

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**$R_h(2|1)$ SÜPER UZAYI ÜZERİNE
BİR DİFERANSİYEL HESAP**

Matematikçi Esengül SALTÜRK

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	2
3. h -SÜPER UZAYI ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP	5
3.1 Klasik Süper Uzay	5
3.2 $R_q(2 1)$ Süper Uzayı.....	6
3.3 h -Deforme Süper Cebir	6
3.4 $R_h(2 1)$ Üzerine Diferansiyel Hesap	10
3.5 Koordinatlar ile Diferansiyelleri Arasındaki Bağlıntılar	11
3.6 Koordinatlar ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağlıntılar.....	16
3.7 Diferansiyeller ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağlıntılar	19
4. R MATRİS YAKLAŞIMI	23
5. SÜPER CLIFFORD CEBİRİNİN YENİ BİR DEFORMASYONU.....	26
6. SONUÇLAR.....	30
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	32

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
∂_x	x koordinat fonksiyonuna göre kısmi türev
x^+	x koordinat fonksiyonunun hermityan eşleniği
$\bar{x}$	x koordinat fonksiyonunun kompleks eşleniği
$\hat{x}$	x koordinat fonksiyonunun hermityan operatörü
p_x	x koordinat fonksiyonuna göre momentum
$\otimes$	tensör çarpımı
d	dış diferansiyel operatörü

ÖNSÖZ

Matematiksel fizikte önemli bir rol oynayan değişmeli olmayan geometri, son yıllarda matematikçi ve fizikçiler arasında son derece ilgi çekici bir konu haline gelmiştir. Bu çalışmada $(2+1)$ -boyutlu kuantum süper uzay üzerine, yeni bir deformasyon parametresine bağlı bir diferansiyel hesap verilmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında beni her konuda yönlendiren, yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK' e ve maddi-manevi yanımda olan aileme teşekkür ve saygılarımı ve ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca benden desteğini esirgemeyen T.Ü.B.İ.T.A.K.' a da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Klasik grupların yeni bir genellemesi olan kuantum gruplar, çok zengin matematiksel yapılara sahiptir ve klasik grupların yeterli olmadığı durumlarda pek çok rolleri vardır. Bu çalışmada, $(2+1)$ -boyutlu $R(2|1)$ süper uzayının, Manin tarafından verilen q deformasyonu kullanılarak, bir **singüler** 3×3 -tipindeki g matrisi ile **yeni** bir deformasyonu elde edilmiştir. Bu deformasyona h deformasyon diyoruz. Elde edilen bu yeni kuantum $R_h(2|1)$ süper uzayı üzerine, değişmeli olmayan bir diferansiyel yapı kurulmuştur.

$R_h(2|1)$ uzayının cebirsel yapısını veren kuadratik bağıntıları ve diğerlerini, daha kapalı formda yazabilmemize imkan veren ve cebirin asosyatifliğini garanti eden 9×9 -tipinde bir R matrisi bulunmuştur. Bu R matrisi, şüphesiz Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür.

Ayrıca $(2+1)$ -boyutlu süper-Clifford Cebirinin yeni bir deformasyonu elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Kuantum h -süper uzay, q -deformasyon, h -deformasyon, değişmeli olmayan cebir, diferansiyel hesap, Clifford cebiri.

ABSTRACT

Quantum Groups, which are a new generalization of classical groups, have very rich mathematical structures and numerous roles in situations where classical groups are not adequate. In this work, using the q deformation which was given by Manin, a new deformation of $(2+1)$ -dimensional superspace $R(2|1)$ with a 3×3 singular matrix g , $R_h(2|1)$, is obtained. We call this, h deformation. A noncommutative differential structure is formed on the obtained new quantum superspace $R_h(2|1)$.

A 9×9 -dimensional R matrix which enables to write closer form of quadratic relations, which give the algebraic structure of $R_h(2|1)$ and others, is found. It is guaranteed that the algebra is associative.

Also, a new deformation of $(2+1)$ -dimensional super- Clifford Algebra is obtained.

Keywords: Quantum h -superspace, q -deformation, h deformation, non-commutative algebra, differential calculus, Clifford algebra.

1. GİRİŞ

Matematiksel modellemede ve teorik fizikte önemli rol oynayan Kuantum Grupları, grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Daha geniş olarak, integre edilebilir sistemlerin ele alınmasıyla değişmeli olmayan Hopf cebirleri'nin bir sınıfı elde edilmiştir. Bu Hopf Cebirleri, bilinen klasik grupların q -deforme fonksiyonlar cebiridir. İşte klasik grupların bu q -deforme yapısına Kuantum Grubu denir. Diğer bir ifadeyle, bir Kuantum Grubu, deformasyon parametresinin özel değerleri için grup ile özdeşleşir.

Kuantum Grupları, Drinfeld (1986) tarafından şekillendirilmiştir. Drinfeld'in yaklaşımına göre kuantum grupları, bir q parametresine bağlı Hopf Cebirleri olarak ortaya çıkmıştır (Abe, 1977). Kuantum Gruplarının değişmeli olmayan diferansiyel geometrisi ise Woronowicz (1989) tarafından ortaya atılmıştır. Wess ve Zumino (1990) ise kuantum Yang Baxter denklemlerinin herhangi bir çözümü olabilen R matrisinin, diferansiyel hesaba uygulanabileceğini göstermiştir.

Klasik grupların diğer bir deformasyonu da h -deformasyondur. Bu deformasyon, Jordanian deformasyon olarak bilinir. Aghamohammadi ve arkadaşları (1995), düzlemin q -deformasyonundan hareketle, bir singüler g matrisi kullanarak, h -deformasyona geçiş yapmışlardır.

Bu çalışmanın amacı, 3d uzay üzerindeki koordinat fonksiyonlarının q -deformasyonunu kullanarak, bir **singüler** transformasyon ile **yeni** bir deformasyon parametresi (ki bunu h ile göstereceğiz) ortaya atarak h -süper uzayı oluşturarak onun üzerine değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap kurmaktır. Bunun için, ilk olarak, 3×3 -tipindeki genel bir singüler g matrisi (ki onun elemanları *keyfi* seçilmiştir) tanımlanmıştır. Daha sonra, $R_q(2|1)$ kuantum süper uzayının bileşenleri arasında sağlanan bağıntılar kullanılarak (Manin, 1989), en uygun olan g matrisi tayin edilmiştir. Şüphesiz, ortaya çıkan diğer g matrisleri (en az üç tane daha vardır) ile yeni yapılar bulunabilir. Sonraki adımlar, Wess ve Zumino yaklaşımıyla diferansiyel hesaba gitmektedir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Tanım

V ve W , birer K -vektör uzayı olmak üzere,

$$T : V \rightarrow W$$

tasviri, her $v_1, v_2 \in V$ ve $a, b \in K$ için

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2),$$

şartını sağlarsa, bir **lineer** tasvir adını alır.

2.2 Tanım

U, V ve W , birer K -vektör uzayı olmak üzere $f : U \times V \rightarrow W$ tasviri aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa f ye bir **bi-lineer** tasvir denir.

