

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Diferen. Ceb. Denk. en Küçük
Kar. Yak. İle Nüm. Çöz.

Yüksek Lisans Tezi

Mutlu Akar

2007

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC) : R-209-295

Kayıt No : 3634

Geldiği Yer : Fen Bilimleri
Enst. Tesis

Tarih : 06/12/2007

Fiyat : 2.40

Fatura No :

Ayniyat No :

Ek :

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜDİFERENSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN EN
KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK
ÇÖZÜMÜ

Matematikçi Mutlu AKAR

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ercan ÇELİK (YTÜ)
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (YTÜ)
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Fatih TAŞÇI (YTÜ-Mat.Müh.)

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iii
ÇİZELGE LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1 Önbilgiler	3
2.2 Kuvvet Serileri	5
2.3 Diferensiyel-Cebirsel Denklemler	6
2.3.1 Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin İndex'i	7
2.4 En Küçük Kareler Yaklaşımları	9
2.5 Genel En Küçük Kareler Problemi	12
3. MATERYAL ve YÖNTEM	17
3.1 Diferensiyel-Cebirsel Denklemleri Çözmek için Nümerik Metot	17
3.2 Nümerik Metodun Kuvvet Serilerine Uygulanışı	17
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	19
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	36
KAYNAKLAR	37
EKLER	39
Ek 1 Nümerik Metodun Programı	39
ÖZGEÇMİŞ	48

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 4.1 Test problemi 4.1'deki $y_1(x)$ ve $y_1^*(x)$ in grafikleri.....	23
Şekil 4.2 Test problemi 4.1'deki $y_2(x)$ ve $y_2^*(x)$ in grafikleri.	23
Şekil 4.3 Test problemi 4.2'deki $y_1(x)$ ve $y_1^*(x)$ in grafikleri.....	30
Şekil 4.4 Test problemi 4.2'deki $y_2(x)$ ve $y_2^*(x)$ in grafikleri.	30
Şekil 4.5 Test problemi 4.2'deki $y_3(x)$ ve $y_3^*(x)$ in grafikleri.....	31
Şekil 4.6 Zamana bağlı kapasiteye sahip lineer devre.....	31
Şekil 4.7 Test problemi 4.3'deki $e_1(t)$ ve $e_1^*(t)$ nin grafikleri.....	34
Şekil 4.8 Test problemi 4.3'deki $e_2(t)$ ve $e_2^*(t)$ nin grafikleri.	35
Şekil 4.9 Test problemi 4.3'deki $j(t)$ ve $j^*(t)$ nin grafikleri.....	35

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 4.1 Test problemi 4.1'deki $y_1(x)$ ile $y_1^*(x)$ in değerleri.....	22
Çizelge 4.2 Test problemi 4.1'deki $y_2(x)$ ile $y_2^*(x)$ in değerleri.....	22
Çizelge 4.3 Test problemi 4.2'deki $y_1(x)$ ile $y_1^*(x)$ in değerleri.....	28
Çizelge 4.4 Test problemi 4.2'deki $y_2(x)$ ile $y_2^*(x)$ in değerleri.....	29
Çizelge 4.5 Test problemi 4.2'deki $y_3(x)$ ile $y_3^*(x)$ in değerleri.....	29
Çizelge 4.6 Test problemi 4.3'deki $e_1(t)$ ile $e_1^*(t)$ nin değerleri.....	33
Çizelge 4.7 Test problemi 4.3'deki $e_2(t)$ ile $e_2^*(t)$ nin değerleri.....	33
Çizelge 4.8 Test problemi 4.3'deki $j(t)$ ile $j^*(t)$ nin değerleri.....	34

ÖNSÖZ

Matematiksel modellerinin oluşturulması uygulamalı bilim dallarında büyük bir önem taşımaktadır. Bu konuda yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda oldukça büyük bir hız kazanmıştır. Yapılan araştırmalar sonucunda, matematiksel modelleme problemlerinin genelde diferensiyel-cebirsal denklem olarak karşımıza çıktığı gözlemlenmiştir. Bu nedenle, diferensiyel-cebirsal denklemlerin sayısal çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımı benden esirgemeyen çok değerli hocam, Yrd. Doç. Dr. Ercan Çelik'e teşekkür ediyorum.

Mayıs 2007

Mutlu AKAR

ÖZET

Bu tezde, mühendislik ve fen bilimlerinde ortaya çıkan diferensiyel-cebirselsel denklem sistemlerini çözmek için bir metot sunuldu. İlk olarak, diferensiyel-cebirselsel denklem sistemi keyfi mertebeye kadar kuvvet serisine dönüştürüldü, daha sonra en küçük kareler yaklaşımı uygulanarak nümerik olarak çözüldü. Yöntemi açıklamak için üç farklı problem ele alındı. Problemlerin nümerik çözümleri ile tam çözümleri karşılaştırıldı ve Maple programında metodun programı yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel-cebirselsel denklemler, kuvvet serileri, en küçük kareler yaklaşımı, index, keyfi mertebe.

ABSTRACT

In this thesis, a method was presented to solve for systems of differential-algebraic equations arising in sciences and engineering. Firstly, differential-algebraic equation system was transformed to power series until arbitrary order, and then the system was solved numerically by using least squares approximation method. To illustrate this method, three different problems have been investigated. The numerical solutions of problems were compared with the their exact solutions and in maple programming the method has been programmed.

Keywords: Differential-algebraic equations, power series, least squares approximations, index, arbitrary order.

Hairer (1991) Runge-Kutta metodunu kullanarak diferensiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili çalışma yapmıştır ve diferensiyel-cebirsal denklemleri çözmek için başlangıç sınır değer metodlarını sunmuştur.

Pierluigi Amadio ve Francesco Mazzia (1992) başlangıç/sınır değer metodlarını kullanarak diferensiyel-cebirsal denklemlerin çözümlerine uygulamıştır.

Miler (2000) diferensiyel-cebirsal denklemlerle modellenmiş dinamik sistemin iyi yönleri (pros) ve kötü yönleri (cons) ile ilgili bir çalışma yapmıştır.

Wang (2000) bağımsızlıktaki diferensiyel-cebirsal denklemleri çözmek için sıralama (Collocation) metodunu geliştirmiştir.

Çelik (2002) Diferensiyel-cebirsal denklemlerin Padé yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Yelöğlu (2004) Diferensiyel-cebirsal denklemlerin Chebyshev yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Kızıloglu (2005) Diferensiyel-cebirsal denklemlerin Adomian ayrıştırma metodu ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Araştırmacılar bu metodların yanı sıra diferensiyel-cebirsal denklemleri çözmek için çeşitli bilgisayar paket programları geliştirmişlerdir.

Petraru (1989) genel implicit 0 ve 1 index'li diferensiyel-cebirsal denklem sistemleri için Backward diferensiyel formleri kullanarak DASSI bilgisayar paket programı,

1. GİRİŞ

20. yüzyılın sonuna doğru matematiksel modelleme problemlerinin genelde diferensiyel-cebirselsel denklem olarak karşımıza çıktığı gözlenmiştir. Bu nedenle, diferensiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Diferensiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümleri için ilk genel teknik 1971 yılında Gear tarafından verildi. Daha sonra araştırmacılar tarafından pek çok metot geliştirildi. En yaygın metot Runge-Kutta metodudur.

Hairer (1991) Runge-Kutta metodunu kullanarak diferensiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili çalışma yapmıştır ve diferensiyel-cebirselsel denklemleri çözmek için başlangıç/sınır değer metotlarını sunmuştur.

Pierluigi Amodio ve Francesco Mazzia (1992) başlangıç/sınır değer metotlarını kullanarak diferensiyel-cebirselsel denklemlerin çözümlerine uygulamıştır.

Müler (2000) diferensiyel-cebirselsel denklemlerle modellenmiş dinamik sistemin iyi yönleri (pros) ve kötü yönleri (cons) ile ilgili bir çalışma yapmıştır.

Wang (2000) mühendislikteki diferensiyel-cebirselsel denklemleri çözmek için sıralama (Collocation) metodunu geliştirmiştir.

Çelik (2002) Diferensiyel-cebirselsel denklemlerin Padé yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Yeloğlu (2004) Diferensiyel-cebirselsel denklemlerin Chebyshev yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Kızıloğlu (2005) Diferensiyel-cebirselsel denklemlerin Adomian ayrıştırma metodu ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Araştırmacılar bu metotların yanı sıra diferensiyel-cebirselsel denklemleri çözmek için çeşitli bilgisayar paket programları geliştirmişlerdir.

Petzold (1989) genel implicit 0 ve 1 index'li diferensiyel-cebirselsel denklem sistemleri için Backward diferensiyel formüllerini kullanarak DASSL bilgisayar paket programı,

Hairer ve Wanner (1992) lineer kapalı (implicit) 0 ve 1 index'li, 2 ve 3 index'li diferensiyel-cebirselsel denklemlerin Hessenberg formları için Runge-Kutta metodunu kullanarak (başlangıç değer problemini çözmek için) RADAU5 bilgisayar paket programı ve sınır değer problemlerini çözmek için COLDAE bilgisayar programı,

Bu çalışmada diferensiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için en küçük kareler yaklaşımı kullanıldı. Metot üç değişik test problemine uygulandı. Önce diferensiyel-cebirselsel denklemler keyfi dereceye kadar kuvvet serilerine dönüştürüldü, daha sonra bu kuvvet serileri keyfi dereceden en küçük kareler yaklaşımı hesaplanarak verilen diferensiyel-cebirselsel denklemin nümerik çözümü elde edildi.

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y nin x e göre n . türevidir. (2.1) denklemini $y^{(n)}$ ye göre çözümlüres,

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu da (2.1) in açık formda yazılmış halidir.

2.1.2. Tanım: m . dereceden bir

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.3)$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2.4)$$

şeklindeki denkleme cebirselsel denklem denir. Ponatif m tamsayısına $f(x) = 0$ denkleminin m dereceden denir. $f(x)$ polinomunda $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x ye denklemin kökü denir.

2.1.3. Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve x ler de değişkenler olmak üzere,

$$c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = b \quad (2.5)$$

şeklinde bir ifadeye lineer denklem denir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve x bilinmeyenler olmak üzere

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Önbilgiler

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1.1. Tanım: Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir ya da daha fazla bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini bulunduran denkleme diferensiyel denklem denir. Bu tür denklemlerin en genel formu;

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y nin x e göre n . türevidir. (2.1) denklemini $y^{(n)}$ ye göre çözümlürse,

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu da (2.1) in açık formda yazılmış halidir.

