

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Diferen. Ceb. ve Kısmi Tür. Difer.
Cebir, Denk. Nüm. Çözümü

Yüksek Lisans Tezi

Murat Osmanoğlu

2007

09
04

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL CEBİRSEL VE KİSMİ TÜREVLİ
DİFERENSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Matematikçi Murat OSMANOĞLU

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

İSTANBUL, 2007

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC) : R.209-304.....

Kayıt No : 3643.....

Geldiği Yer : Fer. Bilimlen.....

Enst. A. 50.....

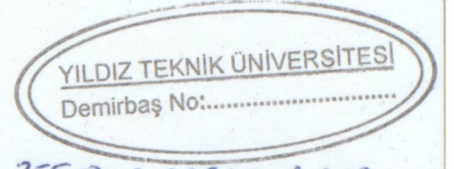
Tarih : 06/12/2007.....

Fiyat : 25,00.....

Fatura No :

Ayniyat No :

Ek :



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Vii-50

DİFERANSİYEL CEBİRSEL VE KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Matematikçi Murat OSMANOĞLU

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Prof. Dr. Fatma TIRYAKI

Yrd. Doç. Dr. Coşkun GÜLER

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iii
ÇİZELGE LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	3
2.1 Önbilgiler	3
2.2 Diferensiyel Cebirsel Denklemler	5
2.2.1 Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin İndeksi	6
2.2.2 Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Cebirsel Denklemler	7
2.3 Kısmi Türevli Diferensiyel Cebirsel Denklemler	8
2.4 Kısmi Türevli Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin İndeksleri	11
2.4.1 Laplace Dönüşümü ve Uzaysal İndeks	12
2.4.2 Fourier Dönüşümü ve Zaman İndeksi	15
2.5 Kuvvet Serileri	17
3. MATERYAL VE YÖNTEM	19
3.1 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm	19
3.2 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm	23
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI	31
4.1 Test Problemi	31
4.2 Test Problemi	37
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	46
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	50

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 4.1 Test problemi (4.1) deki $x_1(t)$ ve $x_1^*(t)$ in grafiği.....	35
Şekil 4.2 Test problemi (4.1) deki $x_2(t)$ ve $x_2^*(t)$ in grafiği.....	37
Şekil 4.3 Test problemi (4.2) deki $u_1(t, x)$ in grafiği.....	43
Şekil 4.4 Test problemi (4.2) deki $u_1^*(t, x)$ in grafiği	43
Şekil 4.5 Test problemi (4.2) deki $u_2(t, x)$ in grafiği	45
Şekil 4.6 Test problemi (4.2) deki $u_2^*(t, x)$ in grafiği	45

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 4.1 Test problemi (4.1) deki $x_1(t)$ ile $x_1^*(t)$ nin karşılaştırılması.....	34
Çizelge 4.2 Test problemi (4.1) deki $x_2(t)$ ile $x_2^*(t)$ nin karşılaştırılması.....	36
Çizelge 4.3 Test problemi (4.2) deki $u_1(t, x)$ ile $u_1^*(t, x)$ nin karşılaştırılması.....	42
Çizelge 4.4 Test problemi (4.2) deki $u_2(t, x)$ ile $u_2^*(t, x)$ nin karşılaştırılması.....	44

ÖNSÖZ

Uygulamalı bilim dallarında, matematiksel modellerin oluşturulması büyük önem taşımaktadır. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucu da bu alanda yapılan çalışmalarda oldukça büyük artış olmuştur. Matematiksel modelleme problemlerinde diferensiyel cebirsel ve kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Bu nedenle, diferensiyel cebirsel ve kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin sayısal çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Bu çalışmada diferensiyel dönüşüm metodu diferensiyel cebirsel ve kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlere uygulanmaktadır. Literatürdeki teoremler yaklaşık analitik çözümü bulabilmek için yeterli olmadığından, verilen sınır değerlerini de kullanmamıza olanak sağlayacak yeni teoremler oluşturmaktadır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımı benden esirgemeyen çok değerli hocam, Prof. Dr. Mustafa Bayram'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

ÖZET

Bu tezde, mühendislik ve fen bilimlerinde ortaya çıkan diferensiyel cebirsel ve kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemleri çözmek için diferensiyel dönüşüm metodu sunuldu. Bu metotla denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri bulundu ve bu çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Anahtar kelimeler: Diferensiyel cebirsel denklem, kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklem, kuvvet serileri, index, diferensiyel dönüşüm metodu.

ABSTRACT

L. GİRİŞ

In this thesis, we have applied the differential transform method to solve systems of differential and partial differential algebraic equations arising in sceines and engineering. We firstly calculated the approximate analytical solutions of the given equations, and then compared with their exact solutions.

Keywords: Differential algebraic equations, partial differential algebraic equations, power series, index, differential transform method.

Kısmi türevli diferansiyel cebirsel denklemler olarak da bilinen bu tür denklemler, diferansiyel ve kısmi türevli diferansiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Diferansiyel cebirsel denklemler kavramı ilk kez Petzold (1982) tarafından kullanılmıştır. Sonra Gear ve Petzold (1984), Brenan (1989), Ascher ve Petzold (1991), Petzold (1995) diferansiyel cebirsel denklemlerde nümerik çözümleri ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Hairer (1989) diferansiyel cebirsel denklemlerin çözümüne için Runge - Kutta yöntemini kullanmıştır. Ascher ve Spiter (1991) sınır değer problemleri diferansiyel cebirsel denklemlerin çözümüne için sıralama (collcation) yöntemiyle çalışmışlardır. Çelik ve Bayram (2003a, 2003b, 2004) diferansiyel cebirsel denklemlerin çözümünde Pade yaklaşımını kullanmışlardır. Güzal ve Bayram (2006) Pade yaklaşımını yüksek indeksli diferansiyel cebirsel denklemlere uygulamışlardır. Huseini (2006a, 2006b) lineer ve nonlineer diferansiyel cebirsel denklemlerin çözümüne için Adomian yöntemini kullanmıştır. Diferansiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine yapılan çalışmaları yanı sıra Campbell (1995) ve Marz (2003, 2004) lineer ve nonlineer diferansiyel denklemlerin indeksli ve çözülebilirliğini incelemişler. Huseini (2005) da yüksek indeksli diferansiyel cebirsel denklemlerde indeks indirgenme için bir yöntem sunmuştur.

Karvaski (1977) doktora tezi ile kısmi türevli diferansiyel cebirsel denklemlerin analizi üzerine çalışmıştır. Lucht ve Szefer (1997a, 1997b, 1999) sabit katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel cebirsel denklemlerde indeksleri, başlangıç ve sınır değer tutarlılıkları, ve nümerik çözümleri üzerine çalışmaları yapmışlardır. Marinova ve Razon (2000, 2002) kısmi türevli diferansiyel cebirsel denklemlerin karakteristik analizi ve diferansiyel indeks üzerine çalışmışlardır. Dehghan ve Shariyat (2005) lineer kısmi türevli diferansiyel cebirsel denklemlere uygulanan Runge - Kutta metodunun yakınsatlığını incelemişlerdir.

1. GİRİŞ

Uygulamalı bilim dallarında, pratikte karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemeler oluşturması büyük bir önem taşımaktadır. Bu konuda yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda 20. yüzyılın sonuna doğru oldukça büyük bir hız kazanmıştır. Çoğu modellemelere ait problemler genelde diferensiyel cebirsel denklem veya kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle, diferensiyel ve kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Diferensiyel cebirsel denklem kavramı ilk kez Petzold (1982) tarafından kullanılmıştır. Sonra Gear ve Petzold (1984), Brennan (1989), Ascher ve Petzold (1991), Petzold (1995) diferensiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Hairer (1989) diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümü için Runge – Kutta yöntemini kullanmıştır. Ascher ve Spiter (1994) sınır değeri verilmiş diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümü için sıralama (collocation) metodunu kullanmışlardır. Çelik ve Bayram (2003a, 2003b, 2004) diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümünde Pade yaklaşımını kullanmışlardır. Guzel ve Bayram (2006) Pade yaklaşımını yüksek indeksli diferensiyel cebirsel denklemlere uygulamışlardır. Hosseini (2006a, 2006b) lineer ve nonlinear diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümü için Adomian yöntemini kullanmıştır. Diferensiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine yapılan çalışmaların yanı sıra Campbell (1995) ve Marz (2003, 2004) lineer ve nonlinear diferensiyel denklemlerin indeksi ve çözülebilirliğini incelemişler, Hosseini (2005) de yüksek indeksli diferensiyel cebirsel denklemlerde indeks indirgeme için bir yöntem sunmuştur.

Marszalek (1997) doktora tezini kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin analizi üzerine yapmıştır. Lucht ve Strehmel (1997a, 1997b, 1999) sabit katsayılı lineer kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin indeksleri, başlangıç ve sınır değer tutarlılıkları, ve nümerik çözümleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Martinson ve Barton (2000, 2002) kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin karakteristik analizi ve diferensiyel indeks üzerine çalışmışlardır. Debrabant ve Strehmel (2005) lineer kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlere uygulanan Runge–Kutta metodunun yakınsaklığını incelemişlerdir.

Diferensiyel dönüşüm metodu ilk olarak Zhou (1986) tarafından elektirik devre analizinde lineer ve non-lineer başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanılmıştır. Jang ve Chen (2000) diferensiyel dönüşüm yöntemini başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanmışlardır. Hassan (2002) bazı özdeğer problemlerinin çözümünde diferensiyel dönüşüm metodundan faydalanmıştır. Köksal ve Herdem (2002) diferensiyel dönüşüm metodunu nonlinear devre analizine uygulamışlardır. Ayaz (2004) ve Liu (2007) diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümünde diferensiyel dönüşüm yönteminin kullanışlı olduğunu belirtmişlerdir. Arıkoğlu ve Özkol (2006a) diferensiyel fark denklemlerinin çözümünde bu yöntemi kullanmışlar, ayrıca Arıkoğlu (2006b) ve Ertürk (2007) diferensiyel dönüşüm metodunu kesirli mertebeli diferensiyel denklemlerin çözümü için geliştirmişlerdir. Bunlara ek olarak Chen ve Ho (1999), Jang ve Chen (2001), Ayaz (2003) ve Yang (2006) iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunu kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulamışlardır.

Bu tezde, sabit katsayılı lineer diferensiyel cebirsel ve sabit katsayılı kısmi türevli lineer diferensiyel cebirsel denklemlerin çözülebilirliği ve indeksleri incelenerek çözümleri için diferensiyel dönüşüm metodu sunuldu. Metot, iki değişik test problemine uygulandı ve problemlerin yaklaşık analitik çözümleri elde edildi. Bu analitik çözümler tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca verilen sınır değerlerinin diferensiyel dönüşüm yönteminde kullanılabilmesi için yeni teoremler oluşturuldu.

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (2.3)$$

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (2.4)$$

2.1.3 Teoremler: $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ de her mertebeden türevi verilsin

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (2.5)$$

ifadesinin, yarı kısımları

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Ön bilgiler

Bu bölümde, tezde kullandığımız bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1.1 Tanım: Bir bağımsız değişken ile bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme diferensiyel denklem denir. Bu tür denklemlerin en genel formu;

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde dir. Burada y'' , y nin x e göre n yinci türevidir. Yukarıdaki denklem y'' ye göre çözümlürse

$$y'' = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) denklemine diferensiyel denklemin açık formda yazılışı denir.

2.1.2 Tanım: m inci dereceden bir

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \quad (2.3)$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşit kılınmasıyla yazılan

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0 \quad (2.4)$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem ve pozitif m tamsayısına da $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. Ayrıca $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i değerlerine denklemin kökü adı verilir.

2.1.3 Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = c$ de her mertebeden türevi varsa

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots \quad (2.5)$$

ifadesine, yani kısaca

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \quad (2.6)$$

toplama $x_0 = c$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi adı verilir. Eğer (2.6) denkleminde $c = 0$ alınırsa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (2.7)$$

toplama Maclaurin serisi adı verilir.

2.1.4 Tanım: a_{ij} ve b_i reel sayılar $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'lerde bilinmeyenler olmak üzere n tane bilinmeyenli m tane lineer denklemden oluşan

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.8)$$

denklemler topluluğuna lineer denklem sistemi denir. Bu denklem sistemi daha açık olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$a_{ij}, b_i \in R$ ve x_i bilinmeyenler olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem sistemi adı verilir. Burada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine sistemin katsayılar matrisi ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

matrislerine de sırasıyla denklem sisteminin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir. Ayrıca

$$[A:B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

matrisine de sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Böylece (2.9) denklemini, matrisleri kullanarak $Ax = B$ şeklinde de gösterebiliriz. Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır işlemleri, sistemin çözümünü değiştirmez.

2.1.5 Tanım: A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer $\det A = |A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi varsa) non-singüler(regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir.