$u_1, u_2 \in U$; $v_1, v_2 \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ için,

$$\text{i) } f(\lambda u_1 + \mu u_2, v_1) = \lambda f(u_1, v_1) + \mu f(u_2, v_1),$$

$$\text{ii) } f(u_1, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(u_1, v_1) + \mu f(u_1, v_2).$$

Kabul edelim ki U , m -boyutlu ve V , n -boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere,

$\{\vec{u}_i\}_{i=1}^m$, U nun ve $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$, V nin taban elemanı olsun.

Bu takdirde $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $m \cdot n$ tane (i, j) indisi mevcut olduğundan bu

indis çiftleri W deki bir $\{\vec{w}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca,

$g : U \times V \rightarrow W$ tasvirini,

$$\vec{u} = \lambda^i \vec{u}_i \text{ ve } \vec{v} = \mu^j \vec{v}_j$$

olmak üzere

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda^i \mu^j \vec{w}_{ij}$$

şeklinde tanımlarız. Aşikâr olarak g bir bi-lineer tasvirdir ve $g(U \times V) \subseteq W$ kümesi

$\{\vec{w}_{ij}\}$ tabanını ihtiva eder. Dolayısıyla W uzayını gerer.

Şimdi, U ve V iki vektör uzayı olmak üzere bir W_1 vektör uzayı için aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa W_1 uzayına, U ve V uzaylarının **tensör** çarpımı denir ve sembolik olarak $U \otimes V$ ile gösterilir:

i) $g(U \times V)$, W_1 i gerer.

ii) $F : U \times V \rightarrow W_2$ herhangi bir bi lineer tasvir ise $F = f \circ g$ olacak şekilde bir $f : W_1 \rightarrow W_2$ lineer tasvir mevcut.

2.3 Tanım

$T_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $T_2 : U_2 \rightarrow V_2$ birer lineer tasvir olsunlar. Bu takdirde,

$$f : U_1 \otimes U_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2, \quad f(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2), \quad u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir mevcuttur. Buradaki f 'ye T_1 ve T_2 'nin tensör çarpımı denir ve $f = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

2.4 Tanım

G , bir grup ve K bir cisim olmak üzere

$$A = \text{Map}(G, K) = \{f \mid f : G \rightarrow K\}$$

olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa, A 'ya bir **K -cebiri** denir:

$$(1) (\alpha f)(x) = \alpha(f(x)), \quad \alpha \in K$$

$$(2) (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(3) (fg)(x) = f(x)g(x), \quad f, g \in A, \alpha \in K, x \in G.$$

Bir K -cebirini (basitlik için sadece cebir diyeceğiz), genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. Bir cebir, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K -vektör uzayı olarak düşünülür:

$$\mu : A \otimes A \rightarrow A, \quad \mu(a \otimes b) = ab,$$

$$\eta : K \rightarrow A, \quad \eta(k) = k.I.$$

Burada I , A 'nın birim elamanıdır. Bu tasvirler için

$$\mu \circ (\text{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \text{id}) \quad (\text{Ass})$$

$$\mu \circ (\text{id} \otimes \eta) = \mu \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{Uni})$$

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, μ çarpma tasvirinin asosyatifliğini ifade ederken, (Uni) aksiyomu, $\eta(1)$ 'in A 'nın hem sağ hem de sol birim elmanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan (A, μ, η) üçlüsüne bir **cebir** diyeceğiz.

3. h -SÜPER UZAYI ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümde ilk olarak, q -deformasyondan h -deformasyona geçiş yapılarak, h -deforme cebir elde edilecektir. Sonraki kısımlar, diferansiyel hesap ile ilgilidir.

3.1 Klasik Süper Uzay

Klasik 3d Süper uzayda bir eleman (şimdilik bir vektör) iki **çift** ve bir **tek** veya bir **çift** ve iki **tek** bileşen ile

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} x \\ \varphi \\ \phi \end{pmatrix}$$

şeklinde bir süper vektör ile temsil edilmektedir. Burada **tek** ve **çift** bileşenden kasıt şudur:

Eğer x , bir **çift** bileşen ise, tüm bileşenlerle değişmelidir.

Eğer θ_1 ve θ_2 birer **tek** bileşen ise,

1. Karesi sıfırdır, yani,

$$\theta_1^2 = 0$$

dır, ve

2. $\theta_1 \theta_2 = -\theta_2 \theta_1$ ve $x \theta_1 = \theta_1 x$

dir. (Yani **tek** bileşenler, kendi aralarında anti komutatiftir ve **çift** bileşenlerle komutatiftir.)

Bu çalışmada, birinci vektörden hareket edilecektir. Yalnız şu açıklama ile başlamakta fayda vardır: Kuantum teoride, elemanlar bir cebire aittir. Cebirin adı, elemanların yapısına göre şekillenir. Burada 3d süper uzaydaki vektörlerin bileşenlerinin birer **koordinat fonksiyonu** olduğunu kabul edeceğiz. Dolayısıyla buradaki cebir bir fonksiyon cebiridir.

h -deforme 3d süper uzayı oluşturmadan önce ihtiyacımız olan bazı yapıları tanıtmakla başlayalım.

3.2 $R_q(2|1)$ Süper Uzayı

Elemanları x' , y' ve θ' koordinat fonksiyonları olan ($q \neq 0$ ve bir kompleks sayı olmak üzere)

$$x'y' = qy'x',$$

$$x'\theta' = q\theta'x',$$

$$y'\theta' = q\theta'y',$$

$$\theta'^2 = 0 \tag{3.1}$$

şeklindeki bağıntıları sağlayan cebiri $A_q = \text{Fun}(R_q(2|1))$ ile gösterelim. (3.1) bağıntıları Manin (1989) den alınmıştır.

Not: h -deforme cebirin elemanları x , y ve θ olacağından **tez boyunca** q -deforme yapı (lar) x' , y' vb. gibi **üslü** harflerle gösterilmiştir.

Aşıkarak, $q \rightarrow 1$ limitinde (şüphesiz $q = 1$ de yazılabilir ama konular ilerlerken görülecektir ki bu her zaman yapılamaz) (3.1) bağıntıları klasiğe döner. Yani 3d süper uzay üzerindeki koordinat fonksiyonlarının cebirine dönülür.

3.3 h -Deforme Süper Cebir

$R_h(2|1)$ üzerindeki koordinat fonksiyonlarının cebirini elde etmek istiyoruz. Bunun için, önce bir g matrisini,

$$g = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 \\ C & D & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde yazalım. Buradaki A , B , C , D , h ve q parametrelerini içeren ve $q \rightarrow 1$ limitinde tanımlı olmayan (üzerine yüklenecek şartlar aşağıda çıkarılmıştır) kompleks sayılardır.

Şimdi bu g matrisi ile, (3.1) bağıntılarını kullanarak bir

$$X' = g X \tag{3.3}$$

transformasyonunu tanımlayalım. X' nün bileşenleri q -deforme bağıntıları sağlamaktadır.