2.1.2. Tanım: m . dereceden bir

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m \quad (2.3)$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sifıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0 \quad (2.4)$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif m tamsayısına $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir.

2.1.3. Tanım: $c_i, b \in \mathbb{R}$ ve x_i ler de değişkenler olmak üzere,

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = b \quad (2.5)$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem denir.

2.1.4. Tanım: A $n \times n$ ünlüde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine tersi mevcut

$a_{ij}, b_i \in R$ ve x_i bilinmeyenler olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem sistemi adı verilir. Burada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine sistemin katsayılar matrisi ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ ile } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

matrislerine de sırası ile sistemin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir.

$$[A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

matrisine de sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Yukarıdaki lineer denklem sisteminin matris gösterimi $Ax = B$ şeklindedir. Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır ve sütun işlemleri, sistemin çözümünü değiştirmez. Yani,

- Herhangi iki denklemin yeri değiştirilirse,
- Herhangi iki denklemin her iki yanı sıfırdan farklı bir skalerle çarpılırsa,
- Herhangi iki denklemin her iki yanı, herhangi bir skalerle çarpıldıktan sonra başka bir denklemle taraf tarafa toplanırsa sistemin çözümleri aynı kalır.

Bu sebepten, $[A : B]$ genişletilmiş katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözümler bulunabilir. Bu metotla sistemi çözmeye Gauss-Jordan yok etme metodu ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de Gauss-Jordan indirgeme metodu adı verilir.

2.1.4. Tanım: A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler

(regüler olmayan) matris denir.

2.1.5. Tanım: A , n . mertebeden bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B \quad (2.9)$$

eşitliği ile verilir. Burada anlatılmak istenen,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

lineer denklem sisteminin çözümü; Δ , A matrisinin determinanı olmak üzere,

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

determinantları hesaplanır ve tek çözüm olan,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \quad (2.12)$$

olarak değerleri bulunur. $Ax = B$ lineer denklem sistemini çözmek için uygulanan bu kurala Cramer Kuralı denir.

2.1.6. Tanım: a pozitif bir reel sayı ve $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a ya da üstel fonksiyonun tabanı denir.

2.2 Kuvvet Serileri

2.2.1. Tanım: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \cdots + a_n (x-c)^n + \cdots \quad (2.13)$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir.

Eğer bu tanımda $c = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (2.14)$$

elde edilir. Ayrıca $x = c$ olması durumunda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0$ olur.

2.2.2. Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebeden türevi varsa,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots \quad (2.15)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ deki Taylor Serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin Serisi adı verilir.

2.3 Diferensiyel-Cebirsel Denklemler

Diferensiyel-cebirsell denklemler sistemi başlangıç değeri ile birlikte

$$F(y(t), y'(t), t) = 0 \quad (2.16.a)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0 \quad (2.16.b)$$

formundadır. (2.16.a) denkleminde kapalı (implicit) diferensiyel-cebirsell denklemler denir. Burada $F \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

$$Ay' + f(y, t) = 0 \quad (2.17.a)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0 \quad (2.17.b)$$

denkleminde lineer kapalı (linear implicit) diferensiyel-cebirsell denklemler denir.

Diferensiyel-cebirsell denklemleri açık olarak,

$$F(y', y, x, t) = 0 \quad (2.18.a)$$

$$G(y, x, t) = 0 \quad (2.18.b)$$

şeklinde yazabiliriz. Yukarıdaki sistemin (2.18.b) kısmında görüldüğü gibi diferensiyel-cebirsell denklemler üzerinde cebirsell kısıtlamalar vardır. Burada y diferensiyel değişken ve

x de cebirsel değişkendir. Eğer (2.16.a) ve (2.16.b) sistemi n tane denkleme sahipse, p tanesi diferansiyel değişken ise $(n - p)$ tanesi cebirsel değişkendir. *

2.3.1 Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin İndex'i

Bir diferansiyel-cebirsel denklem index ile karakterize edilir. Bu yüzden diferansiyel-cebirsel denklemlerin incelenmesinde ve sınıflandırılmasında index önemli bir rol oynar. (2.18.a) ve (2.18.b) diferansiyel-cebirsel denkleminin bir özel formu

$$y' = f(y, x, t) \quad (2.19.a)$$

$$0 = g(y, x, t) \quad (2.19.b)$$

olarak yazılabilir. Bu özel forma yarı-açık (semi-explicit) diferansiyel-cebirsel denklem denir. Burada da y diferansiyel değişken ve x de cebirsel değişkendir.

2.3.1.1. Tanım:

$$\begin{aligned} y' &= f(y, x, t) \\ 0 &= g(y, x, t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

yarı-açık diferansiyel-cebirsel denklem sistemi için, bir

$$\begin{aligned} y' &= f(y, x, t) \\ x' &= s(y, x, t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

adi diferansiyel denklem sistemini elde etmek için $g(y, x, t)$ nin t ye göre en az sayıda diferansiyellenmesine index denir veya index, şu şekilde de tanımlanır:

$F(t, y, y') = 0$ genel diferansiyel-cebirsel denkleminde, y nin index'i (sistemde y ve t cinsinden); y' nü elde etmek için gerekli olan diferansiyelin mertebesinin minimum sayısıdır ya da

* Ascher, U. M., Petzold, L. R., (1998), "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations", Society for Industrial and Applied Mathematics, 240.

$$\begin{aligned}
F(t, y, y') &= 0 \\
F'(t, y, y', y'') &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{d^p F}{dt^p}(t, y, y', \dots, y^{(p+1)}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada p en küçük tamsayıdır.

2.3.1.2. Örnek:

$$y = q(t) \tag{2.23}$$

yi alalım. Bu denklemin türevi alınırsa,

$$y' = q'(t) \tag{2.24}$$

elde edilir. Bu ise index'i 1 olan diferensiyel denklemdir. Çünkü y ye göre bir diferensiyel denklem elde etmek için $q(t)$ nin bir defa diferensiyeli alınmıştır.

2.3.1.3. Örnek:

$$\begin{aligned}
y'_2 &= y_1 + \gamma_1(t) \\
0 &= y_2 + \gamma_2(t)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$g(y, x, t)$ nin türevini alıp adi diferensiyel denklemde yerine yazarsak,

$$y'_2 = -\gamma'_2(t) = y_1 + \gamma_1(t) \Rightarrow y_1 = -\gamma'_2(t) - \gamma_1(t) \tag{2.26}$$

adi diferensiyel denklem sistemini elde etmek için tekrar her iki tarafın türevini alırsak,

$y'_1 = -\gamma'_2(t) - \gamma'_1(t)$ elde edilir. $\gamma_2(t)$ nin iki kez diferensiyeline ihtiyaç olduğundan, index 2 dir.

2.3.1.4. Örnek:

$$\begin{aligned}
y'_2 &= y_1 \\
y'_3 &= y_2 \\
0 &= y_3 - \gamma(t)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$g(y, x, t)$ nin türevini alıp adi diferensiyel denklemde yerine yazarsak,

$$y_3' = \gamma'(t) = y_2 \Rightarrow y_2 = \gamma'(t) \quad (2.28)$$

tekrar her iki tarafın türevini alırsak, $y_2' = \gamma''(t) \Rightarrow \gamma''(t) = y_1$ dir. Adi diferensiyel denklem sistemini elde etmek için tekrar her iki tarafın türevini alırsak, $y_1' = -\gamma'''(t)$ elde edilir. $\gamma(t)$ nin üç kez diferensiyeline ihtiyaç olduğundan, index 3 dir.

Index > 1 olan diferensiyel-cebirselsel denklemleri çözmek genellikle zordur ve halen aktif araştırma alanıdır. Bu tür diferensiyel-cebirselsel denklemleri çözmek için index indirgemesine gidilir. Yani denklem, index'i 1 olan diferensiyel-cebirselsel denklemlere indirgenir. Bu çalışmada index'i 1 olan diferensiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgilenilecektir.

2.4 En Küçük Kareler Yaklaşımları

$$\|f - p\|_2^2 = \int_a^b [f(x) - p(x)]^2 dx \quad (2.29)$$

minimum yapan $p \in \Pi_n$ i bulmalıyız. Standart formdaki $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ için

$$F(c_0, c_1, \dots, c_n) = \int_a^b (f(x) - c_0 - c_1x - \dots - c_nx^n)^2 dx \quad (2.30)$$

yazılabilir. Burada amacımız F yi minimum edecek şekilde $c_0, c_1, \dots, c_n$ leri bulmaktır.

Şimdi,

$$\forall i (i = 0, \dots, n) \text{ için } \frac{\partial F}{\partial c_i} = -2 \int_a^b x^i (f(x) - c_0 - c_1x - \dots - c_nx^n) dx \quad (2.31)$$

dir. Böylece $\forall i (i = 0, \dots, n)$ için $\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0$ olduğunda F minimize olacaktır. Buradan

$$c_0 \int_a^b x^i dx + c_1 \int_a^b x^{i+1} dx + \dots + c_n \int_a^b x^{i+n} dx = \int_a^b x^i f(x) dx \quad (2.32)$$

olacaktır. Yukarıdaki denklemlere normal denklemler denir ve

$$AC = B \quad (2.33)$$

şeklinde bir lineer sistem elde ederiz. Burada

$$A = \begin{bmatrix} \int_a^b 1 dx & \int_a^b x dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x dx & \int_a^b x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \cdots & \int_a^b x^{2n} dx \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b xf(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) dx \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

dır.

2.4.1. Örnek: $[-1,1]$ aralığında e^x in dokuzuncu dereceden en küçük kareler yaklaşımını bulalım.

Çözüm:

$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_9x^9$ olup,

$$F(c_0, c_1, \dots, c_9) = \int_{-1}^1 (f(x) - c_0 - c_1x - \cdots - c_9x^9)^2 dx \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial c_0} = 0 = 2 \int_{-1}^1 (-1)(f(x) - c_0 - c_1x - \cdots - c_9x^9) dx \\ \frac{\partial F}{\partial c_1} = 0 = 2 \int_{-1}^1 (-x)(f(x) - c_0 - c_1x - \cdots - c_9x^9) dx \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial c_9} = 0 = 2 \int_{-1}^1 (-x^9)(f(x) - c_0 - c_1x - \cdots - c_9x^9) dx \end{cases} \quad (2.36)$$

$$A = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 1 dx & \int_{-1}^1 x dx & \cdots & \int_{-1}^1 x^9 dx \\ \int_{-1}^1 x dx & \int_{-1}^1 x^2 dx & \cdots & \int_{-1}^1 x^{10} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-1}^1 x^9 dx & \int_{-1}^1 x^{10} dx & \cdots & \int_{-1}^1 x^{18} dx \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 e^x dx \\ \int_{-1}^1 xe^x dx \\ \vdots \\ \int_{-1}^1 x^9 e^x dx \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

2.4.2. Örnek: Bir f fonksiyonun $(0,1), (1,3), (2,5)$ noktalarını sağlayan kareler

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2.0000000000 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0.6666666667 & \dots & 0.1818181818 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0.1818181818 & \dots & 0.1052631579 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.350402387 \\ 0.7357588824 \\ \vdots \\ 0.2087 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözüldüğünde $c_0, c_1, \dots, c_9$ değerleri bulunur.

