kümesinden R^n nin açık bir alt kümesi üzerine bir homeomorfizma ise φ ye koordinat tasviri, $x_i = r_i \circ \varphi$ fonksiyonlarına koordinat fonksiyonları ve (U, φ) çiftine koordinat sistemi denir. Burada, $r_i : R^n \rightarrow R$ fonksiyonu, $(a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n)$ olmak üzere $r_i(a) = a_i$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım

M yerel Öklid uzayı üzerindeki C^∞ sınıfından bir F diferansiyellenebilir yapısı aşağıdaki üç şartı sağlayan $(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I$, koordinat sistemlerinin bir topluluğudur ;

$$i) \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$$

$$ii) \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \in C^\infty, \forall \alpha, \beta \in I$$

$$iii) F \text{ topluluğu maksimal, yani } (U, \varphi) \text{ koordinat sistemi } \forall \alpha \in I \text{ için } \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ ve } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \in C^\infty \text{ 'yi sağlıyorsa, } (U, \varphi) \in F \text{ dir.}$$

C^∞ sınıfından n boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold, C^∞ sınıfından bir F diferansiyellenebilir yapısı ile birlikte M yerel Öklid uzayını içeren (M, F) çiftidir.

Örnek

R^n Öklid uzayı diferansiyellenebilir manifold yapısına sahiptir. R^n üzerindeki standart diferansiyellenebilir F yapısı (R^n, i) koordinat sistemini içeren maksimum topluluktur.

Burada, $i : R^n \rightarrow R^n$ ye birim tasvirdir.

Örnek

(M, F_M) bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $U \subset M$ açık kümesi

$$F_U = \{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in F_M\}$$

diferansiyellenebilir yapısı ile birlikte, yani (U, F_U) yapısı, bir diferansiyellenebilir manifolddur.

Örnek

$S^1 = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ kümesini göz önüne alalım. S^1 kümesi R^2 de merkezi orjinde yarıçapı 1 birim olan çemberdir. S^1 , 1- boyutlu yerel Öklid uzayıdır.

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}$$

kümelerini göz önüne alalım. Bu kümeler S^1 in açık alt kümeleridir.

$$S^1 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \text{ tür.}$$

$I = (-1, 1) \subset R$ açık aralığını göz önüne alalım.

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow I$$

$(x, y) \mapsto x$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\varphi_1(x, y) = x$ fonksiyonu sürekli, bire-bir (1-1) ve örten bir fonksiyondur.

$$\varphi_1^{-1} : I \rightarrow U_1$$

$$x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$$

$\varphi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ fonksiyonu da sürekli, bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla, φ_1

fonksiyonu bir homeomorfizmadır. Benzer şekilde,

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow I$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow I$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$\varphi_3 : U_3 \rightarrow I \quad \text{ve}$$

$$(x, y) \mapsto y$$

$$\varphi_4 : U_4 \rightarrow I$$

$$(x, y) \mapsto y$$

izdüşüm fonksiyonları da birer homeomorfizmadır.

$F = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3), (U_4, \varphi_4)\}$ topluluğu için

$$1) \ S^1 = \bigcup_{i=1}^4 U_i \text{ dir.}$$

$$2) \ \forall i, j = 1, 2 \text{ için } \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^\infty \text{ olması gerekir.}$$

$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ 'in C^∞ olup olmadığını inceleyelim.

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow I$$

$$(x, y) \mapsto x$$

ve

$$\varphi_3 : U_3 \rightarrow I$$

$$(x, y) \mapsto y$$

için,

$$\varphi_3^{-1} : I \rightarrow U_3$$

$$y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y)$$

olup

$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ bileşkesi

$$I \xrightarrow{\varphi_3^{-1}} U_3 \cap U_1 \xrightarrow{\varphi_1} I$$

$$y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y) \mapsto \sqrt{1-y^2}, (y > 0)$$

şeklinde olur. Dolayısıyla,

$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : y \mapsto \sqrt{1-y^2} \in C^\infty, \text{ yani sürekli türetilenlidir.}$$

Benzer şekilde, $\forall i, j = 1, 2, 3, 4$ için $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^\infty$ dur.

3) F topluluğu maksimumdur. Gerçekten, (2) koşulunu sağlayacak (U_5, φ_5) koordinat sistemi yoktur.

Sonuç olarak, (S^1, F) yapısı 1-boyutlu diferansiyellenebilir bir manifolddur.

Örnek

$$SU(2, C) = \{A \in GL(2, C) : \bar{A}^t = A^{-1}, \det A = 1\}$$

bir diferansiyellenebilen manifolddur. 2×2 'lik tersi transpozisinin kompleks eşleniğine eşit ve determinanı 1 olan kompleks elemanlı matrislerin kümesi olan bu kümeye özel üniter grup denir. $SU(2, C)$ 'nin manifold yapısını inceleyelim.

$z, w \in C$ olmak üzere $|z|^2 + |w|^2 = 1$ olsun. Bu durumda

$$A \in SU(2, C) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Ayrıca, herhangi bir $A \in SU(2, C)$ için, $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$ olacak şekilde $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ kompleks sayıları bulunabilir. $SU(2, C)$ 'nin açık alt kümelerini ve koordinat tasvirlerini inceleyelim.

$$U_1 = \{A \in SU(2, C) : x > 0\}$$

$$U_2 = \{A \in SU(2, C) : x < 0\}$$

$$U_3 = \{A \in SU(2, C) : y > 0\}$$

$$U_4 = \{A \in SU(2, C) : y < 0\}$$

$$U_5 = \{A \in SU(2, C) : u > 0\}$$

$$U_6 = \{A \in SU(2, C) : u < 0\}$$

$$U_7 = \{A \in SU(2, C) : v > 0\}$$

$$U_8 = \{A \in SU(2, C) : v < 0\}$$

kümeleri $SU(2, C)$ 'nin açık alt kümeleri olup $SU(2, C) = \sum_{i=1}^8 U_i$ dir.

Açık kümeleri taşıyan koordinat tasvirleri ise aşağıdaki şekilde verilebilirler ;

$$\varphi_1(A) = (y, u, v) \quad , \quad \varphi_2(A) = (y, u, v)$$

$$\varphi_3(A) = (x, u, v) \quad , \quad \varphi_4(A) = (x, u, v)$$

$$\varphi_5(A) = (x, y, v) \quad , \quad \varphi_6(A) = (x, y, v)$$

$$\varphi_7(A) = (x, y, u) \quad , \quad \varphi_8(A) = (x, y, u)$$

Sonuç olarak, $SU(2, C)$, $F = \{(U_i, \varphi_i) : i = 1, \dots, 8\}$ diferansiyellenebilir yapısı ile birlikte 3-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur.

Diferansiyellenebilen manifold yerine bundan sonra aynı anlamda kısaca manifold kelimesini kullanacağız.

Tanım

$X : C^\infty(M) \rightarrow R$ tasviri aşağıdaki şartları sağlarsa $p \in M$ noktasında bir tanjant vektörüdür;

$$i) X(f + g) = X(f) + X(g)$$

$$ii) X(fg)(p) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$$

$p \in M$ noktasındaki teğet vektörlerinin kümesi $T_p M$ ile gösterilir ve $T_p M$ ye $p \in M$ noktasındaki teğet uzayı denir.

Ayrıca $\dim(T_p M) = \dim(M)$ dir.

Tanım

TM ile gösterilen teğet demeti $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ şeklinde tanımlıdır.

Teğet demeti bir manifold olup $\dim(TM) = 2 \cdot \dim(M)$ dir.