X in bileşenleri ise h -deforme bağıntıları sağlayacaktır.

(3.3) deki transformasyon açıkça yazılırsa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 \\ C & D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

den;

$$x' = Ax$$

$$y' = Bx + y$$

$$\theta' = Cx + Dy + \theta \quad (3.4)$$

elde edilir. Bunlar (3.1) de kullanılarak A, B, C, D sayılarına yön verilecektir. Yapılan işlemler sonucu en uygun g matrisi

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{h}{q-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

şeklinde bulunmuştur.

Burada $(-1)^{\hat{f}}$, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$(-1)^{\hat{f}} = \begin{cases} -1, & f \text{ tek eleman} \\ 1, & f \text{ çift eleman} \end{cases} \quad (3.6)$$

Şüphesiz üzerinde çalışılabilecek birçok g matrisi mevcuttur. Yapılacak başka bir çalışmada bunlar ele alınacaktır. Sonuç olarak (3.4) deki eşitlikleri

$$x' = x,$$

$$y' = y,$$

$$\theta' = \theta + \frac{h}{q-1}x \quad (3.7)$$

şeklinde bulmuş oluyoruz. Görüldüğü gibi en azından θ' , $q \rightarrow 1$ limitinde singülerdir. Bu durum h -deforme cebirine yansımayacaktır.

Şimdi (3.7) daki eşitlikleri (3.1) de kullanırsak

$$xy = qyx,$$

$$x\theta = q\theta x + hx^2,$$

$$y\theta = q\theta y + (1+q)hyx \quad (3.8)$$

şeklindeki h ve q parametrelerine bağlı bağıntıları buluruz. Burada bir bağıntı eksiktir ve doğrudan bulunamamıştır. Onu bulmak için (3.1) deki son bağıntıyı yani $\theta'^2 = 0$ olduğunu kullanacağız:

(3.7) daki son eşitlikten

$$0 = \theta'^2$$

$$= (\theta + \frac{h}{q-1}x)(\theta + \frac{h}{q-1}x)$$

$$= \theta^2 + \theta \frac{h}{q-1}x + \frac{h}{q-1}x\theta + \frac{h^2}{(q-1)^2}x^2$$

yazarız. Dikkat edilirse x , bir **çift** eleman olduğundan (bunu x in (3.7) daki formundan

biliyoruz) yukarıda ortaya çıkan $\frac{h^2}{(q-1)^2}x^2$ ifadesi tereddütsüz yazılmıştır fakat $\theta \frac{h}{q-1}x$

ifadesini bu formatta yazamadık. Çünkü θ , bir **tek** elemandır ve h ile değişmeli olup olmadığı, h nin pozisyonuna bağlıdır. Yani h , **çift** bir parametre ise problem yoktur. Aksi halde h üzerine bir şart konmalıdır. Öyleyse, yukarıda yapılanı,

$$0 = \theta^2 + \theta \frac{h}{q-1}x + \frac{h}{q-1}x\theta + \frac{h^2}{(q-1)^2}x^2$$

$$0 = \theta^2 + (-1)^{\hat{h}} \frac{h}{q-1} \theta x + \frac{h}{q-1} x \theta + \frac{h^2}{(q-1)^2} x^2$$

$$0 = \theta^2 + ((-1)^{\hat{h}} + q) \frac{h}{q-1} \theta x + \frac{h^2}{q-1} x^2 + \frac{h^2}{(q-1)^2} x \quad (3.9)$$

şeklinde yeniden düzenleyebiliriz.

(3.9) daki işlemleri basitleştirmek için,

$$K_1 = (-1)^{\hat{h}} + q,$$

$$K_2 = h^2 / (q - 1),$$

$$K_3 = h^2 / (q - 1)^2,$$

$$\theta^2 = -h\theta x \quad (3.10)$$

alalım. Bu durumda,

$$0 = \theta^2 + K_1 \frac{h}{q-1} \theta x + K_2 x^2 + K_3 x$$

yazarız. Şimdi açıkça görülmektedir ki, yapılacak en iyi yorum, h nin **tek** olmasıdır. Bu durumda,

$$h^2 = 0 \quad (3.11)$$

olacaktır ve

$$K_1 = (-1)^{\hat{h}} + q = -1 + q$$

yazılabilecektir. Sonuç itibarıyla (3.8) bağıntılarına θ^2 yi de ekleyerek,

$$xy = qyx,$$

$$x\theta = q\theta x + hx^2,$$

$$y\theta = q\theta y + (1+q)hyx,$$

$$\theta^2 = -h\theta x \quad (3.12)$$

yazarız.

Elde edilen bu cebirsel yapı, görüldüğü gibi $q \rightarrow 1$ limitinde singüler olmayıp, bu limit halinde bu tezin de temelini teşkil eden

$$xy = yx,$$

$$x\theta = \theta x + hx^2,$$

$$y\theta = \theta y + 2hyx,$$

$$\theta^2 = -h\theta x \quad (3.13)$$

bağıntılarına dönüşür.

Jeneratörleri x , y ve θ olan ve (3.13) bağıntılarını sağlayan süper cebiri A_h ile göstereceğiz. Bu cebir, yukarıda da not edildiği gibi $R_h(2|1)$ üzerindeki koordinat fonksiyonlarının cebiridir ve $h \rightarrow 0$ limitinde, her şey klasik olur. Yani, $R_h(2|1)$ ile $R_q(2|1)$ uzayları özdeşleşir.

3.4 $R_h(2|1)$ Üzerine Diferansiyel Hesap

Bu kısımda amacımız, kuantum h -süper uzayı üzerine değişmeli olmayan bir geometrik yapı kurmaktır. Bu diferansiyel geometrik yapının içinde, şüphesiz koordinat fonksiyonları, onların diferansiyelleri ve kısmi türevleri ile onlar arasında sağlanacak bağıntılar yer alacaktır. Dolayısıyla önce d dış diferansiyel operatöründen kısaca bahsetmekte fayda vardır.

d dış diferansiyel operatörü, A_h cebirinin elemanlarına, yani $R_h(2|1)$ üzerindeki koordinat fonksiyonlarına etki eden bir lineer tasvirdir ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

d diferansiyel operatörü, A_h nin jeneratörlerini, diferansiyellerine tasvir eden bir lineer operatördür:

$$d : u \mapsto du, \quad u \in \{x, y, \theta\}$$

Ayrıca d , aşağıdaki iki özelliğe sahiptir:

1. d operatörü nilpotenttir. Yani

$$d^2 = 0 \quad (3.14)$$

dır.

2. d operatörü Leibniz Kuralını sağlar. Yani

$$d(fg) = (df)g + (-1)^{\hat{f}} f(dg) \quad (3.15)$$

dir. Burada $(-1)^{\hat{f}}$, (3.9) da tanımlandığı gibidir.

O halde anlaşıyor ki d dış diferansiyel operatörü 0-formları, 1-formlara taşımaktadır.