Buradan

$$p(x) = 1.0000000003834 + 1.00000000019x + 0.49999997893x^2 + 0.1666666663x^3 + \\ 0.04166684906x^4 + 0.008333360x^5 + 0.0013883428x^6 + \\ 0.000198350x^7 + 0.00002546209x^8 + 0.000002822x^9$$

olur.

Şimdi ayırık durumdaki en küçük kareler problemini inceleyeceğiz: Sonlu $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için en küçük kareler yaklaşımı polinomu bulacağız. O zaman bütün $c_0, c_1, \dots, c_n$ değerleri üzerinde

$$E(c_0, c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - c_0 - c_1x_i - \dots - c_nx_i^n]^2 \quad (2.39)$$

nin minimum olmasını istiyoruz.

$$\text{Minimum şart: } \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial c_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1x_i + \dots + c_nx_i^n) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \\ \frac{\partial E}{\partial c_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n x_i (c_0 + c_1x_i + \dots + c_nx_i^n) = \sum_{i=0}^n x_i f(x_i) \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial c_n} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n x_i^n (c_0 + c_1x_i + \dots + c_nx_i^n) = \sum_{i=0}^n x_i^n f(x_i) \end{cases} \quad (2.41)$$

normal denklemleri elde edilir. $(n+1)$ bilinmeyenli $(n+1)$ denklemi elde ederiz. Bu sistemi çözerek $p(x)$ i elde ederiz.

2.4.2. Örnek: Bir f fonksiyonuna ait $(0,1), (1,3), (2,5)$ noktalarını sağlayan kuadratik

polinoma göre en küçük kareler yaklaşımı bulalım.

Çözüm:

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ olarak alalım.

$$E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^2 [f(x_i) - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2]^2 \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^2 a_0 + \sum_{i=0}^2 a_1x_i + \sum_{i=0}^2 a_2x_i^2 = \sum_{i=0}^2 f(x_i) \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^2 a_0x_i + \sum_{i=0}^2 a_1x_i^2 + \sum_{i=0}^2 a_2x_i^3 = \sum_{i=0}^2 x_i f(x_i) \\ \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^2 a_0x_i^2 + \sum_{i=0}^2 a_1x_i^3 + \sum_{i=0}^2 a_2x_i^4 = \sum_{i=0}^2 x_i^2 f(x_i) \end{cases} \quad (2.43)$$

buradan

$$\left. \begin{aligned} 3a_0 + 3a_1 + 5a_2 &= 9 \\ 3a_0 + 5a_1 + 9a_2 &= 13 \\ 5a_0 + 9a_1 + 17a_2 &= 23 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$$

Böylece $p(x) = 1 + 2x$ elde edilir.

2.5 Genel En Küçük Kareler Problemi

$f \in C[a, b]$ ve w ağırlık fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sabit pozitif integrallenebilir fonksiyon olsun. $F \subseteq C[a, b]$ sonlu boyutlu alt uzayından f ye olan yaklaşımları göz önüne alıyoruz. Burada F yi polinomların uzayı olarak alacağız.

2.5.1. Tanım:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx \quad (2.44)$$

ifadesine $C[a, b]$ aralığı üzerinde w ağırlık fonksiyonuna göre bir iç çarpım denir.

Buna göre,

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b w(x) f^2(x) dx \quad (2.45)$$

dir.

$\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$, F için bir baz olsun. F nin herhangi bir elemanı bu bazın bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$p = \sum_{i=0}^n \alpha_i \phi_i, \quad q = \sum_{j=0}^n \beta_j \phi_j \quad (2.46)$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \int_a^b w(x) p(x) q(x) dx \\ &= \int_a^b w(x) \sum_{i=0}^n \alpha_i \phi_i(x) \sum_{j=0}^n \beta_j \phi_j(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_i \beta_j \int_a^b w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_i \beta_j \langle \phi_i, \phi_j \rangle \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_i \beta_j \phi_{ij} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$\langle p, q \rangle = \alpha^T \Phi \beta$ dir. $\alpha, \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ bazına göre $p(x)$ in koordinat vektörü ve $\beta, \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ bazına göre $q(x)$ in koordinat vektörüdür. Φ , elemanları ϕ_{ij} olan matrisdir.

Amacımız f fonksiyonu için $[a, b]$ aralığı üzerinde $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ bazına göre F uzayından en küçük kareler yaklaşımı bulmaktır. Yani,

$$\begin{aligned} \|f - p\|^2 &= \min_{c_0, c_1, \dots, c_n} \|f(x) - c_0 \phi_0(x) - c_1 \phi_1(x) - \dots - c_n \phi_n(x)\|^2 \\ &= \min_{c_0, c_1, \dots, c_n} \int_a^b w(x) [f(x) - c_0 \phi_0(x) - c_1 \phi_1(x) - \dots - c_n \phi_n(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (2.48)$$

olacak şekilde $p \in F$ bulmaktır. Buradan c_i katsayılarına göre türev alarak ve türevleri sıfıra eşitleyerek normal denklemleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b w(x) [f(x) - c_0 \phi_0(x) - c_1 \phi_1(x) - \dots - c_n \phi_n(x)] [\phi_0(x)] dx = 0 \\
& \int_a^b w(x) [f(x) - c_0 \phi_0(x) - c_1 \phi_1(x) - \dots - c_n \phi_n(x)] [\phi_1(x)] dx = 0 \\
& \vdots \\
& \int_a^b w(x) [f(x) - c_0 \phi_0(x) - c_1 \phi_1(x) - \dots - c_n \phi_n(x)] [\phi_n(x)] dx = 0
\end{aligned} \tag{2.49}$$

veya

$$\begin{aligned}
c_0 \int_a^b w(x) \phi_0^2(x) dx + c_1 \int_a^b w(x) \phi_1(x) \phi_0(x) dx + \dots + c_n \int_a^b w(x) \phi_n(x) \phi_0(x) dx &= \int_a^b w(x) f(x) \phi_0(x) dx \\
c_0 \int_a^b w(x) \phi_0(x) \phi_1(x) dx + c_1 \int_a^b w(x) \phi_1^2(x) dx + \dots + c_n \int_a^b w(x) \phi_n(x) \phi_1(x) dx &= \int_a^b w(x) f(x) \phi_1(x) dx \\
&\vdots \\
c_0 \int_a^b w(x) \phi_0(x) \phi_n(x) dx + c_1 \int_a^b w(x) \phi_1(x) \phi_n(x) dx + \dots + c_n \int_a^b w(x) \phi_n^2(x) dx &= \int_a^b w(x) f(x) \phi_n(x) dx
\end{aligned} \tag{2.50}$$

buradan

$$\begin{aligned}
c_0 \langle \phi_0, \phi_0 \rangle + c_1 \langle \phi_1, \phi_0 \rangle + \dots + c_n \langle \phi_n, \phi_0 \rangle &= \langle f, \phi_0 \rangle \\
c_0 \langle \phi_0, \phi_1 \rangle + c_1 \langle \phi_1, \phi_1 \rangle + \dots + c_n \langle \phi_n, \phi_1 \rangle &= \langle f, \phi_1 \rangle \\
&\vdots \\
c_0 \langle \phi_0, \phi_n \rangle + c_1 \langle \phi_1, \phi_n \rangle + \dots + c_n \langle \phi_n, \phi_n \rangle &= \langle f, \phi_n \rangle
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$\phi_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$ olduğundan $\Phi \alpha = \tilde{f}$ matris formundaki normal denklemleri elde ederiz.

$$\text{Burada } \alpha = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \tilde{f} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \langle f, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \phi_n \rangle \end{bmatrix} \text{ ve } p = c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1 + \dots + c_n \phi_n \text{ dir.}$$

$w(x) = 1$ alınırsa en küçük kareler probleminin ilk durumu elde edilir.

2.5.2. Tanım: $C[a, b]$ nin herhangi iki elemanının iç çarpımı sıfır ise $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonallerdir denir. Yani;

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = 0 \Rightarrow f \perp g \tag{2.52}$$

Burada F için ortogonal bazı kullanırsak Φ matrisinin diyagonal elemanları hariç diğer tüm elemanları sıfır olur. Çünkü

$i \neq j$ iken $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ ortogonal olduğunda $\phi_{i,j} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ dır. Bu durumda normal denklemlerin çözümü,

$$c_i = \frac{\langle f, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle} = \frac{\int_a^b w(x) f \phi_i dx}{\int_a^b w(x) \phi_i^2 dx} \quad (2.53)$$

dir.

Verilen herhangi bir bazı Gram-Schmidt yöntemiyle ortogonalleştirilebiliriz.

2.5.3. Örnek: Π_3 (derecesi ≤ 3 olan polinomların uzayı) uzayının $[-1, 1]$ aralığında $w(x) = 1$ için iç çarpım ve norma göre bir ortogonal bazını bulalım.

Çözüm:

Π_3 için bir baz $\{1, x, x^2, x^3\}$ ü alalım.

$$\phi_0 = 1$$

$$\phi_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 \quad \left(\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot 1 \cdot \underbrace{w(x)}_1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0 \right)$$

$$= x \quad (2.54)$$

$$\phi_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\|x\|^2} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\phi_3 = x^3 - \frac{\langle x^3, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle x^3, x \rangle}{\|x\|^2} x - \frac{\langle x^3, x^2 \rangle}{\|x^2\|^2} x^2 = x^3 - \frac{3}{5} x$$

2.5.4. Örnek: $[-1, 1]$ aralığı üzerinde $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ için en küçük kareler yaklaşımı bulalım.