Tanım

M bir manifold olmak üzere $\text{domain}(X) \subset M$ açık alt kümesinden TM teğet demetine tanımlı olan $X : \text{domain}(X) \subset M \rightarrow TM$ sürekli fonksiyonuna vektör alanı denir.

$\forall p \in \text{domain}(X)$ için $X(p) \in T_p M$ dir.

Not

$X(p) = X_p$ şeklinde de gösterilebilir. Eğer $f, \text{domain}(X)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $X(f), \text{domain}(X)$ üzerinde bir fonksiyon olup $p \in \text{domain}(X)$ deki değeri $X(f)(p) = X_p(f)$ dir.

Tanım

M bir manifold ve $X, \text{dom}(X) \subset M$ üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. Her $p \in M$ noktası için, diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden dolayı, mümkün olan her t için

$$\dot{X}_{\gamma(X,p,t)} = \gamma(X,p,t)$$

$$\gamma(X,p,0) = p$$

olacak şekilde X 'in $\gamma(X,p,t)$ integral eğrisi vardır.

Tanım

X ve Y , M üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanları olsun. $[X, Y]$ de bir diferansiyellenebilir vektör alanı olup buna X ve Y nin Lie parantezi denir ve

$$[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $f \in C^\infty$, $m \in M$ dir.

Lie Parentezinin Özellikleri

- 1) $[X, X] = 0$
- 2) $[X, Y] = -[Y, X]$ parentez anti-simetriktir.
- 3) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (Jakobi özelliği)

Tanım

- 1) M, N birer manifold olmak üzere, eğer $\varphi(p)$ de diferansiyellenebilen

$$U \subset M \xrightarrow{f} N$$

$$\varphi \downarrow \quad \quad \downarrow \psi$$

$$\varphi(U) \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} \psi(V)$$

ve yukardaki şekilde olan, p için (U, φ) ve $f(p)$ için (V, ψ) koordinat sistemleri varsa $f: M \rightarrow N$ fonksiyonunun $p \in M$ de diferansiyellenebilir olduğu söylenir.

- 2) M, N iki manifold ve $f: M \rightarrow N$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. f nin türevi

$$df: TM \rightarrow TN \text{ tasviri}$$

$$df(X)(g) = X(g \circ f), \quad \forall X \in TM \text{ ve her bir } g \in C^\infty(N)$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2 Lie Grupları

Lie grubu hem manifold hem de grup yapısına sahip bir kümedir.

Tanım

G diferansiyellenebilir bir manifold ve grup yapısını sağlayan bir küme olmak üzere $G \times G \rightarrow G$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ tasviri diferansiyellenebilir ise G ye Lie grubu denir.

Önerme

Bir G Lie grubu için,

$$\varphi : G \times G \rightarrow G$$

$$\varphi(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1}$$

tasvirinin diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\varphi_1 : G \times G \rightarrow G$$

$$\varphi_1(\sigma, \tau) = \sigma\tau$$

ve

$$\varphi_2 : G \rightarrow G$$

$$\varphi_2(\tau) = \tau^{-1}$$

tasvirlerinin diferansiyellenebilir olması gerekir.

İspat:

φ diferansiyellenebilir bir tasvir olsun.

$$G \xrightarrow{e \times Id} \{e\} \times G \xrightarrow{\varphi} G$$

$$\tau \mapsto (e, \tau) \mapsto \tau^{-1}$$

şeklinde $\varphi_2 = \varphi \circ (e \times Id)$ alınırsa diferansiyellenebilir tasvirlerin bileşiminin diferansiyellenebilir olmasından

$$\varphi_2 : G \rightarrow G$$

$$\varphi_2(\tau) = \tau^{-1}$$

tasviri diferansiyellenebilirdir.

Benzer şekilde,

$$G \times G \xrightarrow{Id \times \varphi_2} G \times G \xrightarrow{\varphi} G$$

$$(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma, \tau^{-1}) \mapsto \sigma\tau$$

şeklinde $\varphi_1 = \varphi \circ (Id \times \varphi_2)$ alınırsa diferansiyellenebilir tasvirlerin bileşiminin diferansiyellenebilir olmasından

$$\varphi_1 : G \times G \rightarrow G$$

$$\varphi_1(\sigma, \tau) = \sigma\tau$$

tasviri diferansiyellenebilirdir.

Bu kez φ_1 ve φ_2 tasvirleri diferansiyellenebilir olsun.

$$G \times G \xrightarrow{Id \times \varphi_2} G \times G \xrightarrow{\varphi_1} G$$

$$(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma, \tau^{-1}) \mapsto \sigma\tau^{-1}$$

şeklinde $\varphi = \varphi_1 \circ (Id \times \varphi_2)$ alınırsa diferansiyellenebilir tasvirlerin bileşkesinin diferansiyellenebilir olmasından

$$\varphi : G \times G \rightarrow G$$

$$\varphi(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1}$$

tasviri diferansiyellenebilir tasvirdir.

Örnek

R^n Öklid uzayının diferansiyellenebilir bir manifold yapısına sahip olduğunu daha önce incelemiştik. R^n Öklid uzayı toplama işlemi ile birlikte bir Lie grubudur.

Örnek

$S^1 = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberinin bir diferansiyellenebilir manifold yapısına sahip olduğunu incelemiştik. S^1 kompleks sayılardaki çarpma işlemi altında bir Lie

grubudur.

Örnek

$SU(2, C) = \{A \in GL(2, C) : \bar{A}^t = A^{-1}, \det A = 1\}$ kümesinin diferansiyellenebilir bir manifold olduğunu biliyoruz.

$SU(2, C)$ matris çarpımı altında bir gruptur.

$$\varphi : SU(2, C) \rightarrow R^4$$

$$\varphi(A) = (x, y, u, v)$$

tasvirini alalım. Burada, $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in SU(2, C) \text{ dir.}$$

$$z_1 = x_1 + iy_1, w_1 = u_1 + iv_1 \text{ ve } z_2 = x_2 + iy_2, w_2 = u_2 + iv_2 \text{ için}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \in SU(2, C) \text{ matrislerini alalım.}$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & -w_2 \\ \bar{w}_2 & z_2 \end{pmatrix} \text{ olup } A_1 A_2^{-1} \text{ çarpımına bakalım.}$$

$$A_1 A_2^{-1} = A_3 = \begin{pmatrix} z_3 & w_3 \\ -\bar{w}_3 & \bar{z}_3 \end{pmatrix}, z_3 = x_3 + iy_3, w_3 = u_3 + iv_3 \text{ olsun.}$$

Bu iki matrisin çarpımı sonucunda

$$x_3 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2$$

$$y_3 = -x_1 y_2 + y_1 x_2 - u_1 v_2 + v_1 u_2$$

$$u_3 = -x_1 u_2 + y_1 v_2 + u_1 x_2 - v_1 y_2$$

$$v_3 = -x_1 v_2 - y_1 u_2 + u_1 y_2 + v_1 x_2$$

elde edilir. Buradan, $\varphi(A_1 A_2^{-1}) = \varphi(A_3) = (x_3, y_3, u_3, v_3)$ olup matris çarpımı diferansiyellenebilirdir. Sonuç olarak, $SU(2, C)$ bir Lie grubudur.

Tanım

$\sigma \in G$ olmak üzere,

$$l_\sigma : G \rightarrow G$$

$l_\sigma(\tau) = \sigma\tau$ tasvirine σ nın sol ötelemesi denir. l_σ 'nın türevi

$dl_\sigma : TG \rightarrow TG$ şeklindedir ve $dl_\sigma(T_\tau G) \subset T_{\sigma\tau} G$ dir.