3.5 Koordinatlar ile Diferansiyelleri Arasındaki Bağlılıklar

Şimdi koordinat fonksiyonları ile onların diferansiyelleri arasındaki bağlantıları

$$x' dx' = A dx' x',$$

$$x' dy' = A_{11} dy' x' + A_{12} dx' y',$$

$$y' dx' = A_{21} dx' y' + A_{22} dy' x',$$

$$y' dy' = B dy' y',$$

$$x' d\theta' = B_{11} d\theta' x' + B_{12} dx' \theta',$$

$$\theta' dx' = B_{21} dx' \theta' + B_{22} d\theta' x',$$

$$y' d\theta' = C_{11} d\theta' y' + C_{12} dy' \theta',$$

$$\theta' dy' = C_{21} dy' \theta' + C_{22} d\theta' y',$$

$$\theta' d\theta' = C d\theta' \theta' \tag{3.16}$$

şeklinde yazalım. Bu, gerçekten mümkün olan en genel yapıdır. Örneğin birinci (veya dördüncü veya dokuzuncu) bağlantıya ekleme yapılsa bile katsayılar sıfır çıkacaktır. Bu nedenle başlangıçta onlar yazılmamıştır.

(3.16) bağlantılarındaki A , B , C ve A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} ($1 \leq i, j \leq 2$) sayıları, q ve h ye bağlı olarak ortaya çıkacak olan henüz belirlenmemiş sabitlerdir. Bu sabitleri bulmak için dış diferansiyel operatörünü kullanacağız. İlk olarak not edelim ki, (3.6) daki eşitliklerin diferansiyelleri

$$dx' = dx,$$

$$dy' = dy,$$

$$d\theta' = d\theta - \frac{h}{q-1} dx \tag{3.17}$$

şeklinde. (Son eşitlikte; d nin bir **tek** eleman olması dolayısıyla h nin üzerinden atlarken önüne bir $-$ işareti gelmiştir.)

Bunları (3.16) da kullanırsak

$$x dx = A dx x,$$

$$x dy = A_{11} dy x + A_{12} dx y,$$

$$y dx = A_{21} dx y + A_{22} dy x,$$

$$y dy = B dy y,$$

$$\theta dx = B_{21} dx \theta + B_{22} d\theta x - \frac{h}{q-1} (A + B_{21} + B_{22}) dx x,$$

$$x d\theta = B_{11} d\theta x + B_{12} dx \theta + \frac{h}{q-1} (A - B_{11} - B_{12}) dx x,$$

$$y d\theta = C_{11} d\theta y + C_{12} dy \theta + \frac{h}{q-1} [(A_{21} - C_{11}) dx y + (A_{22} - C_{12}) dy x],$$

$$\theta dy = C_{21} dy \theta + C_{22} d\theta y - \frac{h}{q-1} [(A_{11} + C_{21}) dy x + (A_{12} + C_{22}) dx y],$$

$$\theta d\theta = C d\theta \theta - \frac{h}{q-1} [(B_{21} + B_{12} + C) dx \theta - (C - B_{11} - B_{22}) d\theta x] \quad (3.18)$$

bağıntılarını elde ederiz. Burada ortaya çıkan katsayıları tespit etmek için (3.8) deki bağıntılardan faydalanırız. Bunu yapmak için (3.8) deki bağıntılara d diferansiyel operatörünü uyguluyoruz:

Örneğin (3.8) deki ilk bağıntıya d operatörünü uygularsak, (3.16) bağıntılarının da yardımıyla

$$x y - q y x = 0 \Rightarrow d(x y - q y x) = 0$$

$$\Rightarrow dx y + x dy - q dy x - q y dx = 0$$

$$\Rightarrow dx y + (A_{11} dy x + A_{12} dx y) - q dy x - q(A_{21} dx y + A_{22} dy x) = 0$$

$$\Rightarrow (1 + A_{12} - q A_{21}) dx y + (A_{11} - q - q A_{22}) dy x = 0$$

yazarız. Dolayısıyla

$$1 + A_{12} - qA_{11} = 0 ,$$

$$A_{11} - q - qA_{22} = 0 \quad (3.19)$$

olmalıdır. Benzer şekilde (3.13) deki bağıntılara da d operatörünü uygulayarak,

$$B_{12} = -(1 + q B_{21}),$$

$$B_{11} = q (1 - B_{22}),$$

$$C_{11} = q (1 - C_{22}),$$

$$C_{12} = -(1 + q C_{21}),$$

$$A_{12} = q A_{11} - 1,$$

$$A_{21} = q (A_{22} + 1),$$

$$B_{12} = q B_{11} - 1,$$

$$B_{21} = q (B_{22} - 1) \quad (3.20)$$

sistemini elde ederiz. Bu sistem birçok çözüme sahiptir. Onlardan biri (ve uygun olanı) aşağıda verilmiştir:

$$B_{11} = q , \quad B_{12} = q^2 - 1 , \quad B_{21} = -q , \quad B_{22} = 0 ,$$

$$C_{11} = q , \quad C_{12} = q^2 - 1 , \quad C_{21} = -q , \quad C_{22} = 0 ,$$

$$A_{11} = q , \quad A_{12} = q^2 - 1 , \quad A_{21} = q , \quad A_{22} = 0 ,$$

$$C = 1 . \quad (3.21)$$

Fakat A ve B katsayılarını verecek bir argümana sahip olamadık. İlerde yapılacak hesaplarda karşılaşıcağımız problemleri de göz önüne alarak, A ve B için en uygun seçimin

$$A = B = q^2 \quad (3.22)$$

olacağını tespit ettik. (Elbette A ve B yi seçmeden de kullanabilirdik, fakat Bölüm 4 de muhakkak böyle olması gerektiğini görecektik.) Netice olarak, (3.18) bağıntıları aşağıdaki şekle gelir:

$$x dx = q^2 dx x,$$

$$x dy = q dy x + (q^2 - 1) dx y,$$

$$x d\theta = q d\theta x + (q^2 - 1) dx \theta - h dx x,$$

$$y dx = q dx y,$$

$$y dy = q^2 dy y,$$

$$y d\theta = q d\theta y + (q^2 - 1) dy \theta - (q + 1) h dy x,$$

$$\theta dx = -q dx \theta - q h dx x,$$

$$\theta dy = -q dy \theta - (q + 1) h dx y,$$

$$\theta d\theta = d\theta \theta - q h dx \theta - h d\theta x. \quad (3.23)$$

Bu bağıntılar $q \rightarrow 1$ limitinde bize lazım olacak (daha doğrusu bulmak istediğimiz) bağıntılardır ve aşağıdaki gibidir:

$$x dx = dx x,$$

$$x dy = dy x,$$

$$x d\theta = d\theta x - h dx x,$$

$$y dx = dx y,$$

$$y dy = dy y,$$

$$y d\theta = d\theta y - 2h dy x,$$

$$\theta dx = -dx \theta - h dx x,$$

$$\theta dy = -dy \theta - 2h dx y,$$

$$\theta d\theta = d\theta \theta - h dx \theta - h d\theta x. \quad (3.24)$$

Bu bağıntılarla oluşturulmuş cebiri Γ_1 ile gösterelim.