Çözüm:

Yukarıdaki örnek 2.5.3 de bulduğumuz $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ ortogonal bazına göre,

$$\sqrt{1-x^2} \cong c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3 \quad (2.55)$$

yazılır.

$$\min_{c_i} \int_a^b \left(\sqrt{1-x^2} - c_0\phi_0 - c_1\phi_1 - c_2\phi_2 - c_3\phi_3 \right)^2 dx = H(c_0, c_1, c_2, c_3) \quad (2.56)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial c_0} = 0, \frac{\partial H}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial H}{\partial c_2} = 0, \frac{\partial H}{\partial c_3} = 0 \Rightarrow \Phi\alpha = \tilde{f}$$

$$i = j \text{ iken } \phi_{i,j} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle \neq 0$$

$$i \neq j \text{ iken } \phi_{i,j} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0 \quad (2.57)$$

dır. Yani;

$$\phi_{00} = \langle \phi_0, \phi_0 \rangle = \int_{-1}^1 w(x) \phi_0^2 dx = 2 \quad \phi_{11} = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = \int_{-1}^1 w(x) \phi_1^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\phi_{22} = \langle \phi_2, \phi_2 \rangle = \int_{-1}^1 w(x) \phi_2^2 dx = \frac{8}{45} \quad \phi_{33} = \langle \phi_3, \phi_3 \rangle = \int_{-1}^1 w(x) \phi_3^2 dx = \frac{8}{175} \quad (2.58)$$

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \langle f, \phi_1 \rangle \\ \langle f, \phi_2 \rangle \\ \langle f, \phi_3 \rangle \end{bmatrix} \text{ olduğundan } \langle f, \phi_0 \rangle = \frac{\pi}{2}, \langle f, \phi_1 \rangle = 0, \langle f, \phi_2 \rangle = -\frac{\pi}{24}, \langle f, \phi_3 \rangle = 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{175} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ -\frac{\pi}{24} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{\pi}{4} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{15\pi}{24} \\ c_3 = 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

elde edilir. İstenen yaklaşım

$$p(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{15\pi \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)}{64} \quad (2.60)$$

olarak bulunur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Diferensiyel-Cebirsel Denklemleri Çözmek için Nümerik Metot

$$F(y, y', x) = 0 \quad (3.1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \quad (3.2)$$

şeklinde verilmiş diferensiyel-cebirselsel denklemi göz önüne alalım. Burada F ve y her mertebeden diferensiyellenebilen fonksiyonlardır. Başlangıç değeri yerine yazıldığında bu denklem,

$$F(y(x_0), y'(x_0), x_0) = 0 \quad (3.3)$$

şeklini alır. (3.1) denkleminin çözümlerinin

$$y = y_0 + y_1 x + e x^2 \quad (3.4)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (3.1) denkleminde (3.4) ifadesi ve türevleri yerlerine yazılır sonra yüksek dereceden terimler ihmal edilirse,

$$Ae = B \quad (3.5)$$

şeklinde e ye göre lineer denklem elde edilir. Burada A ve B sabit matrislerdir. (3.5) denklemini çözülürse e değeri bulunur ve bu e değeri (3.4) denkleminde yerine yazılır. Yüksek dereceden terimler için yukarıdaki işlemler tekrar edilirse (3.1) denkleminin çözümü için keyfi dereceden kuvvet serileri elde edilir. Sonra bu kuvvet serilerine en küçük kareler yaklaşımını uygulayarak verilen diferensiyel-cebirselsel denklemin keyfi mertebeden nümerik çözümü elde edilmiş olur.

3.2 Nümerik Metodun Kuvvet Serilerine Uygulanışı

(3.4) fonksiyonu (3.1) de yerine yazıldığında,

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + (f_n + p_1 e_1 + \dots + p_m e_m) x^n \quad (3.6)$$

şeklinde bilinen kuvvet serisinden farklı, (3.6) tipinde başka bir kuvvet serisi tanımlayalım.

Burada $p_1, p_2, \dots, p_m$ ler sabitlerdir. (3.4) den

$$y_i = y_{i,0} + y_{i,1}x + y_{i,2}x^2 + \dots + e_i x^n \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. y_i , y nin i . elemanıdır. (3.1) denkleminde, (3.7) ifadesi yerine yazılırsa,

$$f_i = (f_{i,n} + p_{i,1}e_m)x^{n-1} + O(x^{n-j+1}) \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada f_i , (3.1) denklemindeki $f(y, y', x)$ in i . elemanıdır. Eğer $f(y, y', x)$, y' yü ihtiva ediyorsa $j = 1$; ihtiva etmiyorsa $j = 0$ dır. (3.5) ve (3.8) den;

$$A_{i,j} = P_{i,j} \quad (3.9)$$

$$B_i = -f_{i,n} \quad (3.10)$$

şeklinde lineer denklem elde edilir. Bu denklem çözülürse e_i ($i = 1, 2, \dots, m$) bulunur. Bu e_i değeri (3.7) denkleminde yerine yazılırsa n . dereceden bir polinom olan y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) elde edilir. (3.7) denkleminde (3.10) denklemine kadar bu işlemler tekrar edilirse (3.1) denklemindeki diferensiyel-cebirselle denklemin çözümü için keyfi dereceden kuvvet serileri elde edilir. Daha sonra bu kuvvet serilerini yine keyfi dereceden en küçük kareler yaklaşımına dönüştürerek verilen diferensiyel-cebirselle denklemin nümerik çözümü elde edilir.

$$y_1(x) = y_{1,0} + y_{1,1}x + y_{1,2}x^2 + \dots = 1 + 2x + e_1x^2 \quad (4.4)$$

$$y_2(x) = y_{2,0} + y_{2,1}x + y_{2,2}x^2 + \dots = 1 + e_2x^2$$

$$(-1 + 2e_1)x + O(x^2) = 0 \quad (4.5)$$

$$(0.5 - e_2)x^2 + O(x^3) = 0$$

şeklinde (3.8) formundaki denklemleri elde ederiz. (3.9) ve (3.10) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem sistemi,

$$Ae = B \quad (4.6)$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, sunulan metot üç test problemine uygulandı. Bu problemlerin nümerik çözümleri, bu metotla bulunarak tablo ve şekil üzerinde tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Test problemi* 4.1

Aşağıdaki başlangıç değerleri ile birlikte verilen diferensiyel-cebirselsel denklem sistemini düşünelim:

$$\begin{aligned} y_1' &= e^x + y_2 + xy_2' \\ y_2 &= \cos x \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Bu diferensiyel-cebirselsel denklem sisteminin tam çözümü,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x + x \cos x \\ y_2(x) &= \cos x \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde dir. Başlangıç değerlerinden (4.1) sisteminin çözümlerinin,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_{1,0} + y_{1,1}'x + e_1x^2 = 1 + 2x + e_1x^2 \\ y_2(x) &= y_{2,0} + y_{2,1}'x + e_2x^2 = 1 + e_2x^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.4) denklemi ve türevleri (4.1) sisteminde yerlerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} (-1 + 2e_1)x + O(x^2) &= 0 \\ (0.5 + e_2)x^2 + O(x^3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde (3.8) formundaki denklemi elde ederiz. (3.9) ve (3.10) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem sistemi,

$$Ae = B \quad (4.6)$$

* Wang, W., (2005), "An Algorithm for Solving DAEs with Mechanization", Applied Mathematics and Computation, 167: 1350-1372.

şeklindedir. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

olur. (4.8) lineer denklem sistemi çözülürse,

$$e = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 2x + 0.5x^2 \\ y_2(x) &= 1 - 0.5x^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

olur. (4.10) denklemden (4.1) denklem sisteminin çözümleri,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 2x + 0.5x^2 + e_1x^3 \\ y_2(x) &= 1 - 0.5x^2 + e_2x^3 \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak kabul edebiliriz. Benzer durumda (4.1) sisteminde (4.11) denklemi ve türevleri yerlerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} (1 + 3e_1)x^2 + O(x^3) &= 0 \\ e_2x^3 + O(x^4) &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

denklemlerini elde ederiz. (4.12) den,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu lineer denklem sistemi çözülürse,

$$e = \begin{pmatrix} -0.3333333333 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

olarak bulunur. Böylece, Test problemi 4.1'deki $y_1(x)$ ile $y_1^*(x)$ in değerleri,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 2x + 0.5x^2 - 0.3333333333x^3 \\ y_2(x) &= 1 - 0.5x^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

olur. Yukarıdaki işlemleri tekrar edersek,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 2x + 0.5x^2 - 0.3333333333x^3 + 0.04166666667x^4 + 0.05x^5 + 0.001388888889x^6 \\ &\quad - 0.001190476190x^7 + 0.00002480158730x^8 + 0.00002755731922x^9 \\ y_2(x) &= 1 - 0.5x^2 + 0.04166666667x^4 - 0.001388888889x^6 + 0.00002480158730x^8 \end{aligned}$$

dokuzuncu dereceden $y_1(x)$, $y_2(x)$ kuvvet serileri elde edilir. Bu kuvvet serilerine (2.29) formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y_1^*(x) &= 0.99997080400 + 2.0026784250x + 0.44035445520x^2 + 0.22790367600x^3 \\ &\quad - 2.7098711640x^4 + 7.7855057280x^5 - 12.929267551x^6 + 12.693443162x^7 \\ &\quad - 6.7551850080x^8 + 1.5030824380x^9 \\ y_2^*(x) &= 1.0000348415 - 0.0029590624800x - 0.43780150656x^2 - 0.55951631736x^3 \\ &\quad + 2.6875234386x^4 - 7.2212144004x^5 + 11.774146544x^6 - 11.319939053x^7 \\ &\quad + 5.9157376621x^8 - 1.2957307792x^9 \end{aligned}$$

şeklinde $y_1(x)$, $y_2(x)$ in en küçük kareler yaklaşımı elde edilir. Bu ise $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ in nümerik çözümüdür.

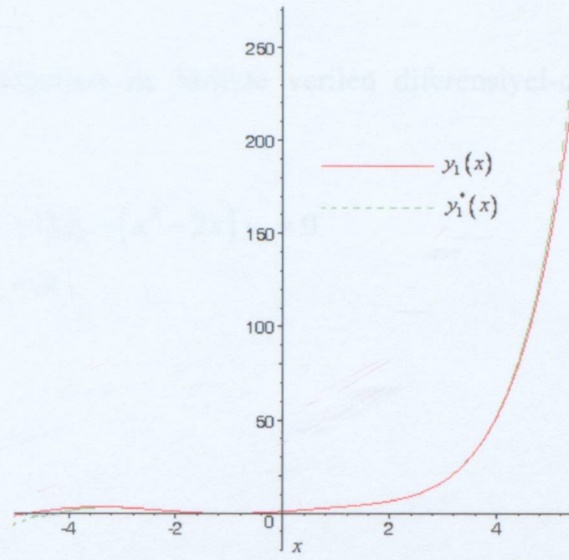
Tam çözümler ile nümerik çözümler aşağıdaki tablo ve şekillerde karşılaştırıldı.