Tanım

X bir vektör alanı olmak üzere $\forall \sigma \in G$ için $X \circ l_\sigma = dl_\sigma \circ X$ oluyorsa X 'e G üzerinde sol invaryanttır denir.

Teorem

G bir Lie grubu ve g , G 'nin sol invaryant vektör alanlarının bir kümesi olsun. O takdirde, g reel vektör uzayıdır ve

$$\alpha : g \rightarrow T_e G$$

$\alpha(X) = X_e$ şeklinde tanımlı tasvir bir izomorfizmadır.

Sonuç olarak, $\dim g = \dim T_e G = \dim G$ dir.

İspat:

g 'nin reel vektör uzayı olduğu açıktır.

$X, Y \in g$ ve $a, b \in R$ için

$$\alpha(aX + bY) = (aX + bY)(e) = aX(e) + bY(e) = a\alpha(X) + b\alpha(Y)$$

olup α lineerdir.

$\forall \sigma \in G$ için $\alpha(X) = \alpha(Y)$ olsun. O takdirde,

$$X(\sigma) = (X \circ l_\sigma)(e) = (dl_\sigma \circ X)(e) = dl_\sigma(X(e)) = dl_\sigma(Y(e)) = (dl_\sigma \circ Y)(e) = (Y \circ l_\sigma)(e) = Y(\sigma)$$

olup $X = Y$ dir. Buradan, α , 1-1 dir.

Bununla beraber, eğer $X \in T_e G$ için $X(\sigma) = dl_\sigma(X), \forall \sigma \in G$ sağlanıyorsa α örtendir. O zaman $\alpha(X) = X$ dir ve X sol invaryanttır. $\forall \sigma, \tau \in G$ için

$$X(\sigma\tau) = dl_{\sigma\tau}(X) = dl_\sigma dl_\tau(X) = dl_\sigma(X(\tau))$$

dir. Böylece $g \cong T_e G$ olur. Sonuç olarak $\dim g = \dim T_e G = \dim G$ dir.

2.3 Lie Cebiri

Tanım

g , K cismi üzerinde ($K = R, C$) bir vektör uzayı olsun.

$$g \times g \rightarrow g$$

$(X, Y) \mapsto [X, Y]$ tasviri aşağıdaki şartları sağlıyorsa, g 'ye Lie cebiri denir;

i) K cismi üzerinde bilineer, yani $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ ve $\forall X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in g$ için

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y] \text{ ve}$$

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2] \text{ dir.}$$

ii) Ters simetriktir, yani, $[X, Y] = -[Y, X]$ dir.

iii) Jakobi özelliğini, yani,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

özdeşliğini sağlar.

Lie cebirinin içeriğinin önemi, sonlu boyutlu Lie cebiri Lie grubu ile ilişik olması ve Lie grubunun özelliklerinin Lie cebirinde yansıyor olmasıdır.

G Lie grubunun g Lie cebiri, G üzerindeki tüm sol-invaryant vektör alanlarının kümesi olarak düşünülebilir. Bunun dışında, G 'nin g Lie cebirini birimdeki tanjant uzayı $T_e G$ olarak da alabiliriz.

Örnek

Herhangi bir vektör uzayı üzerindeki bütün Lie parentezleri sıfır olarak alınırsa vektör uzayı Lie cebiri olur ve bu şekildeki Lie cebirine değişmeli Lie cebiri denir.

Örnek

$n \times n$ tipindeki reel değerli bütün matrislerin kümesi $gl(n, R)$ olsun. $gl(n, R)$ nin bir vektör uzayı olduğu açıktır. $gl(n, R)$ üzerindeki Lie parantezi $A, B \in gl(n, R)$ için

$[A, B] = AB - BA$ şeklinde alınırsa $gl(n, R)$ lie cebiri olur.

Örnek

3-boyutlu Heisenberg grubu,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in R \right\} \quad \text{şeklindedir.}$$

$$\forall t \in R \text{ için } \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ olup } \gamma(t), G \text{ üzerinde } \gamma(0) = I = e \text{ olacak şekilde bir}$$

eğridir.

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X \in T_e G \text{ olur.}$$

$$\forall t \in R \text{ için } \alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ olup } \alpha(t), G \text{ üzerinde } \alpha(0) = I = e \text{ olacak şekilde}$$

bir eğridir.

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \in T_e G \text{ olur.}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ için $\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ olup $\beta(t)$, G üzerinde $\beta(0) = I = e$ olacak şekilde

bir eğridir.

$$\dot{\beta}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \in T_e G \text{ olur.}$$

$T_e G = \{X, Y, Z\}$ olur. Burada, bunların Lie parentezlerine bakacak olursak

$$[X, Y] = Z, [X, Z] = 0 \text{ ve } [Y, Z] = 0 \text{ dır.}$$

Buradan, G Heisenberg grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebiri $\mathfrak{g} \cong T_e G$ olduğundan,

$$\mathfrak{g} = \text{span} \{X, Y, Z\} \text{ olur.}$$

2.4 Üstel Tasvir

Bu kısımda, G nin $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin G üzerindeki sol-invaryant vektör alanlarının kümesi ve birimdeki teğet uzay ($T_e G$) şeklinde olmasının yanı sıra, bir parametrelili alt grupların kümesi vasıtasıyla da yapısını inceleyeceğiz.

Tanım

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ şeklindeki homomorfizmaya G 'nin 1-parametrelili alt grubu denir.

G bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$ de onun Lie cebiri olsun. $X \in \mathfrak{g}$ olmak üzere $\lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda X$ tasviri $\mathbb{R}$ nin Lie cebirinin $\mathfrak{g}$ içine bir homomorfizmasıdır.

Reel eksen basit bağlantılı olduğundan (yani temel grubu aşıkarak olan bağlantılı topolojik uzay) $d \exp_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X$ olacak şekilde $\exp_X: \mathbb{R} \rightarrow G$ bir tek 1-parametrelili alt grup vardır. Diğer bir deyişle, $t \mapsto \exp_X(t)$ tasviri, sıfır noktasındaki tanjant (teğet) vektörü $X(e)$ olan G nin bir tek 1-parametrelili alt grubudur.

$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ üstel tasviri $\exp(X) = \exp_X(1)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem

G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ de onun Lie cebiri olsun. $X \in \mathfrak{g}$ için

- i) $\exp(tX) = \exp_X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- ii) $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp(t_1X))(\exp(t_2X))$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
- iii) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$ dir.

İspat:

- i) φ ve ψ , $\mathbb{R}$ 'den G içine

$\psi(t) = \exp_{sX}(t)$ ve $\varphi(t) = \exp_X(st)$ şeklinde tanımlanan tasvirler olsunlar. Burada $s \in \mathbb{R}$ dir. sX 'in tek integral eğrisi ψ dir ve $\psi(0) = e$ dir.

$d\varphi\left(\frac{d}{dr}\bigg|_1\right) = d\exp_X\left(s\frac{d}{dr}\bigg|_{st}\right) = sX|_{\exp_X(st)}$ olup böylece φ , sX 'in integral eğrisidir ve $\varphi(0) = e$ dir. Integral eğrileri tek olduğundan $\varphi = \psi$ dir. Böylece $\exp_{sX}(t) = \exp_X(st)$, ($s, t \in \mathbb{R}; X \in \mathfrak{g}$) olur. Bu eşitlikte $t = 1$ yazalım ve daha sonra s yerine t yazalım. Buradan $\exp_{tX}(1) = \exp_X(t)$ elde edilir.

Tanımdan $\exp_{tX}(1) = \exp(tX)$ olup $\exp(tX) = \exp_X(t)$ elde edilir.

- ii) $\exp_X$ 'in $\mathbb{R}$ 'den G içine bir homomorfizma olmasından ve (i) den

$\exp(t_1 + t_2)X = \exp_X(t_1 + t_2) = \exp_X t_1 \cdot \exp_X t_2 = \exp(t_1X) \cdot \exp(t_2X)$ elde edilir.

- iii) $\exp(-tX) = \exp_X(-t) = (\exp_X(t))^{-1} = (\exp(tX))^{-1}$ olur.

Teorem

$\varphi: H \rightarrow G$ tasviri bir homomorfizma olsun. O takdirde aşağıdaki diyagram değişmelidir;

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\varphi} & G \\
 \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\
 \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g}
 \end{array} \tag{2.1}$$

İspat:

$X \in \mathfrak{h}$ olsun. O zaman $\varphi(\exp X) \in G$ olur. $t \mapsto \varphi(\exp(tX))$, sıfırdaki tanjantı $d\varphi(X(e))$ olan G 'de diferansiyellenebilen bir eğridir. φ homomorfizma olduğundan bu aynı zamanda G 'nin 1-parametrelili alt grubu olur. Fakat $t \mapsto \exp(t(d\varphi(X)))$ tasviri sıfırdaki tanjantı $(d\varphi(X))(e)$ olan G 'nin bir tek 1-parametrelili alt grubudur.

Buradan,

$$\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X))) \text{ olur.}$$

$$t = 1 \text{ alırsak } \varphi(\exp(X)) = \exp(d\varphi(X)) \Rightarrow \varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi \text{ elde edilir.}$$

Örnek

A , $n \times n$ lik bir matris ve $\varphi: R \rightarrow GL(n, R)$ tasviri

$$\varphi(t) = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \exp(tA)$$

şeklinde tanımlı olsun.

$\exp(tA) = \exp_A(t)$ ve $\exp_A$, R nin bir homomorfizması olup φ , $GL(n, R)$ nin 1-parametrelili alt grubudur. Böylece matris grubu için üstel tasvir

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

şeklinde olur ve Lie cebiri tüm matrislerin vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Örnek

Daha önce 3-boyutlu Heisenberg grubunun Lie cebirini incelemiştik. G Heisenberg grubunun Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olsun.

$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ üstel tasviri için, $\exp(X)$ 'e bakalım.

$$X \in \mathfrak{g} \text{ için } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şeklinde idi.}$$

$$\exp(X) = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

şeklinde olup $X^2 = 0 = X^3 = \dots$ dan

$$\exp(X) = I + X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ olur.}$$

Benzer şekilde, $Y, Z \in g$ için $\exp(Y), \exp(Z)$ üstel tasvirleride bulunabilir.

2.5 Adjoint Gösterilim

Tanım

M bir diferansiyellenebilir manifold ve G bir Lie grubu olsun.

$$\mu: G \times M \rightarrow M$$

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m)) \quad , \quad \mu(e, m) = m \quad (\forall \sigma, \tau \in G, \forall m \in M)$$

şeklindeki diferansiyellenebilir tasvire G nin M üzerindeki sol etkisi denir.

Eğer $\mu: G \times M \rightarrow M$ tasviri G nin M üzerindeki sol etkisi ise sabit bir $\sigma \in G$ noktası için $m \mapsto \mu(\sigma, m)$ tasviri M 'nin bir difeomorfizmidir ve bu μ_σ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde,

$$\mu: M \times G \rightarrow M$$

$$\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau) \quad , \quad \mu(m, e) = m \quad (\forall \sigma, \tau \in G, \forall m \in M)$$

şeklindeki diferansiyellenebilir tasvire G nin M üzerindeki sağ etkisi denir.

Tanım

Bir G Lie grubunun kendi üzerindeki sol etkisi ile oluşan iç otomorfizması

$$i: G \times G \rightarrow G$$

$$i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau) \text{ şeklindedir.}$$

Birim bu etkinin sabit bir noktasıdır. Yani $\forall \sigma \in G$ için $i_\sigma(e) = e$ dir. O zaman $\sigma \mapsto di_\sigma|_e : T_e G \cong \mathfrak{g}$ tasviri G nin $Aut(\mathfrak{g})$ içine bir gösterilimidir.

Bu gösterilim, Adjoint gösterilim olarak adlandırılır ve $Ad : G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$ şeklinde gösterilir. Adjoint gösterilimin diferansiyeli $d(Ad) = ad$ şeklinde gösterilir ve $Ad(\sigma) = Ad_\sigma$, $ad(X) = ad_X$ şeklinde gösterilir.

(2.1)'deki değişmeli diyagramdan aşağıdaki değişmeli diyagramlar elde edilir;

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathfrak{g}) \\
 \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g}) \\
 \\
 G & \xrightarrow{i_\sigma} & G \\
 \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_\sigma} & \mathfrak{g}
 \end{array}$$

2.6 Lie Türevi

Tanım

$\forall t \in \mathbb{R}$ için tanım kümesi $D_t = \{m \in M : t \in (a(m), b(m))\}$ olan $X_t(m) = \gamma_m(t)$ olan X_t olan dönüşümü tanımlayalım.

Burada $\gamma_m : (a(m), b(m)) \rightarrow M$, $0 \in (a(m), b(m))$ ve $\gamma_m(0) = m$ şeklinde olan X vektör alanının integral eğrisidir.

Her t için $D_t = M$ ise (yani $\forall m \in M$ için γ_m nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$) X diferansiyellenebilir vektör alanı M üzerinde tamdır.

Bu durumda X_t dönüşümleri reel sayılarla parametrelenen ve X in 1-parametrelili grubu olarak adlandırılan M nin dönüşümlerinin bir grubu şeklinde olur.

Eğer X tam değilse tanım kümeleri t 'ye bağlı olduğundan X_t dönüşümleri bir grup yapısı almazlar. Bu durumda X 'in yerel 1-parametrelili grubu olarak X_t dönüşümlerinin koleksiyonunu alabiliriz.

Bir M manifoldu üzerinde sabit diferansiyellenebilir bir X vektör alanı alalım. X_t , X ile ilişkilendirilmiş dönüşümlerin 1-parametrelili yerel grubunu gösterebiliriz. M üzerindeki diğer bir diferansiyellenebilir vektör alanı Y olsun. $m \in M$ noktasında Y 'nin X 'e göre türevini tanımlayacağız.

İlk olarak X 'in integral eğrisinde m noktasından yani $X_0(m)$ noktasından $X_t(m)$ noktasına gelelim ve Y 'yi burada yani $X_t(m)$ noktasında değerlendirelim. Daha sonra $Y_{X_t(m)}$ 'yi X_{-t} difeomorfizmasının dX_{-t} diferansiyeli ile m noktasındaki teğet uzaya yani $T_m M$ 'ye geri taşıyalım. $T_m M$ de $dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ ve Y_m vektörlerinin farkını alalım ve bu farkı t ye bölüp $t \rightarrow 0$ için limit alalım.

Diğer bir deyişle $T_m M$ değerli diferansiyellenebilir $t \mapsto dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ fonksiyonu göz önüne alınıp $t = 0$ daki türevi alınır.

Sonuç, $T_m M$ de bir vektör olup bu vektöre Y 'nin X 'e göre $m \in M$ noktasındaki Lie türevi denir ve $(L_X Y)_m$ şeklinde gösterilir.

Dolayısıyla,

$$(L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(m)}) - Y_m}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [dX_{-t}(Y_{X_t(m)})] \quad \text{olur.}$$

Önerme

X , M üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı olsun. O zaman M üzerindeki her bir diferansiyellenebilir Y vektör alanı için $L_X Y = [X, Y]$ dir.

Önerme

G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ de onun Lie cebiri olmak üzere, her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için $ad(X)(Y) = [X, Y]$ dir.

3. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ

M bir diferansiyellenebilir manifold ve $X(M)$ ile M 'nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı olan tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının bir kümesi gösterilsin. Her bir $X \in X(M)$, M üzerinde yerel difeomorfizmlerin 1-parametrel bir grubunu tanımlar. Yani mümkün olan tüm X vektör alanları her bir $t \in R$ için manifold üzerindeki vektör alanları tarafından üretilmiş adi diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden dolayı

$X_t : \text{dom}(X_t) \subset M \rightarrow M$ nin yerel bir difeomorfizm olduğu elde edilirki burada eğer $\gamma^X(., x)$, x noktasından geçen vektör alanının integral eğrisi ise bu takdirde

$X_t(x) = \gamma^X(t, x)$ ile tanımlanır.

X_t 'nin tersi,

$X_{-t} : X_t(\text{dom}(X_t)) \subset M \rightarrow \text{dom}(X_t) \subset M$ şeklindedir ve X_t için aşağıdakiler mevcuttur;

i) $X_t \circ X_s = X_{t+s}$

ii) $(X_t)^{-1} = X_{-t}$

iii) $X_0 = Id$

Tanım

$\Sigma = (M, D)$ sıralı ikilisine bir kontrol sistemi denir. Burada M bir diferansiyellenebilir manifold ve $D \subset X(M)$ dir.

Burada M 'ye Σ 'nin durum uzayı, D 'ye dinamik ve D 'nin elamanlarına Σ kontrol sisteminin stratejileri denir.

Σ kontrol sistemi $G_\Sigma = \{X_{t_1}^{-1} \circ X_{t_2}^{-2} \circ \dots \circ X_{t_r}^{-r} : X^j \in D, t_j \in R, r \in N\}$ pseudo grubunu tanımlar ve $x \in M$ nin Σ ile verilen yörüngesi G_Σ nin x üzerindeki etkisi (action) ile verilir.

$$G_\Sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in G_\Sigma\}$$

Tanım

Eğer $G_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde $x \in M$ varsa Σ kontrol sistemine geçişlidir denir.

$x \sim y \Leftrightarrow y \in G_{\Sigma}(x)$ olacak şekilde G_{Σ} ile M üzerinde bir bağıntı tanımlayalım. “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısıdır. Σ kontrol sistemi geçişli ise $G_{\Sigma}(x) = M$, $\forall x \in M$ dir.

Ayrıca Σ ile birleşmiş $S_{\Sigma} = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r : X^j \in D, t_j \geq 0, r \in N\}$ pseudo-semi grubu elde edilir ve $x \in M$ ’nin Σ ile verilen pozitif yörüngesi

$$S_{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in S_{\Sigma}\}$$

şeklindedir. Bu pozitif yörüngeye x ’den Σ ’nin ulaşılabilirlik kümesi denir.

$\forall x \in M$ için $S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x)$ dir.

S_{Σ} tarafından tanımlanan M üzerindeki “ $\sim$ ” bağıntısı simetrik değildir. Eğer $t > 0$ ise X_{-t} ’nin S_{Σ} ya ait olması gerekmez. Diğer bir deyişle $X \in D$ iken $-X \in D$ olması gerekmez.

Kontrol teorideki temel problem $S_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde M, D ve $x \in M$ altındaki koşulları bulmaktır. Problemin çözümü için bir x başlangıç noktasından başlayarak Σ ’nin D dinamiğinin negatif olmayan stratejileri ile M ’nin her noktasına ulaşmaktır. Yani ne zaman $S_{\Sigma}(x) = M$ dir.

$S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x) \subset M$ olduğunu biliyoruz. Σ ’nin geçişliliği bu problemi çözmek için gerekli bir şarttır fakat yeterli değildir.

Örneğin, $\Sigma = \left(R, \left\{ \frac{d}{dx} \right\} \right)$ alınırsa o zaman $S_{\Sigma}(0) = [0, \infty) \subsetneq G_{\Sigma}(0) = R$ olur. Bu basit örnek

kontrol edilebilirlik probleminin çok zor bir soru olduğunu gösterir.

Teorem (Orbit Teorem)

$\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. x ’in $G_{\Sigma}(x)$ yörüngesi diferansiyellenebilir manifold yapısına sahiptir.

3.1 Gözlenebilirlik

Tanım

Gözlenebilir Σ kontrol sistemi $\Sigma = (M, D, h, N)$ şeklindedir.

Burada M ve N diferansiyellenebilir manifold, $D \subset X(M)$ dinamik ve $h: M \rightarrow N$ ye diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

Ayrıca M ye durum uzayı, N ye gözlemlenebilir (çıkış) uzayı ve h ye Σ nın gözlenebilir (çıkış) fonksiyonu da denir.

Tanım

Σ bir kontrol sistemi olsun. $x, y \in M$ için $h \circ \varphi(x) = h \circ \varphi(y)$, $\forall \varphi \in S_\Sigma$ ise $x, y \in M$ noktalarına Σ için ayırt edilemezdir denir.

Ayırt edilemezlik bağıntısı genel olarak bir denklik bağıntısı değildir. D ye bağlıdır. Eğer D sadece analitik (diferansiyellenebilir) vektör alanlarını içeriyorsa veya D ileri tam ise yani her bir $X \in D$ için X_t , her bir $t \geq 0$ için iyi tanımlı ise ayırt edilemez bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

x 'in denklik sınıfları $\tilde{x}$ ile gösterilir. Yani, $\tilde{x} = \{y \in M : h \circ \varphi(x) = h \circ \varphi(y), \forall \varphi \in S_\Sigma\}$ dir.

Tanım

Σ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun.

i) $x \in M$ de Σ 'nin yerel gözlenebilir olması için $\tilde{x} \cap U = \{x\}$ olacak şekilde x 'in bir U komşuluğunun var olmasıdır.

Eğer $\forall x \in M$ için (i) şartı sağlanırsa Σ yerel gözlenebilirdir.

ii) $x \in M$ de Σ 'nin gözlenebilir olması için $\tilde{x} \cap M = \{x\}$ olması gerekir. Yani Σ 'nin $x \in M$ de gözlenebilir olması için $h \circ S_\Sigma$ ailesinin M nin herhangi bir noktasını x 'den ayırması gerekir.

Eğer $\forall x \in M$ için (ii) şartı sağlanıyorsa Σ gözlenebilirdir.

3.2 R^n Üzerindeki Lineer Kontrol Sistemlerinin Gözlenebilirlik Karakterizasyonu

R^n üzerindeki lineer kontrol sistemini göz önüne alalım.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$h(x) = Cx, \quad C \in M_{s \times n}(R)$$

$$\tilde{0} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker}(C.A^i) \quad \text{dir.}$$

Buradan, $\Sigma = (R^n, D, h, R^s)$ lineer kontrol sisteminin gözlenebilirliği için aşağıdaki rank koşulu elde edilir :

$$\Sigma \text{ gözlenebilir} \Leftrightarrow \Sigma \text{ yerel gözlenebilir} \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Örnek

$\Sigma = (R^2, D, h, R)$ sistemini göz önüne alalım. Burada, $D = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u : u \in R \right\}$

dir.

i) $h(x, y) = x$ fonksiyonu için,

$$h(x, y) = (1, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \text{ olup buradan } C = (1, 0) \text{ dir. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ idi.}$$

$$CA = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1) \text{ olur.}$$

$$\Sigma \text{ gözlenebilir} \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ olup } \Sigma \text{ gözlenebilirdir.}$$

ii) $h(x, y) = y$ fonksiyonu için

$$h(x, y) = (0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \text{ olup } C = (0, 1) \text{ dir.}$$

$$CA = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0) \text{ olur.}$$

$$\Sigma \text{ gözlenebilir} \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \text{ olup } \Sigma \text{ gözlenebilir değildir.}$$

4. LIE GRUBU ÜZERİNDEKİ LİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN GÖZLENEBİLİRLİĞİ

G bağlantılı bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ 'de onun Lie cebiri olsun. G üzerindeki tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının Lie cebirini $X(G)$ ile gösterelim.

G üzerindeki Σ lineer kontrol sistemi $\Sigma = (G, D, \pi_K, G/K)$ şeklindedir.

Burada, D dinamiği aşağıdaki diferansiyel denklemler ailesi tarafından üretilen vektör alanlarının kümesidir;

$$\dot{g}(t) = X(g(t)) + \sum_{j=1}^k u_j(t) Y^j(g(t))$$

$$y = \pi_K(g) \in G/K, \quad u \in U.$$

$$D = \left\{ X + \sum_{j=1}^m u_j Y^j : u \in R^m \right\} \text{ olup } D \subset X(G) \text{ dir.}$$

X vektör alanı G nin sonsuz küçük otomorfizmi, sağ invaryant vektör alanı olarak göz önüne alınan $Y^1, \dots, Y^m \in \mathfrak{g}$ ve kısıtlanmış parçalı sabit kontrollerinin sınıfı U için $u \in U$ dur.

K , G nin kapalı lie alt grubu ve $\pi_K : G \rightarrow G/K$ kanonik izdüşümdür.

$\Sigma = (G, D, \pi_K, G/K)$ lineer kontrol sistemi olsun. Σ kontrol sistemi, G üzerindeki genel difeomorfizmlerin

$$G_\Sigma = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k : Z^i \in D, t_i \in R\}$$

pseudo grubunu ve

$$S_\Sigma = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k : Z^i \in D, t_i \geq 0\}$$

pseudo-semi grubunu tanımlar.

Σ için ayırt edilemezlik $g_1, g_2 \in G$ için

$\pi_K \circ \varphi(g_1) = \pi_K \circ \varphi(g_2)$, $(\forall \varphi \in S_\Sigma)$ oluyorsa g_1 ve g_2 noktaları ayırt edilemezdir.

Ayırt edilemez denklik bağıntısını ' $\sim$ ' ile gösteriyoruz. $g \in G$ nin denklik sınıfını $\tilde{g}$ ve $I = \tilde{e}$ ile gösteriyoruz.

Eğer G nin ayırt edilemez iki noktası yoksa Σ kontrol sistemi gözlenebilirdir. $g \in G$ de Σ nın yerel gözlenebilir olması için g nin bir U komşuluğundaki her elemanın g 'den ayırt edilebilir olması gerekir.

$\varphi = Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k \in G_\Sigma$ olsun. Buradan her bir $i = 1, 2, \dots, k$ için $\beta_i : R \rightarrow G$ şeklinde diferansiyellenebilir bir eğri vardır ki her bir $g \in G$ için

$$Z_t^i(g) = X_t(\beta_i(t).g) \text{ şeklindedir.}$$

π_K kanonik izdüşüm bir homomorfizma olup

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \pi_K \circ \varphi(g_1) = \pi_K \circ \varphi(g_2) \text{ , } \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \pi_K \circ Z_t^i(g_1) = \pi_K \circ Z_t^i(g_2)$$

$$\Leftrightarrow \pi_K(X_t(\beta_i(t).g_1)) = \pi_K(X_t(\beta_i(t).g_2)) \text{ , } \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \pi_K(X_t(\beta_i(t)).X_t(g_1)) = \pi_K(X_t(\beta_i(t)).X_t(g_2))$$

$$\Leftrightarrow \pi_K \circ X_t(\beta_i(t))\pi_K \circ X_t(g_1) = \pi_K \circ X_t(\beta_i(t))\pi_K \circ X_t(g_2) \text{ , } \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \pi_K \circ X_t(\beta_i(t)^{-1})\pi_K \circ X_t(\beta_i(t))\pi_K \circ X_t(g_1) = \pi_K \circ X_t(\beta_i(t)^{-1})\pi_K \circ X_t(\beta_i(t))\pi_K \circ X_t(g_2)$$

$$\Leftrightarrow \pi_K(X_t(\beta_i(t)^{-1}.\beta_i(t))\pi_K \circ X_t(g_1) = \pi_K(X_t(\beta_i(t)^{-1}.\beta_i(t))\pi_K \circ X_t(g_2))$$

$$\Leftrightarrow \pi_K(e_G)\pi_K \circ X_t(g_1) = \pi_K(e_G)\pi_K \circ X_t(g_2)$$

$$\Leftrightarrow \pi_K \circ X_t(g_1) = \pi_K \circ X_t(g_2)$$

$$\Leftrightarrow \pi_K^{-1} \circ \pi_K(X_t(g_1)) = \pi_K^{-1} \circ \pi_K(X_t(g_2))$$

$$\Leftrightarrow X_t(g_1) = X_t(g_2)$$

$$\Leftrightarrow X_t(g_1)X_t(g_2^{-1}) = X_t(g_2)X_t(g_2^{-1})$$

$$\Leftrightarrow X_t(g_1g_2^{-1}) = X_t(g_2g_2^{-1}) = e_G$$

$$\Leftrightarrow \pi_K(X_t(g_1g_2^{-1})) = \pi_K(e_G)$$

$$\Leftrightarrow \pi_K(X_t(g_1 g_2^{-1})) = e_{G/K}$$

olup $X_t(g_1 g_2^{-1}) \in \text{Ker}(\pi_K)$ olur.

Buradan,

$$I = \tilde{e} = \{g \in G : X_t(g) \in \text{Ker}(\pi_K), \forall t \geq 0\} \text{ olmalıdır.}$$

Önerme

$I = \{g \in G : X_t(g) \in \text{Ker}(\pi_K), \forall t \geq 0\}$ kümesi $\text{Ker}(\pi_K)$ tarafından kapsanan G 'nin normal kapalı Lie alt grubudur.

İspat:

$g_1, g_2 \in I$ için $g_1 \sim e \sim g_2$ olup

$\pi_K(X_t(g_1)) = \pi_K(X_t(g_2)) \Rightarrow X_t(g_1 g_2^{-1}) \in \text{Ker}(\pi_K)$ olup $g_1 g_2^{-1} \in I$ olur. Dolayısıyla I , G 'nin alt grubudur.

(g_n) , I da g 'ye yakınsayan bir dizi olsun. Her bir sabit t için X_t nin sürekliliğinden $X_t(g_n) \rightarrow X_t(g)$ olur. $\text{Ker}(\pi_K) = K$ kapalı olduğundan $X_t(g) \in \text{Ker}(\pi_K)$ olur. Dolayısıyla $g \in I$ olup I kapalıdır. G lie grubu olup I , G 'nin kapalı lie alt grubudur.

I nin normal alt grup olduğunu gösterelim. $\forall g \in G, l \in I$ ve $t \geq 0$ için $g l g^{-1} \in I$ olduğunu göstermek gerekir.

$$l \in I \Rightarrow l \sim e \Rightarrow g l g^{-1} \sim g e g^{-1} \Rightarrow g l g^{-1} \sim e \Rightarrow g l g^{-1} \in I \text{ olup normal alt gruptur.}$$

Önerme

I , G_Σ invarianttır.

İspat:

I 'nin G_Σ olması için $g \in I$ ve $\forall \varphi \in G_\Sigma$ için $\varphi(g) \in I$ olduğunu göstermek gerekir.

$X_t : I \rightarrow I$, $\forall t \geq 0$ bir otomorfizma olup $X_{-t} : I \rightarrow I$ şeklindedir. $\forall g \in I$ için $X_t(g) \in I$

olup I , $T = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ invarianttır.

Önerme

Eğer X sonsuz küçük otomorfizm ise G 'nin Lie cebiri $\mathfrak{g}$ her bir $i \geq 0$ için $ad^i(X)$ invarianttır.

İspat:

Önermenin $i = 1$ için ispatlanması yeterlidir. $Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned} [X, Y](e) &= X_e Y - Y_e X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_{X_t(e)} - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} X_{\exp(sY)} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_e - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} X_{\exp(sY)} = - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} X_{\exp(sY)} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} [X, Y](g) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (X_{-t})_* (Y_{X_t(g)}) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X_{-t} \circ \exp sY \circ X_t(g) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X_{-t} (\exp sY(X_t(g))) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X_{-t} (\exp sY) X_t(X_t(g)) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_g(X_{-t}(\exp sY)) \\ &= - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (R_g)_* (X_{\exp sY}) \\ &= (R_g)_* \left[- \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (X_{\exp sY}) \right] \\ &= (R_g)_* [X, Y](e) \end{aligned}$$

olup buradan $[X, Y]$, $X(G)$ 'de sağ-invariant vektör alanı olup $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, $(\forall Y \in \mathfrak{g})$ olur.

Dolayısıyla her bir $i \geq 0$ için $\mathfrak{g}$, $ad^i(X)$ invarianttır.

Önerme

$\Sigma = (G, D, \pi_K, G/K)$ lineer kontrol sistemi olsun. I , Lie grubunun $\mathcal{J}$ Lie cebiri g 'nin alt cebiri olarak X invaryanttır yani $ad^i(X)(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$, $\forall i \geq 0$.

İspat:

Tanım gereği $ad^0(X)$, g üzerinde birim tasvirdir.

$ad^1(X)(Y) = [X, Y]$ ve $i > 1$ için $ad^i(X)(Y) = ad^{i-1}(X)([X, Y])$ dir. İspatın $i = 1$ için yapılması yeterlidir. Bir önceki önermede g Lie cebirinin $X(G)$ 'de $ad(X)$ invaryant olduğunu göstermiştik. Yani $Y \in g \Rightarrow [X, Y] \in g$ idi. Diğer taraftan I 'nın T invaryant olduğunu yani $X_t : I \rightarrow I$, $\forall t \in R$ olduğunu ispatlamıştık.

$\forall Y \in \mathcal{J}$ ve $s \in R$ için $\exp(sY) \in I$ dır.

$X_{\exp(sY)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X_t(\exp(sY)) \in (R_{\exp(sY)})_*(\mathcal{J})$, $\forall s \in R$ olup bu formülden ve Lie parantezinin tanımından $[X, Y](e) \in \mathcal{J}$ olur. Bu uygulamanın devamından $ad^i(X)(Y) \in \mathcal{J}$, $\forall i \in \mathbb{Z}, i \geq 0$ olup ispat tamamlanmış olur.

Önerme

$\Sigma = (G, D, \pi_K, G/K)$ lineer kontrol sistem ve n , G 'nin boyutu olsun. $\mathcal{K}$, K 'nin Lie cebiri

olmak üzere $\mathcal{J} = \bigcap_{i=0}^{n-1} ad^{-i}(X)(\mathcal{K})$ dır.

İspat:

Eğer π_K bire bir ise $I = Ker(\pi_K) = K$ dır. Bu yüzden $\mathcal{K} \neq 0$ alabiliriz. Buradan $\mathcal{K}$ üzerinde $ad^i(X)$ etkisi ile üretilen g 'nin yeni elemanları muhtemelen sadece $i = (n-1)$ adıma kadardır.

$\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ olduğundan önceki önermeden $\mathcal{J} = \bigcap_{i=0}^{n-1} ad^{-i}(X)(\mathcal{K}) \subset \mathcal{J}$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Her bir $t \in R$ için aşağıdaki diyagram değişmelidir;

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{(X_t)_*} & g \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{X_t} & G \end{array}$$

Buradan, $Y \in \mathcal{F}$, $\forall s \in R$ için $\exp(X_t)_*(sY) = X_t(\exp(sY))$ dir.

Standart Lie seri açılımından

$$(X_t)_*(sY) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \text{ad}^k(X)(sY) \quad \text{dir.}$$

$Y \in \mathcal{F}$ hipotezine göre $\forall i \geq 0$ için $\text{ad}^i(X)(Y) \in \mathcal{K}$ dir.

Özel olarak $\frac{d}{dt} \big|_{t=0} X_t(\exp(sY)) = (X_t)_*(sY) \in \mathcal{K}$ olup o zaman her bir t ve s reel sayı çifti için $X_t(\exp(sY)) = \text{Ker}(\pi_K) = K$ elde edilir. Fakat $Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exp(sY) \in I$ olup buda ispatı tamamlar.

Not

g 'nin her a alt cebiri tanjant demeti TG üzerinde Δ_a yayılmasına neden olur ki $\Delta_a(l) = (R_l)_*(a)$, $l \in G$ şeklinde tanımlıdır.

I 'nin her durumu için R_l , G 'nin bir difeomorfizmi olduğundan Δ_a yayılması düzenlidir, yani $\Delta_a(l)$ nin boyutu $l \in G$ 'den bağımsızdır. Bundan başka olarak a alt cebir olduğundan $X, Y \in \Delta_a \Rightarrow [X, Y] \in \Delta_a$ olup Δ_a involüttür.

Frobenious teorem bu yayılmanın integrallenebilirliğini sağlar ve bu açıdan $l \in G$ noktasından geçen $\text{In}_{\Delta_a}(l) = Ag$ şeklinde verilen Δ_a 'nın $\text{In}_{\Delta_a}(l)$ integral manifoldu vardır. Burada A , G 'nin bağlantılı Lie alt grubudur ve a , A 'nın Lie cebiridir.

$\mathcal{F}$ ile üretilen $\Delta = \Delta_I$ yayılması ve G Lie grubu üzerindeki Σ lineer kontrol sistemi için sonuçları verilen yerel gözlenebilirlik şartlarını göz önüne alacağız.

Teorem

$\Sigma = (G, D, \pi_K, G/K)$ lineer kontrol sistemi olsun. Σ 'nin yerel gözlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{J} = 0$ olmasıdır.

İspat:

Eğer Δ sıfır yayılma değilse etkisiz elemandan geçen integral manifoldu, $I = \tilde{e}$, G 'nin aşikar alt grubu değildir. Bundan başka $\forall g \in G$ ve g 'nin her bir U komşuluğu için $\tilde{g} \cap U = Ig \cap U$ yapısı g 'yi içeren G 'nin aşikar alt manifoldu değildir. Bu Σ 'nin yerel gözlenebilir olmamasını sonuçlandırabilir. Bu bize $\mathcal{J} = 0$ olduğunu ispatlamayı hatırlatır. Eğer $\mathcal{J} = 0$ ise I, G 'nin ayrık Lie alt grubudur. Sonuç olarak her bir $g \in G$ için g 'nin $\tilde{g} \cap U = \{g\}$ olacak şekilde bir U komşuluğu vardır. Buradan Σ yerel gözlenebilirdir.

Not

Elbette ki yerel gözlenebilirlik, gözlenebilirlik için gerekli bir şarttır. Fakat R^n nin durumuna karşılık $\mathcal{J} = \{0\}$ şartı I 'nin aşikar alt grup olmasını gerektirmez. Gerçekten R^n nin ayrık reel vektör alt uzayı yoktur. Keyfi Lie grupları ayrık alt gruplar içerebilir. Σ 'nin gözlenebilirliği için bazı genel sonuçları ele alalım. G 'nin belirli bir alt grubunu incelemek zorundayız. Bu sabit nokta G üzerindeki $T = (X_t)_{t \in R}$ etkisidir. Daha açık olarak iyi tanımlanmış

$$\Psi : R \times G \rightarrow G$$

$$(t, g) \mapsto \Psi(t, g) = X_t(g)$$

etkisi vardır. I, T invaryant olduğundan $\Psi(R \times I) \subset I$ elde edilir.

$$\text{Fix}(T) = \{g : X_t(g) = g, \forall t \in R\}$$

X, G 'nin sonsuz küçük otomorfizmi olduğundan $\text{Fix}(T), G$ 'nin kapalı Lie alt grubudur.

Teorem

$\Sigma = (G, D, \pi_K, G/K)$ lineer kontrol sistemi olsun. O zaman Σ 'nin gözlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$1) \mathcal{J} = 0$$

$$2) \text{Fix}(T) \cap \text{Ker}(\pi_K) = \{e\}$$

dur.

İspat:

($\Rightarrow$) $I = \{e\}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\mathcal{J}$ sıfır olmalıdır. Eğer $g \in \text{Ker}(\pi_K)$ T etkisi ile sabit nokta ise $X_t(g) \in \text{Ker}(\pi_K)$, $\forall t \in R$ olup sonuçta $g = e$ dir.

($\Leftarrow$) $\mathcal{J} = 0$ ise $I, \text{Ker}(\pi_K)$ nın ayrık Lie alt grubudur. $g \in I$ alalım ve

' $\Psi_g = \Psi$ nin $R \times \{g\}$ ye kısıtlanması' sürekli tasvirini göz önüne alalım. Ψ_g nin tanım kümesi bağlantılı olduğundan $\text{Im}(\Psi_g) = \{X_t(g) : t \in R\}$ bağlantılıdır. Fakat X_0, G 'nin birim tasviridir ve I, T invaryant olup $g \in \text{Im}(\Psi_g) \subset I$ dir. I ayrık olduğundan sonuçta $\{g\} = \text{Im}(\Psi_g)$ dir. Buradan $g \in \text{Fix}(T)$ dir. Fakat $I \subset \text{Ker}(\pi_K)$ olup sonuç olarak $g = e$ ve Σ gözlenebiliridir.

Örnek

3-boyutlu Heisenberg grubu

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in R \right\}$$

üzerindeki $\Sigma = (G, D, \pi_K, G/K)$ kontrol sistemini göz önüne alalım.

$$1) I = \tilde{e} = \{g \in G : X_t(g) \in \text{Ker}(\pi_K), \forall t \geq 0\} \quad \text{için } K = I \quad \text{alınırsa } \pi_I : G \rightarrow G/I$$

gözlenebilirlik fonksiyonudur.

$$\text{Ker}(\pi_I) = \{g \in G : \pi_I(g) = e_{G/I}\} \text{ dir.}$$

$$G/I = \{gI : g \in G\} \text{ olduğundan } eI = I \text{ dir.}$$

$g \in \text{Ker}(\pi_I)$ için $\pi_I(g) = e_{G/I} \Rightarrow gI = I \Rightarrow g \in I$ olup $\text{Ker}(\pi_I) \subset I$ olur. Diğer taraftan

$g \in I$ için $\pi_I(g) = e_{G/I} \Rightarrow gI = I$ olup tanım gereği $g \in \text{Ker}(\pi_I)$ olup dolayısıyla $\text{Ker}(\pi_I) = I = \{e\}$ olur. $\mathcal{A} \neq 0$ olduğundan Σ yerel gözlenebilirdir. Bundan başka, $I = \{e\}$ olması genel gözlenebilirliği sağlar.

2) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $K = \exp(RX)$ olsun. Bu durumda $\pi_K : G \rightarrow G/\exp(RX)$

$$\pi_K \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki gözlenebilirlik fonksiyonu için, $\text{Ker}(\pi_K) = \{g \in G : \pi_K(g) = \exp(RX)\}$ 'den

$$\text{Ker}(\pi_K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in R \right\} \text{ bulunur. Bu örnekte } \mathcal{A} \neq 0 \text{ dır.}$$

Diğer taraftan sabit noktaları yani $\text{Fix}(T)$ kümesini bulalım. $g \in G$ için

$$\exp(tX)g = g \exp(tX) \Leftrightarrow y = 0 \text{ olmasından } \text{Fix}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, c \in R \right\} \text{ olur. Sonuç}$$

olarak $\text{Fix}(T) \cap \text{Ker}(\pi_K) = \{e\}$ olup Σ genel gözlenebilirdir.

5. SONUÇLAR

Bağılantılı bir Lie grubu üzerindeki lineer kontrol sistemleri için sapan vektörü sonsuz küçük otomorfizma ve çıkış fonksiyonu da bir çeşit izdüşüm fonksiyonu olmak üzere yerel ve genel gözlenebilirliği incelenmiştir. Ayırt edilemeyen noktaların kümesi I nın kapalı normal $\text{ad}(X)$ -invariant bir Lie grubu yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. I Lie grubunun Lie cebiri yapısı ve özellikleri incelenmiş, bu cebir yapısıyla yerel gözlenebilirlik ve sabit noktaların kümesi ile çekirdeğin arakesiti de göz önüne alınarak genel gözlenebilirlik sağlanmıştır. Gözlenebilirlik karakterizasyonu için iki örnek verilmiştir.

KAYNAKLAR

Agrachev, A. A., *editor*, (2002), *Mathematical Control Theory*, ictp lecture notes, the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics.

Ayala, V. and Hacibekiroglu, A.K., (1997), "*Observable Linear Pairs*", *Comput. Appl. Math.*, 16, n.3:205-214.

Ayala, V., Kara, H. A. and Kizil, E., (2000), "*Observability of General Linear Pairs*", *Computers and Mathematics with Applications*, 39:35-43.

Isidori, A., (1989), *Nonlinear Control Systems : an introduction*, Springer Verlag.

Jurdjevic, V., (1997), *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press.

Kara Hacibekiroglu, A., (1994), *Controllability Theorem for Invariant Systems on Lie Groups*, Dissertation of 1993-94 Diploma Course in Mathematics, International Centre for Theoretical Physics, Italy.

Warner, F. W., (1971), *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	14.06.1982	
Doğum yeri	Adıyaman	
Lise	1994-1997	Adıyaman Lisesi
Lisans	2001-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