Şimdi koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri arasındaki bağıntıları bulabiliriz. Bunun için (3.24) bağıntılarına d operatörünü uygulamak yeterlidir. Böyle yapınca,

$$dx \wedge dx = 0,$$

$$dx \wedge dy = -q^{-1} dy \wedge dx,$$

$$dy \wedge dy = 0,$$

$$dx \wedge d\theta = q^{-1} d\theta \wedge dx,$$

$$dy \wedge d\theta = q^{-1} d\theta \wedge dy + q^{-1}(q+1)h dx \wedge dy \quad (3.25)$$

elde ederiz. Yalnız şunu not etmekte fayda vardır ki, d dış diferansiyel operatörü **tek** olduğundan (3.1) ve (3.14) ü birlikte kullanmak gerekmektedir. Örneğin;

$$d(xd\theta - d\theta x + hdx) = 0 \Rightarrow$$

$$dx \wedge d\theta - d\theta \wedge dx + h dx \wedge dx = 0 \Rightarrow$$

$$dx \wedge d\theta = d\theta \wedge dx$$

dır. Dolayısıyla, $q \rightarrow 1$ limitinde diferansiyeller arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir:

$$dx \wedge dx = 0,$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx,$$

$$dy \wedge dy = 0,$$

$$dx \wedge d\theta = d\theta \wedge dx,$$

$$dy \wedge d\theta = d\theta \wedge dy + 2h dx \wedge dy. \quad (3.26)$$

(3.26) daki cebiri Γ_2 ile göstereceğiz.

Muhtemelen, A_h cebiri ve dolayısıyla,

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad A_h \cong \Gamma_0$$

Diferansiyel cebiri, üzerlerinde tanımlanacak yeni tasvirlerle, birer Hopf cebiri yapılabilir. Bu söylenenler, şu an üzerinde çalışılan *açık problemler*dir.

3.6 Koordinatlar ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda x , y , θ koordinat fonksiyonlarının kısmi türev operatörlerini tanımlayacağız ve bu operatörler ile koordinat fonksiyonları ve diferansiyellerinin komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

Hatırlanacağı üzere klasik süper analizde, türevlenebilir bir f fonksiyonunun diferansiyeli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta \quad (3.26)$$

idi. Bunu, deformasyon teoride

$$df = (dx' \partial_{x'} + dy' \partial_{y'} + d\theta' \partial_{\theta'}) f \quad (3.27)$$

şeklinde yazıyoruz. Sebebi, göz önüne aldığımız bütün cebirlerin değişmeli olmamasıdır.

Şimdi (3.5) deki g matrisini kullanarak q deformasyondaki $\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{\theta'}$ kısmi türevlerinden $\partial_x, \partial_y, \partial_\theta$ kısmi türevlerine geçiş yapacağız.

Zincir kuralına göre bunları

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta},$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla (3.6) nın yardımıyla

$$\partial_x = \partial_{x'} + \frac{h}{q-1} \partial_{\theta'},$$

$$\partial_y = \partial_{y'},$$

$$\partial_\theta = \partial_{\theta'} \quad (3.28)$$

buluruz.

Buna göre d operatörü h deformasyonu için de aynıdır:

$$df = (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) f \quad (3.29)$$

Koordinat fonksiyonları ile onların kısmi türevleri arasındaki bağıntıları bulmak için Leibniz Kuralı'ndan faydalanırız. Eğer f türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$d(xf) = (dx)f + x(df)$$

dir. İkinci taraftaki ikinci terim düzenlenerek (3.23) bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d(xf) &= (dx)f + x(dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) f \\ &= (dx)f + (q^2 dx x) \partial_x f + (q dy x + (q^2 - 1) dx y) \partial_y f + (q d\theta x + (q^2 - 1) dx \theta - h dx x) \partial_\theta f \\ &= [dx(1 + q^2 x \partial_x + (q^2 - 1)y \partial_y + (q^2 - 1)\theta \partial_\theta + h x \partial_\theta) + dy(q x \partial_y) + d\theta(q x \partial_\theta)] f \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$d(xf) = (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta)(xf)$$

Olduğundan, her iki tarafın özdeşleştirilmesi,

$$\partial_x x = 1 + q^2 x \partial_x + (q^2 - 1)y \partial_y + (q^2 - 1)\theta \partial_\theta + h x \partial_\theta,$$

$$\partial_y x = q x \partial_y,$$

$$\partial_\theta x = q x \partial_\theta$$

bağıntılarını verir. Benzer şekilde (xf) yerine (yf) ve (θf) yazılarak diğer bağıntılar da bulunabilir. Sonuç olarak (h, q) deforme bağıntılar;

$$\partial_x x = 1 + q^2 x \partial_x + (q^2 - 1)y \partial_y + (q^2 - 1)\theta \partial_\theta + h x \partial_\theta,$$

$$\partial_y x = q x \partial_y,$$

$$\partial_\theta x = q x \partial_\theta,$$

$$\partial_x y = q y \partial_x,$$

$$\partial_y y = 1 + q^2 y \partial_y + (q^2 - 1)\theta \partial_\theta + (q + 1)h x \partial_\theta,$$

$$\partial_{\theta} y = q y \partial_{\theta},$$

$$\partial_x \theta = q \theta \partial_x - q h x \partial_x - (q+1) h y \partial_y - q h \theta \partial_{\theta},$$

$$\partial_y \theta = q \theta \partial_y,$$

$$\partial_{\theta} \theta = 1 - \theta \partial_{\theta} + h x \partial_{\theta} \quad (3.30)$$

şeklinde bulunur. Bu bağıntılar $q \rightarrow 1$ limitinde iyi tanımlıdır ve bu limitte

$$\partial_x x = 1 + x \partial_x + h x \partial_{\theta},$$

$$\partial_y x = x \partial_y,$$

$$\partial_{\theta} x = x \partial_{\theta},$$

$$\partial_x y = y \partial_x,$$

$$\partial_y y = 1 + y \partial_y + 2 h x \partial_{\theta},$$

$$\partial_{\theta} y = y \partial_{\theta},$$

$$\partial_x \theta = \theta \partial_x - h x \partial_x - 2 h y \partial_y - h \theta \partial_{\theta},$$

$$\partial_y \theta = \theta \partial_y,$$

$$\partial_{\theta} \theta = 1 - \theta \partial_{\theta} + h x \partial_{\theta} \quad (3.31)$$

şeklini alır.

Bu bağıntılar koordinat fonksiyonları ile kısmi türev operatörleri arasındaki h -deforme bağıntılardır.