Çizelge 4.1 Test problemi 4.1'deki $y_1(x)$ ile $y_1^*(x)$ in değerleri.

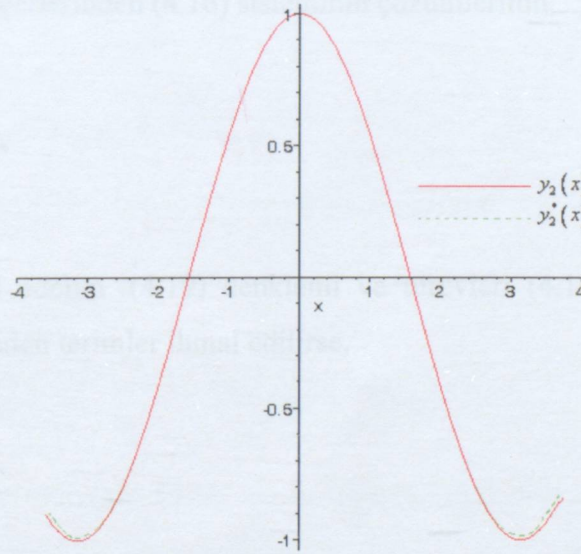
x	$y_1(x)$	$y_1^*(x)$	$ y_1(x) - y_1^*(x) $
0.1	1.2046713346	1.2046652367	0.0000060979
0.2	1.4174160738	1.4174179438	0.0000018700
0.3	1.6364597543	1.6364654518	0.0000056975
0.4	1.8602490952	1.8602412024	0.0000078928
0.5	2.0875125516	2.0875126817	0.0000001301
0.6	2.3173201694	2.3173279827	0.0000078133
0.7	2.5491422386	2.5491362799	0.0000059587
0.8	2.7829062960	2.7829047539	0.0000015421
0.9	3.0190520826	3.0190580094	0.0000059268
1.0	3.2585841344	3.2586149652	0.0000308308

Çizelge 4.2 Test problemi 4.1'deki $y_2(x)$ ile $y_2^*(x)$ in değerleri.

x	$y_2(x)$	$y_2^*(x)$	$ y_2(x) - y_2^*(x) $
0.1	0.9950041653	0.9950086446	0.0000044793
0.2	0.9800665778	0.9800672187	0.0000006409
0.3	0.9553364891	0.9553297457	0.0000067434
0.4	0.9210609940	0.9210668820	0.0000058880
0.5	0.8775825619	0.8775843013	0.0000017394
0.6	0.8253356149	0.8253291736	0.0000064413
0.7	0.7648421873	0.7648455398	0.0000033525
0.8	0.6967067093	0.6967089722	0.0000022629
0.9	0.6216099683	0.6216051960	0.0000047723
1.0	0.5403023059	0.5402813670	0.0000209389



Şekil 4.1 Test problemi 4.1'deki $y_1(x)$ ve $y_1^*(x)$ in grafikleri.



Şekil 4.2 Test problemi 4.1'deki $y_2(x)$ ve $y_2^*(x)$ in grafikleri.

Test problemi* 4.2

Aşağıdaki başlangıç değerleri ile birlikte verilen diferensiyel-cebirsal denklem sistemini düşünelim:

$$\begin{aligned} y_1' - xy_2' + x^2 y_3' + y_1 - (x+1)y_2 + (x^2 + 2x)y_3 &= 0 \\ y_2' - xy_3' - y_2 + (x-1)y_3 &= 0 \\ y_3 &= \sin x \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Bu diferensiyel-cebirsal denklem sisteminin tam çözümü,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-x} + xe^x \\ y_2(x) &= e^x + x \sin x \\ y_3(x) &= \sin x \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklinde. Başlangıç değerlerinden (4.16) sisteminin çözümlerinin,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_{1,0} + e_1 x = 1 + e_1 x \\ y_2(x) &= y_{2,0} + e_2 x = 1 + e_2 x \\ y_3(x) &= y_{3,0} + e_3 x = e_3 x \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.19) denklemi ve türevleri (4.16) sisteminde yerlerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} e_1 + O(x) &= 0 \\ -1 + e_2 + O(x) &= 0 \\ (-1 + e_3)x + O(x^2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde (3.8) formundaki denklem elde edilir. (3.9) ve (3.10) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem,

$$Ae = B \quad (4.21)$$

* Wang, W., (2005), "An Algorithm for Solving DAEs with Mechanization", Applied Mathematics and Computation, 167: 1350-1372.

şeklindedir. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

olur. (4.23) lineer denklem sistemi çözülürse,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 \\ y_2(x) &= 1 + x \\ y_3(x) &= x \end{aligned} \quad (4.25)$$

olur. (4.25) denkleminde (4.16) denklem sisteminin çözümleri,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + e_1 x^2 \\ y_2(x) &= 1 + x + e_2 x^2 \\ y_3(x) &= x + e_3 x^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

olarak kabul edilir. Benzer durumda (4.16) sisteminde (4.26) denklemi ve türevleri yerlerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} (-3 + 2e_1)x + O(x^2) &= 0 \\ (-3 + 2e_2)x + O(x^2) &= 0 \\ e_3 x^2 + O(x^3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

denklemleri elde edilir. (4.27) den,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

olur. Buradan,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi çözülürse,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 1,5x^2 \\ y_2(x) &= 1 + x + 1,5x^2 \\ y_3(x) &= x \end{aligned} \quad (4.31)$$

olur. (4.31) den (4.16) nın çözümleri,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 1,5x^2 + e_1x^3 \\ y_2(x) &= 1 + x + 1,5x^2 + e_2x^3 \\ y_3(x) &= x + e_3x^3 \end{aligned} \quad (4.32)$$

olarak kabul edilir. Bu ifade (4.16) da yerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} (-1 + 3e_1)x^2 + O(x^3) &= 0 \\ (-0,5 + 3e_2)x^2 + O(x^3) &= 0 \\ (0,1666666667 + e_3)x^3 + O(x^4) &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

olur. Buradan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -0,16666666667 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -0,16666666667 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi çözülürse,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3333333333 \\ 0.16666666667 \\ -0.16666666667 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

elde edilir. O halde (4.16) nın çözümü,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 1,5x^2 + 0.3333333333x^3 \\ y_2(x) &= 1 + x + 1,5x^2 + 0.16666666667x^3 \\ y_3(x) &= x - 0.16666666667x^3 \end{aligned} \quad (4.37)$$

olur. Yukarıdaki işlemler tekrar edilirse,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 1.5x^2 + 0.3333333333x^3 + 0.2083333333x^4 + 0.0333333333x^5 \\ &\quad + 0.00972222222x^6 + 0.0011904761905x^7 + 0.00022321428571x^8 \\ &\quad + 0.000022045855379x^9 \\ y_2(x) &= 1 + x + 1.5x^2 + 0.16666666667x^3 - 0.125x^4 + 0.008333333333x^5 \\ &\quad + 0.00972222222x^6 + 0.00019841269841x^7 - 0.00017361111111x^8 \\ &\quad + 0.0000027557319224x^9 \\ y_3(x) &= x - 0.16666666667x^3 + 0.008333333333x^5 - 0.00019841269841x^7 \\ &\quad + 0.0000027557319224x^9 \end{aligned}$$

dokuzuncu dereceden $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ kuvvet serileri elde edilir. Bu kuvvet serilerine (2.29) formülü uygulanırsa,

$$y_1^*(x) = 0.999987109 + 0.0012157596x + 1.4724683424x^2 + 0.5952618672x^3 \\ - 1.0856817972x^4 + 3.691581894x^5 - 6.1311338088x^6 + 6.0496135128x^7 \\ - 3.2266536588x^8 + 0.7195137664x^9$$

$$y_2^*(x) = 0.999972492 + 1.0024043634x + 1.4483064024x^2 + 0.6402227832x^3 \\ - 2.3981453496x^4 + 6.2906207364x^5 - 10.344537403x^6 + 10.045646582x^7 \\ - 5.2919524944x^8 + 1.1672329812x^9$$

$$y_3^*(x) = 0.00001492134 + 0.99861540768x + 0.03096251928x^2 - 0.4582950372x^3 \\ + 1.4289913638x^4 - 4.0040349149x^5 + 6.6964956458x^6 - 6.563267671x^7 \\ + 3.486396771x^8 - 0.7744232496x^9$$

şeklinde $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ in en küçük kareler yaklaşımı elde edilir. Bu ise $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ in nümerik çözümüdür.

Şimdi tam çözümle nümerik çözümleri aşağıdaki tablo ve şekiller üzerinde karşılaştıralım.

Çizelge 4.3 Test problemi 4.2'deki $y_1(x)$ ile $y_1^*(x)$ in değerleri.

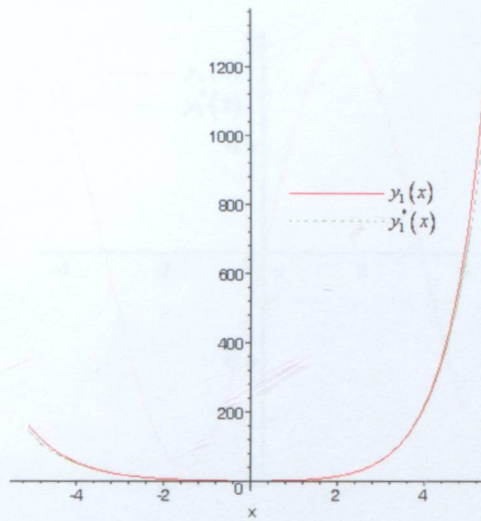
x	$y_1(x)$	$y_1^*(x)$	$ y_1(x) - y_1^*(x) $
0.1	1.0153545098	1.0153514202	0.0000030896
0.2	1.0630113047	1.0630124555	0.0000011508
0.3	1.1457758630	1.1457784950	0.0000026320
0.4	1.2670499251	1.2670460109	0.0000039142
0.5	1.4308912951	1.4308914539	0.0000001588
0.6	1.6420829163	1.6420867103	0.0000037940
0.7	1.9062121990	1.9062091564	0.0000030426
0.8	2.2297617069	2.2297606384	0.0000010685
0.9	2.6202124598	2.6202142006	0.0000017408
1.0	3.0861612697	3.0861729866	0.0000117169

Çizelge 4.4 Test problemi 4.2'deki $y_2(x)$ ile $y_2^*(x)$ in değerleri.