2.1.6 Tanım: A , n . mertebeden bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B \quad (2.12)$$

eşitliği ile verilir.

2.1.7 Tanım: a pozitif bir reel sayı ve $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a ya da üstel fonksiyonun tabanı denir.

2.2 Diferensiyel Cebirsel Denklemler

Bir diferensiyel cebirsel denklem

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir. (2.13) denklemine genel kapalı (implicit) şekilde yazılmış diferensiyel cebirsel denklem denir. Burada $F \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in \mathbb{R}$ dir.

(2.13) denklemi açık formda

$$F(y', y, x, t) = 0, \quad (2.14)$$

$$G(y, x, t) = 0. \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. (2.15) ifadesinde görüldüğü gibi diferensiyel cebirsel denklemler üzerinde cebirsel kısıtlamalar vardır. $y = y(t)$ ve $x = x(t)$ olmak üzere, y diferensiyel değişkenin ve x de cebirsel değişkenin vektörleridir. Eğer (2.13) ifadesi, k tane denkleme sahip ve m tanesi diferensiyel denklem ise $(k - m)$ tanesi cebirsel denklemdir.

2.2.1 Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin İndeksi

İndeks kavramı, diferensiyel cebirsel denklemlerin davranışlarında ve sınıflandırılmasında önemli bir rol oynamaktadır. İndeks tanımını vermeden önce

$$x' = f(x, y, t) \quad (2.16)$$

$$0 = g(x, y, t) \quad (2.17)$$

ifadesini göz önüne alalım. Diferensiyel cebirsel denklemin bu şekilde yazılışına yarı – açık form denir. (2.17) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$x' = f(x, y, t) \quad (2.18)$$

$$g_x(x, y, t)x' + g_y(x, y, t)y' = -g_t(x, y, t) \quad (2.19)$$

sistemi elde edilir. Eğer g_y nonsingüler ise (2.18)-(2.19) sistemi adi diferensiyel denklem sistemine indirgenir ve bu durumda diferensiyel cebirsel denklemin indeksinin 1(bir) olduğu söylenir. Eğer (2.18)-(2.19) sistemi adi diferensiyel denklem sistemine dönüşmezse bazı matematiksel işlemler ve koordinat değişiklikleri yardımıyla adi diferensiyel denklem elde edilmeye çalışılır. Eğer açık formda adi diferensiyel denklem elde edilirse, (2.16)-(2.17) sisteminin indeksi 2(iki) dir denir. Eğer elde edilen yeni sistem de açık formda yazılmış adi diferensiyel denklem değilse işleme açık formda yazılmış adi diferensiyel elde edilinceye kadar devam edilir. Bu sırada yapılan türev alma sayısına sistemin indeksi denir.

2.2.1.1 Tanım: (2.13) diferensiyel cebirsel denkleminin y' diferensiyelini oluşturabilmek için denkleminin hepsinin veya bir kısmının t ye bağlı minimum türevlenebilme sayısına (2.13) denklem sisteminin indeksi denir.(Brennan, 1989)

2.2.2 Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Cebirsel Denklemler

A ve B $m \times m$ tipinde iki matris olmak üzere,

$$Ax' + Bx = f \quad (2.20)$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel cebirsel denklem sistemi olsun. λ kompleks parametre olmak üzere, $\lambda A + B$ matrisine matris kalemi denir. Burada, P ve Q $m \times m$ tipinde nonsingüler matrisler olmak üzere, $x = Qy$ dönüşümü yapılır ve (2.20) denkleminin her iki yanı P matrisi ile çarpılırsa,

$$PAQy' + PBQy = Pf \quad (2.21)$$

elde edilir. Böylece yeni matris kalemi $\lambda PAQ + PBQ$ olur.

Eğer $\lambda A + B$ nin determinantı sıfırdan farklı ise, matris kalemi regülerdir.

2.2.2.1 Teorem: Eğer $\lambda A + B$ kalemi regüler ise, o zaman $Ax' + Bx = f$ sistemi çözülebilirdir (Brennan, 1989).

Şimdi burada $\lambda A + B$ nin P ve Q dönüşümü altında Kronecker kanonikal formu ile ilgileneceğiz. Çünkü ileriki çalışmalarımızda bu Kronecker kanonikal form oldukça çok karşımıza çıkacaktır.

2.2.2.2 Teorem: $\lambda A + B$ kaleminin regüler olduğunu kabul edelim. N nilpotentlik derecesi k olan nilpotent matris ($N^k = 0$ ve $N^{k-1} \neq 0$ ise N ye nilpotent matris ve k ya da nilpotentlik derecesi denir) ve I birim matris olmak üzere,

$$PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PBQ = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

olacak şekilde P ve Q nonsingüler matrisleri vardır (Brennan, 1989).

Burada $N = 0$ ise $k = 1$ dir. Ayrıca A nonsingüler ise $PAQ = I, PBQ = C, k = 0$ olarak alınabilir. $\det(\lambda A + B)$ sabit ise, (2.22) ifadeleri $PAQ = N, PBQ = I$ şeklinde düzenlenebilir. N nin nilpotentlik derecesi $\lambda A + B$ kaleminin indeksi, dolayısıyla diferensiyel cebirsel denklemin indeksidir.

Teorem 2.2.2.2 yi sağlayan P ve Q matrisleri (2.20) denkleminde uygulanırsa, (2.20)

denklemini (2.21) denklemine dönüştür. (2.21) denklemini (2.22) formunda yazılırsa,

$$y_1' + Cy_1 = f_1 \quad (2.23)$$

$$Ny_2' + y_2 = f_2 \quad (2.24)$$

sistemi elde edilir. (2.23) denklemini bir adi diferensiyel denklemdir ve herhangi bir f_1 ve başlangıç değeri için bir çözüm vardır. (2.24) denklemini,

$$(ND + I)y_2 = f_2 \quad (2.25)$$

şeklinde yazılabilir ($D = d/dt$). Buradan $f_2^{(i)} = d^i f_2 / dt^i$ ve $(ND)^k = 0$ olmak üzere (2.25) denklemini,

$$y_2 = (ND + I)^{-1} f_2 = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i f_2^{(i)} \quad (2.26)$$

şeklinde çözülebilir. Bu ifadeyi daha açık bir şekilde yazacak olursak,

$$y_2 = f_2 - Nf_2' + N^2 f_2'' - \dots (-1)^{k-1} N^{k-1} f_2^{(k-1)} \quad (2.27)$$

denklemini elde edilir. Buradan açık formda yazılmış adi diferensiyel denklem elde etmek için (2.27) ifadesinin türevini alırsak,

$$y_2' = f_2' - Nf_2'' + \dots (-1)^{k-1} N^{k-1} f_2^{(k)} \quad (2.28)$$

denklemini elde edilir. Buradan adi diferensiyel denklem elde edebilmek için sistemin k defa türevinin alınması gerektiği sonucuna varılır. Yani diferensiyel cebirsel denklemin indeksi k dır.

2.3 Kısmi Türevli Diferensiyel Cebirsel Denklemler

Fen bilimlerinde ve mühendislikte, farklı tip denklem sistemleri içeren birçok matematiksel model yer almaktadır. Bu sistemler,

- Parabolik ve eliptik diferensiyel denklemler
- Parabolik, eliptik ve adi diferensiyel denklemler veya

- Eliptik ve adi diferensiyel denklemler ve cebirsel denklemler

İçerebilirler.

Farklı tipteki denklemlerin kombinasyonları için birçok olasılık vardır. Bu şekildeki sistemler kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklem olarak adlandırılır ve uygulamalarda bu sistemler genellikle uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla tamamlanabilirler. Bu sistemler, bazı kabuller altında bir Laplace transformu veya bir Fourier analizi ile diferensiyel cebirsel denkleme indirgenebilirler. Şimdi benzer sistemler için bir örnek verelim.

2.3.1 Örnek : $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ türlerin yoğunluğu ve $v = (v_1, \dots, v_m)^T$ yemek kaynaklarının yoğunluk vektörleri olmak üzere, m yemek kaynağına bağlı n türün bir popülasyon modeli,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= D\Delta u_j + f_j(u, v), \quad j = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} &= g_i(u, v), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.29)$$

olarak verilsin. $D > 0$, f_j , g_i , uygun başlangıç ve sınır şartlarının verildiğini kabul edilsin. Bu sistem bir reaksiyon-difüzyon modeli olarak değerlendirilebilir. Burada u_j yayılmış madde konsantrasyonu olarak görülebilirken, v_i parçacıkları yayılamayan madde konsantrasyonu olarak görülebilir. Denklemden n parabolik denklem, m adi diferensiyel denklem vardır.

Diğer bilimsel alanlarda da birçok uygulamalar vardır. Kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin örnekleri Navier-Stokes denklemlerinde, kimya mühendisliği, manyeto hidrodinamikte, esnek çoklu sistemlerde görülebilir. Biz burada, $J = (0, t_e)$, $\Omega = (-l, l)$ ve $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($t_e > 0$, $l > 0$) olmak üzere,

$$Au_t(t, x) + Bu_{xx}(t, x) + Cu(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in J \times \Omega \quad (2.30)$$

sabit katsayılı kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemleri inceleyeceğiz. Burada ayrıca, $t_e < \infty$ için $\bar{J} = [0, t_e]$, $t_e = \infty$ için $\bar{J} = [0, \infty)$ ve $\bar{\Omega} = [-l, l]$ olmak üzere u ve f , $u, f : \bar{J} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ olarak tanımlanan dönüşümler olsun. Biz (2.30) denklemindeki A ve B matrislerinin en az birinin singüler olması durumuyla ilgileneceğiz. Eğer $A = 0$ veya $B = 0$ olursa sistem adi diferensiyel denkleme ya da diferensiyel cebirsel denkleme dönüşür. Sonuç

olarak ele alacağımız denklemlerde A veya B matrisleri sıfırdan farklı olacaktır.

$\mathcal{M}_{BC}$, sınır değerleri verilen bileşenlerin indis kümesi olmak üzere (2.30) un çözülebilirliği için bütün $j \in \mathcal{M}_{BC} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ için u nun u_j bileşenlerinin bütün $t \in \bar{J}$ leri sağlayan

$$u_j(t, \pm l) = 0 \quad (2.31)$$

şeklinde sınır değerleri verilmelidir.

Bunun yanı sıra, $\mathcal{M}_{IC}$, başlangıç değerleri verilen bileşenlerin indis kümesi olmak üzere, bütün $j \in \mathcal{M}_{IC} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ için g nin g_j bileşenlerinin

$$u(0, x) = g(x), \quad x \in \bar{\Omega} \quad (2.32)$$

formunda başlangıç değerleri de verilmelidir. $k \notin \mathcal{M}_{BC}$ olmak üzere u_k bileşeni için Dirichlet tipi sınır değeri uygundur. Genel olarak, $k \notin \mathcal{M}_{BC}$ olmak üzere u_k için sınır değeri ve $i \notin \mathcal{M}_{IC}$ olmak üzere u_i için başlangıç değeri (2.30) denklemi yardımıyla tanımlanabilir. Ayrıca sınır koşulu ile başlangıç değeri arasında,

$$g_i(x) = u_i(0, x), \quad i \in \mathcal{M}_{BC} \cap \mathcal{M}_{IC} \quad (2.34)$$

tutarlılık şartı gerekmektedir.

2.3.2 Örnek : $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $t \in J$, $x \in \Omega = (-1, 1)$, $a, b > 0, c_i \neq 0$ ve $f_i(t, x)$ $i = 1, 2, 3$ fonksiyonları yeterince düzgün (kendisi ve türevleri sürekli olan fonksiyon) olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_{xx} + \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & c_3 & 0 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$u_j(t, -1) = u_j(t, 1) = 0, \quad j \in \mathcal{M}_{BC}, \quad u_i(0, x) = g_i(x) \sin(\pi x), \quad i \in \mathcal{M}_{IC}$$

kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemi göz önüne alalım. Başlangıç şartındaki $\sin(\pi x)$ değeri denklemin tutarlılığını garantiler. Burada $\mathcal{M}_{BC}$ sınır koşulları keyfi olarak verilen u nun bileşenlerinin indis kümesidir (benzer durum $\mathcal{M}_{IC}$ için de geçerlidir). u_2 ve u_3 bileşenlerinin çözümleri,

$$u_2(t, x) = \frac{1}{c_3} f_3(t, x), \quad u_3(t, x) = \frac{1}{c_2} \left(f_2(t, x) - \frac{a}{c_3} f_{3t}(t, x) + \frac{b}{c_3} f_{3xx}(t, x) \right) \quad (2.36)$$

olarak bulunabileceğinden, u_2 ve u_3 için başlangıç ve sınır şartlarına gerek yoktur. Sonuç olarak, $\mathfrak{M}_{IC} = \mathfrak{M}_{BC} = \{1\}$ olarak alınabilir. Buradan u_1 in çözümü,

$$u_{1t} = u_{1xx} + f_1 - \frac{c_1}{c_3} f_3, \quad (2.37)$$

$$u_1(t, -1) = u_1(t, 1) = 0, \quad u_1(0, x) = g_1(x) \sin(\pi x),$$

başlangıç değerli parabolik problemin çözümüdür.