Kısmi türevler arasındaki h -deforme bağıntıları bulmak için d operatörünün nilpotentliğinden faydalanırız:

$$0 \equiv d^2 = d(dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_{\theta})$$

$$= -dx \wedge (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_{\theta}) \partial_x$$

$$-dy \wedge (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_{\theta}) \partial_y$$

$$\begin{aligned}
& +d\theta \wedge (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) \partial_\theta \\
& = -dx dy (\partial_y \partial_x - q \partial_x \partial_y + (1+q)h \partial_y \partial_\theta) \\
& \quad -dx d\theta (\partial_\theta \partial_x - q \partial_x \partial_\theta) \\
& \quad -dy d\theta (\partial_\theta \partial_y - q \partial_y \partial_\theta).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla aşağıdaki bağıntılara sahibiz:

$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_\theta &= q^{-1} \partial_\theta \partial_x, \\
\partial_x \partial_y &= q^{-1} \partial_y \partial_x + q^{-1} (q+1) h \partial_y \partial_\theta, \\
\partial_y \partial_\theta &= q^{-1} \partial_\theta \partial_y, \\
\partial_\theta^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

(3.32) deki bağıntılar $q \rightarrow 1$ limitinde

$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_\theta &= \partial_\theta \partial_x, \\
\partial_x \partial_y &= \partial_y \partial_x + 2h \partial_y \partial_\theta, \\
\partial_y \partial_\theta &= \partial_\theta \partial_y, \\
\partial_\theta^2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

şeklindedir.

Jeneratörleri $\partial_x, \partial_y, \partial_\theta$ olan ve (3.30) ve (3.32) bağıntılarını sağlayan cebiri $\mathbf{D}$ ile göstereceğiz.

3.7 Diferansiyeller ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda amacımız $\mathbf{D}$ cebiri ile

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad A_h \cong \Gamma_0$$

cebirlerini bağlamaktır. Yani, kısmi türev operatörleri ile diferansiyeller arasındaki bağıntıları ortaya koyacağız. Bunun için,

$$\begin{aligned}
\partial_{x'} dx' &= A_1 dx' \partial_{x'} + A_2 dy' \partial_{y'} + A_3 d\theta' \partial_{\theta'}, \\
\partial_{x'} dy' &= A_4 dy' \partial_{x'} + A_5 dx' \partial_{y'}, \\
\partial_{x'} d\theta' &= A_6 d\theta' \partial_{x'} + A_7 dx' \partial_{\theta'}, \\
\partial_{y'} dx' &= B_1 dx' \partial_{y'} + B_2 dy' \partial_{x'}, \\
\partial_{y'} dy' &= B_3 dy' \partial_{y'} + B_4 dx' \partial_{x'} + B_5 d\theta' \partial_{\theta'}, \\
\partial_{y'} d\theta' &= B_6 d\theta' \partial_{y'} + B_7 dy' \partial_{\theta'}, \\
\partial_{\theta'} dx' &= C_1 dx' \partial_{\theta'} + C_2 d\theta' \partial_{x'}, \\
\partial_{\theta'} dy' &= C_3 dy' \partial_{\theta'} + C_4 d\theta' \partial_{y'}, \\
\partial_{\theta'} d\theta' &= C_5 d\theta' \partial_{\theta'} + C_6 dx' \partial_{x'} + C_7 dy' \partial_{y'}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

olduklarını kabul edelim. Burada (3.18), (3.28) ve (3.34) ifadelerinden ve (3.24) deki bağıntılar kullanılarak, birçok işlemten sonra,

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= q^{-2} dx \partial_x - q^{-2} h dx \partial_\theta, \\
\partial_x dy &= q^{-1} dy \partial_x, \\
\partial_x d\theta &= q^{-1} d\theta \partial_x + q^{-1} h dx \partial_x + q^{-1} (q+1) h dy \partial_y + q^{-1} h d\theta \partial_\theta, \\
\partial_y dx &= q^{-1} dx \partial_y, \\
\partial_y d\theta &= q^{-1} d\theta \partial_y, \\
\partial_y dy &= q^{-2} dy \partial_y + (q^{-2} - 1) dx \partial_x - q^{-2} (q+1) h dx \partial_\theta, \\
\partial_\theta dx &= -q^{-1} dx \partial_\theta, \\
\partial_\theta dy &= -q^{-1} dy \partial_\theta, \\
\partial_\theta d\theta &= d\theta \partial_\theta + (1 - q^{-2}) dx \partial_x + (1 - q^{-2}) dy \partial_y + q^{-2} h dx \partial_\theta
\end{aligned} \tag{3.35}$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu bağıntılar da $q \rightarrow 1$ limitinde iyi tanımlıdır ve

$$\partial_x dx = dx \partial_x - h dx \partial_\theta,$$

$$\partial_x dy = dy \partial_x,$$

$$\partial_x d\theta = d\theta \partial_x + h dx \partial_x + 2h dy \partial_y + h d\theta \partial_\theta,$$

$$\partial_y dx = dx \partial_y,$$

$$\partial_y dy = dy \partial_y - 2h dx \partial_\theta,$$

$$\partial_y d\theta = d\theta \partial_y,$$

$$\partial_\theta dx = -dx \partial_\theta,$$

$$\partial_\theta dy = -dy \partial_\theta,$$

$$\partial_\theta d\theta = d\theta \partial_\theta + h dx \partial_\theta \quad (3.36)$$

şeklindedir.

Elde edilen bağıntıların tutarlı olduğunu göstermek zor değildir. Bunun için

$$d^2 = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu, aşağıdaki bağıntılardan çıkar.

$$\begin{aligned} d(\partial_x f) &= (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) \partial_x f \\ &= (dx \partial_x \partial_x + dy \partial_y \partial_x + d\theta \partial_\theta \partial_x) f \end{aligned} \quad (3.37)$$

(3.37) deki eşitlikte (3.33) deki bağıntıları kullanırsak,

$$d(\partial_x f) = dx \partial_x \partial_x + dy (\partial_x \partial_y - 2h \partial_y \partial_\theta) + d\theta \partial_x \partial_\theta, \quad (3.38)$$

eşitliği elde edilir. (3.38) deki eşitlikte de (3.36) daki bağıntıları kullanırsak,

$$d \partial_x = \partial_x d$$

$$d \partial_y = \partial_y d$$

$$d \partial_\theta = -\partial_\theta d \quad (3.39)$$

elde edilir. Şimdi $d^2 = 0$ olduğunu görelim:

$$\begin{aligned}
 d^2 &= d(dx\partial_x + dy\partial_y + d\theta\partial_\theta) \\
 &= -dx d\partial_x - dy d\partial_y + d\theta d\partial_\theta \\
 &= -dx(\partial_x d) - dy(\partial_y d) + d\theta(-\partial_\theta d) \\
 &= -dx\partial_x d - dy\partial_y d - d\theta\partial_\theta d \\
 &= -(dx\partial_x + dy\partial_y + d\theta\partial_\theta)d \\
 &= -d^2
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.40) dan,

$$d^2 = 0 \tag{3.41}$$

dır.