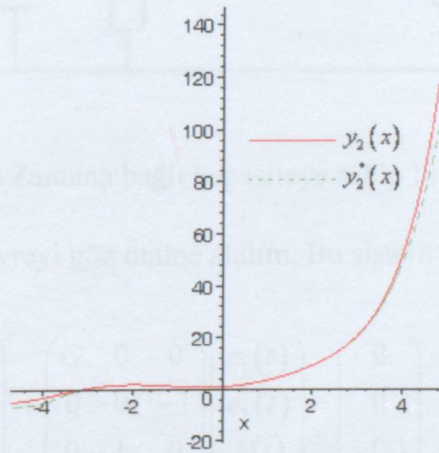
x	$y_2(x)$	$y_2^*(x)$	$ y_2(x) - y_2^*(x) $
0.1	1.1151542598	1.1151499152	0.0000043446
0.2	1.2611366244	1.2611369532	0.0000003288
0.3	1.4385148696	1.4385202081	0.0000053385
0.4	1.6475920345	1.6475863666	0.0000056679
0.5	1.8884340400	1.8884332153	0.0000008247
0.6	2.1609042844	2.1609101807	0.0000058963
0.7	2.4647050886	2.4647012691	0.0000038195
0.8	2.7994258012	2.7994238402	0.0000019610
0.9	3.1645973299	3.1646007520	0.0000034221
1.0	3.5597528133	3.5597710936	0.0000182803

Çizelge 4.5 Test problemi 4.2'deki $y_3(x)$ ile $y_3^*(x)$ in değerleri.

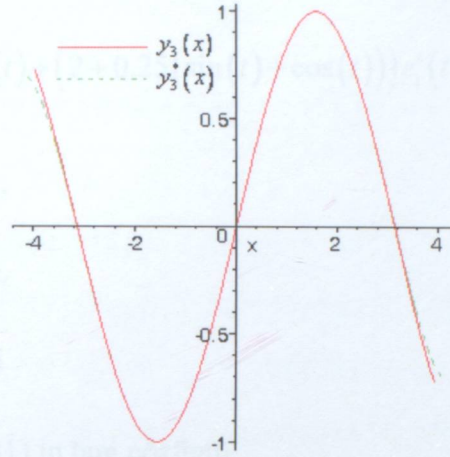
x	$y_3(x)$	$y_3^*(x)$	$ y_3(x) - y_3^*(x) $
0.1	0.0998334166	0.0998367251	0.0000033085
0.2	0.1986693308	0.1986683329	0.0000009979
0.3	0.2955202067	0.2955170878	0.0000031189
0.4	0.3894183423	0.3894224896	0.0000041473
0.5	0.4794255386	0.4794256521	0.0000001135
0.6	0.5646424734	0.5646383575	0.0000041159
0.7	0.6442176872	0.6442205876	0.0000029004
0.8	0.7173560909	0.7173570538	0.0000009629
0.9	0.7833269096	0.7833238229	0.0000030867
1.0	0.8414709848	0.8414557564	0.0000152284



Şekil 4.3 Test problemi 4.2'deki $y_1(x)$ ve $y_1^*(x)$ in grafikleri.

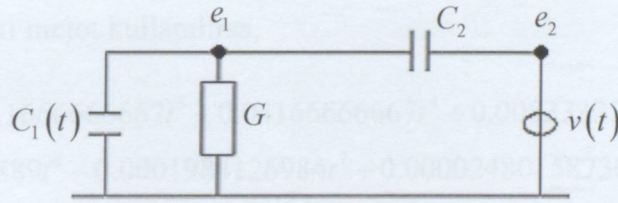


Şekil 4.4 Test problemi 4.2'deki $y_2(x)$ ve $y_2^*(x)$ in grafikleri.



Şekil 4.5 Test problemi 4.2'deki $y_3(x)$ ve $y_3^*(x)$ in grafikleri.

Test problemi* 4.3



Şekil 4.6 Zamana bağlı kapasiteye sahip lineer devre.

Şekil 4.6'da verilen lineer devreyi göz önüne alalım. Bu sistem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t)e_1(t) \\ -C_2e_1(t) + C_2e_2(t) \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$C_1(t) = 1 + 0.25(\sin(t) + \cos(t)), C_2 = 1, G = 2 \quad (4.39)$$

şeklindedir ve voltajı

$$v(t) = 4\sin(t) + 0.25\sin(2t) \quad (4.40)$$

seçerek (4.39) ve (4.40) denklemleri, (4.38) diferensiyel-cebirsal denklem sisteminde

* Çelik, E. and Bayram, M., (2005), "The Numerical Solution Physical Problems Modeled as a Systems of Differential-Algebraic Equations (DAEs)", Journal of The Franklin Institute, 342: 1-6.

yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (2 + 0.25(\cos(t) - \sin(t)))e_1(t) + (2 + 0.25(\sin(t) + \cos(t)))e_1'(t) - e_2'(t) &= 0, \\ -e_1'(t) + e_2'(t) - j(t) &= 0, \\ e_2(t) &= 4\sin(t) + 0.25\sin(2t), \end{aligned} \quad (4.41)$$

denklem sistemini elde ederiz.

$$e_1(0) = 1, e_2(0) = 0, j(0) = 3.5$$

başlangıç şartı ile birlikte (4.41) in tam çözümü

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \sin(t) + \cos(t), \\ e_2(t) &= 4\sin(t) + 0.25\sin(2t), \\ j(t) &= 3\cos(t) + 0.5\cos(2t) + \sin(t), \end{aligned} \quad (4.42)$$

şeklindedir. Yukarıdaki metot kullanılırsa,

$$\begin{aligned} e_1(t) &= 1 + t - 0.5t^2 - 0.1666666667t^3 + 0.04166666667t^4 + 0.008333333333t^5 \\ &\quad - 0.001388888889t^6 - 0.0001984126984t^7 + 0.00002480158730t^8 \\ &\quad + 0.000002755731922t^9 \\ e_2(t) &= 4.5t - t^3 + 0.1t^5 - 0.007142857143t^7 + 0.0003637566138t^9 \\ j(t) &= 3.5 + t - 2.5t^2 - 0.1666666667t^3 + 0.4583333333t^4 + 0.008333333333t^5 \\ &\quad - 0.04861111111t^6 - 0.0001984126984t^7 + 0.003249007937t^8 \\ &\quad + 0.000002755731922t^9 \end{aligned}$$

dokuzuncu dereceden $e_1(t)$, $e_2(t)$ ve $j(t)$ kuvvet serileri elde edilir. Bu kuvvet serilerine (2.29) formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} e_1^*(t) &= 0.9998601050 + 1.012849794t - 0.7866726120t^2 + 2.535480948t^3 - 13.22609488t^4 \\ &\quad + 37.35689958t^5 - 62.50208765t^6 + 61.41750358t^7 - 32.70871118t^8 + 7.282896764t^9 \\ e_2^*(t) &= -0.0008720320000 + 4.576739706t - 1.657828260t^2 + 14.24220798t^3 - 73.37329600t^4 \\ &\quad + 203.3462471t^5 - 335.6142470t^6 + 326.1092955t^7 - 172.0214496t^8 + 37.98712689t^9 \\ j^*(t) &= 3.499662568 + 1.030406256t - 3.167654688t^2 + 6.044474436t^3 - 29.70717750t^4 \\ &\quad + 84.14571766t^5 - 139.7486651t^6 + 136.3567542t^7 - 72.19124827t^8 + 15.99247936t^9 \end{aligned}$$

şeklinde $e_1(t)$, $e_2(t)$ ve $j(t)$ nin en küçük kareler yaklaşımı elde edilir. Bu ise $e_1(t)$, $e_2(t)$ ve $j(t)$ nin nümerik çözümüdür.

Tam çözümler ile nümerik çözümler aşağıdaki tablo ve şekillerde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.6 Test problemi 4.3'deki $e_1(t)$ ile $e_1^*(t)$ nin değerleri.

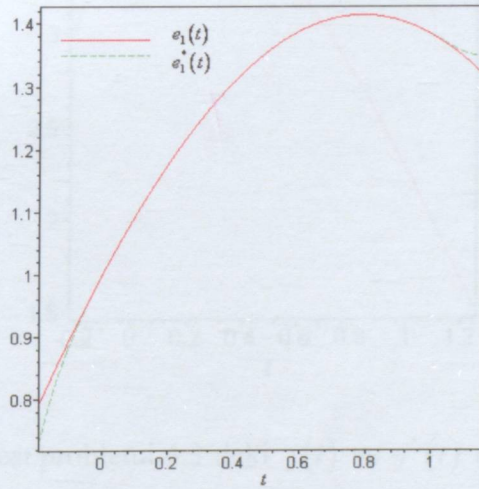
t	$e_1(t)$	$e_1^*(t)$	$ e_1(t) - e_1^*(t) $
0.1	1.0948375819	1.0948081186	0.0000294633
0.2	1.1787359086	1.1787454679	0.0000095593
0.3	1.2508566958	1.2508837081	0.0000270123
0.4	1.3104793363	1.3104408818	0.0000384545
0.5	1.3570081005	1.3570092813	0.0000011808
0.6	1.3899780883	1.3900160408	0.0000379525
0.7	1.4090598745	1.4090305276	0.0000293469
0.8	1.4140628002	1.4140556185	0.0000071817
0.9	1.4049368779	1.4049658836	0.0000290057
1.0	1.3817732907	1.3819244490	0.0001511583

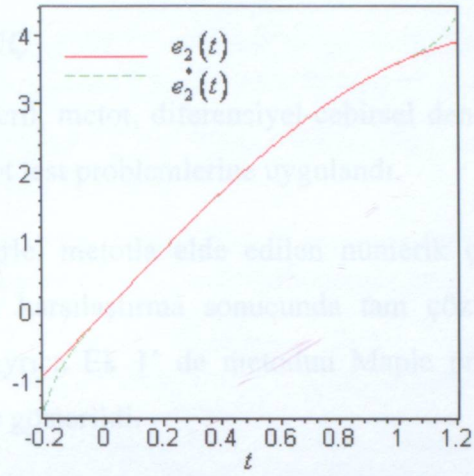
Çizelge 4.7 Test problemi 4.3'deki $e_2(t)$ ile $e_2^*(t)$ nin değerleri.

t	$e_2(t)$	$e_2^*(t)$	$ e_2(t) - e_2^*(t) $
0.1	0.4490009993	0.4488573114	0.0001436879
0.2	0.8920319088	0.8920479298	0.0000160210
0.3	1.3232414450	1.3234113249	0.0001698799
0.4	1.7370123919	1.7368254664	0.0001869255
0.5	2.1280699006	2.1280470568	0.0000228438
0.6	2.4915796651	2.4917733463	0.0001936812
0.7	2.8232331815	2.8231081838	0.0001249977
0.8	3.1193177644	3.1192670004	0.0000507640
0.9	3.3767695462	3.3769202395	0.0001506938
1.0	3.5932082959	3.5939242840	0.0007159841