Bu örnek, singüler matrisli (2.30) denkleminin regüler matrisli (2.30) denkleminde farklı olduğunu göstermektedir. Bölüm 2.4 de sırasıyla, diferensiyel uzaysal(spatial) indeks ve diferensiyel zaman(time) indeksi anlatılacaktır. Bu indeksler kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin karakterize edilmesinde ve çözümünde önemli bir rol oynamaktadır. Çözüm için u vektörünün bütün bileşenleri için başlangıç ve sınır koşulları verilmeyebilir. Kısım 2.4 de, yukarıda tanımlanan $\mathfrak{M}_{IC}$ ve $\mathfrak{M}_{BC}$ temel indeks kümelerinin nasıl bulunacağı anlatılacaktır. Çünkü bu iki küme bilinirse kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemin u çözüm vektörünün hangi bileşenleri için başlangıç ve sınır koşulları verilmesi gerektiği kestirilebilir.

2.4 Kısmi Türevli Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin İndeksleri

Diferensiyel cebirsel denklemlerde olduğu gibi, kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin karakterize edilmesi için indeks kavramı oldukça önemlidir. Bunun için bu kısımda, kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemler için sırasıyla Laplace dönüşümü ve Fourier analizi ile tanımlanan diferensiyel uzaysal indeks ve diferensiyel zaman indeksi diye iki indeks tanımlanacaktır. Bu tanımın yapılabilmesi için aşağıdaki kabuller gereklidir.

I. (2.30)-(2.33) başlangıç sınır değer problemi, (2.30) sisteminin çözümü olan, başlangıç ve sınır değerlerini sağlayan, yeterince düzgün (kendisi ve istenildiği kadar türevleri sürekli olan fonksiyona yeterince düzgün fonksiyon denir) olan tek bir çözüme sahiptir.

II. u vektörlerinin her bir bileşeni, u_i ve f

$$|y(t, x)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \alpha \geq 0, t \geq 0 \quad (2.41)$$

sınır koşulunu sağlamalıdır.

III. $(B, \xi A + C)$ matris kalemi, $\operatorname{Re}(\xi) > \alpha$, regüler olmalıdır.

IV. $(A, \mu_k B + C)$ matris kalemi bütün k değerleri için regüler olmalıdır.

V. $f(t, x)$ vektörü ve $g(x)$ başlangıç değer vektörü yeterince düzgün (smooth) olmalıdır.

2.4.1 Laplace Dönüşümü ve Uzaysal İndeks

$t_e = \infty$ ve $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|y(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \alpha \geq 0, \quad t \in [0, \infty), \quad 0 < M < \infty \quad (2.38)$$

koşuluyla (growth condition) sürekli olsun. Genel olarak $y(t)$ nin Laplace dönüşümü

$$y_\xi := \int_0^\infty e^{-t\xi} y(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\xi) > 0. \quad (2.39)$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki (II) özelliğinden (2.30) denklemini, $g(x)$ (2.32) de verilen başlangıç vektörü olmak üzere,

$$Bu_\xi''(x) + (\xi A + C)u_\xi(x) = f_\xi(x) + Ag(x), \quad \operatorname{Re}(\xi) > \alpha \quad (2.40)$$

şeklinde yazılabilir. B singüler matris ise, (2.40) denklemi ξ parametresine bağlı bir diferensiyel cebirsel denklem olur. Böylece, sınır koşulları genel olarak u_ξ nun belli bileşenleri için verilebilir. Bunları karakterize etmek için $\mathcal{M}_{BC}^{(\xi)} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, sınır koşulları keyfi olarak verilebilen u_ξ nin bileşenlerinin indis kümesi olarak yazılır.

Burada uzaysal indeksi tanımlayabilmek için (2.40) diferensiyel cebirsel denkleminin Kronecker normal formu gerekmektedir. (III) özelliğinden, I_k k mertebeden birim matris,

$$R_{L,\xi} \in \mathbb{C}^{m_1 \times m_2}, \text{ ve } N_{L,\xi} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2} \text{ bir nilpotent matris olmak üzere } (m_1 + m_2 = n)$$

$$P_{L,\xi} B Q_{L,\xi} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & N_{L,\xi} \end{pmatrix}, \quad P_{L,\xi} (\xi A + C) Q_{L,\xi} = \begin{pmatrix} R_{L,\xi} & 0 \\ 0 & I_{m_2} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

olacak şekilde $P_{L,\xi}, Q_{L,\xi} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nonsingüler matrisler vardır. Burada $N_{L,\xi}$ nin Riesz indeksini (ya da nilpotentlik derecesi) $v_{L,\xi}$ olarak tanımlayacağız ($N_{L,\xi}^{v_{L,\xi}} = 0$, $N_{L,\xi}^{v_{L,\xi}-1} \neq 0$). Bu bağıntılarla birlikte (2.40) denklemi,

$$v_{\xi}''(x) + R_{L,\xi} v_{\xi}(x) = r_{\xi,1}(x), \quad (2.42)$$

$$N_{L,\xi} w_{\xi}''(x) + w_{\xi}(x) = r_{\xi,2}(x), \quad (2.43)$$

ikili denklem sistemine dönüşür. Burada, $(v_{\xi}(x)^T, w_{\xi}(x)^T)^T := Q_{L,\xi}^{-1} u_{\xi}(x)$ ve $(r_{\xi,1}(x)^T, r_{\xi,2}(x)^T)^T := P_{L,\xi} (f_{\xi}(x) + Ag(x))$ dir. (2.42) ifadesi, ikinci mertebeden m_1 diferensiyel denklem içermektedir. Genel olarak, v_{ξ} nin her bir bileşeni için bir sınır şartı gereklidir. (I) özelliği altında bu sınır değer probleminin tek çözümü olduğu görülür. Böylece, $(v_{\xi}^T, w_{\xi}^T)^T$, u_{ξ} ya geri dönüştürülürse $\mathfrak{M}_{BC}^{(\xi)}$ m_1 elemanlı bir küme olur. Ayrıca (2.43) denklemi,

$$w_{\xi}(x) = r_{\xi,2}(x) - N_{L,\xi} r_{\xi,2}''(x) + \dots (-1)^{v_{L,\xi}-1} N_{L,\xi}^{v_{L,\xi}-1} r_{\xi,2}^{(2v_{L,\xi}-2)}(x), \quad (2.44)$$

cebirsel denkleme denktir. Bu denklemden, verilen $r_{\xi,2}(x)$ vektörü ve onun x e bağlı $(2v_{L,\xi} - 2)$ ye kadar olan türevleri yardımıyla $w_{\xi} \in \mathbb{C}^{m_2}$ vektörünün her bir bileşeni bulunur. Buradan, w_{ξ} bileşenleri için herhangi bir sınır koşulu gerekmediği ortaya çıkar. $P_{L,\xi}, Q_{L,\xi}, R_{L,\xi}, N_{L,\xi}$ (ve $m_1, m_2, v_{L,\xi}$) matrisleri ξ parametresine bağlıdır. u_{ξ} nin bileşenleri için (sonuçta $u(t, x)$ için de) $Q_{L,\xi}$ matrisine bağlı bir sınır koşulu verilebilir. Burada ξ parametresinden bağımsız, $\mathfrak{M}_{BC}^{(\xi)}$ indeks kümesi olacak şekilde, $\text{Re}(\xi) \geq \alpha^*$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha^* \geq \alpha$ sayısı olsun. u_{ξ} Laplace dönüşümünün tersi göz önüne alınarak, $\mathfrak{M}_{BC}$ indeks kümesi basit olarak $\mathfrak{M}_{BC} = \mathfrak{M}_{BC}^{(\xi)}$ şeklinde verilebilir.

(2.44) denklemden, diferensiyel cebirsel denklemin diferensiyel indeks tanımına benzer

olarak uzaysal indeksin tanımı için bir tahmin yapılabilir. Bu denklemin x e bağlı bir defa türevi alınırsa,

$$w_{\xi}'(x) = r_{\xi,2}'(x) - N_{L,\xi} r_{\xi,2}'''(x) + \dots (-1)^{v_{L,\xi}-1} N_{L,\xi}^{v_{L,\xi}-1} r_{\xi,2}^{(2v_{L,\xi}-1)}(x), \quad (2.45)$$

denklemini bulunur. Sonuç olarak bir açık diferensiyel denklem elde etmek için, $w_{\xi}(x)$ in x 'e bağlı $(2v_{L,\xi} - 1)$ kere türevinin alınması gereklidir.

2.4.1.1 Tanım: $\alpha^* \in \mathbb{R}^+$, $\alpha^* \geq \alpha$, bütün $\xi \in \mathbb{C}$ ler için $\text{Re}(\xi) \geq \alpha^*$ olacak şekilde bir sayı olsun.

1. $(B, \xi A + C)$ matris klemi regülerdir,
2. $\mathcal{M}_{BC}^{(\xi)}$, ξ den bağımsızdır ve $\mathcal{M}_{BC} = \mathcal{M}_{BC}^{(\xi)}$ dir,
3. $N_{L,\xi}$ nin nilpotentlik derecesi $v_L \geq 1$,

koşulları sağlanırsa $v_{d,x} := 2v_L - 1$ kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemin diferensiyel uzaysal indeksi olarak adlandırılır (Luch ve Strehmel, 1999).

Eğer $v_L = 0$ ise, denklemin uzaysal indeksi sıfır olarak alınır. Tanımdan da anlaşılacağı üzere, uzaysal indeks diferensiyel cebirsel denkleme benzer olarak $v_{d,x}$, Laplace dönüşümü alınmış (2.40) denklemini (2.42)-(2.45) açık diferensiyel denklem sistemine dönüştürebilmek için, $r_{\xi,2}(x)$ (sonuçta $f(t, x)$, $g(x)$) fonksiyonunun x e bağlı en az türevlenebilme sayısıdır.

2.4.1.2 Tanım : $\mathcal{M}_{BC} = \mathcal{M}_{BC}^{(\xi)}$ ve $\text{Re}(\xi) \geq \alpha^*$ olduğunu kabul edelim. Eğer u_j nin Laplace dönüşümü $u_{\xi,j}(\pm l) = \left(Q_{L,\xi} \left(v_{\xi}^T(\pm l), w_{\xi}^T(\pm l) \right)^T \right)_j$ eşitliğini sağlarsa, $j \notin \mathcal{M}_{BC}$ için u_j nin verilen sınır değeri tutarlıdır diye adlandırılır.

2.4.1.3 Örnek : $u = (u_1, u_2)^T$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_{xx} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} u = f, \quad \beta < 0 \quad (2.46)$$

kısmi diferensiyel cebirsel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin diferensiyel uzaysal

indeksi $v_{d,x} = 1$ dir. A matrisi regüler olduğundan, $\mathfrak{M}_{IC} = \{1, 2\}$ dir. Burada $\text{Re}(\xi) \geq 0$ olmak üzere Laplace dönüşümlü kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemin Kronecker dönüşümünü sağlamak için

$$P_{L,\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \xi & \xi - \beta \\ 0 & 1 \\ & \xi - \beta \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Q_{L,\xi} = \begin{pmatrix} -\xi^2 & -1 \\ \xi - \beta & \\ \xi\beta & \\ \xi - \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

matrislerini kullanalım. O zaman yeni denklem,

$$\begin{pmatrix} v_\xi'' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\xi^2}{\beta - \xi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\xi \\ w_\xi \end{pmatrix} = P_{L,\xi} (f_\xi + Ag) \quad (2.48)$$

şeklinde elde edilir. Burada $(v_\xi(x)^T, w_\xi(x)^T)^T = Q_{L,\xi}^{-1} u_\xi(x)$ eşitliğinden,

$$v_\xi = -\frac{1}{\xi} (u_{1\xi} + u_{2\xi}), \quad w_\xi = \frac{1}{\xi - \beta} (\beta u_{1\xi} + \xi u_{2\xi}) \quad (2.49)$$

yazılabilir. Bu denklemlerden de anlaşıldığı gibi $\mathfrak{M}_{BC}^{(\xi)}$ tek bir şekilde tanımlanmayabilir.

Yani, $\text{Re}(\xi) \geq \alpha^*$ için $\mathfrak{M}_{BC}^{(\xi)} = \{1\}$ ya da $\mathfrak{M}_{BC}^{(\xi)} = \{2\}$ seçilebilir. $\mathfrak{M}_{BC}^{(\xi)} = \{1\}$ seçilirse (2.46)

denkleminde u_2 için sınır değerini,

$$\frac{d}{dt} u_2(t, \pm l) = f_2(t, \pm l) - \beta u_1(t, \pm l), \quad u_2(0, \pm l) \quad (2.50)$$

başlangıç değer probleminin çözümüyle bulunur. Bu başlangıç değer problemini çözdükten sonra u_2 için tutarlı bir sınır değer elde edilir.

2.4.2 Fourier Dönüşümü ve Zaman İndeksi

(2.30) kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemi $\phi_k(x)$ skaler fonksiyonu ile çarpalım ve denklemin $[-l, l]$ aralığında x e bağlı integralini alalım. $\phi_k(x)$, $j \in \mathfrak{M}_{BC}$ için $u_j(t, x)$ ye benzer sınır koşuluna sahiptir.

Vektör değerli $\chi(t, x)$ fonksiyonunun k . Fourier katsayısı ϕ_k ya bağlı olarak,

$$\hat{\chi}_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \chi(t, x) \phi_k(x) dx \quad (2.51)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\rho_{ki}(t) = 0 \quad i \in \mathfrak{M}_{BC}$$

$$\rho_{kj}(t) = \frac{1}{l} \left[\phi_k'(x) u_j(t, x) - \phi_k(x) u_{x,j}(t, x) \right]_{x=-l}^{x=l} \quad j \notin \mathfrak{M}_{BC}$$

olmak üzere, (2.30) sistemi

$$A \hat{u}_k'(t) + (\mu_k B + C) \hat{u}_k(t) = \hat{f}_k(t) + B \rho_k(t) =: \bar{f}_k(t) \quad (2.52)$$

diferensiyel cebirsel denkleme dönüştürülebilir. Burada $\rho_k(t) = (\rho_{k1}(t), \dots, \rho_{kn}(t))^T$ dır.

A matrisi singüler ise, (2.52) denklemi (IV) ve (V) özellikleri altında uygun başlangıç değerleri ile birlikte tek çözüme sahip ve μ_k parametresine bağlı bir diferensiyel cebirsel denklemdir. Bir önceki bölümde verilen Laplace dönüşümünde olduğu gibi, (IV) özelliğinden, $R_{F,k} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$, ve $N_{F,k} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ bir nilpotent matris olmak üzere ($n_1 + n_2 = n$ ve $N_{F,k}$ nın Riesz indeksi $v_{F,k}$),

$$P_{F,k} A Q_{F,k} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N_{F,k} \end{pmatrix}, \quad P_{F,k} (\mu_k B + C) Q_{F,k} = \begin{pmatrix} R_{F,k} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

olacak şekilde $P_{F,k}, Q_{F,k}$ regüler matrisler bulunabilir. Bu bağıntılarla (2.52) denklemi,

$$y_k'(t) + R_{F,k} y_k(t) = s_{k,1}(t), \quad (2.54)$$

$$N_{F,k} z_k'(t) + z_k(t) = s_{k,2}(t), \quad (2.55)$$

ikili denklem sistemine dönüşür. Burada, $(y_k(t)^T, z_k(t)^T)^T := Q_{F,k}^{-1} \hat{u}_k(t)$ ve $(s_{k,1}(t)^T, s_{k,2}(t)^T)^T := P_{F,k} \bar{f}_k(t)$ dir. (2.55) denkleminin çözümü,

$$z_k(t) = \sum_{i=0}^{v_{F,k}-1} (-N_{F,k})^i s_{k,2}^{(i)}(t) \quad (2.56)$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç değerleri keyfi olarak açıklanabilen $\hat{u}_k$ nın bileşenlerinin indis kümesi $\mathfrak{M}_{IC}^{(k)} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ şeklinde tanımlanır. O zaman u nun fourier analizi altında $\mathfrak{M}_{IC}^{(k)}$ nin, $k \in N_+$ dan bağımsız ve $\mathfrak{M}_{IC}^{(k)} = \mathfrak{M}_{IC}$ olduğu kabul edilir.

Şimdi indeksi tanımlayabiliriz.

2.4.2.1 Tanım: $k = 1, 2, \dots$ için,

1. $(A, \mu_k B + C)$ matris klemi regülerdir,
2. $\mathfrak{M}_{IC}^{(k)}$ $k \in N_+$ dan bağımsız ve $\mathfrak{M}_{IC}^{(k)} = \mathfrak{M}_{IC}$,
3. $N_{F,k}$ nın nilpotentlik derecesi $v_{F,k} = v_F$,

olduğunda (2.30) denkleminin $v_{d,t} = v_F$ tek diferensiyel zaman indeksine sahip olduğu söylenir (Luch ve Strehmel, 1999).

2.5 Kuvvet Serileri

2.5.1 Tanım: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots + a_n (x-c)^n + \dots \quad (2.57)$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir. Eğer bu tanımda $c = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2.58)$$

elde ediiir. Ayrıca $x = c$ olması durumunda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0$ olur.

2.5.2 Kuvvet Serilerinin Aritmetiği*

$f(t)$, $g(t)$ ve $h(t)$ birer kuvvet serisi olmak üzere;

katsayıları arasında toplama çıkarma ve çarpma işlemlerinde şu özellikler vardır.

*Barrio, R. (2005), "Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs", Applied Mathematics Computation, 163 525-545

$$\begin{aligned}
h(t) &= f(t) \pm g(t), h^{[n]}(t) = f^{[n]}(t) \pm g^{[n]}(t); \\
h(t) &= f(t) \cdot g(t), h^{[n]}(t) = \sum_{i=0}^n f^{[n-i]}(t) g^{[i]}(t); \\
h(t) &= f(t) / g(t), g(t) \neq 0
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Ayrıca;

$$\begin{aligned}
h^{[n]}(t) &= \frac{1}{g^{[0]}(t)} \left\{ f^{[n]}(t) - \sum_{i=1}^n h^{[n-i]}(t) g^{[i]}(t) \right\}; \\
h(t) &= f(t)^\alpha, h^{[0]}(t) = \left(f^{[0]}(t) \right)^\alpha, n > 0 \text{ için}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$h^{[n]}(t) = \frac{1}{n f^{[0]}(t)} \sum_{i=0}^{n-1} (n\alpha - i(\alpha + 1)) f^{[n-i]}(t) h^{[i]}(t);$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= e^{(f(t))}, h^{[0]}(t) = e^{(f^{[0]}(t))} \text{ ve } n > 0 \text{ için,} \\
h^{[n]}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (n-1) f^{[n-i]}(t) h^{[i]}(t);
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \ln(f(t)), h^{[0]}(t) = \ln(f^{[0]}(t)) \text{ ve } n > 0 \text{ için} \\
h^{[n]}(t) &= \frac{1}{f^{[0]}(t)} \left\{ f^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) h^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t) \right\};
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \cos(f(t)) \text{ ve } h(t) = \sin(f(t)), \\
g^{[0]}(t) &= \cos(f^{[0]}(t)), g^{[n]}(t) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i h^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t);
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$h^{[0]}(t) = \sin(f^{[0]}(t)), h^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i g^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t);$$

$$h(t) = \arctan(f(t)), h^{[0]}(t) = \arctan(f^{[0]}(t)) \text{ ve } n > 0 \text{ için}$$

$$\begin{cases} f_2^{[n]}(t) = \sum_{i=0}^n f^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t), \\ h^{[n]}(t) = \frac{1}{1 + (f^{[0]}(t))^2} \left(f^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i h^{[i]}(t) f_2^{[n-i]}(t) \right). \end{cases} \tag{2.64}$$

şeklinde bağıntılar vardır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm

Bu kısımda diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümünde kullanacağımız önemli tanımlar vereceğiz.

3.1.1 Tanım : Bir $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $y(x)$ orijinal fonksiyon, $Y(k)$ ise T-fonksiyonu diye adlandırılan dönüşüm fonksiyonudur.

3.1.2 Tanım : $Y(k)$ nın ters diferensiyel dönüşümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilebilir. (3.3) denkleminde de anlaşıldığı gibi diferensiyel dönüşüm düşüncesi Taylor seri açılımından türetilmiştir. Fakat metot sembolik olarak türevleri hesaplamaz. Bununla birlikte, ilişkili türevler orijinal fonksiyonun dönüşüm denklemleriyle tanımlanmış iteratif bir yolla hesaplanır. Bu tezde, küçük harfle orijinal fonksiyon, büyük harfle dönüşüm fonksiyonu gösterilecektir.

Şimdi bazı fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları için temel teoremleri verelim.

3.1.3 Teorem : $f(x) = g(x) \pm h(x)$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = G(k) \pm H(k) \text{ şeklindedir (Arikoglu ve Ozkol, 2006a).}$$

İspat : Tanım 3.1.1 den,

$$G(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.4)$$

$$H(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k h(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.5)$$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x) \pm h(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak $F(k) = G(k) \pm H(k)$ eşitliği sağlanır.

3.1.4 Teorem : $f(x) = cg(x)$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu, $F(k) = cG(k)$ şeklindedir (Arikoglu ve Ozkol, 2006a).

İspat : Tanım 3.1.1 den,

$$G(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.7)$$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k cg(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.8)$$

denklemleri yazılır. (3.7) ve (3.8) denklemlerinden $F(k) = cG(k)$ eşitliği elde edilir.

3.1.5 Teorem : Eğer $f(x) = \frac{dg(x)}{dx}$ şeklinde verilirse, dönüşüm fonksiyonu $F(k) = (k+1)G(k+1)$ olur (Arikoglu ve Ozkol, 2006a).

İspat : Tanım 3.1.1 den,

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{dg(x)}{dx} \right] \right]_{x=0} \\ &= \frac{(k+1)}{(k+1)!} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} g(x) \right]_{x=0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

yazılır. Buradan $F(k) = (k+1)G(k+1)$ elde edilir.

3.1.6 Teorem : $f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu

$F(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+n)G(k+n)$ şeklindedir(Arikoglu ve Ozkol, 2006a).

İspat : Tanım 3.1.1 den,

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{d^n g(x)}{dx^n} \right] \right]_{x=0} \\ &= \frac{(k+1)\dots(k+n)}{(k+n)!} \left[\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} g(x) \right]_{x=0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Buradan $F(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+n)G(k+n)$ eşitliği sağlanmış olur.

3.1.7 Teorem : $f(x) = g(x).h(x)$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r) \text{ şeklindedir(Arikoglu ve Ozkol, 2006a).}$$

İspat : Tanım 3.1.1 den hareketle,

$$\begin{aligned} F(0) &= [g(x).h(x)]_{x=0} = G(0).H(0) \\ F(1) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} [g(x).h(x)]_{x=0} \\ &= \left[\frac{dg(x)}{dx} h(x) + g(x) \frac{dh(x)}{dx} \right]_{x=0} \\ &= G(0).H(1) + G(1).H(0) \\ F(2) &= G(0).H(2) + G(1).H(1) + G(2).H(0) \\ F(3) &= G(0).H(3) + G(1).H(2) + G(2).H(1) + G(3).H(0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

yazılabilir. Genelleme yapılırsa $F(k) = \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r)$ eşitliğini elde edilir.

3.1.8 Teorem : $f(x) = x^n$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu, $\delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k=n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$ için

$F(k) = \delta(k-n)$ şeklindedir(Arikoglu ve Ozkol, 2006a).

İspat : Tanım 3.1.1 den,

$$\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} = \begin{cases} k!, & k=n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (3.12)$$

eşitliğinden

$$\delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (3.13)$$

olmak üzere,

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} = \delta(k-n) \quad (3.14)$$

bulunur.

3.1.9 Teorem: $f(x) = g(x+a)$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu $N \rightarrow \infty$ için

$$F(k) = \sum_{h=k}^N \binom{h}{k} a^{h-k} G(h) \text{ şeklindedir (Arikoglu ve Ozkol, 2006a).} \quad (3.15)$$

İspat : Tanım 3.1.2 den,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} G(k) (x+a)^k \\ &= G(0) + aG(1) + xG(1) + a^2G(2) + 2axG(2) + x^2G(2) \\ &\quad + a^3G(3) + 3a^2xG(3) + 3x^2aG(3) + x^3G(3) + \dots \\ &= [G(0) + aG(1) + a^2G(2) + a^3G(3) + \dots] + x[G(1) + \\ &\quad + 2aG(2) + 3a^2G(3) + \dots] + x^2[G(2) + 3aG(3) + \dots] + \dots \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} a^h G(h) + x \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h!}{1!(h-1)!} a^{h-1} G(h) + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

dir. Buradan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=k}^{\infty} \binom{h}{k} a^{h-k} G(h) x^k \quad (3.16)$$

yazılabilir. Tanım 3.1.2 den

$$F(k) = \sum_{h=k}^N \binom{h}{k} a^{h-k} G(h) \quad (3.17)$$

şeklinde bulunmuş olur.

3.1.10 Teorem: $f(x) = \frac{d^n g(x+a)}{dx^n}$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu $N \rightarrow \infty$ için

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \sum_{h=k+n}^N \binom{h}{k+n} a^{h-k-n} G(h) \text{ şeklindedir (Arikoglu ve Ozkol, 2006a).}$$

İspat : $g(x+a)$ nin diferensiyel dönüşümü $C(k)$ olsun. 3.1.6 Teorem den $f(x)$ in diferensiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} C(k+n) \quad (3.18)$$

olur. 3.1.9 Teorem den

$$C(k+n) = \sum_{h=k+n}^N \binom{h}{k+n} a^{h-k-n} G(h) \quad (3.19)$$

yazılabilir. (3.19) ifadesi (3.18) yerine yazılırsa

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \sum_{h=k+n}^N \binom{h}{k+n} a^{h-k-n} G(h) \quad (3.20)$$

bulunur.

Reel uygulamalarda, $y(x)$ fonksiyonu sonlu seri ile temsil edilir ve (3.2) denklemi

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k Y(k)$$

eşitliğinin ihmal edilecek kadar küçük olduğu görülür.

3.2 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm

3.2.1 Tanım : $w(x, y)$ fonksiyonunun iki boyutlu diferensiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{x=0, y=0} \quad (3.21)$$

olarak tanımlanır. Burada $w(x, y)$ orijinal fonksiyon, $W(k, h)$ dönüşüm fonksiyonudur. (kısaca T – fonksiyonu da denilir)

3.2.2 Tanım : $W(k, h)$ ın ters diferensiyel dönüşümü

$$w(x, y) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (3.22)$$

olarak tanımlanır. (3.21) ve (3.22) denklemlerinden

$$w(x, y) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{x=0, y=0} x^k y^h \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) denkleminde de anlaşılacağı gibi iki boyutlu diferensiyel dönüşüm iki boyutlu taylor seri açılımından türetilmiştir.

Şimdi (3.21) ve (3.22) denklemlerini kullanarak kolayca ispatlayabileceğimiz dönüşüm fonksiyonlarıyla ilgili temel teoremler verelim. Teorem 3.2.10, teorem 3.2.11, teorem 3.2.12 ilk olarak bu tezde ifade edilmiş ve ilk defa burada ispatlanmıştır.

3.2.3 Teorem: $w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu $W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$ şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{x=0, y=0} \quad (3.24)$$

$$V(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{x=0, y=0} \quad (3.25)$$

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \pm v(x, y) \right]_{x=0, y=0} \quad (3.26)$$

denklemleri elde edilebilir. (3.24), (3.25), (3.26) denklemleri kullanılarak

$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$ eşitliği sağlanır.

3.2.4 Teorem: $w(x, y) = \lambda u(x, y)$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu $W(k, h) = \lambda U(k, h)$ şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (3.27)$$

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [\lambda w(x, y)] \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (3.28)$$

elde edilebilir. (3.27) ve (3.28) denklemlerinden $W(k, h) = \lambda U(k, h)$ elde edilir.

3.2.5 Teorem: $w(x, y) = \partial u(x, y) / \partial x$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu $W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$ şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \frac{k+1}{(k+1)!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

yazılabilir. Buradan $W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$ dir.

3.2.6 Teorem: $w(x, y) = \partial u(x, y) / \partial y$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu $W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$ şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \frac{h+1}{k!(h+1)!} \left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial y^{h+1}} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

yazılabilir. Buradan $W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$ dir.

3.2.7 Teorem : $w(x, y) = \partial^{r+s} u(x, y) / \partial x^r \partial y^s$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu

$$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s)$$

şeklindedir(Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right] \right]_{x=0, y=0} \\ &= \frac{(k+1)\dots(k+s)(h+1)\dots(h+s)}{(k+r)!(h+s)!} \left[\frac{\partial^{k+h+r+s} u(x, y)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} \right]_{x=0, y=0} \end{aligned} \quad (3.31)$$

yazılabilir. Buradan $W(k, h) = (k+1)\dots(k+r)(h+1)\dots(h+s)U(k+r, h+s)$ elde edilir.

3.2.8 Teorem: $w(x, y) = u(x, y).v(x, y)$ için dönüşüm fonksiyonu

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s) \text{ şeklindedir(Chen ve Ho, 1999).}$$

İspat : Tanım 3.2.1 den hareketle,

$$W(0, 0) = \left[u(x, y).v(x, y) \right]_{x=0, y=0} = U(0, 0)V(0, 0), \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} W(1, 0) &= \frac{1}{1!0!} \frac{\partial}{\partial x} \left[u(x, y)v(x, y) \right]_{x=0, y=0} \\ &= \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} v(x, y) + u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0, y=0} \\ &= U(1, 0)V(0, 0) + U(0, 0)V(1, 0), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} W(0, 1) &= U(0, 1)V(0, 0) + U(0, 0)V(0, 1), \\ W(2, 0) &= U(2, 0)V(0, 0) + U(1, 0)V(1, 0) + U(0, 0)V(2, 0), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$W(1, 1) = U(1, 1)V(0, 0) + U(1, 0)V(0, 1) + U(0, 1)V(1, 0) + U(0, 0)V(1, 1), \quad (3.35)$$

$$W(0, 2) = U(0, 2)V(0, 0) + U(0, 1)V(0, 1) + U(0, 0)V(0, 2), \quad (3.36)$$

$$W(1,2) = U(1,2)V(0,0) + U(1,1)V(0,1) + U(1,0)V(0,2) + U(0,2)V(1,0) + U(0,1)V(1,1) + U(0,0)V(1,2), \quad (3.37)$$

$$W(2,1) = U(2,1)V(0,0) + U(2,0)V(0,1) + U(1,1)V(1,0) + U(1,0)V(1,1) + U(0,1)V(2,0) + U(0,0)V(2,1), \quad (3.38)$$

$$W(2,2) = U(2,2)V(0,0) + U(2,1)V(0,1) + U(2,0)V(0,2) + U(1,2)V(1,0) + U(1,1)V(1,1) + U(1,0)V(1,2) + U(0,2)V(2,0) + U(0,1)V(2,1) + U(0,0)V(2,2). \quad (3.39)$$

yazılabilir. Genelleme yapılırsa $W(k,h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r,h-s)V(k-r,s)$ eşitliği elde edilir.

3.2.9 Teorem : $w(x,y) = x^m y^n$ şeklinde bir fonksiyon ise diferensiyel dönüşüm fonksiyonu

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}, \quad \delta(h-n) = \begin{cases} 1, & h=n \\ 0, & h \neq n \end{cases}. \quad (3.40)$$

olmak üzere, $W(k,h) = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n)$ şeklinde olur (Chen ve Ho, 1999).

İspat :

$$\left[\frac{\partial^{k+h} w(x,y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{x=0, y=0} = \begin{cases} k!h!, & k=m \text{ ve } h=n, \\ 0, & k \neq m \text{ ya da } h \neq n. \end{cases} \quad (3.41)$$

eşitliğinden

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}, \quad \delta(h-n) = \begin{cases} 1, & h=n \\ 0, & h \neq n \end{cases}. \quad (3.42)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} W(k,h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial w(x,y)^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{x=0, y=0} \\ &= \delta(k-m, h-n) \\ &= \delta(k-m)\delta(h-n). \end{aligned} \quad (3.43)$$

yazılır.

3.2.10 Teorem : $w(x, y) = g(x + a, y)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{p=k}^N \binom{p}{k} a^{p-k} G(p, h) \text{ şeklinde olur.}$$

İspat: Tanım 3.2.2 den,

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} G(k, h) (x+a)^k y^h \\ &= G(0,0) + G(0,1)y + aG(1,0) + G(1,0)x + G(0,2)y^2 \\ &\quad + G(1,1)xy + aG(1,1)y + a^2G(2,0) + 2aG(2,0)x \\ &\quad + G(2,0)x^2 + G(0,3)y^3 + G(1,2)xy^2 + aG(1,2)y^2 \\ &\quad + G(2,1)x^2y + 2aG(2,1)xy + a^2G(2,1)y + a^3G(3,0) \\ &\quad + 3a^2G(3,0)x + 3aG(3,0)x^2 + G(3,0)x^3 + \dots \\ &= [G(0,0) + aG(1,0) + a^2G(2,0) + a^3G(3,0) + \dots] \\ &\quad + x[G(1,0) + 2aG(2,0) + 3a^2G(3,0) + \dots] + y[G(0,1) \\ &\quad + aG(1,1) + a^2G(2,1) + \dots] + x^2[G(2,0) + 3aG(3,0) + \dots] \\ &\quad + xy[G(1,1) + 2aG(2,1) + \dots] + y^2[G(0,2) + aG(1,2) + \dots] + \dots \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} a^p G(p,0) + x \sum_{p=1}^{\infty} p a^{p-1} G(p,0) + y \sum_{p=0}^{\infty} a^p G(p,1) \\ &\quad + x^2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p!}{(p-2)!2!} a^{p-2} G(p,0) + xy \sum_{p=1}^{\infty} p a^{p-1} G(p,1) + \dots \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$w(x, y) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=k}^{\infty} \binom{p}{k} a^{p-k} G(p, h) x^k y^h \quad (3.44)$$

yazarız. Tanım 3.2.2 den,

$$W(k, h) = \sum_{p=k}^N \binom{p}{k} a^{p-k} G(p, h) \quad (3.45)$$

buluruz.

3.2.11 Teorem : $w(x, y) = g(x + a, y + b)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{p=k}^N \sum_{q=h}^N \binom{q}{h} \binom{p}{k} a^{p-k} b^{q-h} G(p, q) \text{ şeklinde olur.}$$

İspat: Tanım 3.2.2 den,

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} G(k, h) (x+a)^k (y+b)^h \\
 &= G(0,0) + G(1,0)x + aG(1,0) + G(0,1)y + bG(0,1) + G(2,0)x^2 \\
 &\quad + 2aG(2,0)x + a^2G(2,0) + G(1,1)xy + bG(1,1)x + aG(1,1)y \\
 &\quad + abG(1,1) + G(0,2)y^2 + 2bG(0,2)y + b^2G(0,2) + G(3,0)x^3 \\
 &\quad + 3aG(3,0)x^2 + 3a^2G(3,0)x + a^3G(3,0) + G(2,1)x^2y + \dots \\
 &= [G(0,0) + aG(1,0) + bG(0,1) + a^2G(2,0) + abG(1,1) + \dots] \\
 &\quad + [G(1,0) + 2aG(2,0) + bG(1,1) + 3a^2G(3,0) + 2abG(2,1) + \dots]x \\
 &\quad + [G(0,1) + aG(1,1) + 2bG(0,2) + a^2G(2,1) + \dots]y + \dots \\
 &= \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N a^p b^q G(p, q) + x \sum_{p=1}^N \sum_{q=0}^N p a^{p-1} b^q G(p, q) + y \sum_{p=0}^N \sum_{q=1}^N q a^p b^{q-1} G(p, q) \\
 &\quad + x^2 \sum_{p=2}^N \sum_{q=0}^N \frac{p!}{(p-2)!2!} a^{p-2} b^q G(p, q) + xy \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N p q a^{p-1} b^{q-1} G(p, q) + \dots
 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$w(x, y) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=k}^N \sum_{q=h}^N \binom{q}{h} \binom{p}{k} a^{p-k} b^{q-h} G(p, q) x^k y^h \quad (3.46)$$

yazarız. Tanım 3.2.2 den,

$$W(k, h) = \sum_{p=k}^N \sum_{q=h}^N \binom{q}{h} \binom{p}{k} a^{p-k} b^{q-h} G(p, q) \quad (3.47)$$

buluruz.

3.2.12 Teorem: $w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} g(x+a, y+b)}{\partial x^r \partial y^s}$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \frac{(k+r)! (h+s)!}{k! h!} \sum_{p=k+r}^N \sum_{q=h+s}^N \binom{q}{h+s} \binom{p}{k+r} a^{p-k-r} b^{q-h-s} G(p, q) \text{ şeklindedir.}$$

İspat: $g(x+a, y+b)$ nın diferensiyel dönüşümü $C(k, h)$ olsun. Teorem 3.2.7 den $w(x, y)$ in diferensiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \frac{(k+r)! (h+s)!}{k! h!} C(k+r, h+s) \quad (3.48)$$

olur. Teroem 3.2.11 den

$$C(k+r, h+s) = \sum_{p=k+r}^N \sum_{q=h+s}^N \binom{q}{h+s} \binom{p}{k+r} a^{p-k-r} b^{q-h-s} G(p, q) \quad (3.49)$$

yazarız. (3.49) ifadesi (3.48) yerine yazarsak

$$W(k, h) = \frac{(k+r)! (h+s)!}{k! h!} \sum_{p=k+r}^N \sum_{q=h+s}^N \binom{q}{h+s} \binom{p}{k+r} a^{p-k-r} b^{q-h-s} G(p, q) \quad (3.50)$$

ifadesini buluruz.

Reel uygulamalarda, $w(x, y)$ fonksiyonu sonlu seri ile temsil edilir ve (3.21) denklemi

$$w(x, y) = \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n W(k, h) x^k y^h$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$w(x, y) = \sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} W(k, h) x^k y^h$$

eşitliğinin ihmal edilecek kadar küçük olduğu görülür.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI

4.1 Test Problemi

$f = (e^t, \cos t)^T$ sağ yan fonksiyonu ve $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ başlangıç değerleri ile verilen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = f \quad (4.1)$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel cebirsel denklemi göz önüne alalım. Sistemin tam çözümleri

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t + \sin t, \\ x_2(t) &= \cos t, \end{aligned} \quad (4.2)$$

olarak verilmiştir. Öncelikli olarak $\lambda A + B$ matris kalemının determinantına bakalım.

$$\det(\lambda A + B) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (4.3)$$

olduğundan, Teorem 2.2.2.1 den verilen diferensiyel cebirsel denklemi çözülebilir. Teorem 2.2.2.2 den

$$PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PBQ = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

olacak şekilde nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. Hatta, $\det(\lambda A + B)$ sabit olduğundan,

$PAQ = N, PBQ = I$ alınabilir. Bu özelliklerden yararlanarak P ve Q matrisleri

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

şeklinde seçilebilir. Buradan,

$$PAQ = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PBQ = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

olacaktır. N matrisinin nilpotentlik derecesi ($N^k = 0$ eşitliğini sağlayan k sayısı) 2(iki) olduğundan, diferensiyel cebirsel denklemin indeksinin 2(iki) olduğu söylenir.

Şimdi verilen sistemin diferensiyel dönüşüm yöntemi yardımıyla yaklaşık analitik çözümünü bulmaya çalışalım. (4.1) denklemi ile verilen,

$$x_2'(t) + x_1(t) = e^t \quad (4.7)$$

$$x_2(t) = \cos t$$

sisteminin diferensiyel dönüşümünü alınırsa,

$$(k+1)X_2(k+1) + X_1(k) = F_1(k) \quad (4.8)$$

$$X_2(k) = F_2(k) \quad (4.9)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $F_1(k)$ ve $F_2(k)$, sırasıyla, (4.7) denklemindeki sağ yan fonksiyonlarının Taylor serilerindeki terimlerinin katsayılarıdır. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Taylor serisi,

$$f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad f_2(t) = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2} t^n}{n!} \quad (4.10)$$

şeklinde olacaktır. (4.10) ifadesinden $F_2(k)$ değerleri bilindiğinden, $x_2(t)$ fonksiyonun Taylor serisi elde edilebilir Buradan

$$x_2(t) = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2} t^n}{n!} \quad (4.11)$$

yazılır. (4.8) denklemi

$$X_1(k) = F_1(k) - (k+1)X_2(k+1) \quad (4.12)$$

şeklinde düzenlenebilir, (4.12) denkleminde $k=1$ yazılırsa,

$$X_1(1) = F_1(1) - 2X_2(2) = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad (4.13)$$

bulunur, (4.12) denkleminde $k=2$ yazılırsa,

$$X_1(2) = F_1(2) - 3X_2(3) = \frac{1}{2} - 3 \cdot 0 = \frac{1}{2} \quad (4.14)$$

bulunur. (4.12) denkleminde $k = 3$ yazılırsa,

$$X_1(3) = F_1(3) - 4X_2(4) = \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{24} = 0 \quad (4.15)$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse $X_1(k)$ ve $X_2(k)$ katsayıları

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 1, & X_1(1) &= 2, & X_1(2) &= \frac{1}{2}, & X_1(3) &= 0, & X_1(4) &= \frac{1}{24}, \\ X_1(5) &= \frac{1}{60}, & X_1(6) &= \frac{1}{720}, & X_1(7) &= 0, & X_1(8) &= \frac{1}{40320}, \dots \\ X_2(0) &= 1, & X_2(1) &= 0, & X_2(2) &= -\frac{1}{2}, & X_2(3) &= 0, & X_2(4) &= \frac{1}{24}, \\ X_2(5) &= 0, & X_2(6) &= -\frac{1}{720}, & X_2(7) &= 0, & X_2(8) &= \frac{1}{40320}, \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

olarak bulunur. Buradan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin yaklaşık analitik çözümleri sırasıyla

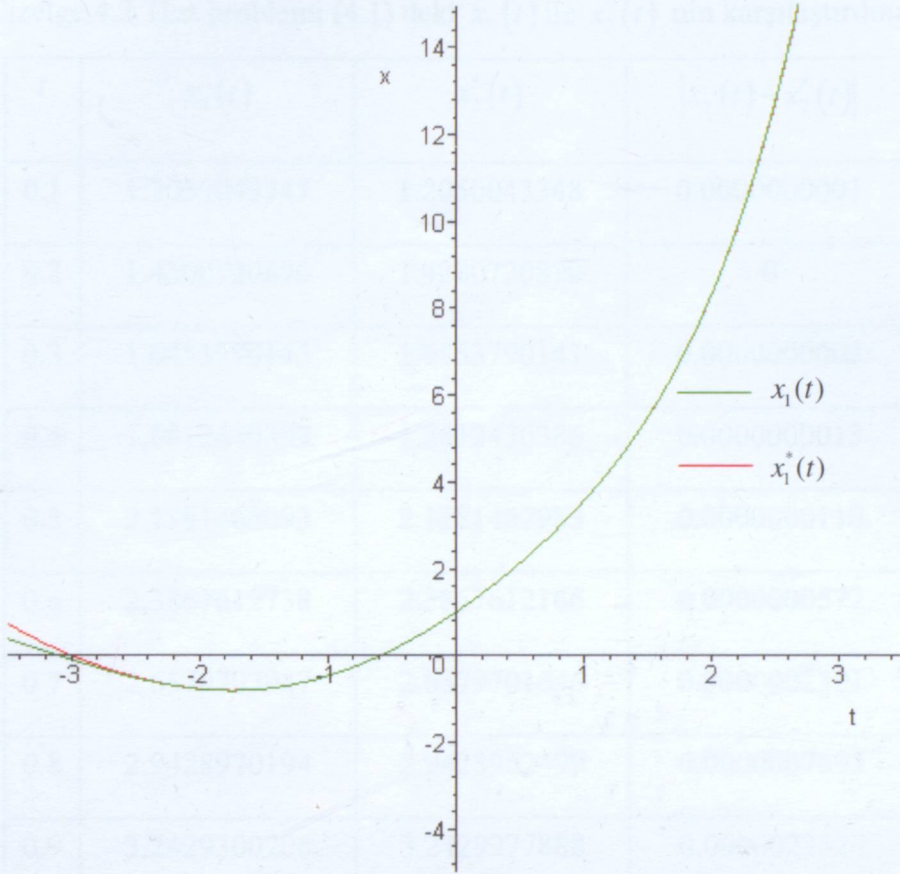
$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{40320}t^8 + \dots \\ x_2^*(t) &= 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{40320}t^8 - \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklinde elde edilir.

Çizelge 4.1, çizelge 4.2, tablo 4.1 ve tablo 4.2 de tam çözümle yaklaşık analitik çözümler karşılaştırılmıştır. ($x(t)$ ile tam çözüm, $x^*(t)$ ile de yaklaşık analitik çözüm gösterilmiştir. Ayrıca fonksiyonlar $t = 0$ civarında seriye açıldığından çizelgelerde $t = 0$ a yakın değerler için karşılaştırma yapılmıştır.)

Çizelge 4.1 Test problemi (4.1) deki $x_1(t)$ ile $x_1^*(t)$ nin karşılaştırılması.

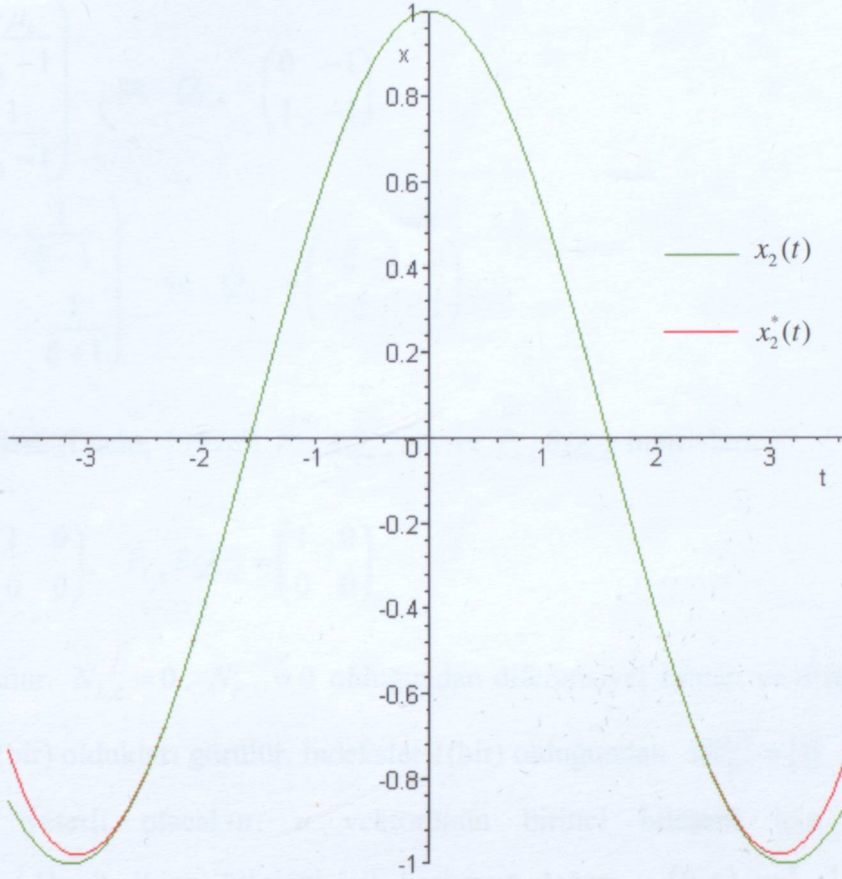
t	$x_1(t)$	$x_1^*(t)$	$ x_1(t) - x_1^*(t) $
0.1	0.9950041653	0.9950041653	0
0.2	0.9800665778	0.9800665779	0.0000000001
0.3	0.9553364891	0.9553364891	0
0.4	0.9210609940	0.9210609941	0.0000000001
0.5	0.8775825619	0.8775825622	0.0000000003
0.6	0.8253356149	0.8253356166	0.0000000017
0.7	0.7648421873	0.7648421951	0.0000000078
0.8	0.6967067093	0.6967067388	0.0000000395
0.9	0.6216099683	0.6216100638	0.0000000955
1.0	0.5403023059	0.5403025794	0.0000002735



Şekil 4.1 Test problemi (4.1) deki $x_1(t)$ ve $x_1^*(t)$ in grafiği

Çizelge 4.2 Test problemi (4.1) deki $x_2(t)$ ile $x_2^*(t)$ nin karşılaştırılması.

t	$x_2(t)$	$x_2^*(t)$	$ x_2(t) - x_2^*(t) $
0.1	1.2050043347	1.2050043348	0.0000000001
0.2	1.4200720890	1.4200720890	0
0.3	1.6453790143	1.6453790141	0.0000000002
0.4	1.8812430399	1.8812430386	0.0000000013
0.5	2.1281468093	2.1281467983	0.0000000110
0.6	2.3867612738	2.3867612166	0.0000000572
0.7	2.6579703947	2.6579701646	0.0000002301
0.8	2.9428970194	2.9428962499	0.0000007695
0.9	3.2429300208	3.2429277888	0.0000022320
1.0	3.5597528133	3.5597470238	0.0000047895



Şekil 4.2 Test problemi (4.1) deki $x_2(t)$ ve $x_2^*(t)$ in grafiği

4.2 Test Problemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u_{xx} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u = f \quad (4.18)$$

kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemi göz önüne alalım. Burada $x \in [-1, 1]$, $t \in [0, \infty)$ tam çözümler $u_1(t, x) = (x^3 - x)e^{-t}$, $u_2(t, x) = (x^4 - 1)\cos t$ ve $f = \left((x^4 - 1)(\cos t - \sin t) - 6xe^{-t}, -e^{-t}(x^3 + 5x) \right)^T$ olarak verilsin. Verilen sistemin diferensiyel zaman indeksini ve diferensiyel uzaysal indeksini bulmaya çalışalım. $P_{F,k}$, $Q_{F,k}$, $P_{L,\xi}$, $Q_{L,\xi}$ nonsingüler matrisleri

$$P_{F,k} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\mu_k}{\mu_k - 1} \\ 0 & \frac{1}{\mu_k - 1} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Q_{F,k} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$P_{L,\xi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\xi + 1} \\ \frac{1}{\xi + 1} & -\frac{1}{\xi + 1} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Q_{L,\xi} = \begin{pmatrix} -\xi - 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde seçilirse (Lucht, 1997a), $P_{F,k}AQ_{F,k}$, ve $P_{L,\xi}BQ_{L,\xi}$ matrisleri,

$$P_{F,k}AQ_{F,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{L,\xi}BQ_{L,\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

şeklinde bulunur. $N_{L,\xi} = 0$, $N_{F,k} = 0$ olduğundan diferensiyel zaman ve diferensiyel uzaysal indekslerin 1(bir) oldukları görülür. İndeksler 1(bir) olduğundan $\mathfrak{M}_{BC}^{(\xi)} = \{1\}$ ve $\mathfrak{M}_{IC}^{(k)} = \{2\}$ çözüm için yeterli olacaktır. u vektörünün birinci bileşeni için sınır değerleri $u_1(t, 1) = u_1(t, -1) = 0$, ikinci bileşeni için başlangıç değeri $u_2(0, x) = x^4 - 1$ olarak alınırsa, (4.18) sistemi

$$\begin{aligned} u_{1t}(t, x) + u_{2t}(t, x) - u_{1xx}(t, x) + u_1(t, x) + u_2(t, x) &= f_1(t, x) \\ -u_{1xx}(t, x) - u_1(t, x) &= f_2(t, x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

şeklinde olur. Bu sisteme diferensiyel dönüşüm uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (k+1)U_1(k+1, h) + (k+1)U_2(k+1, h) - (h+1)(h+2)U_1(k, h+2) \\ + U_1(k, h) + U_2(k, h) &= F_1(k, h) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$-(h+1)(h+2)U_1(k, h+2) - U_1(k, h) = F_2(k, h) \quad (4.23)$$

elde edilir. Burada f_1 ve f_2 fonksiyonlarının $x = 0$, $t = 0$ civarındaki Taylor serileri,

$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= -1 + t - 6x + \frac{1}{2}t^2 + 6xt - \frac{1}{6}t^3 - 3xt^2 - \frac{1}{24}t^4 + x^4 + xt^3 - x^4t + \frac{1}{120}t^5 \\ &\quad - \frac{1}{4}xt^4 + \frac{1}{720}t^6 - \frac{1}{2}x^4t^2 + \frac{1}{20}xt^5 + \frac{1}{6}x^4t^3 - \frac{1}{5040}t^7 - \frac{1}{120}xt^6 + \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$f_2(t, x) = -5x + 5xt - \frac{5}{2}xt^2 - x^3 + \frac{5}{6}xt^3 + x^3t - \frac{1}{2}x^3t^2 - \frac{5}{24}xt^4 + \frac{1}{6}x^3t^3 + \frac{1}{24}xt^5 - \frac{1}{144}xt^6 - \frac{1}{24}x^3t^4 + \dots \quad (4.25)$$

şeklindedir. Burada (4.22) ve (4.23) denklemindeki $F_1(k, h)$ ve $F_2(k, h)$ değerleri (4.24) ve (4.25) de verilen serinin katsayılarıdır. Birinci bileşen için verilen sınır değerlerini teorem 3.2.10 da yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=0}^7 U_1(j, i) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 7 \quad (4.26)$$

$$\sum_{i=0}^7 (-1)^i U_1(j, i) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 7 \quad (4.27)$$

fadeleri elde edilir. (4.23) denkleminde $k = 0$ ve $h = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri sırasıyla yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2U_1(0, 2) + U_1(0, 0) &= 0, & 20U_1(0, 5) + U_1(0, 3) &= 1 \\ 6U_1(0, 3) + U_1(0, 1) &= 5, & 30U_1(0, 6) + U_1(0, 4) &= 0 \\ 12U_1(0, 4) + U_1(0, 2) &= 0, & 42U_1(0, 7) + U_1(0, 5) &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.26) ve (4.27) denklemlerinde $j = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} U_1(0, 0) + U_1(0, 1) + U_1(0, 2) + U_1(0, 3) + U_1(0, 4) + U_1(0, 5) + U_1(0, 6) + U_1(0, 7) &= 0 \\ U_1(0, 0) - U_1(0, 1) + U_1(0, 2) - U_1(0, 3) + U_1(0, 4) - U_1(0, 5) + U_1(0, 6) - U_1(0, 7) &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

fadeleri bulunur. Buradan (4.28) ve (4.29) denklemlerinden

$$\begin{aligned} U_1(0, 0) &= 0, & U_1(0, 1) &= -1, & U_1(0, 2) &= 0, & U_1(0, 3) &= 1, \\ U_1(0, 4) &= 0, & U_1(0, 5) &= 0, & U_1(0, 6) &= 0, & U_1(0, 7) &= 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

katsayıları bulunur. Bu şekilde (4.23), (4.27) ve (4.28) denklemlerinden u_1 in diğer katsayıları da

$$\begin{aligned}
U_1(1,0) &= 0, & U_1(1,1) &= 1, & U_1(1,2) &= 0, & U_1(1,3) &= -1, & U_1(1,4) &= 0, \\
U_1(1,5) &= 0, & U_1(1,6) &= 0, & U_1(2,0) &= 0, & U_1(2,1) &= -\frac{1}{2}, & U_1(2,2) &= 0, \\
U_1(2,3) &= \frac{1}{2}, & U_1(2,4) &= 0, & U_1(2,5) &= 0, & U_1(3,0) &= 0, & U_1(3,1) &= \frac{1}{6}, \\
U_1(3,2) &= 0, & U_1(3,3) &= -\frac{1}{6}, & U_1(3,4) &= 0, & U_1(4,0) &= 0, & U_1(4,1) &= -\frac{1}{24}, \\
U_1(4,2) &= 0, & U_1(4,3) &= \frac{1}{24}, & U_1(5,0) &= 0, & U_1(5,1) &= \frac{1}{120}, & U_1(5,2) &= 0, \\
U_1(6,0) &= 0, & U_1(6,1) &= -\frac{1}{720}, & U_1(7,0) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

şeklinde bulunur. İkinci bileşen için verilen başlangıç değerinden

$$\begin{aligned}
U_2(0,0) &= -1, & U_2(0,1) &= 0, & U_2(0,2) &= 0, & U_2(0,3) &= 0, \\
U_2(0,4) &= 1, & U_2(0,5) &= 0, & U_2(0,6) &= 0, & U_2(0,7) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

katsayıları bulunur. (4.22) denkleminde k ve h parametrelerine değerler vererek ve (4.30), (4.31), (4.32) denklemlerinden yararlanarak u_2 nin diğer katsayılarını bulmaya çalışalım.

$k = 0, h = 0$ için (4.22) denklemi

$$U_1(1,0) + U_2(1,0) - 2U_1(0,2) + U_1(0,0) + U_2(0,0) = F_1(0,0) \tag{4.33}$$

olarak yazılabilir. Buradan $U_2(1,0) = 0$ bulunur.

$k = 0, h = 1$ için (4.22) denklemi

$$U_1(1,1) + U_2(1,1) - 6U_1(0,3) + U_1(0,1) + U_2(0,1) = F_1(0,1) \tag{4.34}$$

olarak yazılabilir. Buradan $U_2(1,1) = 0$ bulunur.

$k = 1, h = 0$ için (4.22) denklemi

$$2U_1(2,0) + 2U_2(2,0) - 2U_1(1,2) + U_1(1,0) + U_2(1,0) = F_1(1,0) \tag{4.35}$$

olarak yazılabilir. Buradan $U_2(2,0) = 1/2$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse u_2 nin katsayıları

$$\begin{aligned}
U_2(1,2) &= 0, & U_2(1,3) &= 0, & U_2(1,4) &= 0, & U_2(1,5) &= 0, & U_2(1,6) &= 0, \\
U_2(2,1) &= 0, & U_2(2,2) &= 0, & U_2(2,3) &= 0, & U_2(2,4) &= -\frac{1}{2}, & U_2(2,5) &= 0, \\
U_2(3,0) &= 0, & U_2(3,1) &= 0, & U_2(3,2) &= 0, & U_2(3,3) &= 0, & U_2(3,4) &= 0, \\
U_2(4,1) &= 0, & U_2(4,2) &= 0, & U_2(4,3) &= 0, & U_2(4,0) &= -\frac{1}{24}, & U_2(5,0) &= 0, \\
U_2(5,1) &= 0, & U_2(5,2) &= 0, & U_2(6,0) &= \frac{1}{720}, & U_2(6,1) &= 0, & U_2(7,0) &= 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

şeklinde bulunur. Bunlar seride yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
u_1^*(t, x) &= -x + xt - \frac{1}{2}xt^2 + x^3 + \frac{1}{6}xt^3 - x^3t + \frac{1}{2}x^3t^2 - \frac{1}{24}xt^4 - \frac{1}{6}x^3t^3 \\
&\quad + \frac{1}{120}xt^5 - \frac{1}{720}xt^6 + \frac{1}{24}x^3t^4 + \dots
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$u_2^*(t, x) = -1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{24}t^4 + x^4 + \frac{1}{720}t^6 - \frac{1}{2}x^4t^2 + \dots \tag{4.38}$$

çözümleri bulunmuş olur.

Tam çözümler ve yaklaşık analitik çözümler Çizelge 4.3, Çizelge 4.4, Şekil 4.3, Şekil 4.4 de karşılaştırılmıştır. ($u(t, x)$ ile tam çözüm, $u^*(t, x)$ ile de yaklaşık analitik çözüm gösterilmiştir. Ayrıca fonksiyonlar $t = 0$, $x = 0$ civarında seriye açıldığından çizelgelerde $t = 0$ a yakın değerler için karşılaştırma yapılmıştır.)

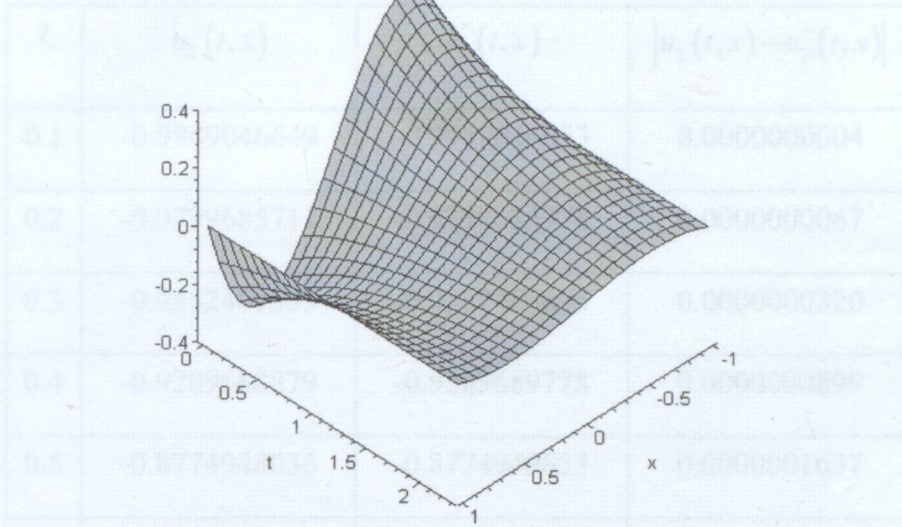
Çizelge 4.3 Test problemi (4.2) deki $u_1(t, x)$ ile $u_1^*(t, x)$ nin karşılaştırılması.

(Burada $x = 0.1$ alınmıştır.)

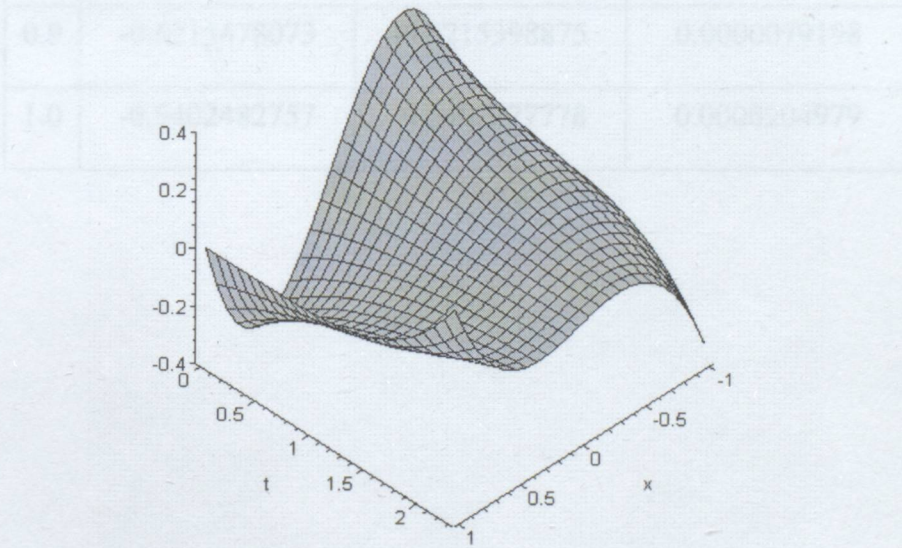
t	$u_1(t, x)$	$u_1^*(t, x)$	$ u_1(t, x) - u_1^*(t, x) $
0.1	-0.0895789043	-0.0895789043	0
0.2	-0.0810543445	-0.0810543422	0.0000000023
0.3	-0.0733410038	-0.0733409887	0.0000000151
0.4	-0.0663616845	-0.0663616355	0.0000000490
0.5	-0.0600465353	-0.0600464409	0.0000000944
0.6	-0.0543323519	-0.0543322800	0.0000000719
0.7	-0.0491619450	-0.0491621943	0.0000002493
0.8	-0.0444835674	-0.0444849422	0.0000013748
0.9	-0.0402503963	-0.0402546487	0.0000042524
1.0	-0.0364200646	-0.0364305555	0.0000104909

Şekil 4.4 Test problemi (4.2) deki $u_1^*(t, x)$ ni grafiği

Çizelge 4.4 Test problemi (4.2) deki $u_1(t,x)$ ile $u_1^*(t,x)$ nin karşılaştırılması.
(Burada $\Delta t = 0.1$ alınmıştır.)



Şekil 4.3 Test problemi (4.2) deki $u_1(t, x)$ in grafiği



Şekil 4.4 Test problemi (4.2) deki $u_1^*(t, x)$ in grafiği

Çizelge 4.4 Test problemi (4.2) deki $u_2(t, x)$ ile $u_2^*(t, x)$ nin karşılaştırılması.

(Burada $x = 0.1$ alınmıştır.)

t	$u_2(t, x)$	$u_2^*(t, x)$	$ u_2(t, x) - u_2^*(t, x) $
0.1	-0.9949046649	-0.9949046653	0.0000000004
0.2	-0.9799685711	-0.9799685778	0.0000000067
0.3	-0.9552409555	-0.9552409875	0.0000000320
0.4	-0.9209688879	-0.9209689778	0.0000000899
0.5	-0.8774948036	-0.8774949653	0.0000001637
0.6	-0.8252530813	-0.8252532000	0.0000001187
0.7	-0.7647657031	-0.7647652653	0.0000004378
0.8	-0.6966370386	-0.6966345778	0.0000024608
0.9	-0.6215478073	-0.6215398875	0.0000079198
1.0	-0.5402482757	-0.5402277778	0.0000204979

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada sunulan differensiyel dönüşüm yöntemi, diferensiyel cebirsel ve kısmi türevli diferensiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metottur. Metot test problemlerine uygulandı.

Tam çözümlerle, diferensiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen yaklaşık analitik çözümler çizelgeler ve şekiller üzerinde karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucunda tam çözümlerle diferensiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen çözümlerin uyumlu olduğu görüldü.

Şekil 4.5 Test problemi (4.2) için $u_1(t, x)$ in grafiği



Şekil 4.6 Test problemi (4.2) için $u_2(t, x)$ in grafiği

KAYNAKLAR

Anikoglu, A. ve Çekir, I. (2006a), "Solution of differential-difference equations by using differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 181:153-162.

Anikoglu, A. ve Çekir, I. (2006b), "Solution of differential equations by using differential transform method", *Appl. Math. Comput.*, in press.

Ascher, U.M. ve Petzold, L.R. (1994), "Computerized implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 22:1097-1120.

Ascher, U.M. ve Petzold, L.R. (1994), "Computerized implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 22:1097-1120.

Ascher, U.M. ve Petzold, L.R. (1994), "Computerized implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 22:1097-1120.

Ayaz, F. (2003), "On the two-dimensional differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 123:101-108.

Ayaz, F. (2004), "On the two-dimensional differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 123:101-108.

Burris, R. (1995), "A comparison of the Runge-Kutta method for ODEs/DAs", *Applied Mathematics Computation*, 123:101-108.

Brenan, K.E. ve Gopta, S.K. (1980), "Numerical solution of initial-value problems of ordinary differential equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 17:173-196.

Campbell, S.L. ve Petzold, L.R. (1994), "Computerized implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 22:1097-1120.

Çelik, E. ve Bayram, M. (2006), "On the numerical solution of differential-algebraic equations by using differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 181:153-162.

Çelik, E. ve Bayram, M. (2006), "On the numerical solution of differential-algebraic equations by using differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 181:153-162.

Çelik, E. ve Bayram, M. (2006), "On the numerical solution of differential-algebraic equations by using differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 181:153-162.

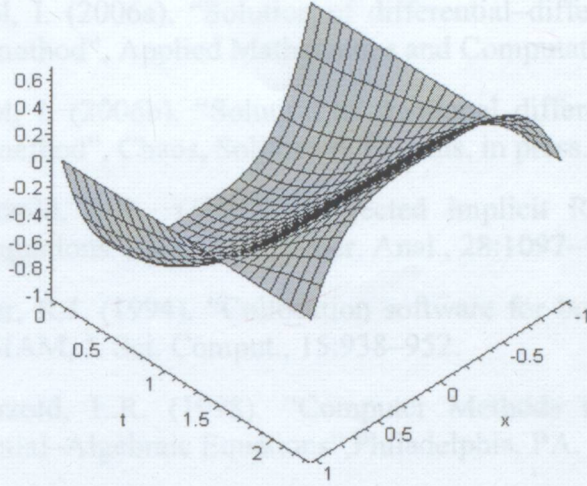
Chen, C.K. ve Ho, S.H. (1994), "Computerized implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 22:1097-1120.

Dehghan, K. ve Shariyat, M. (2007), "Convergence of Runge-Kutta method applied to linear partial differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, 181:153-162.

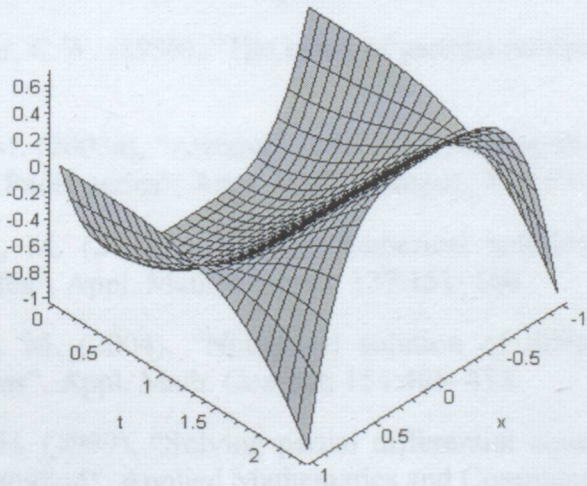
Elturk, V.S. ve Momtaz, S. (2007), "Application of generalized differential transform method to solve fractional differential equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, in press.

Gear, C.W. ve Petzold, L.R. (1984), "ODE systems for the solution of differential-algebraic systems", *SIAM J. Numer. Anal.*, 21:716-728.

Güngör, M. ve Bayram, M. (2006), "On the numerical solution of differential-algebraic equations by using differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 181:153-162.



Şekil 4.5 Test problemi (4.2) deki $u_2(t, x)$ in grafiği



Şekil 4.6 Test problemi (4.2) deki $u_2^*(t, x)$ in grafiği

KAYNAKLAR

- Arikoglu, A. ve Ozkol, I. (2006a), "Solution of differential-difference equations by using differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 181:153-162.
- Arikoglu, A. ve Ozkol, I. (2006b), "Solution of fractional differential equations by using differential transform method", *Chaos, Solitons & Fractals*, in press.
- Ascher, U.M. ve Petzold, L.R. (1991), "Projected implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations", *SIAM, J. Numer. Anal.*, 28:1097-1120.
- Ascher, U.M. ve Spiter, R.J. (1994), "Collocation software for boundary value differential-algebraic equations", *SIAM, J. Sci. Comput.*, 15:938-952.
- Ascher, U.M. ve Petzold, L.R. (1998), "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations", Philadelphia, PA.
- Ayaz, F. (2003), "On the two-dimensional differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 143:361-374.
- Ayaz, F. (2004), "Applications of differential transform method to differential-algebraic equations", *Applied Mathematics and Computation*, 152:649-657.
- Barrio, R. (2005), "Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs", *Applied Mathematics Computation*, 163:525-545.
- Brenan, K.E. ve Campbell, S.L. ve Petzold, L.R. (1989), *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Elsevier, New York.
- Campbell, S.L. ve Gear, C.W. (1995), "The index of general nonlinear DAEs", *Numer. Math.* 72:173-196.
- Celik, E. ve Bayram, M. (2003a), "Arbitrary order numerical method for solving differential-algebraic equations by Pade' series", *Appl. Math. Comput.*, 137:57-65.
- Celik, E. ve Bayram, M. (2003b), "On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade' series", *Appl. Math. Comput.* 137:151-160.
- Celik, E. ve Bayram, M. (2004), "Numerical solution of differential-algebraic equation systems and applications", *Appl. Math. Comput.*, 154:405-413.
- Chen, C.K. ve Ho, S.H. (1999), "Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 106:171-179.
- Debrabant, K. ve Strehmel K. (2005), "Convergence of Runge-Kutta methods applied to linear partial differential-algebraic equations", *Applied Numerical Mathematics*, 53:213-229.
- Erturk, V.S. ve Momani, S. ve Odibat, Z. (2007), "Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, In Press.
- Gear, C.W. ve Petzold, L.R. (1984), "ODE systems for the solution of differential-algebraic systems", *SIAM, J. Numer. Anal.*, 21:716-728.
- Guzel, N. ve Bayram, M. (2006), "On the numerical solution of differential-algebraic

- equations with index-3", *Applied Mathematics and Computations*, 175:1320-1331.
- Hairer, E. ve Lubich, C.H. ve Roche, M. (1989), "The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Runge Kutta methods", *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1409, Springer, Berlin.
- Hassan, I.H. (2002), "On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation", *Applied Mathematics and Computation*, 127:1-22.
- Hosseini, M.M. (2005), "An index reduction method for linear Hessenberg systems", *Applied Mathematics and Computation*, 171:596-603.
- Hosseini, M.M. (2006a), "Adomian decomposition method for solution of differential algebraic equations", *Journal Computational and Applied Mathematics*, 197:495-501.
- Hosseini, M.M. (2006b), "Adomian decomposition method for solution of nonlinear differential algebraic equations", *Applied Mathematics and Computation*, 181:1737-1744.
- Jang, M.J. ve Chen, C.L. ve Liy, L.C. (2000), "On solving the initial-value problems using the differential transformation method", *Applied Mathematics and Computation*, 115:145-160.
- Jang, M.J. ve Chen, C.L. ve Liu, Y.C. (2001), "Two-dimensional differential transform for partial differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, 121:261-270.
- Köksal, M. ve Herdem, S. (2002), "Analysis of nonlinear circuits by using differential Taylor transform", *Computers & Electrical Engineering*, 28:513-525.
- Liu, H. ve Song, Y. (2007), "Differential transform method applied to high index differential-algebraic equations", *Applied Mathematics and Computation*, 184:748-753.
- Lucht, W. ve Strehmel, K. ve Eichler-Liebenow, C. (1997a), "Linear partial differential algebraic equations, Part I: Indexes, consistent boundary/initial conditions", Report 17, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universität Halle.
- Lucht, W. ve Strehmel, K. ve Eichler-Liebenow, C. (1997b), "Linear partial differential algebraic equations, Part II: Numerical solution", Report 18, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universität Halle.
- Lucht, W. ve Strehmel, K. ve Eichler-Liebenow, C. (1999), "Indexes and special discretization methods for linear partial differential algebraic equations.", *BIT*, vol.39, 3: 484-512.
- Marszalek, W. (1997), *Analysis of partial differential algebraic equations*, Ph.D. Thesis, North Carolina State University, Raleigh.
- Martinson, W. ve Barton, P. (2000), "A differentiation index for partial differential-algebraic equations", *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 21, 6:2295-2315.
- Martinson, W. ve Barton, P. (2002), "Index and characteristic analysis of linear PDAE systems", *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 24, 3:905-923.
- Marz, R. (2003), "The index of linear differential-algebraic equations with properly stated leading term", *Results in Mathematics*, 42:308-338.
- Marz, R. (2004), "Solvability of linear differential-algebraic equations with properly stated leading term", *Results in Mathematics*, 45:88-105.

Petzold, L.R. (1982), "Differential-algebraic equations are not ODEs", SIAM, J. Sci. Statist. Comput, 3:367-384.

Petzold, L.R. (1995), "Numerical solution of differential-algebraic equations, Theory and numerics of ordinary and partial differential equations", Clarendon Press, Oxford.

Yang, X. ve Liu, Y. ve Bai, S. (2006), "A numerical solution of second-order linear partial differential equations by differential transform", Applied Mathematics and Computation, 173:792-802.

Zhou, J.K. (1986), Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 28.07.1982

Doğum yeri Of

Lise 1996-1999 Kadıköy Lisesi

Lisans 2000-2004 Atatürk Üniversitesi Fen Edb. Fak.
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2005-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