4. R MATRİS YAKLAŞIMI

Bu bölümde $R_h(2|1)$ süper uzayının elemanlarının sağladığı h komutasyon bağıntıları bir R matrisi ile, uygun tanımlanacak bir tensör çarpım kullanılarak elde edilecektir. R matrisinin Yang-Baxter denklemlerini sağlaması gerekir. Yang-Baxter denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} \quad (4.1)$$

$$\hat{R}_{12} \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} = \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} \hat{R}_{23} \quad (\text{örgü grup bağıntısı}) \quad (4.2)$$

Bu durumda cebir, asosyatiftir. R matrisini, bir $K \in \text{End}(C \otimes C)$ matrisi yardımıyla elde edeceğiz (Çelik, 1998). Bunun için, değişkenler ile diferansiyellerinin komutasyon bağıntılarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$X^i dX^j = q (-1)^{\hat{i}(\hat{j}+1)} K_{kl}^{ij} dX^k X^l \quad (4.3)$$

Burada $i = 1, 2, 3$ için;

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = \theta,$$

$$dx^1 = dx, \quad dx^2 = dy, \quad dx^3 = d\theta \quad (4.4)$$

şeklindedir.

(3.24) deki tüm bağıntılar (4.3) de kullanılırsa, örneğin $i = 1, j = 1$ için

$$\begin{aligned} X^1 dX^1 = q & (K_{11}^{11} dx^1 x^1 + K_{12}^{11} dx^1 x^2 + K_{13}^{11} dx^1 x^3 + \\ & K_{21}^{11} dx^2 x^1 + K_{22}^{11} dx^2 x^2 + K_{23}^{11} dx^2 x^3 + \\ & K_{31}^{11} dx^3 x^1 + K_{32}^{11} dx^3 x^2 + K_{33}^{11} dx^3 x^3) \end{aligned} \quad (4.5)$$

olup, (4.4) ve (4.5) den

$$K_{12}^{11} = K_{13}^{11} = K_{21}^{11} = K_{22}^{11} = K_{23}^{11} = K_{31}^{11} = K_{32}^{11} = K_{33}^{11} = 0$$

$$K_{11}^{11} = q \quad (4.6)$$

bulunur. Benzer şekilde tüm i ve j ler için K matrisinin tüm elemanları bulunur. (4.6) da elde ettiğimiz matris elemanlarını K matrisinin birinci satırına yazmak şartıyla

tanımlayacağımız K matrisi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{11} & K_{12}^{11} & K_{13}^{11} & K_{21}^{11} & K_{22}^{11} & K_{23}^{11} & K_{31}^{11} & K_{32}^{11} & K_{33}^{11} \\ K_{11}^{12} & K_{12}^{12} & K_{13}^{12} & K_{21}^{12} & K_{22}^{12} & K_{23}^{12} & K_{31}^{12} & K_{32}^{12} & K_{33}^{12} \\ K_{11}^{13} & K_{12}^{13} & K_{13}^{13} & K_{21}^{13} & K_{22}^{13} & K_{23}^{13} & K_{31}^{13} & K_{32}^{13} & K_{33}^{13} \\ K_{11}^{21} & K_{12}^{21} & K_{13}^{21} & K_{21}^{21} & K_{22}^{21} & K_{23}^{21} & K_{31}^{21} & K_{32}^{21} & K_{33}^{21} \\ K_{11}^{22} & K_{12}^{22} & K_{13}^{22} & K_{21}^{22} & K_{22}^{22} & K_{23}^{22} & K_{31}^{22} & K_{32}^{22} & K_{33}^{22} \\ K_{11}^{23} & K_{12}^{23} & K_{13}^{23} & K_{21}^{23} & K_{22}^{23} & K_{23}^{23} & K_{31}^{23} & K_{32}^{23} & K_{33}^{23} \\ K_{11}^{31} & K_{12}^{31} & K_{13}^{31} & K_{21}^{31} & K_{22}^{31} & K_{23}^{31} & K_{31}^{31} & K_{32}^{31} & K_{33}^{31} \\ K_{11}^{32} & K_{12}^{32} & K_{13}^{32} & K_{21}^{32} & K_{22}^{32} & K_{23}^{32} & K_{31}^{32} & K_{32}^{32} & K_{33}^{32} \\ K_{11}^{33} & K_{12}^{33} & K_{13}^{33} & K_{21}^{33} & K_{22}^{33} & K_{23}^{33} & K_{31}^{33} & K_{32}^{33} & K_{33}^{33} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

(4.5) den elde edilen katsayılar (4.7) de yerine yazılırsa;

$$K_{h,q} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (q - q^{-1}) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (h + q^{-1}h) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-q^{-1}h) & 0 & (q - q^{-1}) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-h - hq^{-1}) & 0 & (q - q^{-1}) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-h) & 0 & 0 & 0 & (-q^{-1}h) & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \{K_{kl}^{ij}\} \quad (4.8)$$

şeklindedir.

h deformasyon için bir K_h matrisi ve ondan üretilen bir matris,

$$K_h = \lim_{q \rightarrow 1} K_{h,q}$$

$$\hat{K}_h = \lim_{q \rightarrow 1} (K_{h,q} P) \quad (4.9)$$

tanımları yapılarak kolayca elde edilir. Burada P süper permütasyon matrisidir ve

$$P_{kl}^{ij} = (-1)^{\hat{i}\hat{j}} \delta_l^i \delta_k^j \quad (4.10)$$

şeklindedir. Yani,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

dir.

Burada $\hat{K}_h$ matrisini $\hat{R}_h$ matrisi olarak alırız. $\hat{K}_h$ matrisi (4.2) bağıntısını sağlar. Bu aşağıdaki eşitlikler uygulanarak görülebilir.

$$\begin{aligned} (\hat{K}_{12})_{def}^{abc} &= K_{de}^{ab} \delta_f^c \\ (\hat{K}_{13})_{def}^{abc} &= (-1)^{b(c+f)} \hat{K}_{df}^{ac} \delta_e^b \\ (\hat{K}_{23})_{def}^{abc} &= (-1)^{a(b+c+e+f)} \hat{K}_{ef}^{bc} \delta_d^a \end{aligned} \quad (4.16)$$

R matrisi ise,

$$R_h = P K_h \quad (4.17)$$

den elde edilir ve Yang-Baxter denklemini sağlar. R matrisi açık olarak,

$$R_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2h & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2h & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

şeklindedir

5. SÜPER CLIFFORD CEBİRİNİN YENİ BİR DEFORMASYONU

Bu bölümde, $(2+1)$ -boyutlu süper-Clifford cebirinin bir h -deformasyonunu takdim edeceğiz. Bunu yapmak için dokuz adet operatöre ihtiyacımız var. Bu operatörler, koordinat fonksiyonları ve onların kısmi türev operatörleri cinsinden tanımlanmaktadır ve belli özelliklere sahiptirler.