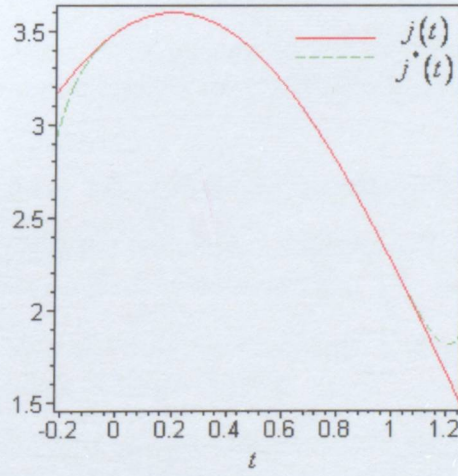
Çizelge 4.8 Test problemi 4.3'deki $j(t)$ ile $j^*(t)$ nin değerleri.

t	$j(t)$	$j^*(t)$	$ j(t) - j^*(t) $
0.1	3.5748792013	3.5748150417	0.0000641596
0.2	3.5993995613	3.5994134033	0.0000138420
0.3	3.5741974816	3.5742650463	0.0000675647
0.4	3.5009546790	3.5008725389	0.0000821401
0.5	3.3823243772	3.3823189092	0.0000054680
0.6	3.2218281953	3.2219122176	0.0000840223
0.7	3.0237278204	3.0236750978	0.0000527226
0.8	2.7928764577	2.7928708468	0.0000056109
0.9	2.5345557671	2.5346668720	0.0001111049
1.0	2.2543044841	2.2547489220	0.0004444379

Şekil 4.7 Test problemi 4.3'deki $e_1(t)$ ve $e_1^*(t)$ nin grafikleri.



Şekil 4.8 Test problemi 4.3'deki $e_2(t)$ ve $e_2^*(t)$ nin grafikleri.



Şekil 4.9 Test problemi 4.3'deki $j(t)$ ve $j^*(t)$ nin grafikleri.

KAYNAKLAR

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada sunulan nümerik metot, diferensiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metottur. Metot test problemlerine uygulandı.

Problemlerde tam çözümlerle, metotla elde edilen nümerik çözümler tablolar ve şekiller üzerinde karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucunda tam çözümlerle nümerik çözümlerin uyumlu olduğu görüldü. Ayrıca Ek 1' de metodun Maple programlama dilinde programı yapılarak bir örnek üzerinde gösterildi.

Çelik, E., (2002), Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Çelik, E., Karaduman, E. and Bayram, M. (2002), "A Numerical Method to Solve Chemical Differential-Algebraic Equations", *International Journal of Quantum Chemistry*.

Çelik, E., and Bayram, M., (2003), "On the Numerical Solution of Differential-Equations by Padé Series", *Applied Mathematics and Computation* 89: 443-451.

Çelik, E. and Bayram, M., (2005), "The Numerical Solution Physical Problems Modeled as a Systems of Differential-Algebraic Equations (DAEs)", *Journal of - The Franklin Institute*, 342:1-6.

Farebrother, R.W., (1988), *Linear Least Squares Computations*, New York.

Güzel N., Bayram M., (2005), "On the Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations with Index-3", *Applied Mathematics and Computation*.

Hairer, E., Wanner, G., (1991), "Solving Ordinary Differential Equations - stiff and Differential-Algebraic Problems", Springer-Verlag.

Kızıloğlu, O., (2003), Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Adomian Ayrıştırma Metodu ile Nümerik Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Müller, P. C., (2000), "Descriptor Systems: Pros and Cons of System Modelling by Differential-Algebraic Equations", *Mathematics Computers in Simulation*, 53: 273-278.

Pierluigi, A., and Mazzia, P., (1992), "Numerical Solution of Differential-algebraic Equations and Computation of Consistent Initial/Boundary Conditions", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 37: 135-142.

Unger, J., Krämer and Marquardt W., (1992), "Structural Analysis of Differential-Algebraic Theory and Applications", *Computers Chem. Eng.* 19:857-882.

Wang, F. S., (2000), "A Modified Collocation Method For Solving Differential-Algebraic Equations", *Applied Mathematics and Computation*, 116: 257-273.

Wang, W., (2005), "An Algorithm for Solving DAEs with Mechanization", *Applied Mathematics and Computation*, 167: 1350-1372.

KAYNAKLAR

- Ascher, U. M., Petzold, L. R., (1998), "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations", Society for Industrial and Applied Mathematics, 240.
- Barrio R., (2005), "Performance of the Taylor Series Method for ODEs/DAEs", Applied Mathematics Computation, 163 525-545
- Basem, S.A, (2006), "Continuation Method for Computing Certain Singular Points for Index-1 Differential-Algebraic Equations", Applied Mathematics and Computation 175, 1026-1038.
- Bayram, M. and Çelik, E., (2003), "Arbitrary Order Numerical Method for Solving Differential-Algebraic Equations by Padé Series", Applied Mathematics and Computation.
- Brenan, K. E., Campbell, S. L., Petzold, L. R., (1989), "Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations", North-Holland, Amsterdam.
- Çelik, E., (2002), Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Çelik, E., Karaduman, E. and Bayram, M., (2002), "A Numerical Method to Solve Chemical Differential-Algebraic Equations", International Journal of Quantum Chemistry.
- Çelik, E., and Bayram, M., (2003), "On the Numerical Solution of Differential-Equations by Padé Series", Applied Mathematics and Computation 89, 447-451.
- Çelik, E. and Bayram, M., (2005), "The Numerical Solution Physical Problems Modeled as a Systems of Differential-Algebraic Equations (DAEs)", Journal of The Franklin Institute, 342:1-6.
- Farebrother, R.W., (1988), Linear Least Squares Computations, New York.
- Güzel N., Bayram M., (2005), "On the Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations with Index-3", Applied Mathematics and Computation.
- Hairer, E., Wanner, G., (1991), "Solving Ordinary Differential Equations II: stiff and Differential-Algebraic Problems", Springer-Verlag.
- Kızıloğlu, O., (2005), Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Adomian Ayrıştırma Metodu ile Nümerik Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Müller, P. C., (2000), "Descriptor Systems: Pros and Cons of System Modelling by Differential-Algebraic Equations", Mathematics Computers in Simulation. 53, 273-279.
- Pierluigi, A., and Mazzia, F., (1992), "Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations and Computation of Consistent Initial/Boundary Conditions", Journal of Computational and Applied Mathematics. 87, 135-142.
- Unger, J., Kröner and Marquardt, W., (1992), "Structural Analysis of Differential-Algebraic Theory and Applications". Computers Chem. Eng. 19, 867-882
- Wang, F. S., (2000). "A Modified Collocation Method For Solving Differential-Algebraic Equations", Applied Mathematics and Computation. 116, 257-278.
- Wang, W., (2005), "An Algorithm for Solving DAEs with Mechanization", Applied Mathematics and Computation, 167: 1350-1372

Wu, B. and White, R.E. (2004) "One Implementation Variant of The Finite Difference Method for Solving ODEs/DAEs", Computers and Engineering 28: 303-309.

Yeloğlu, T., (2004), Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Chebysev Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Ek 1 Nümerik Metadon Programı

Bu tezde bahsedilen nümerik metodun Maple programlama dilindeki programı aşağıdaki gibidir:

```
> with(linalg):
    with(Grobner):
> setup:=proc(eqs,init,n)
    local eqns,Eqns,C,X,i,solveeqs,CONST,j,tp,ntp,k:=0,
    COLLECT,c,X,B,init,no,CC,init,ii,tmp,p,q,v,det,det2,
    s1,p4;
> init:=init[2];
> CONST:=[exp,ln,log,sin,cos,tan,cot,sec,csc];
> Eqns:=eqns;
> eqns:=solve(eqs);
> for i from 1 to eqns do
> ntp:=1;
> tp:=expand(lhs(eqns[i])-rhs(eqns[i]));
> ntp:=ops(tp);
> for j from 1 to ntp do
> for k from 1 to nops(CONST) do if
has(tp[j],CONST[k])=true then
eqns:=x[1]eqns+constants[taylor(tp[j],x=init[1],2nd,
polynom)];
```


EKLER

Ek 1 Nümerik Metodun Programı

Ek 1 Nümerik Metodun Programı

Bu tezde bahsedilen nümerik metodun Maple programlama dilindeki programı aşağıdaki gibidir:

```
> with(linalg):
    with(Groebner):
> mainproc:=proc(eqns,init,n)
> local neqns,Eqns,C,Y,i,subseqns,CONST,j,tp,ntp,k,seqtp,
    COLLECT,c,A,B,Init,nc,CC,ninit,ii,temp,p,q,v,dz1,dz2,
    s1,p4;
> Init:=init[2];
> CONST:=[exp,ln,log,abs,sin,cos,tan,cot,sec,csc];
> Eqns:=eqns;
> neqns:=nops(eqns);
> for i from 1 to neqns do
> seqtp:=[ ];
> tp:=op(expand(lhs(eqns[i])-rhs(eqns[i])));
> ntp:=nops([tp]);
> for j from 1 to ntp do
> for k from 1 to nops(CONST) do if
    has(tp[j],CONST[k])=true then
    seqtp:=[op(seqtp),convert(taylor(tp[j],x=init[1],3*n),
    polynom)];
```



```

> break; sort(coeff(COLLECT[i],x,ldegree(COLLECT[i],x)+j));

> end if;

> end do;

> if k>nops(CONST) then seqtp:=[op(seqtp),tp[j]];

> end if;

> end do;

> Eqns[i]:=convert(seqtp,`+`);

> end do ;

> for ii from 1 to n do

> subseqns:=[ ];

> for i from 1 to neqns do

> ninit:=nops(Init);

> temp:=0;

> for j from 1 to ninit do

> temp:=temp+Init[j,i]*x**(j-1);

> end do;

> temp:=temp+C[i]*x**(j-1);

> subseqns:=[op(subseqns),y[i](x)=temp];

> end do;

> COLLECT:=collect(expand(subs(op(subseqns),Eqns)),x);

> for i from 1 to neqns do

> j:=1;

> temp:=sort(coeff(COLLECT[i],x,ldegree(COLLECT[i],x)));

> while not has(temp,C) do

```



```

> temp:=sort(coeff(COLLECT[i],x,ldegree(COLLECT[i],x)+j));
> j:=j+1;
> end do;
> c[i]:=temp;
> end do;
> A:=[seq([seq(0,i=1..neqns)],j=1..neqns)];
> B:=[seq(0,i=1..neqns)];
> for i from 1 to neqns do
> for j from 1 to neqns do
> A[i,j]:=coeff(c[i],C[j],1);
> end do;
> nc:=nops([coeffs(c[i])]);
> if nc<>1 then
    temp:=-op(sort(c[i],plex(seq(C[j],j=1..neqns))))[-1];
> if indets(temp)={} then B[i]:=temp;
> else
> B[i]:=0;
> end if;
> else
> if nops(op(c[i]) union seq(C[j],j=1..neqns)) <>
    nops(op(c[i]))+neqns then B[i]:=0; end if; end if;
> end do;
> CC:=convert(convert(multiply(inverse(A),transpose(Matrix
([B]))),vector),list);

```



```

> Init:=[op(Init),CC];
> end do;
> temp:=[ ];
> for i from 1 to nops(CC) do
>   temp:=[op(temp),C[i]=CC[i]];
>   subseqns:=subs(op(temp),subseqns);
> end do;
> printf("The Solutions of DAEs with Power Series and
Least-Squares Approximations:");
> for i from 1 to neqns do
>   q:=evalf(rhs(subseqns[i]));
>   print(evalf(subseqns[i]));
>   p:=sum(a[t]*x**t,t=0..n):
>   for v from 0 to n do
>     denk(v+1):=int(x**v*p,x=0..1)=int(x**v*q,x=0..1):
>   od:
>   dz1:=seq(denk(w),w=1..n+1):
>   dz2:=seq(a[g],g=0..n):
>   sl:=solve({dz1},{dz2}):
>   p4:=subs(sl,p):
>   print((lhs(subseqns[i]))**(`*`) = p4);
> end do:
> end proc:

```


Bu programı çalıştırmak için aşağıda başlangıç şartı ile birlikte verilen diferensiyel-cebirsal denklem sistemini göz önüne alalım:

Örnek * 1:

$$y_1'(x) = -y_1 + y_2$$

$$-\frac{1}{2}y_1 + y_2 - 2 = 0$$

$$y_1(0) = \frac{1}{2}, y_2(0) = \frac{9}{4}$$

Bu diferensiyel-cebirsal denklem sisteminin tam çözümü,

$$y_1(x) = 4 - (4 - y_1(0))e^{-x/2}$$

$$y_2(x) = 4 - (4 - y_2(0))e^{-x/2}$$

şeklindedir.

Maple komutları ile bu diferensiyel-cebirsal denklem sistemi,

```
> eqns:=[diff(y[1](x),x)=-y[1](x)+y[2](x), -(1/2)*y[1](x)
      +y[2](x)-2=0];
```

```
> init:=[0, [[1/2, 9/4]]]:
```

şeklindedir.

Program çalıştırılırsa,

```
> mainproc(eqns, init, 9):
```

* Wu, B. and White, R.E. (2004) "One Implementation Variant of The Finite Difference Method for Solving ODEs/DAEs", Computers and Engineering 28: 303-309.

The Solutions of DAEs with Power Series and Least-Squares Approximations:

$$y_1(x) = 0.5000000000 + 1.750000000 x - 0.437500000 x^2 + 0.07291666667 x^3 \\ - 0.009114583333 x^4 + 0.0009114583333 x^5 - 0.00007595486111 x^6 \\ + 0.5425347222 \cdot 10^{-5} x^7 - 0.3390842014 \cdot 10^{-6} x^8 + 0.1883801119 \cdot 10^{-7} x^9$$

$$y_1(x)^* = 0.5006211040 + 1.694844756 x + 0.7610775480 x^2 - 10.99154456 x^3 \\ + 53.40751416 x^4 - 148.2816896 x^5 + 245.2529680 x^6 - 238.6139493 x^7 \\ + 125.9913592 x^8 - 27.84457676 x^9$$

$$y_2(x) = 2.250000000 + 0.875000000 x - 0.218750000 x^2 + 0.03645833333 x^3 \\ - 0.004557291667 x^4 + 0.0004557291667 x^5 - 0.00003797743056 x^6 \\ + 0.2712673611 \cdot 10^{-5} x^7 - 0.1695421007 \cdot 10^{-6} x^8 + 0.9419005594 \cdot 10^{-8} x^9$$

$$y_2(x)^* = 2.249923132 + 0.8814457080 x - 0.3522843720 x^2 + 1.220010792 x^3 \\ - 5.521003488 x^4 + 14.84989506 x^5 - 23.90171784 x^6 + 22.69832479 x^7 \\ - 11.72749406 x^8 + 2.541503536 x^9$$

sonuçları elde edilir.

```
> print(x, ` ` , y[1](x), ` ` , y[1](x)**(`*`), ` ` , abs(y[1](x) -
    y[1](x)**(`*`))) ;
> print(`_____`);
> for x from 0.1 to 1 by 0.1 do
> print([x], [(4-(7/2)*exp(-x/2))], [y[1](x)**(`*`)], [abs((4-
    (7/2)*exp(-x/2))-y[1](x)**(`*`))]);
> end do;
```


$x, y_1(x), y_1'(x), |y_1(x) - y_1'(x)|$

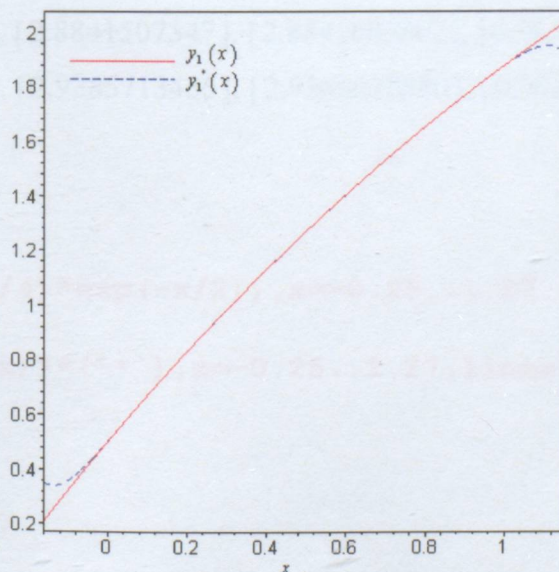
[0.1],	[0.6706970142],	[0.67080536869],	[0.00010835449]
[0.2],	[0.8330690369],	[0.83305289549],	[0.00001614141]
[0.3],	[0.9875220825],	[0.98739893717],	[0.00012314533]
[0.4],	[1.1344423642],	[1.1345818942],	[0.0001395300]
[0.5],	[1.2741972593],	[1.2742125880],	[0.0000153287]
[0.6],	[1.4071362276],	[1.4069927738],	[0.0001434538]
[0.7],	[1.5335916860],	[1.5336849214],	[0.0000932354]
[0.8],	[1.6538798389],	[1.6539180642],	[0.0000382253]
[0.9],	[1.7683014693],	[1.768193017],	[0.0001084523]
[1.0],	[1.8771426910],	[1.876624550],	[0.0005181410]

```
> with(plots):
```

```
> p1:=plot((4-(7/2)*exp(-x/2)),x=-0.16..1.16,color=red):
```

```
> p2:=plot(y[1](x)**(`*`),x=-0.16..1.16,linestyle=DASH,
color=navy):
```

```
> display(p1,p2);
```




```

> print(x, ` ` , y[2](x), ` ` , y[2](x)**(`*`) , ` ` , abs(y[2](x) -
  y[2](x)**(`*`))) ;

> print(`_____`);

> for x from 0.1 to 1 by 0.1 do

> print([x], [(4-(7/4)*exp(-x/2))], [y[2](x)**(`*`)], [abs((4-
  (7/4)*exp(-x/2)) - y[2](x)**(`*`))]);

> end do;

```

$x,$	$y_2(x),$	$y_2(x)^*,$	$ y_2(x) - y_2(x)^* $
------	-----------	-------------	-----------------------

[0.1],	[2.3353485071],	[2.3353395219],	[0.89852 10 ⁻⁵]
[0.2],	[2.4165345184],	[2.4165314533],	[0.30651 10 ⁻⁵]
[0.3],	[2.4937610412],	[2.4937770138],	[0.0000159726]
[0.4],	[2.5672211821],	[2.5672098509],	[0.0000113312]
[0.5],	[2.6370986296],	[2.6370924162],	[0.62134 10 ⁻⁵]
[0.6],	[2.7035681138],	[2.7035812126],	[0.0000130988]
[0.7],	[2.7667958430],	[2.7667919993],	[0.38437 10 ⁻⁵]
[0.8],	[2.8269399194],	[2.8269334325],	[0.64869 10 ⁻⁵]
[0.9],	[2.8841507347],	[2.8841603862],	[0.96515 10 ⁻⁵]
[1.0],	[2.9385713455],	[2.9386032580],	[0.0000319125]

```

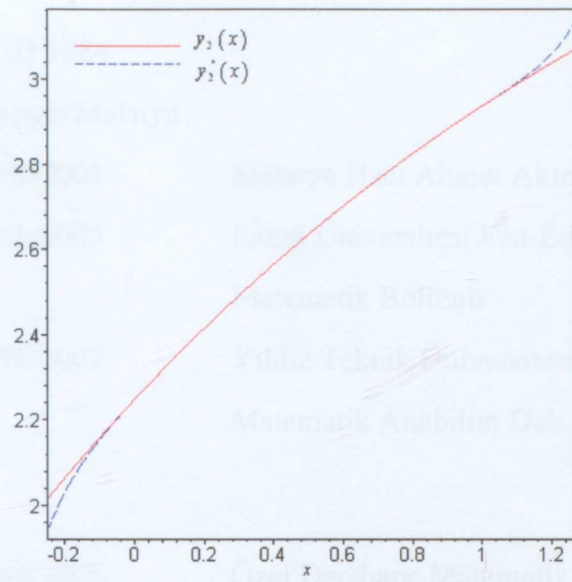
> with(plots):

> q1:=plot((4-(7/4)*exp(-x/2)), x=-0.25..1.27, color=red):

> q2:=plot(y[2](x)**(`*`), x=-0.25..1.27, linestyle=DASH,
  color=navy):

> display(q1,q2);

```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	19.03.1984	
Doğum yeri	Arapgir/Malatya	
Lise	1998-2001	Malatya Hacı Ahmet Akıncı Lisesi
Lisans	2001-2005	İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2005-2007	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Çalıştığı kurumlar	2004-2005	Özel Dershane Matematik Öğretmenliği
	2005-Devam ediyor	YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