İlk olarak, iki bosonik (yani **çift**) ve bir fermiyonik (yani **tek**) momentum operatörlerini tanımlayalım. Basit olarak $\partial_x, \partial_y, \partial_\theta$ kısmi türev operatörleri, ip_x , ip_y , ve p_θ ile özdeşleştirilir fakat koordinatlar ve momentumlarının hermityenliği ile uyuşmaz. Dolayısıyla kısmi türev operatörlerini, ip_x , ip_y , ve p_θ momentumları ile özdeşleştirmek için, koordinatlar ve momentumları hermityen yapmalıyız. Bu sonuncusu için önce x , y ve θ nın hermityen eşleniğini tanımlayalım. Basit olarak,

$$x^+ = x,$$

$$y^+ = y \tag{5.1}$$

alırız. Şimdi,

$$\theta^+ = a\theta + bx \tag{5.2}$$

olsun. Bu takdirde,

$$(\theta^+)^+ = \theta^+ a^+ + b^+ x^+ \tag{5.3}$$

eşitliği yazılır.

(5.2) denklemini (5.3) de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} (\theta^+)^+ &= (a\theta + bx) a^+ + b^+ x^+ \\ &= a a^+ (-1)^{\hat{a}^+} \theta + b a^+ x + b^+ x \\ &\equiv \theta \end{aligned} \tag{5.4}$$

olur ki, bu

$$(-1)^{\hat{a}^+} a a^+ = 1 \quad \text{ve} \quad b a^+ + b^+ = 0$$

demektir. Buradan,

$$a = 1 \quad \text{ve} \quad b = -b^+$$

sonucuna ulaşırız. Eğer h üzerine $h = -\bar{h}$ şartını yüklersek, $b = 2h$ alabiliriz. Buna göre,

$$\theta^+ = \theta + 2h x \quad (5.5)$$

elde edilir. Şimdi kısmi türevleri inceleyelim:

(3.28) deki ilk eşitliği göz önünde bulundurarak ∂_x^+ operatörünü,

$$\partial_x^+ = \alpha \partial_x + \beta \partial_\theta \quad (5.6)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde,

$$(\partial_x^+)^+ = \alpha^+ \partial_x^+ + \partial_\theta^+ \beta^+ \quad (5.7)$$

olup, (5.4) deki gibi işlemlerden sonra gerekli düzenlemeleri yaparak

$$\alpha = -1 \quad \text{ve} \quad \beta = 2h$$

elde ederiz. Buna göre,

$$\partial_x^+ = -\partial_x + 2h \partial_\theta \quad (5.8)$$

olmalıdır. Benzer işlemlerle .

$$\partial_y^+ = -\partial_y$$

$$\partial_\theta^+ = \partial_\theta \quad (5.9)$$

elde edilir. Şimdi

$$\hat{x} = \frac{x + x^+}{2},$$

$$\hat{y} = \frac{y + y^+}{2},$$

$$\hat{\theta} = \frac{\theta + \theta^+}{2} \quad (5.10)$$

tanımları

$$\hat{x} = x,$$

$$\hat{y} = y,$$

$$\hat{\theta} = \theta + h x \quad (5.11)$$

eşitliklerini verir.

Şimdi momentum operatörlerini

$$\hat{p}_x = i (\partial_x - h \partial_\theta),$$

$$\hat{p}_y = i \partial_y,$$

$$\hat{p}_\theta = \partial_\theta \quad (5.12)$$

olarak alabiliriz. (5.11) ve (5.12) deki operatörler aşağıdaki komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$\hat{x} \hat{y} = \hat{y} \hat{x},$$

$$\hat{x} \hat{\theta} = \hat{\theta} \hat{x} + h \hat{x}^2,$$

$$\hat{y} \hat{\theta} = \hat{\theta} \hat{y} + 2 h \hat{y} \hat{x},$$

$$\hat{\theta}^2 = -h \hat{\theta} \hat{x}. \quad (5.13)$$

Ayrıca, diğer komutasyon bağıntıları da,

$$\hat{p}_x \hat{x} = \hat{x} \hat{p}_x + i (1 + h \hat{x} \hat{p}_\theta),$$

$$\hat{p}_x \hat{y} = \hat{y} \hat{p}_x,$$

$$\hat{p}_x \hat{\theta} = \hat{\theta} \hat{p}_x - h (\hat{x} \hat{p}_x + 2 \hat{y} \hat{p}_y + i \hat{\theta} \hat{p}_\theta)$$

$$\hat{p}_y \hat{x} = \hat{x} \hat{p}_y,$$

$$\hat{p}_y \hat{y} = \hat{y} \hat{p}_y + i (1 + 2 h \hat{x} \hat{p}_\theta),$$

$$\hat{p}_y \hat{\theta} = \hat{\theta} \hat{p}_y,$$

$$\hat{p}_\theta \hat{x} = \hat{x} \hat{p}_\theta ,$$

$$\hat{p}_\theta \hat{y} = \hat{y} \hat{p}_\theta ,$$

$$\hat{p}_\theta \hat{\theta} = 1 - (\hat{\theta} - h \hat{x}) \hat{p}_\theta ,$$

$$\hat{p}_x \hat{p}_y = \hat{p}_y \hat{p}_x + 2ih \hat{p}_y \hat{p}_\theta ,$$

$$\hat{p}_x \hat{p}_\theta = \hat{p}_\theta \hat{p}_x ,$$

$$\hat{p}_y \hat{p}_\theta = \hat{p}_\theta \hat{p}_y ,$$

$$\hat{p}_\theta^2 = 0 \tag{5.14}$$

şeklindedir. Sonuç olarak h -deforme süper-Clifford cebir elde edilir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada 3d süper uzay üzerinde çalışıldı. q -deformasyondan h -deformasyona geçiş yapılarak, h -deforme $Fun(R_h(2|1))$ cebirini elde etmek için önce, uygun bir g matrisi bulundu. Ardından, bir diferansiyel hesap kuruldu. $Fun(R_h(2|1))$ cebirinin elemanları, yani $R_h(2|1)$ üzerindeki koordinat fonksiyonları, onların diferansiyelleri ve kısmi türev operatörleri arasındaki komutasyon bağıntıları elde edildi.

h -deforme bağıntıları veren bir R matrisi bulundu.

Son olarak, $(2+1)$ -boyutlu süper-Clifford cebirinin h -deformasyonu elde edildi.

KAYNAKLAR

Abe, E., (1977), Hopf Algebras.

Aghamohammadi A. , Khorromi M. ve Shariati A., (1995), “ h -Deformation as a Contraction of q -Deformation “ , J. Phys. A28: L225.

Çelik,S., Çelik,S.A. ve Arık,M., (1998) , “Differential Calculus on the h -Superplane”, J. Math. Phys. 39: 3426-3436.

Drinfeld, V. G. , (1986) , “Quantum Groups”, in Proc. IMS Berkeley, 798.

Manin, Yu I., (1989), “Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup“, Commun. Math. Phys. 123: 163–175.

Wess, J. and Zumino, B. , (1990), “ Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyper Plane ” Nucl. Phys. B, 18: 302–312.

Woronowicz, S.L., (1989), “Differential calculus on compact matrix pseudogroups”, Commun. Math. Phys., 122 : 125-170.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 11.10.1983

Doğum yeri Bursa

Lise 1997-2001 Nuri Erbak Lisesi

Lisans 2001-2005 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2006-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi