

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERİYODİK EĞRİLİKLİ SARILI TEK LİF İÇEREN
SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GERİLME YAYILIMI

Matematik Mühendisi Duygu Miraç DİKBAŞ

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Reşat KÖŞKER

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iii
ÇİZELGE LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Kompozit Malzeme Tanımı	1
1.2 Kompozit Malzemelerin Genel Özellikleri	1
1.3 Kompozit Malzemelerin Yararları, İstenmeyen Yönleri, Kullanım Alanları	3
1.4 Lifli Kompozit Malzemeler	3
1.5 Tek Yönlü Eğrisel Yapıdaki Lifli Kompozitlerin Gerilme Durumuna Ait Çalışmaların Kısa Özeti	5
1.6 Yapılan Araştırmaların Amaçları	7
2. PERİYODİK EĞRİLİKLİ SARILI TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GERİLME DAĞILIMI	9
2.1 Problemin Formülasyonu	9
2.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi	14
2.3 Uygun Sınır-Değer Problemlerinin Çözümlerinin Elde Edilmesi	22
2.4 Gerilme Yayılımına Ait Sayısal Sonuçlar	49
3. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	62
KAYNAKLAR	63
İNTERNET KAYNAKLARI	65
Ek 1 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri	67
ÖZGEÇMİŞ	87

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

- Şekil 2.1 Sarılı tek lif içeren sonsuz matrisin geometrisi ve seçilen koordinat takımları..... 10
- Şekil 2.2 $E^{(1)}/E^{(2)} = 50$ $E^{(3)}/E^{(2)} = 1/50$ $\kappa = 0.5$ $\varepsilon = 0.015$ değerlerinde $\sigma_{nn}/|p|$ 'nin, aynı parametre değerlerinde sarılı olmayan lif değerlerine yakınsaması. 52
- Şekil 2.3 $E^{(1)}/E^{(2)} = 50$ $E^{(3)}/E^{(2)} = 1/50$ $\kappa = 0.5$ $\varepsilon = 0.015$ değerlerinde $\sigma_{nt}/|p|$ 'nin, aynı parametre değerlerinde sarılı olmayan lif değerlerine yakınsaması. 52
- Şekil 2.4 $\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} = 50$ $\frac{E^{(3)}}{E^{(2)}} = \frac{1}{50}$ $\kappa = 0.5$ $\varepsilon = 0.015$ değerlerinde $\sigma_{ne}/|p|$ 'nin, aynı parametre değerlerinde sarılı olmayan lif değerlerine yakınsaması. 53
- Şekil 2.5. Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ε değerlerinde $\sigma_{nn}^{(1)}/|p|$ ile κ arasındaki ilişki $(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \varepsilon = 0.015)$ 53
- Şekil 2.6 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ε değerlerinde $\sigma_{nn}^{(3)}/|p|$ ile κ arasındaki ilişki $(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \varepsilon = 0.015)$ 54
- Şekil2.7 Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ε değerlerinde $\sigma_{nt}^{(1)}/|p|$ ile κ arasındaki ilişki $(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \varepsilon = 0.015)$ 54
- Şekil 2.8 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ε değerlerinde $\sigma_{nt}^{(3)}/|p|$ ile κ arasındaki ilişki $(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \varepsilon = 0.015)$ 55
- Şekil 2.9 Lif -geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ε değerlerinde $\sigma_{ne}^{(1)}/|p|$ ile κ arasındaki ilişki $(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \varepsilon = 0.015)$ 55
- Şekil 2.10 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ε değerlerinde $\sigma_{ne}^{(3)}/|p|$ ile κ arasındaki ilişki

$$\left(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \varepsilon = 0.015 \right) \dots\dots\dots 56$$

Şekil 2.11 Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli $\in$ değerlerinde $\sigma_{nn}^{(1)} / |p|$ ile κ arasındaki ilişki

$$\left(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \varepsilon = 0.015 \right) \dots\dots\dots 56$$

Şekil 2.12 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli $\in$ değerlerinde $\sigma_{nn}^{(3)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki

$$\left(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \kappa = 0.4, \varepsilon = 0.015 \right) \dots\dots\dots 57$$

Şekil 2.13....Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli $\in$ değerlerinde $\sigma_{nr}^{(1)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki

$$\left(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \kappa = 0.4, \varepsilon = 0.015 \right) \dots\dots\dots 57$$

Şekil 2.14 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli $\in$ değerlerinde $\sigma_{nr}^{(3)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki

$$\left(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \kappa = 0.4, \varepsilon = 0.015 \right) \dots\dots\dots 58$$

Şekil 2.15 Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli $\in$ değerlerinde $\sigma_{ne}^{(1)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki

$$\left(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \kappa = 0.4, \varepsilon = 0.015 \right) \dots\dots\dots 58$$

Şekil 2.16 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (a) çeşitli $\in$ değerlerinde $\sigma_{ne}^{(1)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki

$$\left(\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \kappa = 0.4, \varepsilon = 0.015 \right) \dots\dots\dots 59$$

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1	$\varepsilon = 0.015, \kappa = 0.4, \gamma = 0.5$ değerlerinde $\sigma_{nr}/ p $ (Bu değerler büyük olduğundan bunları incelemek yeterli görülmüştür.	60
-------------	--	----

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu nonlinear denklemleri kullanılarak, sonsuz elastik bir ortamda düşük yoğunluklu sarılı periyodik lif olması durumunda temas yüzeylerinde, gerilme dağılımı incelenmek üzere gerekli sınır değer problemi kurulmuş ve çözülmüştür. Geometrik nonlinearitenin bu gerilmelere etkisi de araştırılmıştır.

Bu çalışmayı yöneten ve hazırlanmasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Reşat KÖŞKER'e çok teşekkür ederim.

Benden hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Tek yönlü lifli kompozit malzemelerdeki liflerin eğrilik nedeni dizayn sırasında duyulan gereksinim veya teknolojik işlemlerin sonucudur. Genellikle, teknolojik işlemler sırasında ortaya çıkanlar yerel eğrilikler, dizayn gereksinimi sonucu ortaya çıkmış olan eğrisellikler periyodik eğrilikler şeklinde modellenirler. Çalışmamızda, sonsuz ortamda düşük yoğunluklu sonsuz uzunluklu periyodik eğrilikli sarılı tek lif olması durumu incelenmiş ve gerilme dağılımı ele alınmıştır. Ortamdaki liflerin düşük yoğunluğu lifler arasındaki etkileşimin ihmal edilebildiği mertebededir. Yaptığımız incelemeler parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Lif ile matris arasında geçiş malzemesi (lif örtüsü) olduğu düşünülmüş ve arayüzeylerdeki gerilmeler çalışılmıştır. Çalışmalar esnasında cisme sonsuzda lif yönünde düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiği ve lif yüzeyine dik kesitlerin yarıçapı lif boyunca her bir malzeme için değişmeyen daireler olduğu (lif örtüsü kalınlığının da lif boyunca sabit) kabul edilmiştir.

Uygun sınır-değer problemlerinin çözümü için sınır formu pertürbasyon yönteminden yararlanılarak yaklaşık analitik bir metod geliştirilmiştir.

Ele alınan ortamlardaki gerilme yayılımına ve bu yayılıma geometrik nonlinearitenin etkisi ile ilgili çok sayıda sayısal sonuç elde edilmiş ve yorumlanmıştır. Ayrıca lif ile matris arasındaki lif örtüsünün kalınlığının gerilme değerlerine etkisi de incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lifli kompozit, gerilme yayılımı, geometrik nonlinearite, periyodik eğrilik, sarılı tek lif,geçiş malzemesi.

ABSTRACT

The curvature of the fibers in the structure of the unidirectional fibrous composite materials is due to design requirements or to technological processes. Usually the curvature caused by the technological process is modeled as a local one, whereas the curvature caused by design features is modeled as a periodical. In this study the case is considered where a covering single periodical curved fiber with an infinite length is contained by an infinite body with low concentration of fibers and stress distribution in that is investigated. Taking the low concentration of fibers into account the interaction between them is neglected. The investigations are carried out within the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional geometrical nonlinear exact equations of the theory of elasticity. There exists the bond hollow covering cylinder between fiber and matrix materials are considered and stresses on interfaces are studied. Moreover it is assumed that the body is loaded at infinity by informally distributed normal forces which act along the fibers and the crosssection of the fibers, normal to its axial line, is a circle of constant radius along the entire fiber length.

For the solution of considered boundary value problem an approximate analytical method is developed by using the boundary form perturbation method.

The numerous numerical results related to the stress distribution in considered body and the influence of geometrical nonlinearity to this distribution are obtained and interpreted. Moreover, the influences of the geometrical and mechanical problem parameters to these distributions are also analyzed.

Keywords: Fibrous composite, stress distribution, geometrical nonlinearity, periodical local curving, covering material, covering single fibrous.

1. GİRİŞ

1.1 Kompozit Malzeme Tanımı

İki veya daha fazla sayıdaki aynı veya farklı gruptaki malzemelerin, en iyi özelliklerini bir araya toplamak ya da ortaya yeni bir özellik çıkarmak amacıyla, bu malzemelerin üç boyutlu nitelikte bir araya getirilmesi ile oluşan malzemelere “Kompozit Malzeme” denir. Başka bir deyişle bileşenlerin hiç birinde tek başına mevcut olmayan bir özelliğin elde edilmesi veya birbirlerinin zayıf yönünü düzelterek üstün özellikler elde edilmesi amaçlanarak bir araya getirilmiş değişik tür malzemelerden ya da fazlardan oluşan malzemelerdir. (http://tr.wikipedia.org/wiki/Kompozit_malzemeler)

Doğada kompozit malzemeler milyonlarca yıldan bu yana bulunmaktadır. Bu doğal kompozitlere örnek olarak ahşap, bambu ve kemik gösterilebilir. İnsan yapımı kompozit malzemelerin ilklerinden biri samanla güçlendirilmiş çamur blokları farz edilebilir. O zamandan günümüze kadar kompozit malzeme imal tekniği samanla güçlendirilmiş çamur bloklardan fiberle güçlendirilmiş polimer, seramik matris, metalik matris ve çizgi karbon malzemeler gibi fiberle güçlendirilmiş malzemelere kadar ilerleme kaydetmiştir.

Bir kompozit malzemede genelde dört koşula dikkat edilmektedir:

- Kimyasal bileşimleri birbirinden farklı belirli ara yüzeylere ayrılmış en az iki malzemenin bir araya getirilmiş olması,
- Farklı malzemenin üç boyutlu olarak bir araya getirilmiş olması,
- Bileşenlerin hiç birinin tek başına sahip olmadığı özellikleri taşıması.

Buna göre malzeme, mikroskobik açıdan heterojen bir malzeme özelliği göstermekte, ancak makroskobik açıdan homojen bir malzeme gibi davranmaktadır. (Ersoy,2001)

1.2 Kompozit Malzemelerin Genel Özellikleri

Kompozit malzemeler üretilirken genellikle aşağıdaki özelliklerden bir veya birkaçının geliştirilmesi amaçlanmaktadır.

- Hafiflik: Polimer kompozitler genelde $1,5 - 2 \text{ gr / cm}^3$ yoğunluğundadır. Metal kompozitler, $2,5 - 4,5 \text{ gr / cm}^3$ olmakla beraber özellerde sıçrama görülebilir.

Seramik kompozitler ise ikisi arasındadır.

- Rijitlik Ve Boyut Kararsızlığı: Genleşme katsayıları nispeten düşük olup sert, sağlam bir yapı ve büyük bir boyut kararlılığı gösterir.
- Yüksek Mekanik Özellikler: Çekme, basma, darbe, yorulma dayanımları çok yüksektir.
- Yüksek Kimyasal Direnç: Kompozitler birçok kimyasal maddelere, bu arada asitler, alkaliler, çözücüler ve açık hava şartlarına karşı son derece direnç gösterirler. Kimya tesisleri için çok kullanılan malzemelerdir.
- Yüksek Isı Dayanımı: Kompozitlerin ısı dayanımı sıradan plastiklere göre yüksektir.
- Elektriksel Özellikler: Elektriksel özellikler kompozitlerde isteğe göre ayarlanabilir. Metal Matrisli Birleşik Malzemeler (MMC)'ler iletkenidir.

Kompozit malzemeler için üç ana eleman mevcuttur. Buna göre:

- Matris Elemanı: Kompozit malzemelerde matrisin üç temel fonksiyonu vardır. Bunlar, elyafları bir arada tutmak, yükü elyaflara dağıtmak ve elyafları çevresel etkilerden korumaktır. İdeal bir matris malzemesi başlangıçta düşük viskoziteli bir yapıda iken daha sonra elyafları sağlam ve uygun bir şekilde çevreleyebilecek katı forma kolaylıkla geçebilmelidir. Matris malzemesi, termoset veya termoplastik polimer malzeme olarak sürekli fazı oluşturur. Termosetler grubunda ağırlıklı olarak polyesterler kullanılır. Bunun yanı sıra vinil ester/bisfenol, epoksi reçine ve fenolik reçinelerin kullanımı da giderek yaygınlaşmaktadır. Termoplastik grubunda yaygın olarak poliamid ve polipropilen kullanımını görülmektedir (yaklaşık % 68.3), bunların yanı sıra hibrid formda polietilen ve polibutilen tereftalat, polietereeterketon ve polietersulfon kullanımı da dikkat çekmektedir.
- Takviye Elemanı: Matris malzeme içinde yer alan takviye elemanı kompozit yapının temel mukavemet elemanlarıdır. Düşük yoğunluklarının yanı sıra yüksek elastisite modülüne ve sertliğe sahip olan elyaflar kimyasal korozyona da dirençlidir. Günümüzde kompozit yapılarda kullanılan en önemli takviye malzemeleri sürekli elyaflardır. Bu elyaflar özellikle modern kompozitlerin

oluşturulmasında önemli bir yer tutarlar. Aramid, karbon, grafit, bor, silisyum karbür (SiC), alümina, cam ve polietilen malzemelerin kısa veya uzun sürekli elyaf formunda kullanıldığı ve matrisi yaklaşık % 60 hacim oranında pekiştirici işlevi olan malzemelerdir.

- Katkılar Maddeleri: Dolgular, kimyasallar ve diğer katkılar matrise niteliklerine göre özelliklerin geliştirilmesi amacıyla ilave edilirler. [1]

1.3 Kompozit Malzemelerin Yararları, İstenmeyen Yönleri, Kullanım Alanları

Kompozit malzemelerin bakır, çelik, alüminyum, titanyum gibi bilinen mühendislik malzemelerine göre avantajı yüksek özgül mukavemet ve yüksek özgül modüle sahip olmalarıdır. Özgül mukavemet, malzeme mukavemetinin malzeme yoğunluğuna oranı, özgül modül ise yank modülünün malzeme yoğunluğuna oranı olarak bilinmektedir. Yüksek özgül mukavemet ve yüksek özgül modül kompozit malzemedeki mukavemet, rijitlik ve ağırlıklarının hafif olduğunu ortaya koyar.

Kompozit malzemelerin tüm bu özelliklerinin yanı sıra maliyetin yüksekliği gibi istenmeyen özellikleri de mevcuttur. Fiberler; çelik, alimünyum ve diğerleri ile karşılaştırıldığında daha pahalıdır. Kompozit malzemelerde parçaların imal edilmesi daha çok işçilik gerektirdiği gibi imal işleri de daha yavaştır.

Kompozit malzemelerin kullanıldığı sektörlere baktığımızda İnşaat ve Yapı, Otomotiv ve Taşımacılık, Savunma Sanayi ve Havacılık, Gıda ve Tarım, Denizcilik sadece bir kısmıdır. Uzay ve havacılık endüstrisine bakıldığında, kompozit malzemelerden imal edilerek sağlanan ağırlık azalması, hava ve uzay aracının işletilmesini daha ekonomik hale getiren yakıt tasarrufuna dönüştürülür. Ayrıca, birçok uygulamalarda çok yüksek sıcaklıklarda yapının mukavemet ve rijitliğinin korunmasına yardım etmektedir. [2]

1.4 Lifli Kompozit Malzemeler

Değişik malzemelerin liflerle donatılarak çeşitli özelliklerini iyileştirme çalışmalarının teorik olarak ele alınışı oldukça yeni olmasına karşın, ilk uygulamaların çok eski zamanlara dayandığı bilinmektedir. Kerpiç malzemenin bitkisel elyaf ve samanla birleştirilerek oluşturulması, alçı hamurunda bitkisel lifler ile at kuyruğu, yelesi gibi

hayvansal liflerin, kılların kullanılması, asbest lifleri gibi inorganik malzeme kullanılarak çimento bağlayıcı malzemelerin donatılması verilebilecek örneklerden bazılarıdır.

Lifler malzeme türüne ve üretildiği hammaddeye göre isimlendirilir. Dolayısı ile, lif şeklindeki genel isimlendirme, bir boyutu diğer boyutlarına göre çok büyük olan her türlü ince malzemeyi kapsamaktadır.

Malzemelerin liflerle donatılmasındaki amaç, mekanik özellikleri daha iyi olan malzeme üretmektir. Malzemeler, özellikle çekme, eğilme ve çarpma dayanımları gibi mekanik dayanımlarının iyileştirilmesi, gevrek kırılma özelliğinin kısmi olarak giderilebilmesi için lifler, teller, çubuklar veya değişik yapıda örgü malzemeyle donatılmaktadır.

Liflerle donatılmış bir malzeme en basit haliyle iki fazlı bir kompozit malzeme olarak ele alınabilir. Kompozitin sürekli fazını, lifleri birarada tutan ve kompozit içindeki hacim oranının yüksekliği nedeniyle kompozitin ana bileşeni olarak da düşünülebilen matris malzemesi oluşturur. Bu matris içinde donatı olarak kullanılan malzeme ikinci bir fazı oluşturur. Donatının etkinliği, donatı malzemesinin sahip olduğu E-modülünün, matrisin E-modülünden çok daha yüksek olmasına bağlıdır. Matris ve lif fazının sahip olduğu E-modül değerlerinin birbirlerine yakın olması durumunda, lif fazı taşımaya yeterince katılamamaktadır.

Liflerle donatılı malzemelerde lifin taşımaya etkisini sağlayabilmek için matrisin mekanik etkisi life iletilmelidir. Lifle matris arasında herhangi bir kimyasal bağ söz konusu olmayıp iletim kayma kuvvetiyle olacaktır. Dolayısıyla, lifle matris arasında oluşacak bu kayma gerilmelerine dayanabilecek aderans olmalıdır. (Beton ile donatı meydana gelen etkiler nedeniyle şekil değiştirirler. Bu sırada iki malzeme arasında gerilmelerin geçişi meydana gelir. Arada kayma olmadan bu tür gerilme geçişinin ortaya çıkmasına ADERANS denir.)

Liflerle donatılı kompozit malzemelerin özellikle çekme, eğilme, çarpma dayanımlarında önemli artışlar söz konusudur. Bu özellik malzemede belirtilen çekme, eğilme gibi gerilmelerin birim ağırlığa oranı da (σ/Δ) diğer malzemelere çok daha yüksektir. (Ersoy,2001)

1.5 Tek Yönlü Eğrisel Yapıdaki Lifli Kompozitlerin Gerilme Durumuna Ait Çalışmaların Kısa Özeti

Teknolojinin hızla ilerlemesi, daha dayanıklı ve daha sağlam malzemeye ihtiyaç duyulması, kompozit malzemelerin üretiminin öneminin artmasını da beraberinde getirmiştir. Günümüzde oluşan bu durum ve kompozit malzemelerin uygulamalarda kullanımlarının daha da etkin hale gelmesi bu malzemelerin farklı dış etkiler altındaki mekanik davranışlarının matematiksel modellenmesini ve teoriksel açıdan incelenmesini gerektirmektedir. Kompozit malzemelerin geniş bir alanını oluşturan tek yönlü lifli kompozitlerin çeşitli dış etkiler ve bu dış etkilerin neden olduğu iç kuvvetler karşısında gösterecekleri davranış biçimi, önemli ölçüde bu malzemelerin yapısal özelliklerine bağlıdır. Tek yönlü lifli kompozitlerin en önemli yapısal özelliklerinden biri ise liflerin eğriliğidir.(Akbarov,Guz (2000))

Başlangıç eğrilige sahip lifler ve levhalarla güçlendirilmiş kompozitler eğrisel yapıya sahip kompozitler olarak adlandırılır. Bu eğriliklerin oluşmasında iki durum söz konusudur. Malzeme dizaynı eğrilikli olarak gerçekleştirilebilir (Bolotin ve Novichkov (1980), Akbarov ve Guz (2004)) ya da üretim sırasında çeşitli faktörlerin etkisi ile malzeme yapısında eğrilik (Bolotin ve Novichkov (1980), Akbarov ve Guz (2004)) meydana gelebilir. Genel olarak, malzemenin eğriliği teknolojik işlemler nedeniyle oluşmuş ise, kompozit malzemeler yerel eğrilikli, eğrilikli olarak dizayn edilme söz konusu ise periyodik eğrilikli olarak modelleme gerçekleştirilir. Elde edilen kompozit malzemenin başarı ile kullanılabilmesi için bahsedilen eğrilik ele alınarak malzemedeki gerilme–şekil değiştirme durumunun belirlenmesi ile mümkündür. Akbarov (1981a, 1981b, 1998), Akbarov ve Guz (1985a, 1985b, 1985c, 2000, 2002, 2004), Akbarov ve Kocatürk (1997), Akbarov ve Kosker (2001, 2003a, 2003b, 2003c, 2004), Akbarov ve Novruzov (1987), Akbarov vd. (1982, 1997, 1999, 2001, 2004, 2005) kaynaklarından incelendiği üzere bu eğrilikler kendi kendini dengeleyen gerilme durumlarının oluşmasına neden olmaktadır. Bu gerilmeler eğrilik ve mekanik parametrelere bağlı olarak çok büyük boyutlara ulaşarak kompozitin adhezyon (yapışma) mukavemet sınırını aşabilmektedir. Ayrıca güçlendirici lif veya levhaların başlangıçtaki çok küçük eğriliği tek yönlü kompozit malzemelerin stabilite kaybı ve kırılma problemlerinin araştırılması için bir model olarak kabul edilir. Bu ve diğer nedenlerden dolayı uygun mekanik

problemlerin matematik modellerinin yapılıp ve teoriksel açıdan incelenmesi hem teorik ve hem de kompozitlerin uygulaması açısından çok önemlidir. Tezde ele alınan araştırmaların önemini ve yerini belirtebilmemiz için bu alanda yapılan çalışmaların kısa özetini ele alalım .

Eğrilikli kompozit malzemeler için iki yaklaşım mevcuttur. Bir tanesi boyut olarak eğrilikten daha büyük alanlardaki gerilme-şekil değiştirme bileşenlerinin elde edilmesin için kullanılan süreklilik yaklaşımıdır. Malzemenin normalize edilmiş mekanik özelliklerindeki değişim, eğriliğin etkisidir. Diğeri ise boyut olarak eğrilikten daha küçük olan alanlarda, eğriliğin etkisi dikkate alınarak, gerilme-şekil değiştirme bileşenlerinin elde edildiği yerel yaklaşımdır. Yerel yaklaşım geliştirilmesinde iki farklı yaklaşım kullanılmıştır. Kullanılan yaklaşımlar, homojen cisim modeli ve süreklilik teorileridir. Tez kapsamında yapılan araştırmalar parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde olduğundan yerel yaklaşım ile ilgili çalışmalar üzerinde yoğunlaşalım.

Parçalı-homojen cisim modellemesinde kompozit malzemenin herbir bileşeni için gerekli denklem ve ifadeler oluşturularak, bu bileşenlerin sahip olduğu ortak sınırlarda temas koşulları verilerek inceleme gerçekleştirilir. Araştırmalarda liflerin yerleşimi doğrultusunda çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Bu konudaki araştırmalara değinelim.

Matris ve lif malzemelerinin homojen, izotrop ve lineer elastik olduğu kabul edilerek, lif boyunca sonsuzda düzgün dağılmış normal kuvvetlerin etkisindeki periyodik eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisimde gerilme dağılımı, Akbarov ve Guz (1985a, 1985b, 1986b) makalelerinde kompozitteki lif yoğunluğunun düşük olduğu ve lifler arasındaki etkileşimin ihmal edildiği durum için ele alınmıştır. Aynı problem, Akbarov (1986b)' de matris malzemesinin lineer viskoelastik olması durumu için de incelenmiştir. Bütün bu araştırmalar lineer elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli için gerçekleştirilmiştir. Tüm bu çalışmalar sonucunda, Akbarov ve Guz (1985a)'da verilen metod kompozit malzemenin lif yoğunluğunun çok olması ve lifler arasındaki etkileşimin dikkate alındığı durumların ele alınmasına Akbarov ve Guz (2000)'de değinilmiş olsa da çalışmalarla ilgili sayısal sonuçlar Akbarov ve Kosker (2001, 2003a, 2003c), Kosker ve Akbarov (2003b), Akbarov vd. (2004) makalelerinde yer almıştır. Akbarov ve Kosker (2001, 2003a) makalelerinde periyodik eğrilikli iki

komşu lif içeren sonsuz ortamda gerilme dağılımı, elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak incelenmişken, Kosker ve Akbarov (2003b), Akbarov ve Kosker (2003c) makalelerinde ise yine iki komşu lif içeren sonsuz elastik ortamda gerilme dağılımı elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik lineer denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde incelenmiştir.

Çalışmalarda sonsuz ortamdaki komşu liflerin birbirine göre farklı yerleşim şekillerinde ve sonsuzda lifler yönünde düzgün dağılmış yük etkisi altında incelenmiştir. Bu yaklaşım, Akbarov vd. (2004) çalışmasında periyodik eğrilikli liflerin tek yönde periyodik dizilmiş şekilde bulunduğu elastik ortamda gerilme dağılımı incelenmesini gerçekleştirmiştir.

Ele alınan çalışmalarda güçlendirici elemanın tek yönlü lif olduğu kompozit malzemelerde genellikle liflerin periyodik eğrilikli olması hali çalışılmıştır. Lifteki eğriliğin yerel olması durumuna ait olarak Djfavarova (1992,1994,1995) çalışması belirtilebilir. Lineer durumdaki parametrelerin geçerlilik sınırlarının belirlenmesi için geometrik nonlinearitenin malzemedeki gerilme dağılımına etkisinin belirlenmesini içeren çalışma Şimşek,Akbarov(2006) doktora tezinde yer almıştır. Elde edilen sayısal sonuçların bir bölümü Akbarov vd. (2005)'de verilmiştir. Şimşek (2006) tezinde,sonsuz elastik ortamın düşük yoğunluklu başlangıç yerel eğriliğine sahip lif ve sarılı lif içermesi durumunda gerilme dağılımı ele alınmış ve pek çok sayısal sonuç verilmiştir.

Yukarıda sıralanan araştırmalardan görülebileceği gibi, daha önce periyodik eğrilikli lifin başka bir malzeme tarafından sarılı olması (geçiş malzemesi,örtük malzeme) durumu incelenmiştir.

1.6 Yapılan Araştırmaların Amaçları

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları aşağıda özetlenmiştir.

1. Periyodik eğrilikli sarılı tek lif içeren sonsuz ortamların gerilme dağılımının parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde lineer denklem sistemi kullanılarak incelenmesi için gerekli yöntemin geliştirilmesi ve bu incelemenin sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşıma kadar yapılması;
2. Formülasyonu yapılmış sınır-değer problemlerinin incelenmesi için gerekli

- metotların geliştirilmesi;
3. Ele alınan sınır-değer problemlerinin incelenmesinde uygulanan yöntemlerin esaslandırılması ve sayısal sonuçların elde edilmesi için gereken algoritmaların ve programların yapılması;
 4. Elde edilen sayısal sonuçların bazı mekaniksel yorumlarının yapılması.

2. PERİYODİK EĞRİLİKLİ SARILI TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GERİLME DAĞILIMI

Burada periyodik eğrilikli sarılı tek lif içeren sonsuz elastik matriste gerilme yayılımı problemi ele alınacaktır. Ele aldığımız malzemede lif ile matris arasında kalınlığı sabit başka bir malzeme bulunmaktadır. Bu malzeme lif boyunca lif ve matris arasında bir geçiş malzemesi olarak veya malzemenin dizaynı gereği yerleştirilmiş bir malzeme olarak düşünülebilir. Burada lif, lifi saran malzeme olarak belirteceğimiz geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin temas yüzeylerinde oluşan gerilmeler ve gerilmelere geometrik nonlineeritenin etkisi ifade edilecektir.

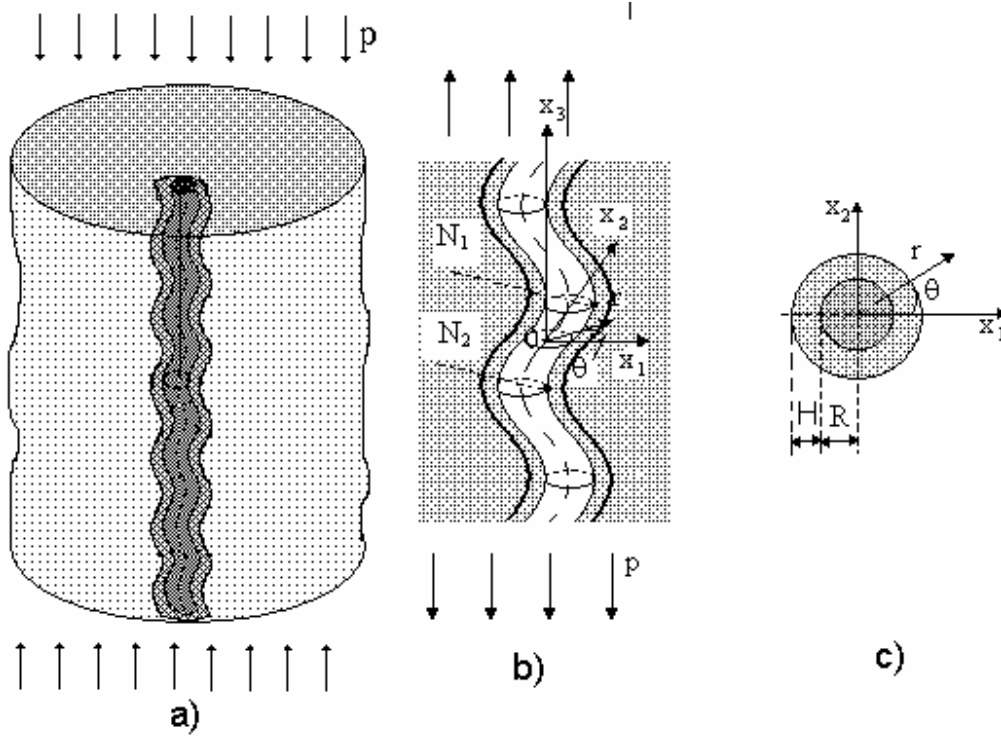
2.1 Problemin Formülasyonu

Sonsuz uzunlukta sarılı tek bir lif içeren elastik sonsuz ortamda düşük yoğunluklu periyodik eğrilikli sarılı lif olduğunu düşünelim (Şekil 2.1a). Burada düşük yoğunluklu ile lifler arasındaki etkileşimin ihmal edilebilecek kadar, liflerin birbirinden uzak olduğu vurgulanmaktadır. Lifin orta çizgisine dik olan kesitlerin daire olduğunu ve bu dairelerden birinci malzemenin ikinci malzeme sınırına kadar olan daire için yarıçapının R ; lifin orta çizgisinden üçüncü malzeme sınır koşuluna kadar olan kısımdaki dairenin yarıçapının $R + H$ (Şekil 2.1c) olduğunu varsayalım. Buna göre iki daire yarıçapının farkı 2. malzeme üzerinde kalan kısım olup H kadardır. Her iki yarıçap değerinin de lif boyunca değişmeyeceği kabul edilerek, lif boyunca, sözü edilen kesit dairelerin merkezinden geçen eğriyi çalışma boyunca lifin orta çizgisi olarak ifade edeceğiz.

Koordinat takımı olarak başlangıç noktası lifin orta çizgisi üzerinde olacak şekilde $Ox_1x_2x_3$ kartezyen $O\theta z$ silindirik koordinat takımlarını seçelim. Cismin sonsuzda lif yönünde (Ox_3 (Oz) yönünde) p yoğunluklu düzgün dağılmış normal kuvvetler etkisinde olduğu düşünülmektedir.

Bu durumda incelemelerimiz lif, geçiş malzemesi ve matrisin farklı lineer elastik malzemelerden oluştuğu düşünülerek, sürekli ortamlar mekaniğinin kesin üç boyutlu geometrik nonlineer denklemleri kullanılarak yapılacaktır. Lifin orta çizgi denklemini

$$x_1 = \varepsilon \delta(x_3) = L \left(\sin \frac{2\pi}{l} X_3 \right), \quad x_2 = 0, \quad \delta(x_3) = l \sin \left(\frac{2\pi}{l} X_3 \right) \quad (0.1)$$



Şekil 2.1 Sarılı tek lif içeren sonsuz matrisin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

olarak ifade edelim. ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) (L eğilme genliği, l eğilmenin periyodu olmak üzere

$\varepsilon = \frac{L}{l}$ olarak alınmıştır.) lifin eğilme genliğini belirten küçük bir parametre, $\delta(x_3)$

fonksiyonu ise malzemenin p yoğunluklu düzgün dağılmış normal kuvvetler etkisine girmeden önceki (başlangıç durumundaki, şekil değiştirme gerçekleşmeden önceki) eğilme formunu ifade etmektedir. (2.1) denkleminde ifade ettiğimiz üzere, lifin orta çizgisi $x_2 = 0$ düzlemi üzerindedir. Kuvvetlerin yüklenmesinin ardından da bu çizginin aynı düzlem üzerinde olduğu varsayılacaktır.

Yaptığımız çalışmada lif ile lifi saran malzeme ara yüzeyini S_1 , lifi saran malzeme ile matris malzemesi ara yüzeyi S_2 ile gösterebiliriz. Lif-en kesitinin sağladığı koşuldan yararlanarak Akbarov ve Guz (2000) kaynağında olduğu gibi lif ve matris ara yüzeyi olan alanların denklemleri:

$$\begin{aligned}
r_k &= (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2 \sin^2 \theta)^{-1} \left\{ (\varepsilon \delta(t_3) + \varepsilon^3 \delta(t_3) (\delta'(t_3))^2 \sin \theta + \right. \\
&\left. [R^2 - \varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 - \varepsilon^4 (\delta'(t_3))^2 (\delta'(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2 \sin^2 \theta)]^{1/2} \right\} \\
z_k &= t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) r(t_3) \sin \theta + \varepsilon^2 \delta(t_3) \delta'(t_3), \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3}
\end{aligned} \tag{0.2}$$

şeklindedir. $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ bir parametre olup, (2.2) denklemini kullanarak S_k ($k=1,2$) yüzeylerinin birim dış normallerinin bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
n_r &= r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1}, \\
n_\theta &= \left[\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right] [A(\theta, t_3)]^{-1} \\
n_z &= -r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1}
\end{aligned} \tag{0.3}$$

Burada

$$\begin{aligned}
A(\theta, t_3) &= \left[\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \right. \\
&\left. \left(r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{0.4}$$

şeklindedir.

Ayrıca life ve geçiş malzemesine ait olan büyüklükleri (1), (2) ve matrise (sonsuz elastik ortama) ait olan büyüklükleri ise (3) üst indisleri ile göstereceğiz. . Lif, geçiş malzemesi ve sonsuz elastik ortamda aşağıdaki alan denklemleri sağlanır.

Denge denklemleri

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] = 0, \tag{0.5}$$

Şekil değiştirme ve yer değiştirme ilişkileri

$$2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)}, \tag{0.6}$$

Bünye denklemleri

$$\sigma_{(in)}^{(k)} = (\lambda^{(k)} e^{(k)}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k)}), \quad e^{(k)} = \varepsilon_{(r)}^{(k)} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k)} + \varepsilon_{(zz)}^{(k)} \quad k=1,2,3 \quad (0.7)$$

Burada $\sigma_{(in)}^{(k)}$ 'lar ve $\varepsilon_{(in)}^{(k)}$ 'lar sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleridir. Verdiğimiz (0.5)-(0.6) denklemlerinde tansör notasyonu kullanılmıştır ve tekrarlanan indislere göre Einstein toplam uyluşımı yapılacak, ancak tekrarlanan altı çizili indislere göre bu uyluşım uygulanmayacaktır. S_k yüzeyleri üzerinde ideal temas koşullarının sağlandığını kabul edelim ve bu koşulları

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)in} (g_n^j + \nabla_n u^{(1)j}) \Big|_{S_q} n_j &= \sigma^{(2)in} (g_n^j + \nabla_n u^{(2)j}) \Big|_{S_q} n_j, \quad u_j^{(1)} \Big|_{S_q} = u_j^{(2)} \Big|_{S_q} \\ \sigma^{(2)in} (g_n^j + \nabla_n u^{(2)j}) \Big|_{S_q} n_j &= \sigma^{(3)in} (g_n^j + \nabla_n u^{(3)j}) \Big|_{S_q} n_j, \quad u_j^{(2)} \Big|_{S_q} = u_j^{(3)} \Big|_{S_q} \end{aligned} \quad (0.8)$$

Bu denklemlerde n_j 'ler ara yüzeyin birim normal vektörü ve n 'nin kovaryant bileşenleridir. Bunların yanı sıra aşağıdaki sınır koşullarının sağlandığını varsayacağız.

$$\sigma_{zz}^{(3)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} P, \quad \sigma_{ij}^{(3)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (0.9)$$

Gerilme ve şekil değiştirmenin fiziksel bileşenleri

$$\sigma_{(ij)} = \sigma^{ij} H_i H_j = \sigma_{ij} \frac{1}{H_i H_j}, \quad \varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij} \frac{1}{H_i H_j} = \varepsilon^{ij} H_i H_j, \quad u_{(i)} = u^i H_i = u_i \frac{1}{H_i} \quad (0.10)$$

formüllerinden yararlanılarak elde edilecektir.

$(ij) = rr, \theta\theta, zz, r\theta, rz, z\theta$, $(i) = r, \theta, z$ dir.

σ^{ij} , ε^{ij} ve σ_{ij} , ε_{ij} gerilme (σ) ve şekil değiştirme (ε) tansörlerinin ele alınan silindirik koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini, u^i , u_i 'ler ise yer değiştirme (u) vektörünün bu koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini göstermektedir. (0.10) formülleri tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri arasındaki ilişkileri göstermektedir. Bu formüllerdeki H_i 'ler ise Lamé katsayılarıdır. Silindirik koordinatlardaki Lamé katsayılarıdır ve bu sabitler kullanılarak üretilen şekil değiştirme vektörü ve gerilme tansörünün silindirik koordinatlardaki fiziksel bileşenlerinin, bu vektör ve tansörlerin kovaryant ve kontravaryant bileşenlerine bağlı

ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$H_r=r, H_\theta=1, H_z=1 \quad (0.11)$$

$$u_{(r)}=u^r=u_r, u_{(\theta)}=ru^\theta=\frac{1}{r}u_\theta, u_{(z)}=u_z=u^z \quad (0.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(rr)} &= \sigma_{rr} = \sigma^{rr}, \sigma_{(r\theta)} = \frac{1}{r}\sigma_{r\theta} = r\sigma^{r\theta}, \sigma_{(rz)} = \sigma_{rz} = \sigma^{rz}, \sigma_{(\theta r)} = \frac{1}{r}\sigma_{\theta r} = r\sigma^{r\theta} \\ \sigma_{(\theta\theta)} &= \frac{1}{r^2}\sigma_{\theta\theta} = r^2\sigma^{\theta\theta}, \sigma_{(\theta z)} = \frac{1}{r}\sigma_{\theta z} = r\sigma^{\theta z}, \sigma_{(zr)} = \sigma_{zr} = \sigma^{zr}, \sigma_{(z\theta)} = \frac{1}{r}\sigma_{z\theta} = r\sigma^{z\theta} \\ \sigma_{(zz)} &= \sigma_{zz} = \sigma^{zz} \end{aligned} \quad (0.13)$$

Cristoffel sembollerinin silindirik koordinatlardaki ifadeleri ile Kronecker Deltasının indisin farklı durumlarına göre eşitliği kullanılarak denge denklemlerinin silindirik koordinatlardaki ifadelerine ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} &\left(\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r \partial \theta} - 2 \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} - u_r^{(k)} - \frac{1}{r} u_\theta^{(k)} \right) \\ &+ \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r^{(k)} - 1 \right) \\ &+ \frac{2}{r} \sigma_{\theta z}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \right) + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\ &- \frac{1}{r} u_\theta^{(k)} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (0.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} &\left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right) + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta z}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial r} - u_{\theta}^{(k)} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} u_r^{(k)} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r^2} u_{\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) = 0
\end{aligned} \tag{0.15}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r \partial \theta} + \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial \theta^2} \\
& + \frac{2}{r} \sigma_{\theta z}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial \theta \partial z} + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k)} = 0
\end{aligned} \tag{0.16}$$

Periyodik eğrilikli sarılı tek lif içeren ve lif yönünde etkiyen düzgün dağılmış normal kuvvetler etkisindeki sonsuz elastik bir ortamdaki gerilme dağılımı problemi, (0.5)-(0.7) denklemlerinin, (0.8) temas koşulları dikkate alınarak çözülmesine indirgenmiş, böylece sınır-değer problemi haline getirilmiştir.

2.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi

Ele alacağımız problemimizin incelenmesinde Akbarov ve Guz (1985a, 2000)'de ele alınmış olan sınır-formu pertürbasyon yöntemini kullanacağız. Bu yönteme göre aradığımız büyüklükler lifin orta çizgisinin denklemine dahil olan ve onun eğilme derecesini gösteren küçük ε parametresinin serisi olarak aranır.

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q u_r^{(k),q} \tag{0.17}$$

Bunun yanı sıra S_k ara yüzeylerinin denklemlerini oluşturan (0.2) ve bu yüzeylerin birim

normallerinin bileşenlerini gösteren (0.3) ifadeleri de ε 'nın serisi halinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$r=R+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k a_k(\theta,t_3), \quad z=t_3+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k b_k(\theta,t_3), \quad (0.18)$$

$$n_r=1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k c_k(\theta,t_3), \quad n_\theta=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k d_k(\theta,t_3), \quad n_z=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k g_k(\theta,t_3) \quad (0.19)$$

Serideki ε^k katsayıları (2.2) ve (2.3) denklemlerinden elde edilebilir. (2.14) ifadelerini ise denge denkleminin açılması ve uzun işlemler sonucunda elde ettiğimiz denklemlerde yerine koyarsak, (0.17)'de bilinen her bir yaklaşım için uygun denklemler takımı elde ederiz.

(0.7)'den (0.17)'deki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan alan denklemleri elde edilir.(0.18)'i kullanarak (0.17)'deki her bir yaklaşım $(r=R,\theta,t_3)$ civarında seriye açılabilir. Elde edilen son ifadeleri (0.7)' de yerine koyar ve n_r, n_θ, n_z 'lerin (0.19)'daki ifadeleri kullanılırsa, bazı uzun ama bilinen işlemler sonucunda, (0.8)'deki her bir yaklaşım için $r=R$ ' de sağlanan temas koşulları elde edilir. Bu durumda k. temas koşuluna önceki k-1. yaklaşımların tümüne ait büyüklükler dahil olmaktadır. Sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadeleri ile çalışmaya devam edelim.

Sıfıncı Yaklaşım

Sıfıncı yaklaşım (0.5)-(0.7) denklemlerini sağlayacaktır. (0.8) koşulları $n_r = 1, n_\theta = 0, n_z = 0$ olmak üzere $r=R$ 'de aynen yazılacaktır. $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ olduğunu kabul edersek, $g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0}$ terimleri δ_n^j ile yer değiştirirler. Kabule göre sıfıncı yaklaşıma ait denklemler takımı

$$\nabla_i \sigma^{(k),ij,0} = 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_i u_j^{(k),0}$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),0} = (\lambda^{(k)} e^{(k),0}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),0}), \quad e^{(k),0} = \varepsilon_{(rr)}^{(k),0} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),0} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),0} \quad (0.20)$$

ve temas koşulları

$$\begin{aligned}\sigma_{(ij)}^{(1),0}\Big|_{r_q=R} &= \sigma_{(ij)}^{(2),0}\Big|_{r_q=R}, \quad u_{(i)}^{(1),0}\Big|_{r_q=R} = u_{(i)}^{(2),0}\Big|_{r_q=R} \\ \sigma_{(ij)}^{(2),0}\Big|_{r_q=R} &= \sigma_{(ij)}^{(3),0}\Big|_{r_q=R}, \quad u_{(i)}^{(2),0}\Big|_{r_q=R} = u_{(i)}^{(3),0}\Big|_{r_q=R}\end{aligned}\quad (0.21)$$

(ij)=rr, rθ, rz, (i)=r, θ, z, q=1,2

olarak bulunur. Böylece sıfırcı yaklaşım için (0.20) denklemlerinin **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** temas koşulları altında çözümlenmesine indirgemiş oluruz.

Birinci Yaklaşım

Yukarıda belirttiğimiz (0.17) ifadesini (0.5)- (0.6) denklemlerinde yerine yazarak seriye açtığımız ε^q 'nın eşit kuvvetlerinin katsayılarını eşitlediğimiz durumda q. yaklaşım için aşağıdaki denklemleri elde etmiş oluruz.

$$\nabla_i[\sigma^{(k)ij,q} + \sigma^{(k)in,0}\nabla_n u^{(k)j,0}] = \underbrace{-\sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i((\sigma^{(k)in,q-m}\nabla_n u^{(k)j,m}))}_{=0} \quad (0.22)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \nabla_j u_i^{(k),q} + \nabla_i u_j^{(k),q} + \underbrace{\sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_i u_n^{(k),s}}_{=0} \quad (0.23)$$

Birinci yaklaşım için yukarıda gösterdiğimiz gibi sağ tarafın terimleri sıfır olacağından alan denklemlerini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$\nabla_i[\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0}\nabla_n u^{(k)j,0}] = 0 \quad (0.24)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1} \quad (0.25)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = (\lambda^{(k)} e^{(k),1}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),1}), \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{(rr)}^{(k),1} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),1} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),1} \quad k=1,2,3 \quad (0.26)$$

(0.24) ve (0.26) denklemlerinin fiziksel bileşenlerinin ifadeleri;

Denge denklemleri için:

$$\sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} + 2\sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}$$

$$\begin{aligned}
& +\sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \\
& - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \\
& + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} \\
& - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}) \\
& + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} \\
& - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{3}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} = 0
\end{aligned} \tag{0.27}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} - \frac{2}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{2}{r} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z \partial r} - \frac{2}{r^2} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} \\
& - \frac{1}{r^2} \sigma_{zr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{3}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{3}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{3}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{r^2} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),1}}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),0} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{3}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} = 0
\end{aligned} \tag{0.28}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} + 2 \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta z}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} \\
& + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{0.29}$$

Şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri:

$$\varepsilon_{rr}^{(k),1} = \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \tag{0.30}$$

$$2\varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_{\theta}^{(k),1} \tag{0.31}$$

$$2\varepsilon_{rz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \quad (0.32)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^{(k),1} \quad (0.33)$$

$$2\varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} \quad (0.34)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \quad (0.35)$$

İşlemleri (2.9) denklemi içinde aynı koşullar altında yaparsak aşağıdaki temas koşullarını elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(i)r} \right]_{(2),1}^{(1),1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \gamma_r \left[\sigma_{(i)r} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \\ & \gamma_\theta \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \gamma_z \left[\sigma_{(i)z} \right]_{(2),0}^{(1),0} = 0 \\ & \left[u_{(i)} \right]_{(2),1}^{(1),1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} = 0, \\ & \left[\sigma_{(i)r} \right]_{(3),1}^{(2),1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \gamma_r \left[\sigma_{(i)r} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \\ & \gamma_\theta \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \gamma_z \left[\sigma_{(i)z} \right]_{(3),0}^{(2),0} = 0 \\ & \left[u_{(i)} \right]_{(3),1}^{(2),1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} = 0, \end{aligned} \quad (0.36)$$

Birinci yaklaşıma ait denklemler ve temas koşullarını elde etmiş olduk. (0.36) denkleminde kullanılan fonksiyonların açık ifadeleri aşağıda verilmiştir:

$$[\varphi]_{2,s}^{1,s} = \varphi^{(1),s} - \varphi^{(2),s} ; [\varphi]_{3,s}^{2,s} = \varphi^{(2),s} - \varphi^{(3),s} , \quad (0.37)$$

$$f_1 = \delta(t_3) \cos \theta , \quad \varphi_1 = -R \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta , \quad (0.38)$$

$$\gamma_r = \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2} R \right) \cos \theta , \quad \gamma_\theta = -\frac{\delta(t_3)}{R} \sin \theta , \quad \gamma_z = -\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta \quad (0.39)$$

şeklindedir.

İkinci Yaklaşım:

(0.22)-(0.23) denklemlerinden ikinci yaklaşım için sırasıyla aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,2} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,2} \right] = -\nabla_i \left(\sigma^{(k)in,1} \nabla_n u^{(k)j,1} \right) \quad (0.40)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k),2} = \nabla_j u_m^{(k),2} + \nabla_m u_j^{(k),2} + \nabla_j u^{(k)n,1} \nabla_m u_n^{(k),1} \quad (0.41)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),2} = \left(\lambda^{(k)*} e^{(k),2} \right) \delta_i^n + 2 \left(u^{(k)*} \varepsilon_{(in)}^{(k),2} \right) , \quad e^{(k),2} = \varepsilon_{rr}^{(k),2} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} + \varepsilon_{zz}^{(k),2} . \quad (0.42)$$

(0.40)-(0.42) denklemlerinden elde edeceğimiz ikinci yaklaşımla ilgili temas koşulları aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(ir)} \right]_{(2),2}^{(1),2} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{(2),1}^{(1),1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{(2),1}^{(1),1} + f_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial r^2} \right]_{(2),0}^{(1),0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial r \partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial z^2} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \\ & \gamma_r \left[\sigma_{(ir)} \right]_{(2),1}^{(1),1} + f_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \varphi_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{(2),1}^{(1),1} + \\ & f_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i\theta)}}{\partial r} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \varphi_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i\theta)}}{\partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \gamma_z \left[\sigma_{(iz)} \right]_{(2),1}^{(1),1} + f_1 \gamma_z \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \end{aligned}$$

$$\beta_r[\sigma_{(i)r}]_{(2),0}^{(1),0} + \beta_\theta[\sigma_{(i)\theta}]_{(2),0}^{(1),0} + \beta_z[\sigma_{(i)z}]_{(2),0}^{(1),0} = 0 \quad (0.43)$$

$$\begin{aligned} & [\sigma_{(i)r}]_{(3),2}^{(2),2} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{(3),1}^{(2),1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{(3),1}^{(2),1} + f_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial r^2} \right]_{(3),0}^{(2),0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial r \partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(i)r}}{\partial z^2} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \\ & \gamma_r [\sigma_{(i)r}]_{(3),1}^{(2),1} + f_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \varphi_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \gamma_\theta [\sigma_{(i)\theta}]_{(3),1}^{(2),1} + \\ & f_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i)\theta}}{\partial r} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \varphi_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i)\theta}}{\partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \gamma_z [\sigma_{(i)z}]_{(3),1}^{(2),1} + f_1 \gamma_z \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \\ & \beta_r [\sigma_{(i)r}]_{(2),0}^{(1),0} + \beta_\theta [\sigma_{(i)\theta}]_{(3),0}^{(2),0} + \beta_z [\sigma_{(i)z}]_{(3),0}^{(2),0} = 0 \end{aligned} \quad (0.44)$$

$$\begin{aligned} & [u_{(i)r}]_{(2),2}^{(1),2} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{(2),1}^{(1),1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{(2),1}^{(1),1} + f_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r^2} \right]_{(2),0}^{(1),0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r \partial z} \right]_{(2),0}^{(1),0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r^2} \right]_{(2),0}^{(1),0} = 0 \end{aligned} \quad (0.45)$$

$$\begin{aligned} & [u_{(i)r}]_{(3),2}^{(2),2} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{(3),1}^{(2),1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{(3),1}^{(2),1} + f_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r^2} \right]_{(3),0}^{(2),0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r \partial z} \right]_{(3),0}^{(2),0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r^2} \right]_{(3),0}^{(2),0} = 0 \end{aligned} \quad (0.46)$$

Birinci yaklaşımda elde ettiğimiz temas koşulları denklemlerinde ve (0.45)'de (i)=r,θ,z indislerini kullanarak elde edeceğimiz temas koşullarının fiziksel bileşenlerindeki açık ifadeler elde edilir. Birinci yaklaşım temas koşulları denklemlerinde ve (0.45)'de kullanılan fonksiyon ve kısaltmalar aşağıda şekildedir.

$$[X]_{2,q}^{1,q} = X^{(1),q}(R, \theta, t_3) - X^{(2),q}(R, \theta, t_3), \quad q=0, 1, 2 \quad (0.47)$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \delta(t_3) \cos \theta, \quad \varphi_1 = -R \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta, \quad f_2 = \frac{R}{2} \left(\frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \sin^2 \theta + \left(\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta \right)^2 \right), \\
\varphi_2 &= -\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \delta(t_3) \cos^2 \theta, \quad \gamma_r = \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \frac{d^2 \delta(t_3)}{dt_3^2} R \right) \cos \theta, \quad \gamma_\theta = \frac{\delta(t_3)}{R} \sin \theta, \quad \gamma_z = -\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta, \\
\beta_r &= -\left[2\delta(t_3) \frac{d^2 \delta(t_3)}{dt_3^2} + \left(\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \right)^2 \right] \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \sin^2 \theta + \left(\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta \right)^2 \right], \\
\beta_\theta &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \left[\delta(t_3) \frac{d^2 \delta(t_3)}{dt_3^2} - \frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \right], \quad \beta_z = -\frac{1}{R} \delta(t_3) \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{0.48}$$

Böylece ikinci yaklaşımın elde edilmesi için gerekli olan denklemler takımı ve temas koşulları elde edilmiş olunur.

Çalışmalarımızdaki yaklaşımlar sıfırcı, birinci ve ikinci yaklaşım çerçevesinde gerçekleşecektir. Bu sebeple alan denklemleri ve temas koşulları da bu yaklaşımlar için elde edilmiştir.

2.3 Uygun Sınır-Değer Problemlerinin Çözümlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda, yukarıda formülasyonu verilen sıfırcı ve birinci yaklaşımlara ait sınır-değer problemlerinin çözümlerini elde edeceğiz. Sadelik için sırasıyla lif, geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ ve $v^{(3)}$ Poisson oranlarının eşit olduğunu kabul edeceğiz. Buna göre sıfırcı yaklaşım için çözümler aşağıdaki gibi olur.

$$\sigma_{ij}^{(1),0} = \sigma_{ij}^{(3),0} = 0 \quad (ij) = rr, r\theta, \theta z, rz, \theta\theta$$

$$\sigma_{zz}^{(1),0} = p \frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} \quad \sigma_{zz}^{(2),0} = p \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}}, \quad \sigma_{zz}^{(3),0} = p,$$

$$u_r^{(1),0} = -v^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0} r, \quad u_r^{(2),0} = -v^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_r^{(3),0} = -v^{(3)} \varepsilon_{zz}^{(3),0} r,$$

$$u_\theta^{(1),0} = u_\theta^{(2),0} = u_\theta^{(3),0} = 0 \quad u_z^{(1),0} = u_z^{(2),0} = u_z^{(3),0} = \frac{p}{E^{(3)}} z$$

$$\varepsilon_{zz}^{(1),0} = \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \varepsilon_{zz}^{(3),0} = \frac{p}{E^{(3)}} \quad (0.49)$$

Yukarıdaki ifadede yer alan $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}$ sırasıyla lif,geçiş malzemesi ve matrisin elastisite modülleridir. (0.49) çözümü hem aynı fazda hem de farklı fazda yerleşim durumu olan lifler için geçerlidir.

Birinci yaklaşıma ait olan (0.24)-(0.26) ve (0.36) problem çözümünü ele alalım. Yaptığımız kabuller ve sıfıncı yaklaşımın yukarıda belirttiğimiz çözümü çerçevesinde (0.24) denklemleri aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (0.50)$$

Bu denklemler üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakışmaktadır. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),1}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \end{aligned} \quad (0.51)$$

olur. Sıfıncı yaklaşım için elde edilen çözüm dikkate alınrsa birinci yaklaşıma ait (0.36) temas koşulları aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1),1} - \sigma_{rr}^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} &= 0 \\ \sigma_{r\theta}^{(1),1} - \sigma_{r\theta}^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} &= 0 \\ \sigma_{rz}^{(1),1} - \sigma_{rz}^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} &= \delta' \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r^{(1),1} - u_r^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} &= 0 \\
u_\theta^{(1),1} - u_\theta^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} &= 0 \\
u_z^{(1),1} - u_z^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} &= 0 \\
\sigma_{rr}^{(2),1} - \sigma_{rr}^{(3),1} \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} &= 0 \\
\sigma_{r\theta}^{(2),1} - \sigma_{r\theta}^{(3),1} \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} &= 0 \\
\sigma_{rz}^{(2),1} - \sigma_{rz}^{(3),1} \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} &= \delta' \left(\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right) \cos \alpha z \\
u_r^{(2),1} - u_r^{(3),1} \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} &= 0 \\
u_\theta^{(2),1} - u_\theta^{(3),1} \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} &= 0 \\
u_z^{(2),1} - u_z^{(3),1} \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} &= 0
\end{aligned} \tag{0.52}$$

(0.52) denklemlerinin çözümü için (0.50)'i dikkate alarak aşağıdaki gösterilimi (Guz, 1999) kullanalım.

$$\begin{aligned}
u_r^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)}, \quad u_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k)} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)}, \\
u_z^{(k)} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)}, \\
\Delta_1^{(k)} &= \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2}. \quad k=1,2,3
\end{aligned} \tag{0.53}$$

Yukarıda yer alan $\psi^{(k)}$ ve $\chi^{(k)}$ fonksiyonları için denklemler,

$$\left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)} = 0, \\ \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_3^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0 \quad (0.54)$$

şeklindedir. (0.54)'deki $\xi_i^{(k)}$ 'ler sabit olup, aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}}. \quad (0.55)$$

(0.54) lif denklemleri ve (0.52) temas koşulları dikkate alınırsa $\psi^{(k)}$ ve $\chi^{(k)}$ fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde buluruz.

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= A_1^{(1)} I_1(\xi_1^{(1)} \alpha r) \sin \alpha z \sin \theta \\ \chi^{(1)} &= \left[A_2^{(1)} I_1(\xi_2^{(1)} \alpha r) + A_3^{(1)} I_1(\xi_3^{(1)} \alpha r) \right] \cos \alpha z \cos \theta \\ \psi^{(2)} &= \alpha \left[A_1^{(2)} I_1(\xi_1^{(2)} \alpha r) + B_1^{(2)} K_1(\xi_1^{(2)} \alpha r) \right] \sin \alpha z \sin \theta \\ \chi^{(2)} &= \left[A_2^{(2)} I_1(\xi_2^{(2)} \alpha r) + A_3^{(2)} I_1(\xi_3^{(2)} \alpha r) + B_2^{(2)} K_1(\xi_2^{(2)} \alpha r) + B_3^{(2)} K_1(\xi_3^{(2)} \alpha r) \right] \cos \alpha z \cos \theta \\ \psi^{(3)} &= A_1^{(3)} K_1(\xi_1^{(3)} \alpha r) \sin \alpha z \sin \theta \\ \chi^{(3)} &= \left[A_2^{(3)} K_1(\xi_2^{(2)} \alpha r) + A_3^{(3)} K_1(\xi_3^{(2)} \alpha r) \right] \cos \alpha z \cos \theta \end{aligned} \quad (0.56)$$

(0.56)'de $\alpha = 2\pi/\ell$ ve $I_n(x)$, $K_n(x)$ sırası ile sanal argümanlı Bessel fonksiyonu ve Macdonald fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların türevleri

$$I'_n = \frac{1}{2}(I_{n-1} + I_{n+1}), \quad I'_0 = I_1, \quad K'_n = -\frac{1}{2}(K_{n-1} + K_{n+1}), \quad K'_0 = -K_1 \quad (0.57)$$

yukarıdaki eşitliklerle verilebilir.

$A_n^{(k)}, B_n^{(k)}$ $n, k = 1, 2, 3$ ulaşmaya çalıştığımız bilinmeyenlerdir.

(0.56)'deki denklemlerin bünye denklemleri ile u ve ε 'nin fiziksel bileşenlerinin ifade edildiği (0.51)-(0.53) denklemlerinde yerinde yazılması ile 12×12 'lik denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek bilinmeyenler belirlenir..

İfade ettiğimiz denklemlerde geçen δ' ifdesini ele alırsak;

$$\delta = l \sin \alpha z \quad \delta' = \alpha l \cos \alpha z \quad \alpha = 2\pi/l \text{ şeklindedir.}$$

Buna göre her bir boyut için elde edeceğimiz denklemler;

Lif için:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1),1} = & \left[A_1^{(1),1} \left(-\frac{2\mu^{(1),1}}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(1),1} \kappa) + \frac{\mu^{(1),1} \xi_1^{(1),1}}{\kappa} (I_0(\xi_1^{(1),1} \kappa) + I_2(\xi_1^{(1),1} \kappa)) \right) + \right. \\ & A_2^{(1),1} \left(\frac{\lambda^{(1),1}}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(1),1} \kappa) - \frac{\lambda^{(1),1} \xi_2^{(1),1}}{2\kappa} (I_0(\xi_2^{(1),1} \kappa) + I_2(\xi_2^{(1),1} \kappa)) - \frac{(\xi_2^{(1),1})^2 (\lambda^{(1),1} + 2\mu^{(1),1})}{4} \times \right. \\ & \left. \left(3I_1(\xi_2^{(1),1} \kappa) + I_3(\xi_2^{(1),1} \kappa) \right) + \lambda^{(1),1} \frac{(\lambda^{(1),1} + 2\mu^{(1),1})(\xi_2^{(1),1})^2 - \mu^{(1),1} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(1),1} + \mu^{(1),1}} I_1(\xi_2^{(1),1} \kappa) \right) + \\ & A_3^{(1),1} \left(-\frac{\lambda^{(1),1}}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(1),1} \kappa) + \frac{\lambda^{(1),1} \xi_3^{(1),1}}{2\kappa} (I_0(\xi_3^{(1),1} \kappa) + I_2(\xi_3^{(1),1} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(1),1})^2 (\lambda^{(1),1} + 2\mu^{(1),1})}{4} \times \right. \\ & \left. \left. \left(3I_1(\xi_3^{(1),1} \kappa) + I_3(\xi_3^{(1),1} \kappa) \right) + \lambda^{(1),1} \frac{(\lambda^{(1),1} + 2\mu^{(1),1})(\xi_3^{(1),1})^2 - \mu^{(1),1} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(1),1} + \mu^{(1),1}} I_1(\xi_3^{(1),1} \kappa) \right) \right] \sin \alpha z \cos \theta \\ \sigma_{r\theta}^{(1),1} = & \mu^{(1),1} \times \left[A_1^{(1),1} \left(-\frac{1}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(1),1} \kappa) - \frac{\xi_1^{(1),1}}{2\kappa} (I_0(\xi_1^{(1),1} \kappa) + I_2(\xi_1^{(1),1} \kappa)) - \right. \right. \\ & \left. \frac{(\xi_1^{(1),1})^2}{4} (3I_1(\xi_1^{(1),1} \kappa) + I_3(\xi_1^{(1),1} \kappa)) \right) + \\ & A_2^{(1),1} \left(\frac{2}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(1),1} \kappa) + \frac{\xi_2^{(1),1}}{2} (I_0(\xi_2^{(1),1} \kappa) + I_2(\xi_2^{(1),1} \kappa)) \right) + \\ & \left. A_3^{(1),1} \left(\frac{2}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(1),1} \kappa) + \frac{\xi_3^{(1),1}}{2} (I_0(\xi_3^{(1),1} \kappa) + I_2(\xi_3^{(1),1} \kappa)) \right) \right] \sin \alpha z \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz}^{(1)} &= \left[A_1^{(1)} \left(\frac{\mu^{(1)}}{\kappa} I_1(\xi_1^{(1)} \kappa) \right) + \right. \\
&A_2^{(1)} \left(\mu^{(1)} \frac{\xi_2^{(1)} \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \left(I_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) \right) + \\
&A_3^{(1)} \left(\mu^{(1)} \frac{\xi_3^{(1)} \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \left(I_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) \right) \left. \right] \cos \alpha z \cos \theta \\
U_r^{(1)} &= \left[A_1^{(1)} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(1)} \kappa) \right) + A_2^{(1)} \left(\frac{\xi_2^{(1)}}{2} \left(I_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) \right) + \right. \\
&A_3^{(1)} \left(\frac{\xi_3^{(1)}}{2} 0 \left(I_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) \right) \left. \right] \sin \alpha z \cos \theta \\
U_\theta^{(1)} &= \left[-A_1^{(1)} \left(\frac{\xi_1^{(1)}}{2} \left(I_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(1)} \kappa) \right) \right) - A_2^{(1)} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) \right. \\
&- A_3^{(1)} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) \left. \right] \sin \alpha z \sin \theta \\
U_z^{(1)} &= \left[A_2^{(1)} \left(\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) + \right. \\
&A_3^{(1)} \left(\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) \left. \right] \cos \alpha z \cos \theta
\end{aligned} \tag{0.58}$$

Geçiş Malzemesi için:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(2)} &= \left[A_1^{(2)} \left(-\frac{2\mu^{(2)}}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + \frac{\mu^{(2)} \xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa) \right) \right) + \right. \\
B_1^{(2)} &\left(-\frac{2\mu^{(1)}}{\kappa^2} K_1(\xi_1^{(1)} \kappa) - \frac{\mu^{(1)} \xi_1^{(1)}}{\kappa} \left(K_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(1)} \kappa) \right) \right) + \\
A_2^{(2)} &\left(\frac{\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \xi_2^{(2)}}{2\kappa} \left(I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) - \frac{(\xi_2^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{4} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(3I_1(\xi_2^{(2)}\kappa) + I_3(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) + \lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1(\xi_2^{(2)}\kappa) \Bigg) + \\
& B_2^{(2)} \left(-\frac{\lambda^{(2)}}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) - \frac{\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)}}{2\kappa} (K_0(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_2^{(2)}\kappa)) + \frac{(\xi_2^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{4} \times \right. \\
& \left. (3K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_2^{(2)}\kappa)) - \lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) \\
& A_3^{(2)} \left(-\frac{\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + \frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}}{2\kappa} (I_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_2(\xi_3^{(2)}\kappa)) + \frac{(\xi_3^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{4} \times \right. \\
& \left. (3I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_3(\xi_3^{(2)}\kappa)) + \lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \\
& B_3^{(2)} \left(-\frac{\lambda^{(2)}}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) - \frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}}{2\kappa} (K_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_3^{(2)}\kappa)) + \frac{(\xi_3^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{4} \times \right. \\
& \left. (3K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_3^{(2)}\kappa)) - \lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) \Bigg] \\
& \sigma_{r\theta}^{(2)} = \mu^{(1)} \times \left[A_1^{(2)} \left(\frac{1}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(2)}\kappa) + \frac{\xi_1^{(2)}}{2\kappa} (I_0(\xi_1^{(2)}\kappa) + I_2(\xi_1^{(2)}\kappa)) - \frac{(\xi_1^{(2)})^2}{4} (3I_1(\xi_1^{(2)}\kappa) + I_3(\xi_1^{(2)}\kappa)) \right) + \right. \\
& B_1^{(2)} \left(-\frac{1}{\kappa^2} K_1(\xi_1^{(2)}\kappa) - \frac{\xi_1^{(1)}}{2\kappa} (K_0(\xi_1^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_1^{(2)}\kappa)) - \frac{(\xi_1^{(2)})^2}{4} (3K_1(\xi_1^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_1^{(2)}\kappa)) \right) \Bigg] + \\
& A_2^{(2)} \left(\frac{2}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(2)}\kappa) - \frac{\xi_2^{(2)}}{2} (I_0(\xi_2^{(2)}\kappa) + I_2(\xi_2^{(2)}\kappa)) \right) + \\
& B_2^{(2)} \left(\frac{2}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) + \frac{\xi_2^{(2)}}{2} (K_0(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_2^{(2)}\kappa)) \right) +
\end{aligned}$$

$$A_3^{(2)} \left(\frac{2}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_3^{(2)}}{2} (I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right) + \\ B_3^{(2)} \left(\frac{2}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_3^{(2)}}{2} (K_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right) \Big] \sin \alpha z \sin \theta$$

$$U_r^{(2)} = \left[A_1^{(2)} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) \right) + B_1^{(2)} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(2)} \kappa) \right) + \right. \\ A_2^{(2)} \left(\frac{\xi_2^{(2)}}{2} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right) + B_2^{(2)} \left(-\frac{\xi_2^{(2)}}{2} (K_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right) + \\ \left. A_3^{(2)} \left(\frac{\xi_3^{(2)}}{2} (I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right) + B_3^{(2)} \left(-\frac{\xi_3^{(1)}}{2} (K_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right) \right] \sin \alpha z \cos \theta$$

$$U_\theta^{(2)} = \left[A_1^{(2)} \left(-\frac{\xi_1^{(2)}}{2} (I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right) + B_1^{(2)} \left(\frac{\xi_1^{(2)}}{2} (K_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right) + \right. \\ A_2^{(2)} \left(-\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) + B_2^{(2)} \left(-\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) + \\ \left. A_3^{(2)} \left(-\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) + B_3^{(2)} \left(-\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) \right] \sin \alpha z \sin \theta$$

$$U_z^{(2)} = \left[A_2^{(2)} \left(\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) + \right. \\ B_2^{(2)} \left(\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_1(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) +$$

$$A_3^{(2)} \left(\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) + \\ B_3^{(2)} \left(\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_1(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) \Big] \cos \alpha z \cos \theta$$

$$\sigma_{rr}^{(3)} = \left[A_1^{(3)} \left(-\frac{2\mu^{(3)}}{\kappa^2} K_1(\xi_1^{(3)} \kappa) - \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)}}{\kappa} (K_0(\xi_1^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(3)} \kappa)) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& A_2^{(3)} \left(-\frac{\lambda^{(3)}}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(3)} \kappa) - \frac{\lambda^{(3)} \xi_2^{(3)}}{2\kappa} (K_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(3)} \kappa)) + \frac{(\xi_2^{(3)})^2 (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})}{4} \times \right. \\
& \left. (3K_1(\xi_2^{(3)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(3)} \kappa)) - \lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0,0)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) + \\
& A_3^{(3)} \left(-\frac{\lambda^{(3)}}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + \frac{\lambda^{(3)} \xi_3^{(3)}}{2\kappa} (I_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(3)} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(3)})^2 (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})}{4} \times \right. \\
& \left. (3I_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(3)} \kappa)) + \lambda^{(3)} \frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3,0)}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} I_1(\xi_3^{(3)} \kappa) \right) \Bigg] \sin \alpha z \cos \theta \\
& \sigma_{r\theta}^{(3)} = \mu^{(3)} \times \left[A_1^{(3)} \left(-\frac{1}{\kappa^2} K_1(\xi_1^{(3)} \kappa) - \frac{\xi_1^{(3)}}{2\kappa} (K_0(\xi_1^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(3)} \kappa)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\xi_1^{(3)})^2}{4} (3K_1(\xi_1^{(3)} \kappa) + K_3(\xi_1^{(3)} \kappa)) \right) + \right. \\
& A_2^{(3)} \left(\frac{2}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(3)} \kappa) + \frac{\xi_2^{(3)}}{2} (K_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(3)} \kappa)) \right) + \\
& A_3^{(3)} \left(\frac{2}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + \frac{\xi_3^{(3)}}{2} (K_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(3)} \kappa)) \right) \Bigg] \sin \alpha z \sin \theta \\
& \sigma_{rz}^{(3)} = \left[A_1^{(3)} \left(\mu^{(3)} \frac{\mu^{(3)}}{\kappa} K_1(\xi_1^{(3)} \kappa) \right) + \right. \\
& A_2^{(3)} \left(\mu^{(3)} \frac{\xi_2^{(3)} [\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(0,0)} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2]}{2(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} (K_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(3)} \kappa)) \right) + \\
& A_3^{(3)} \left(\mu^{(3)} \frac{\xi_3^{(3)} [\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(0,0)} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2]}{2(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} (K_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(3)} \kappa)) \right) \Bigg] \cos \alpha z \cos \theta \\
& U_r^{(3)} = \left[A_1^{(3)} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(3)} \kappa) \right) + A_2^{(3)} \left(-\frac{\xi_2^{(3)}}{2} (K_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(3)} \kappa)) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_3^{(3)} \left(-\frac{\xi_3^{(3)}}{2} \left(I_0 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) + I_2 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right) \right) \sin \alpha z \cos \theta \\
U_\theta^{(3)} &= \left[A_1^{(3)} \left(\frac{\xi_1^{(3)}}{2} \left(K_0 \left(\xi_1^{(2)} \kappa \right) + K_2 \left(\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right) \right) + A_2^{(3)} \left(-\frac{1}{\kappa} K_1 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right) + \right. \\
& \left. A_3^{(3)} \left(-\frac{1}{\kappa} K_1 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right) \right] \sin \alpha z \sin \theta \\
U_z^{(3)} &= \left[A_2^{(3)} \left(\frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right) + \right. \\
& \left. A_3^{(3)} \left(\frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right) \right] \cos \alpha z \cos \theta
\end{aligned} \tag{0.59}$$

İkinci yaklaşım için gerekli denklem sistemleri ve temas koşullarını (0.43) - (0.48)'da daha önce ifade etmiştik

Sıfırıncı ve birinci yaklaşım için elde ettiğimiz sonuçları alırsak;

$$\nabla_i [\sigma^{(k)}_{ij,q} + \sigma^{(k)}_{in,0} \nabla_n u^{(k)}_{j,q}] = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i (\sigma^{(k)}_{in,q-m} \nabla_n u^{(k)}_{j,m}) \tag{0.60}$$

denkleminin tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri aşağıdaki şekilde olur.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr}^{(k),2} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),2} \right) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z^2} = F_1 \left(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, \right. \\
& \left. u_\theta^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots \right) \\
& \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial z^2} = F_2 \left(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, \right. \\
& \left. u_\theta^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots \right) \\
& \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} = F_3 \left(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, \right.
\end{aligned}$$

$$u_{\theta}^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots) \quad (0.61)$$

(2.55) denklemlerinin sağ tarafındaki fonksiyonların açık ifadelerinin çok küçük değerler olduğu için ihmal edilmektedir. Yukarıdaki denklemler bu durumda aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),2} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (0.62)$$

haline gelir.(0.49)'daki sıfırcı yaklaşım ile ilgili denklemler dikkate alır ve yer değiştirmelerin çok küçük olduğunu düşünürsek (0.43)-(0.48) ilişkileri ve temas koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(k),2} &= \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r}, \varepsilon_{r\theta}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(k),2}}{r} \right), \varepsilon_{rz}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),2}}{r}, \varepsilon_{\theta z}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k),2}}{r \partial \theta} \right), \varepsilon_{zz}^{(k),2} = \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z} \end{aligned} \quad (0.63)$$

İkinci yaklaşımın temas koşullarını, sıfırcı yaklaşım için ifade ettiğimiz çözüm, birinci yaklaşımdaki temas koşulları ve bunların çözümleri dikkate alınırsa denklemler aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{rr}^{(1),2} - \sigma_{rr}^{(2),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{rr}^{(1),1}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{rr}^{(2),1}}{\partial r} \right] - \gamma_z \left[\sigma_{rz}^{(1),0} - \sigma_{rz}^{(2),0} \right] \\ \left[\sigma_{r\theta}^{(1),2} - \sigma_{r\theta}^{(2),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1),1}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(2),1}}{\partial r} \right] - \gamma_{\theta} \left[\sigma_{\theta\theta}^{(1),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(2),1} \right] - \gamma_z \left[\sigma_{\theta z}^{(1),1} - \sigma_{\theta z}^{(2),1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\sigma_{rz}^{(1),2} - \sigma_{rz}^{(2),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{rz}^{(1),1}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{rz}^{(2),1}}{\partial r} \right] - \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{rz}^{(1),1}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{rz}^{(2),1}}{\partial z} \right] - \gamma_r \left[\sigma_{rz}^{(1),1} - \sigma_{rz}^{(2),1} \right] \\
&\quad - \gamma_\theta \left[\sigma_{\theta z}^{(1),1} - \sigma_{\theta z}^{(2),1} \right] - \gamma_z \left[\sigma_{zz}^{(1),1} - \sigma_{zz}^{(2),1} \right] - \beta_z \left[\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right] \\
\left[u_r^{(1),2} - u_r^{(2),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial u_r^{(1),1}}{\partial r} - \frac{\partial u_r^{(2),1}}{\partial r} \right] \\
\left[u_\theta^{(1),2} - u_\theta^{(2),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial u_\theta^{(1),1}}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta^{(2),1}}{\partial r} \right] \\
\left[u_z^{(1),2} - u_z^{(2),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial u_z^{(1),1}}{\partial r} - \frac{\partial u_z^{(2),1}}{\partial r} \right] \\
\left[\sigma_{rr}^{(2),2} - \sigma_{rr}^{(3),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{rr}^{(2),1}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{rr}^{(3),1}}{\partial r} \right] - \gamma_z \left[\sigma_{rz}^{(2),0} - \sigma_{rz}^{(3),0} \right] \\
\left[\sigma_{r\theta}^{(2),2} - \sigma_{r\theta}^{(3),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(2),1}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(3),1}}{\partial r} \right] - \gamma_\theta \left[\sigma_{\theta\theta}^{(2),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(3),1} \right] - \gamma_z \left[\sigma_{\theta z}^{(2),1} - \sigma_{\theta z}^{(3),1} \right] \\
\left[\sigma_{rz}^{(2),2} - \sigma_{rz}^{(3),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{rz}^{(2),1}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{rz}^{(3),1}}{\partial r} \right] - \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{rz}^{(2),1}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{rz}^{(3),1}}{\partial z} \right] - \gamma_r \left[\sigma_{rz}^{(2),1} - \sigma_{rz}^{(3),1} \right] \\
&\quad - \gamma_\theta \left[\sigma_{\theta z}^{(2),1} - \sigma_{\theta z}^{(3),1} \right] - \gamma_z \left[\sigma_{zz}^{(2),1} - \sigma_{zz}^{(3),1} \right] - \beta_z \left[\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right] \\
\left[u_r^{(2),2} - u_r^{(3),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial u_r^{(2),1}}{\partial r} - \frac{\partial u_r^{(3),1}}{\partial r} \right] \\
\left[u_\theta^{(2),2} - u_\theta^{(3),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial u_\theta^{(2),1}}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta^{(3),1}}{\partial r} \right] \\
\left[u_z^{(2),2} - u_z^{(3),2} \right] &= -f_1 \left[\frac{\partial u_z^{(2),1}}{\partial r} - \frac{\partial u_z^{(3),1}}{\partial r} \right] \tag{0.64}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadeleri açık bir şekilde ifade etmek istersek;ikinci yaklaşımın temas koşullarının (0.43)-(0.48) denklemleri, sıfırcı yaklaşımın çözümü (0.49), birinci yaklaşım temas koşulları (0.36) ile bunların çözümleri dikkate alınırsa aşağıdaki gibi

yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\left[\sigma_{rr}^{1,2} - \sigma_{rr}^{2,2} \right] &= (1 + \cos 2\theta) \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{rr(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \\
&\quad + \cos 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{rr(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \\
\left[\sigma_{r\theta}^{1,2} - \sigma_{r\theta}^{2,2} \right] &= \sin 2\theta \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{rr(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} \right] - \frac{\pi}{2\kappa} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{tt(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{t3(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{t3(i)}^{(2)} \right] \right\} + \cos 2\alpha z \sin 2\theta \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{rr(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{2\kappa} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{tt(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} \right] + \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{t3(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{t3(i)}^{(2)} \right] \right\} \\
\left[\sigma_{rz}^{1,2} - \sigma_{rz}^{2,2} \right] &= \sin 2\alpha z \left[(1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2} \left\{ -\left[\overline{A}_i^{(1)} F_{r33(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{r33(i)}^{(2)} \right] + \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{33(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{33(i)}^{(2)} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\pi\kappa (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} + (1 - \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\kappa} \left\{ -\left[\overline{A}_i^{(1)} F_{t3(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{t3(i)}^{(2)} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\pi (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \right] \\
\left[u_r^{1,2} - u_r^{2,2} \right] &= (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{rr(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} \right] \\
&\quad - \cos 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{rr(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} \right] \\
\left[u_\theta^{1,2} - u_\theta^{2,2} \right] &= -\sin 2\theta \frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{tt(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} \right] \\
&\quad + \cos 2\alpha z \sin 2\theta \frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{tt(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} \right] \\
\left[u_z^{1,2} - u_z^{2,2} \right] &= -\sin 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(1)} F_{3rr(i)}^{(1)} - \overline{A}_i^{(2)} F_{3rr(i)}^{(2)} \right] \\
\left[\sigma_{rr}^{2,2} - \sigma_{rr}^{3,2} \right] &= (1 + \cos 2\theta) \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} - \overline{A}_i^{(3)} F_{rr(i)}^{(3)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{rr(i)}^{(3)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0}) \right\} \\
& \left[\sigma_{r\theta}^{2,2} - \sigma_{r\theta}^{3,2} \right] = \sin 2\theta \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{rr(i)}^{(3)} \right] - \frac{\pi}{2\kappa} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{tt(i)}^{(3)} \right] \right. \\
& \quad + \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{t3(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{t3(i)}^{(3)} \right] \left. \right\} + \cos 2\alpha z \sin 2\theta \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{rr(i)}^{(3)} \right] \right. \\
& \quad + \frac{\pi}{2\kappa} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{tt(i)}^{(3)} \right] + \frac{\pi}{2} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{t3(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{t3(i)}^{(3)} \right] \left. \right\} \\
& \left[\sigma_{rz}^{2,2} - \sigma_{rz}^{3,2} \right] = \sin 2\alpha z \left[(1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2} \left\{ -\left[\bar{A}_i^{(2)} F_{r33(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{r33(i)}^{(3)} \right] + \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{33(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{33(i)}^{(3)} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\pi\kappa (\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0}) \right\} + (1 - \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\kappa} \left\{ -\left[\bar{A}_i^{(2)} F_{t3(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{t3(i)}^{(3)} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\pi (\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0}) \right\} \right] \\
& [u_r]_{3,2}^{2,2} = (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{rr(i)}^{(3)} \right] \\
& \quad - \cos 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{rr(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{rr(i)}^{(3)} \right] \\
& [u_\theta]_{3,2}^{2,2} = -\sin 2\theta \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{tt(i)}^{(3)} \right] \\
& \quad + \cos 2\alpha z \sin 2\theta \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{tt(i)}^{(3)} \right] \\
& [u_z]_{3,2}^{2,2} = -\sin 2\alpha z (1 + \cos 2\theta) \frac{\pi}{2\alpha} \left[\bar{A}_i^{(2)} F_{3rr(i)}^{(2)} - \bar{A}_i^{(3)} F_{3rr(i)}^{(3)} \right], \quad \kappa = \alpha R \tag{0.65}
\end{aligned}$$

Yukarıda elde ettiğimiz denklemlerin sağ taraflarını açarsak elde edeceğimiz denklemler aşağıdaki gibi olacaktır.

(0.65) temas koşullarını çözebilmek için, sağ tarafındaki ifadelere göre αz içermeyen temas koşulları ve αz içeren temas koşulları şeklinde iki gruba ayırabiliriz.

αz içermeyen temas koşullarının çözümü için aşağıda verilen Papkovitch-Neuber

gösterilimini kullanacağız.

$$\begin{aligned}
u_r^{(k)} &= 4(1-v^{(k)})B_r^{(k)} - \frac{\partial(rB_r^{(k)})}{\partial r} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{\partial r}, \quad u_\theta^{(k)} = 4(1-v^{(k)})B_\theta^{(k)} - \frac{\partial B_r^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{r\partial \theta} \\
u_3^{(k)} &= -\frac{\partial(rB_r^{(k)})}{\partial z} - \frac{\partial B_0^{(k)}}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
\Delta B_0^{(k)} &= 0, \quad \Delta B_r^{(k)} - \frac{B_r^{(k)}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta^{(k)}}{\partial \theta} = 0, \quad \Delta B_\theta^{(k)} - \frac{B_\theta^{(k)}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r^{(k)}}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{0.66}$$

Buna göre $B_0^{(k)}, B_r^{(k)}, B_\theta^{(k)}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi belirleriz:

$$B_0^{(1),2} = 0, \quad B_r^{(1),2} = \bar{C}_1^{(1)}r + [\bar{C}_2^{(1)}r + \bar{C}_3^{(1)}r^3] \cos 2\theta, \quad B_\theta^{(1),2} = [-\bar{C}_2^{(1)}r + \bar{C}_3^{(1)}r^3] \sin 2\theta$$

$$B_0^{(2),2} = 0, \quad B_r^{(2),2} = \bar{C}_1^{(2)}r + \bar{D}_1^{(2)}\frac{1}{r} + \left[\bar{C}_2^{(2)}r + \bar{C}_3^{(2)}r^3 + \bar{D}_2^{(2)}\frac{1}{r} + \bar{D}_3^{(2)}\frac{1}{r^3} \right] \cos 2\theta,$$

$$B_\theta^{(2),2} = \left[-\bar{C}_2^{(2)}r + \bar{C}_3^{(2)}r^3 - \bar{D}_2^{(2)}\frac{1}{r} + \bar{D}_3^{(2)}\frac{1}{r^3} \right] \sin 2\theta$$

$$B_0^{(3),2} = 0, \quad B_r^{(3),2} = \bar{C}_1^{(3)}\frac{1}{r} + \left[\bar{C}_2^{(3)}\frac{1}{r} + \bar{C}_3^{(3)}\frac{1}{r^3} \right] \cos 2\theta$$

$$B_\theta^{(3),2} = \left[-\bar{C}_2^{(3)}\frac{1}{r} + \bar{C}_3^{(3)}\frac{1}{r^3} \right] \sin 2\theta$$

$$u_r^{(1),2} = C_1^{(1)}(2-4\nu)\kappa + [C_2^{(1)}(2-4\nu)\kappa + C_3^{(1)}(-4\nu)\kappa^3] \cos 2\theta$$

$$u_\theta^{(1),2} = [C_2^{(1)}(-2+4\nu)\kappa + C_3^{(1)}(6-4\nu)\kappa^3] \sin 2\theta$$

$$u_z^{(1),2} = 0$$

$$\sigma_{(rr)}^{(1),2} = C_1^{(1)}[2(\lambda+\mu)(2-4\nu)] + \left\{ C_2^{(1)}[4\mu(1-2\nu)] + C_3^{(1)}[(-24\mu\nu+12\lambda(1-2\nu))\kappa^2] \right\} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{(r\theta)}^{(1),2} = \mu \left[C_2^{(1)}(-4+8\nu) + C_3^{(1)}(12\kappa^2) \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{(rz)}^{(1),2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_r^{(2),2} &= C_1^{(2)}(2-4\nu)\kappa + D_1^{(2)}(4-4\nu)\frac{1}{\kappa} + \\
&\left[C_2^{(2)}(2-4\nu)\kappa + C_3^{(2)}(-4\nu)\kappa^3 + D_2^{(2)}(4-4\nu)\frac{1}{\kappa} + D_3^{(2)}(6-4\nu)\frac{1}{\kappa^3} \right] \cos 2\theta \\
\mathbf{u}_\theta^{(2),2} &= \left[C_2^{(2)}(-2+4\nu)\kappa + C_3^{(2)}(6-4\nu)\kappa^3 + D_2^{(2)}(2+4\nu)\frac{1}{\kappa} + D_3^{(2)}(6-4\nu)\frac{1}{\kappa^3} \right] \sin 2\theta \\
\mathbf{u}_z^{(2),2} &= 0 \\
\sigma_{(\pi)}^{(2),2} &= C_1^{(2)} \left[2(\lambda + \mu)(2-4\nu) \right] + D_1^2 \left[-2\mu(4-4\nu) \frac{1}{\kappa^2} \right] + \\
&\left\{ C_2^{(2)} \left[4\mu(1-2\nu) \right] + C_3^{(2)} \left[(-24\mu\nu + 12\lambda(1-2\nu))\kappa^2 \right] + \right. \\
&\left. D_2^2 \left[(-8\mu(1-\nu) + 4\lambda(1+2\nu)) \frac{1}{\kappa^2} \right] + D_3^2 \left[-6(6-4\nu) \frac{1}{\kappa^4} \right] \right\} \cos 2\theta \\
\sigma_{(r\theta)}^{(2),2} &= \mu \left[C_2^{(2)}(-4+8\nu) + C_3^{(2)}12\kappa^2 - D_2^2 \frac{12}{\kappa^2} + D_3^2 \left(12(-3+2\nu) \frac{1}{\kappa^4} \right) \right] \sin 2\theta \\
\sigma_{(rz)}^{(2),2} &= 0 \\
\mathbf{u}_r^{(3),2} &= C_1^{(3)}(4-4\nu)\frac{1}{\kappa} + \\
&\left[C_2^{(3)}(4-4\nu)\frac{1}{\kappa} + C_3^{(3)}(6-4\nu)\frac{1}{\kappa^3} \right] \cos 2\theta \\
\mathbf{u}_\theta^{(3),2} &= \left[C_2^{(3)}(2+4\nu)\frac{1}{\kappa} + C_3^{(3)}(6-4\nu)\frac{1}{\kappa^3} \right] \sin 2\theta \\
\mathbf{u}_z^{(3),2} &= 0 \\
\sigma_{(r\theta)}^{(3),2} &= \mu \left[C_2^3 \frac{12}{\kappa^2} + C_3^3 \left(12(-3+2\nu) \frac{1}{\kappa^4} \right) \right] \sin 2\theta \\
\sigma_{(\pi)}^{(3),2} &= C_1^3 \left[-2\mu(4-4\nu) \frac{1}{\kappa^2} \right] + \\
&\left\{ C_2^{(3)} \left[(-8\mu(1-\nu) + 4\lambda(1+2\nu)) \frac{1}{\kappa^2} \right] + D_3^3 \left[-6(6-4\nu) \frac{1}{\kappa^4} \right] \right\} \cos 2\theta \\
\sigma_{(rz)}^{(3),2} &= 0
\end{aligned} \tag{0.67}$$

Yukarıdaki denklem sisteminden yararlanılarak αz içermeyen temas koşullarından oluşan aşağıdaki sistemi çözebiliriz. Çözüm sonuncunda $\bar{C}_j^{(k)}$ katsayılarına ulaşmış oluruz.

$$C_j^{(1)}T_{kj}^{(1)} - C_m^{(2)}T_{km}^{(2)} = -\frac{\pi}{2} \left[A_i^{(1)}U_{rr(i)}^{(1)} - A_i^{(2)}U_{rr(i)}^{(2)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}), k=1,2; j=\overline{1,3} m=\overline{1,6}$$

$$C_j^{(1)}T_{3(j)}^{(1)} - C_j^{(2)}T_{3(j)}^{(2)} = \sin 2\theta \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[A_i^{(1)}U_{rr(i)}^{(1)} - A_i^{(2)}U_{rr(i)}^{(2)} \right] - \frac{\pi}{2\kappa} \left[A_i^{(1)}U_{tt(i)}^{(1)} - A_i^{(2)}U_{tt(i)}^{(2)} \right] \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \left[A_i^{(1)}U_{t3(i)}^{(1)} - A_i^{(2)}U_{t3(i)}^{(2)} \right] \right\}$$

$$C_j^{(1)}T_{kj}^{(1)} - C_m^{(2)}T_{km}^{(2)} = \frac{\pi}{2} \left[A_i^{(1)}U_{rr(i)}^{(1)} - A_i^{(2)}U_{rr(i)}^{(2)} \right], k=4,5; j=\overline{1,3} m=\overline{1,6}$$

$$C_j^{(1)}T_{6(j)}^{(1)} - C_j^{(2)}T_{6(j)}^{(2)} = -\frac{\pi}{2} \left[A_i^{(1)}U_{tt(i)}^{(1)} - A_i^{(2)}U_{tt(i)}^{(2)} \right]$$

$$C_j^{(2)}T_{kj}^{(2)} - C_m^{(3)}T_{km}^{(3)} = -\frac{\pi}{2} \left[A_i^{(2)}U_{rr(i)}^{(2)} - A_i^{(3)}U_{rr(i)}^{(3)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0}), k=7,8; j=\overline{1,6} m=\overline{1,3}$$

$$C_j^{(2)}T_{9(j)}^{(2)} - C_j^{(3)}T_{9(j)}^{(3)} = \sin 2\theta \left\{ -\frac{\pi}{2} \left[A_i^{(2)}U_{rr(i)}^{(2)} - A_i^{(3)}U_{rr(i)}^{(3)} \right] - \frac{\pi}{2\kappa} \left[A_i^{(2)}U_{tt(i)}^{(2)} - A_i^{(3)}U_{tt(i)}^{(3)} \right] \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \left[A_i^{(2)}U_{t3(i)}^{(2)} - A_i^{(3)}U_{t3(i)}^{(3)} \right] \right\}$$

$$C_j^{(2)}T_{kj}^{(2)} - C_m^{(3)}T_{km}^{(3)} = \frac{\pi}{2} \left[A_i^{(2)}U_{rr(i)}^{(2)} - A_i^{(3)}U_{rr(i)}^{(3)} \right], k=10,11; j=\overline{1,6} m=\overline{1,3}$$

$$C_j^{(2)}T_{12(j)}^{(2)} - C_j^{(3)}T_{12(j)}^{(3)} = -\frac{\pi}{2} \left[A_i^{(2)}U_{tt(i)}^{(2)} - A_i^{(3)}U_{tt(i)}^{(3)} \right] \quad (0.68)$$

Burada, bilinmeyenler arasında kullandığımız eşitlikler verilmiştir. αz içermeyen terimler EK1’de verilmiştir.

$$C_1^{(1)} = \bar{C}_1^{(1)} \alpha^2, C_2^{(1)} = \bar{C}_2^{(1)} \alpha^2, C_3^{(1)} = \bar{C}_3^{(1)} \alpha^4, C_1^{(2)} = \bar{C}_1^{(2)}, C_2^{(2)} = \bar{C}_2^{(2)}, C_3^{(2)} = \bar{C}_3^{(2)} \alpha^{-2} \quad (0.69)$$

Yukarıda şekil değiştirme ve yer değiştirme ilişkileri kullanılarak

Şimdi ikinci yaklaşımda αz içeren temas koşullarının çözümü için

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\left(\Delta_1^{(\mathbf{k})} + \left(\xi_1^{(\mathbf{k})} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(\mathbf{k})} = 0, \left(\Delta_1^{(\mathbf{k})} + \left(\xi_2^{(\mathbf{k})} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(\mathbf{k})} + \left(\xi_3^{(\mathbf{k})} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(\mathbf{k})} = 0 \quad (0.70)$$

Δ_1 ifadesi ile altında yer alan denklemi çözerek aşağıdaki fonksiyonları yazalım:

$$\psi^{(1),2} = \alpha \bar{D}_{12}^{(1)} I_2(2\xi_1^{(1)} \alpha r) \sin 2\theta \cos 2\alpha z$$

$$\chi^{(1),2} = \left\{ \bar{D}_{20}^{(1)} I_0(2\xi_2^{(1)} \alpha r) + \bar{D}_{30}^{(1)} I_0(2\xi_3^{(1)} \alpha r) + \left[\bar{D}_{22}^{(1)} I_2(2\xi_2^{(1)} \alpha r) + \bar{D}_{32}^{(1)} I_2(2\xi_3^{(1)} \alpha r) \right] \cos 2\theta \right\} \sin 2\alpha z$$

$$\psi^{(2),2} = \left[\bar{E}_{12}^{(2)} I_2(2\xi_1^{(2)} \alpha r) + \bar{D}_{12}^{(2)} K_2(2\xi_1^{(2)} \alpha r) \right] \sin 2\theta \cos 2\alpha z$$

$$\chi^{(2),2} = \left\{ \bar{E}_{20}^{(2)} I_0(2\xi_2^{(2)} \alpha r) + \bar{E}_{30}^{(2)} I_0(2\xi_3^{(2)} \alpha r) + \bar{D}_{20}^{(2)} K_0(2\xi_2^{(2)} \alpha r) + \bar{D}_{30}^{(2)} K_0(2\xi_3^{(2)} \alpha r) + \left[\bar{E}_{22}^{(2)} I_2(2\xi_2^{(2)} \alpha r) + \bar{E}_{32}^{(2)} I_2(2\xi_3^{(2)} \alpha r) + \bar{D}_{22}^{(2)} K_2(2\xi_2^{(2)} \alpha r) + \bar{D}_{32}^{(2)} K_2(2\xi_3^{(2)} \alpha r) \right] \cos 2\theta \right\} \sin 2\alpha z$$

$$\psi^{(3),2} = \alpha \bar{D}_{12}^{(3)} K_2(2\xi_1^{(3)} \alpha r) \sin 2\theta \cos 2\alpha z$$

$$\chi^{(3),2} = \left\{ \bar{D}_{20}^{(3)} K_0(2\xi_2^{(3)} \alpha r) + \bar{D}_{30}^{(3)} K_0(2\xi_3^{(3)} \alpha r) + \left[\bar{D}_{22}^{(3)} K_2(2\xi_2^{(3)} \alpha r) + \bar{D}_{32}^{(3)} K_2(2\xi_3^{(3)} \alpha r) \right] \cos 2\theta \right\} \sin 2\alpha z \quad (0.71)$$

Sol taraf ifadelerini aşağıdaki şekilde yazdıktan sonra αz içeren denklemler verilecektir.

$$\mathbf{u}_r^{(1),2} = \left\{ -D_{20}^{(1)} 4\xi_2^{(1)} I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) - D_{30}^{(1)} 4\xi_3^{(1)} I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) - \left[D_{12}^{(1)} \frac{2}{\kappa} I_2(\xi_1^{(1)} \kappa) - D_{22}^{(1)} 2\xi_2^{(1)} (I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(1)} \kappa)) - D_{32}^{(1)} 2\xi_3^{(1)} (I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(1)} \kappa)) \right] \cos 2\theta \right\} \cos 2\alpha z$$

$$\mathbf{u}_\theta^{(1),2} = \left[-D_{12}^{(1)} \xi_1^{(1)} (I_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_1^{(1)} \kappa)) + D_{22}^{(1)} \frac{4}{\kappa} I_2(\xi_2^{(1)} \kappa) + D_{32}^{(1)} \frac{4}{\kappa} I_2(\xi_3^{(1)} \kappa) \right] \cos 2\theta \sin 2\alpha z$$

$$\mathbf{u}_z^{(1),2} = \left\{ \begin{aligned} & D_{20}^{(1)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) + \\ & D_{30}^{(1)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) + \\ & \left[D_{22}^{(1)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) + \right. \\ & \left. D_{32}^{(1)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) \right] \cos 2\theta \Big\} \sin 2\alpha z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(\pi)}^{(1),2} = & \left\{ \left[D_{20}^{(1)} \left[-4 \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(I_0 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) + I_2 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \frac{4\xi_2^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} I_1 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) + 8\lambda^{(1)} \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right] + \\ & D_{30}^{(1)} \left[-4 \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(I_0 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) + I_2 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) - \right. \\ & \left. \frac{4\xi_3^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} I_1 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) + 8\lambda^{(1)} \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) \right] \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ D_{12}^{(1)} \left[-\frac{4\mu^{(1)}}{\kappa^2} I_1 \left(\xi_1^{(1)} \kappa \right) + \frac{4\mu^{(1)}}{\kappa} \left(I_1 \left(\xi_1^{(1)} \kappa \right) + I_3 \left(\xi_1^{(1)} \kappa \right) \right) \right] + \right. \\ & D_{22}^{(1)} \left[-\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) 2 \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 \left(I_0 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) + 2I_2 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) + I_4 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right) - \right. \\ & \left. \frac{2\xi_2^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} \left(I_1 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) + I_3 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right) + \frac{8\lambda^{(1)}}{\kappa^2} I_2 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) + \right. \\ & \left. 8\lambda^{(1)} \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_2 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right] + \end{aligned}$$

$$D_{32}^{(1)} \left[-(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) 2(\xi_3^{(1)})^2 \left(I_0(2\xi_3^{(1)}\kappa) + 2I_2(2\xi_3^{(1)}\kappa) + I_4(2\xi_3^{(1)}\kappa) \right) - \right. \\ \left. \frac{2\xi_3^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} \left(I_1(\xi_3^{(1)}\kappa) + I_3(\xi_3^{(1)}\kappa) \right) + \frac{8\lambda^{(1)}}{\kappa^2} I_2(\xi_3^{(1)}\kappa) + \right. \\ \left. 8\lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_2(\xi_3^{(1)}\kappa) \right] \Bigg\} \cos 2\theta \Bigg\} \cos 2\alpha z$$

$$\sigma_{(r\theta)}^{(1),2} = \mu \left\{ D_{12}^{(1)} \left[-(\xi_1^{(1)})^2 \left(I_0(2\xi_1^{(1)}\kappa) + 2I_2(2\xi_1^{(1)}\kappa) + I_4(2\xi_1^{(1)}\kappa) \right) + \right. \right. \\ \left. \frac{\xi_1^{(1)}}{\kappa} \left(I_1(2\xi_1^{(1)}\kappa) + I_3(\xi_1^{(1)}\kappa) \right) - \frac{4}{\kappa^2} I_2(2\xi_1^{(1)}\kappa) \right] + \\ D_{22}^{(1)} \left[-\frac{8\lambda^{(1)}}{\kappa^2} I_2(\xi_2^{(1)}\kappa) + \frac{8\xi_2^{(1)}}{\kappa} \left(I_1(2\xi_2^{(1)}\kappa) + I_3(\xi_2^{(1)}\kappa) \right) \right] + \\ \left. D_{32}^{(1)} \left[-\frac{8\lambda^{(1)}}{\kappa^2} I_2(\xi_3^{(1)}\kappa) + \frac{8\xi_2^{(1)}}{\kappa} \left(I_1(2\xi_3^{(1)}\kappa) + I_3(\xi_3^{(1)}\kappa) \right) \right] \right\} \sin 2\theta \cos 2\alpha z$$

$$\sigma_{(rz)}^{(1),2} = \mu \left\{ D_{20}^{(1)} \left[\frac{8\xi_2^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_1(2\xi_2^{(1)}\kappa) + \right. \right. \\ \left. D_{30}^{(1)} \frac{8\xi_3^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_1(2\xi_3^{(1)}\kappa) \right] +$$

$$\left\{ D_{12}^{(1)} \left[-\frac{4}{\kappa} I_2(\xi_1^{(1)}\kappa) \right] + \bar{D}_{22}^{(1)} \frac{4\xi_2^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \left(I_1(2\xi_2^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_2^{(1)}\kappa) \right) \right.$$

$$\left. D_{32}^{(1)} \left[\frac{4\xi_3^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \left(I_1(2\xi_3^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_3^{(1)}\kappa) \right) \right] \right\} \cos 2\theta \Bigg\} \sin 2\alpha z$$

$$u_r^{(2),2} = \left\{ \left[-E_{20}^{(2)} 4\xi_2^{(2)} I_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) - E_{30}^{(2)} 4\xi_3^{(2)} I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + D_{20}^{(2)} 4\xi_2^{(2)} K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) + \right. \right. \\ \left. D_{30}^{(2)} 4\xi_3^{(2)} K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \right] + \left\{ E_{12}^{(2)} \frac{2}{\kappa} I_2(\xi_1^{(2)}\kappa) - E_{22}^{(2)} 2\xi_2^{(2)} \left(I_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) + I_3(2\xi_2^{(2)}\kappa) \right) - \right. \\ \left. E_{32}^{(2)} 2\xi_3^{(2)} \left(I_1(2\xi_3^{(2)}\kappa) + I_3(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + D_{12}^{(2)} \frac{2}{\kappa} K_2(\xi_1^{(2)}\kappa) + \right.$$

$$D_{22}^{(2)} 2\xi_2^{(1)} \left(K_1 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right) + D_{32}^{(2)} 2\xi_3^{(1)} \left(K_1 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right) \Big\} \cos 2\theta \Big\} \cos 2\alpha z$$

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(2),2} = & \left\{ -E_{12}^{(2)} \xi_1^{(2)} \left(I_1 \left(\xi_1^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right) + E_{22}^{(2)} \frac{4}{\kappa} I_2 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + E_{32}^{(2)} \frac{4}{\kappa} I_2 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right. \\ & \left. + D_{12}^{(2)} \xi_1^{(2)} \left(K_1 \left(\xi_1^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right) + D_{22}^{(2)} \frac{4}{\kappa} K_2 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + D_{32}^{(2)} \frac{4}{\kappa} K_2 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right\} \sin 2\theta \cos 2\alpha z \end{aligned}$$

$$u_z^{(2),2} = \left\{ E_{20}^{(2)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + \right.$$

$$E_{30}^{(2)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) +$$

$$D_{20}^{(2)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0 \left(\xi_2^{(1)} \kappa \right) +$$

$$D_{30}^{(2)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) +$$

$$\left\{ E_{22}^{(2)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + \right.$$

$$E_{32}^{(2)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) +$$

$$D_{22}^{(2)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) +$$

$$D_{32}^{(2)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0 \left(\xi_3^{(1)} \kappa \right) \Big\} \cos 2\theta \Big\} \sin 2\alpha z$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{(\pi)}^{(2),2} = & \left\{ E_{20}^{(2)} \left[-4 \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(I_0 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + I_2 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{4\xi_2^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} I_1 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right] + \right. \\
& E_{30}^{(2)} \left[-4 \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(I_0 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) + I_2 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) - \right. \\
& \left. \frac{4\xi_3^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} I_1 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right] + \\
& D_{20}^{(2)} \left[-4 \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(K_0 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + K_2 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) - \right. \\
& \left. \frac{4\xi_2^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} K_1 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right] + \\
& D_{30}^{(2)} \left[-4 \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(K_0 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) + K_2 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) - \right. \\
& \left. \frac{4\xi_3^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} K_1 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right] + \\
& \left\{ E_{12}^{(2)} \left[-\frac{4}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa \right) + \frac{4\xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right) \right] + \right. \\
& E_{22}^{(2)} \left[-\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) 2 \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \left(I_0 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) + 2I_2 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) + I_4 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right) - \\
& \left. \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right] + \\
& E_{32}^{(2)} \left[-\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) 2 \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \left(I_0 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) + 2I_2 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) + I_4 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) \right) - \\
& \left. \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2 \left(\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right] + \\
& D_{12}^{(2)} \left[-\frac{4}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) + \frac{4\xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{22}^{(2)} \left[-\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) 2\left(\xi_2^{(2)}\right)^2 \left(K_0\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right) + 2K_2\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right) + K_4\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right)\right) - \right. \\
& \left. \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2\left(\xi_2^{(2)}\kappa\right) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)\left(\xi_2^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_2\left(\xi_2^{(2)}\kappa\right) \right] + \\
& D_{32}^{(2)} \left[-\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right) 2\left(\xi_3^{(2)}\right)^2 \left(K_0\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right) + 2K_2\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right) + K_4\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right)\right) - \right. \\
& \left. \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} K_2\left(\xi_3^{(2)}\kappa\right) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)\left(\xi_3^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_2\left(\xi_3^{(2)}\kappa\right) \right] \left. \right\} \cos 2\theta \left. \right\} \cos 2\alpha z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{(r\theta)}^{(2),2} = & \mu \left\{ E_{12}^{(2)} \left[-\left(\xi_1^{(2)}\right)^2 \left(I_0\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right) + 2I_2\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right) + I_4\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right)\right) + \right. \right. \\
& \left. \frac{\xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(I_1\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right) + I_3\left(\xi_1^{(2)}\kappa\right)\right) - \frac{4}{\kappa^2} I_2\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right) \right] + \\
& E_{22}^{(2)} \left[-\frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2\left(\xi_2^{(2)}\kappa\right) + \frac{8\xi_2^{(2)}}{\kappa} \left(I_1\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right) + I_3\left(\xi_2^{(2)}\kappa\right)\right) \right] + \\
& E_{32}^{(2)} \left[-\frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2\left(\xi_3^{(2)}\kappa\right) + \frac{8\xi_2^{(2)}}{\kappa} \left(I_1\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right) + I_3\left(\xi_3^{(2)}\kappa\right)\right) \right] \\
& D_{12}^{(2)} \left[-\left(\xi_1^{(2)}\right)^2 \left(K_0\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right) + 2K_2\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right) + K_4\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right)\right) + \right. \\
& \left. \frac{\xi_1^{(2)}}{\kappa} \left(K_1\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right) + K_3\left(\xi_1^{(2)}\kappa\right)\right) - \frac{4}{\kappa^2} K_2\left(2\xi_1^{(2)}\kappa\right) \right] + \\
& D_{22}^{(2)} \left[-\frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} K_2\left(\xi_2^{(2)}\kappa\right) + \frac{8\xi_2^{(2)}}{\kappa} \left(K_1\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right) + K_3\left(\xi_2^{(2)}\kappa\right)\right) \right] + \\
& D_{32}^{(2)} \left[-\frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} K_2\left(\xi_3^{(2)}\kappa\right) + \frac{8\xi_2^{(2)}}{\kappa} \left(K_1\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right) + K_3\left(\xi_3^{(2)}\kappa\right)\right) \right] \left. \right\} \sin 2\theta \cos 2\alpha z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{(rz)}^{(2),2} = & \mu \left\{ E_{20}^{(2)} \left[\frac{8\xi_2^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)\left(\xi_2^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1\left(2\xi_2^{(2)}\kappa\right) + \right. \right. \\
& E_{30}^{(2)} \frac{8\xi_3^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)\left(\xi_3^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1\left(2\xi_3^{(2)}\kappa\right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{20}^{(2)} \left[\frac{8\xi_2^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) - \right. \\
& \left. D_{30}^{(2)} \frac{8\xi_3^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right] \\
& \left\{ -E_{12}^{(2)} \left[-\frac{4}{\kappa} I_2 \left(\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right] + E_{22}^{(2)} \frac{4\xi_2^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(I_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right) \right. \\
& \left. E_{32}^{(2)} \left[\frac{4\xi_3^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(I_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right) \right] \right. \\
& \left. -D_{12}^{(2)} \left[-\frac{4}{\kappa} K_2 \left(\xi_1^{(2)} \kappa \right) \right] - D_{22}^{(2)} \frac{4\xi_2^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(K_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right) \right. \\
& \left. \left. -D_{32}^{(2)} \left[\frac{4\xi_3^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(K_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right) \right] \right] \right\} \cos 2\theta \Bigg\} \sin 2\alpha z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r^{(3),2} = & \left\{ D_{20}^{(3)} 4\xi_2^{(3)} K_1 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) + D_{30}^{(3)} 4\xi_3^{(3)} K_1 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) + \left\{ D_{12}^{(3)} \frac{2}{\kappa} K_2 \left(\xi_1^{(3)} \kappa \right) + \right. \right. \\
& \left. D_{22}^{(3)} 2\xi_2^{(3)} \left(K_1 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right) + D_{32}^{(3)} 2\xi_3^{(3)} \left(K_1 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right) \right\} \cos 2\theta \Bigg\} \cos 2\alpha z
\end{aligned}$$

$$u_\theta^{(3),2} = \left\{ D_{12}^{(3)} \xi_1^{(3)} \left(K_1 \left(\xi_1^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_1^{(3)} \kappa \right) \right) + D_{22}^{(3)} \frac{4}{\kappa} K_2 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) + D_{32}^{(3)} \frac{4}{\kappa} K_2 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right\} \sin 2\theta \cos 2\alpha z$$

$$u_z^{(3),2} = \left\{ D_{20}^{(3)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_0 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) + \right.$$

$$\left. D_{30}^{(3)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_0 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) + \right.$$

$$\left\{ D_{22}^{(3)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_0 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) + \right. \\ \left. D_{32}^{(3)} \frac{4 \left[\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_0 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right\} \cos 2\theta \Bigg\} \sin 2\alpha z$$

$$\sigma_{\pi}^{(3)} = \left[A_1^{(3)} \left(-\frac{2\mu^{(3)}}{\kappa^2} K_1 \left(\xi_1^{(3)} \kappa \right) - \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)}}{\kappa} \left(K_0 \left(\xi_1^{(3)} \kappa \right) + K_2 \left(\xi_1^{(3)} \kappa \right) \right) \right) + \right. \\ A_2^{(3)} \left(-\frac{\lambda^{(3)}}{\kappa^2} K_1 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) - \frac{\lambda^{(3)} \xi_2^{(3)}}{2\kappa} \left(K_0 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) + K_2 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right) + \frac{\left(\xi_2^{(3)} \right)^2 \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right)}{4} \times \\ \left. \left(3K_1 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right) - \lambda^{(1)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left(\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right) + \\ A_3^{(3)} \left(-\frac{\lambda^{(3)}}{\kappa^2} I_1 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) + \frac{\lambda^{(3)} \xi_3^{(3)}}{2\kappa} \left(I_0 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) + I_2 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right) + \frac{\left(\xi_3^{(3)} \right)^2 \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right)}{4} \times \\ \left. \left(3I_1 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) + I_3 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right) + \lambda^{(3)} \frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} I_1 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right) \Bigg] \sin \alpha z \cos \theta$$

$$\sigma_{(\pi\theta)}^{(3),2} = \mu \left\{ D_{12}^{(3)} \left[-\left(\xi_1^{(3)} \right)^2 \left(K_0 \left(2\xi_1^{(3)} \kappa \right) + 2K_2 \left(2\xi_1^{(3)} \kappa \right) + K_4 \left(2\xi_1^{(3)} \kappa \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\xi_1^{(3)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_1^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_1^{(3)} \kappa \right) \right) - \frac{4}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_1^{(3)} \kappa \right) \right] + \right.$$

$$\left. D_{22}^{(3)} \left[-\frac{8\lambda^{(3)}}{\kappa^2} K_2 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) + \frac{8\xi_2^{(3)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_2^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right) \right] + \right.$$

$$\left. D_{32}^{(3)} \left[-\frac{8\lambda^{(3)}}{\kappa^2} K_2 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) + \frac{8\xi_2^{(3)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_3^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right) \right] \right\} \sin 2\theta \cos 2\alpha z$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{(rz)}^{(3),2} = & \mu \left\{ D_{20}^{(3)} \left[\frac{8\xi_2^{(3)} \left[(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 (2\xi_2^{(3)} \kappa) - \right. \right. \\
& D_{30}^{(3)} \frac{8\xi_3^{(3)} \left[(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 (2\xi_3^{(3)} \kappa) \left. \right] \\
& \left\{ -D_{12}^{(3)} \left[-\frac{4}{\kappa} K_2 (\xi_1^{(3)} \kappa) \right] - D_{22}^{(3)} \frac{4\xi_2^{(3)} \left[(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} (K_1 (2\xi_2^{(3)} \kappa) + K_3 (2\xi_2^{(3)} \kappa)) \right. \\
& \left. \left. - D_{32}^{(3)} \left[\frac{4\xi_3^{(3)} \left[(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} (K_1 (2\xi_3^{(3)} \kappa) + K_3 (2\xi_3^{(3)} \kappa)) \right] \right\} \cos 2\theta \right\} \sin 2\alpha z
\end{aligned}
\tag{0.72}$$

Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı. ile sıfırıncı ve birinci yaklaşımları içeren **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** sınır koşullarının αz ’li terimleri de kullanılırsa aşağıdaki denklemler sistemine ulaşılır.

$$\begin{aligned}
& \overline{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{n12}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{n2(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{n3(j)}^{(2)} = \\
& \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{tr}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{\text{tr}(m)}^{(2)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}), \quad n = 1, 2; k = 1, 2 \\
& \overline{D}_{12}^{(k)} M_{312}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{32(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{33(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{312}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{32(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{33(j)}^{(2)} = \\
& \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{tr}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{\text{tr}(m)}^{(2)} \right] + \frac{\pi}{2\kappa} \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{tt}(i)}^{(1)} - \overline{A}_j^{(2)} U_{\text{tt}(j)}^{(2)} \right] + \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{t3}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{\text{t3}(m)}^{(2)} \right] \right\} \\
& \overline{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{n12}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{n2(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{n3(j)}^{(2)} = \\
& \frac{\pi}{2} \left\{ - \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{r33}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{\text{r33}(m)}^{(2)} \right] + \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{33}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{\text{33}(m)}^{(2)} \right] - 2\pi\kappa (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \\
& + (-1)^n \frac{\pi}{2\kappa} \left\{ - \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{t3}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{\text{t3}(m)}^{(2)} \right] + 2\pi (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \right\} \Bigg], \quad n = 4, 5; k = 1, 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overline{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{n12}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{n2(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{n3(j)}^{(2)} = \\ & -\frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{rt}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{\text{rt}(m)}^{(2)} \right] \quad , \quad n = 6, 7; k = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overline{D}_{12}^{(k)} M_{812}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{82(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{83(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{812}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{82(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{83(j)}^{(2)} = \\ & \frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{\text{rt}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{\text{rt}(m)}^{(2)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overline{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{n12}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{n2(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{n3(j)}^{(2)} = \\ & -\frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(1)} U_{3\text{rt}(i)}^{(1)} - \overline{A}_m^{(2)} U_{3\text{rt}(m)}^{(2)} \right] \quad , \quad n = 9, 10; k = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overline{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{n12}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{n2(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{n3(j)}^{(2)} = \\ & \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{\text{rt}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{\text{rt}(m)}^{(3)} \right] + \pi^2 (\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0}) \quad , \quad n = 11, 12; k = 2, 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overline{E}_{12}^{(2)} M_{1312}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{132(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{133(j)}^{(2)} = \\ & \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{\text{rt}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{\text{rt}(m)}^{(3)} \right] + \frac{\pi}{2\kappa} \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{\text{tt}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{\text{tt}(m)}^{(3)} \right] + \frac{\pi}{2} \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{\text{t3}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{\text{t3}(m)}^{(3)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\overline{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{n12}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{n2(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{n3(j)}^{(2)} =$$

$$\frac{\pi}{2} \left\{ - \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{\text{r33}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{\text{r33}(m)}^{(3)} \right] + \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{33(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{33(m)}^{(3)} \right] - 2\pi\kappa (\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0}) \right\}$$

$$+ (-1)^n \frac{\pi}{2\kappa} \left\{ - \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{\text{t3}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{\text{t3}(m)}^{(3)} \right] + 2\pi (\sigma_{zz}^{(2),0} - \sigma_{zz}^{(3),0}) \right\} \quad , \quad n = 14, 15; k = 2, 3$$

$$\overline{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{n12}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{n2(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{n3(j)}^{(2)} =$$

$$-\frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{\text{rt}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{\text{rt}(m)}^{(3)} \right] \quad , \quad n = 16, 17; k = 2, 3$$

$$\overline{E}_{12}^{(2)} M_{1812}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{182(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{183(j)}^{(2)} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{\text{trt}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{\text{trt}(m)}^{(3)} \right] \\
& \overline{D}_{12}^{(k)} M_{n12}^{(k)} + \overline{D}_{2(j)}^{(k)} M_{n2(j)}^{(k)} + \overline{D}_{3(j)}^{(k)} M_{n3(j)}^{(k)} + \overline{E}_{12}^{(2)} M_{n12}^{(2)} + \overline{E}_{2(j)}^{(2)} M_{n2(j)}^{(2)} + \overline{E}_{3(j)}^{(2)} M_{n3(j)}^{(2)} = \\
& -\frac{\pi}{2\alpha} \left[\overline{A}_i^{(2)} U_{3\text{rt}(i)}^{(2)} - \overline{A}_m^{(3)} U_{3\text{rt}(m)}^{(3)} \right] \quad , n = 19, 20; k = 2, 3 \quad (0.73)
\end{aligned}$$

$$\overline{D}_{12}^{(k)} = D_{12}^{(k)} \alpha^3, \quad \overline{D}_{2(j)}^{(k)} = D_{2(j)}^{(k)} \alpha^3, \quad \overline{D}_{3(j)}^{(k)} = D_{3(j)}^{(k)} \alpha^3$$

$$\overline{E}_{12}^{(k)} = E_{12}^{(k)} \alpha^3, \quad \overline{E}_{2(j)}^{(k)} = E_{2(j)}^{(k)} \alpha^3, \quad \overline{E}_{3(j)}^{(k)} = E_{3(j)}^{(k)} \alpha^3$$

Yukarıda $k = 1, 2, 3$, $j = 0, 2$ ve birinci malzeme ile ikinci malzeme sınır koşulları için $i = \overline{1, 3}; m = \overline{1, 6}$; ikinci malzeme ile üçüncü malzeme sınır koşulları için $i = \overline{1, 6}; m = \overline{1, 3}$ tür. Bu denklemlerin sağ tarafındaki büyüklükler birinci yaklaşımdan belli olan büyüklüklerdir, sol taraftaki M fonksiyonlarının açık şekli ise Ek 1’de verilmiştir.

2.4 Gerilme Yayılımına Ait Sayısal Sonuçlar

Gerilme yayılımına ait incelemeler $\sigma_{n\tau}$, σ_{ne} kayma gerilmeleri ve σ_{nn} normal gerilmesine ait sayısal sonuçlar elde etme ve bunları yorumlama çerçevesinde yapılmıştır. Sözü edilen gerilmeler matris ve lif arakesit yüzeyi olan S yüzeyi üzerinde ele alınmıştır. $\sigma_{n\tau}$ ve σ_{ne} kayma gerilmeleri sırasıyla S yüzeyine teğet τ ve e vektörleri doğrultusundaki, σ_{nn} normal gerilmesi ise n normal vektörü doğrultusundaki gerilmelerdir (Şekil 2.1a). Eğilmenin ihmal edilmesi durumuna karşı gelen $\varepsilon = 0$ halinde (Şekil 2.1b) σ_{nn} , $\sigma_{n\tau}$, σ_{ne} gerilmeleri sırasıyla σ_{rr} , σ_{rz} , $\sigma_{r\theta}$ ile çakışır. $v^{(1)} = v^{(2)}$ durumunda $\varepsilon = 0$ koşulu altında $\sigma_{nn} \equiv \sigma_{rr} \equiv \sigma_{n\tau} \equiv \sigma_{rz} \equiv \sigma_{ne} \equiv \sigma_{r\theta} \equiv 0$ elde edilir ki, bu ise aşağıda verilecek gerilmelerin lifin eğilmesinden kaynaklandığını göstermektedir. Kompozitin yapışma (adhesion) mukavemeti direkt olarak bu gerilmelere bağlıdır. Dolayısıyla bu anlamda da gerilme araştırmaları ayrı bir öneme sahiptir.

Sayısal sonuçlara geçmeden önce sözü edilen gerilme ifadelerinin elde edilmesi konusundan kısaca söz edelim. (2.2) ifadelerini seriye açar ve bunları (2.3) ilişkilerinde kullanırsak S yüzeyinin normal vektörünün bileşenlerini aşağıdaki gibi buluruz.

$$n_r = 1 - \varepsilon^2 \frac{(R^2(\delta'(t_3))^2 + (\delta(t_3))^2) \sin^2 \theta + R^2(\delta'(t_3))^2 \cos 2\theta}{2R^2}$$

$$n_\theta = \varepsilon \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R}, \quad n_z = -\varepsilon \delta'(t_3) \cos \theta - \varepsilon^2 \frac{\delta(t_3) \delta'(t_3) \sin^2 \theta}{R} \quad (0.74)$$

Gerilme vektörünün bileşenlerini p_r , p_θ , p_z ile gösterirsek aşağıdaki ilişkileri yazarız:

$$p_{(i)} = \sigma_{(i)r} n_r + \sigma_{(i)\theta} n_\theta + \sigma_{(i)z} n_z, \quad i = r, \theta, z \quad (0.75)$$

Buradan normal gerilmenin

$$\sigma_{nn} = p_r n_r + p_\theta n_\theta + p_z n_z \quad (0.76)$$

şeklinde olan ifadesiyle (2.12) ilişkilerini de dikkate alırsak bu gerilmenin açık ifadesini

$$\sigma_{nn} = \varepsilon \sigma_{rr}^{(k),1} + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{rr}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} \delta(t_3) \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial z} R \delta'(t_3) \cos \theta + 2 \sigma_{r\theta}^{(k),1} \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R} \right. \\ \left. - 2 \sigma_{rz}^{(k),1} \delta'(t_3) \cos \theta + \sigma_{zz}^{(k),0} (\delta'(t_3))^2 \cos^2 \theta \right\} \quad (0.77)$$

olarak elde ederiz. Yüzey denkleminin t_3 'e göre türevini alır bu ifadeyi birimleştirir ve $\mathbf{p}$ vektörü ile skaler çarparsak, $\boldsymbol{\tau}$ doğrultusundaki kayma gerilmesinin açık ifadesini

$$\sigma_{n\tau} = \varepsilon \left(\sigma_{rz}^{(k),1} - \sigma_{zz}^{(k),0} \delta'(t_3) \cos \theta \right) + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{rz}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} \delta(t_3) \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} R \delta'(t_3) \cos \theta \right. \\ \left. + \sigma_{r\theta}^{(k),1} \delta'(t_3) \cos \theta + \sigma_{z\theta}^{(k),1} \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R} - \sigma_{zz}^{(k),1} \delta'(t_3) \cos \theta - \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\delta(t_3) \delta'(t_3) \sin^2 \theta}{R} \right\} \quad (0.78)$$

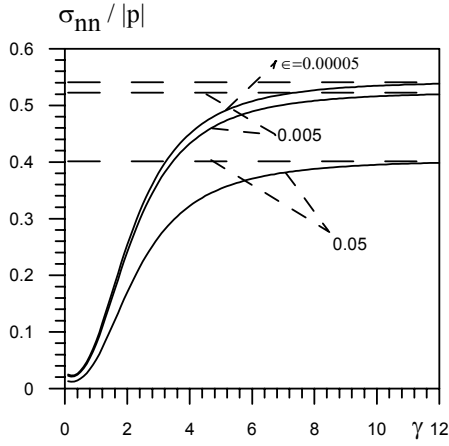
olarak buluruz. Yüzey denkleminin θ 'ya göre türevini alır bu ifadeyi birimleştirir ve $\mathbf{p}$ vektörü ile skaler çarparsak $\mathbf{e}$ doğrultusundaki kayma gerilmesinin açık ifadesini

$$\sigma_{ne} = \varepsilon \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} \delta(t_3) \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial z} R \delta'(t_3) \cos \theta + \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R} \right. \\ \left. - \sigma_{\theta z}^{(k),1} \delta'(t_3) \cos \theta - \sigma_{rr}^{(k),1} \frac{\delta(t_3) \sin \theta}{R} + \sigma_{rz}^{(k),1} \delta'(t_3) \sin \theta - \sigma_{zz}^{(k),0} (\delta'(t_3))^2 \cos \theta \sin \theta \right\} \quad (0.79)$$

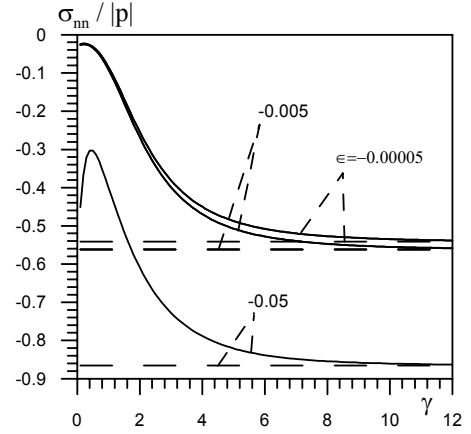
olarak elde ederiz. (Köşker,2002)

Aşağıda bulduğumuz sayısal sonuçlar FORTRAN programlama dili kullanılarak elde edilmiştir. Stabilité kaybı öncesi gerilme yayılımına ait elde edilen sonuçlar Köşker 2002 doktora tezinde yer alan sonuçlara yakınsamaktadır. Aşağıdaki şekillerde düz kesikli çizgiler asimptotları ifade etmektedir.

Sayısal sonuçların incelenmesine geçmeden önce belirtelim ki, ele alacağımız gerilmelerin lif ve matris ara yüzeyindeki yayılımı nitelik bakımından Akbarov ve Guz (1985a) yayınında olduğu gibidir. Yani bu yüzeyin $(\theta = 0, \alpha_3 = \pi/2)$, $(\theta = 0, \alpha_3 = 0)$, $(\theta = \pi/2, \alpha_3 = \pi/2)$ koordinatlarına karşı gelen noktalarında sırası ile σ_{nn} , σ_{nt} ve σ_{ne} gerilmeleri mutlak maksimal değerlerini almaktadırlar. Şimdi yukarıda elde ettiğimiz değerleri göz önüne alarak σ_{nn} , σ_{nt} σ_{ne} gerilmelerinin belirtilen noktalardaki değerlerine basınç ve çekme durumlarında geometrik nonlinearite etkisini problem parametrelerinin bazı değerlerinde inceleyelim. Geometrik nonlinearite etkisini, $\epsilon = p/E^{(3)}$ değerleri aracılığı ile ele alırken; $\kappa = \alpha R = \frac{2\pi}{l} R$, $\gamma = \frac{H}{R}$ parametrelerinin de gerilmeye etkileri incelenecektir Bilindiği üzere geometrik lineer durumda söz konusu gerilmeler için elde edilen sonuçlar çekme ($\epsilon > 0$) ve basınç ($\epsilon < 0$) durumlarında ancak işaret farkı göstermektedir. İncelenen durumda ise çekme ve basınç, sadece işaret farkı değil değerce de belirgin etki yapmaktadır. Söylenenleri Çizelge 2.1’de sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$ ve $\sigma_{ne}/|p|$ ’ler için verilen değerler kanıtlamaktadır. Çizelgedeki değerler $\kappa = 2\pi R/l = 0.5$, $\epsilon = 0.015$, $v^{(1)} = v^{(2)} = v^{(3)} = 0.3$ durumunda $E^{(1)}/E^{(3)}$ ve ϵ ’nin farklı değerlerinde elde edilmiştir ve bu değerler birinci ve ikinci yaklaşımlar çerçevesinde verilmektedir. Ancak $v^{(1)} = v^{(2)} = v^{(3)}$ olmasından dolayı sıfırıncı yaklaşımda bu gerilmeler özdeşlikle sıfıra eşittir. Dolayısı ile bu gerilmelerin tablolardaki değerleri lifin başlangıç eğilmesinden kaynaklanmaktadır.

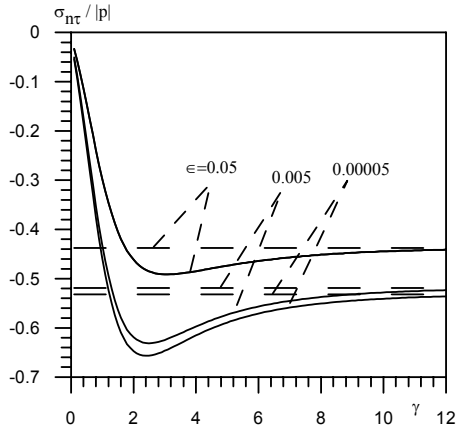


a) Çekme

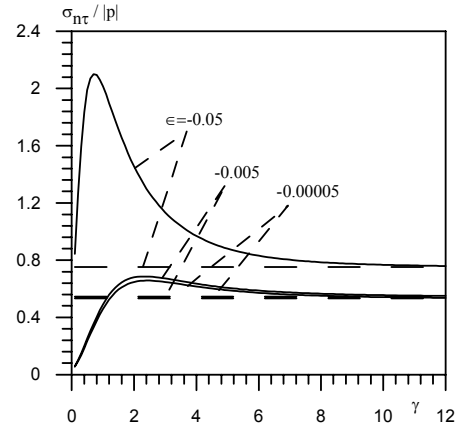


b) Basınç

Şekil 2.2 $E^{(1)}/E^{(2)} = 50$ $E^{(3)}/E^{(2)} = 1/50$ $\kappa = 0.5$ $\varepsilon = 0.015$ değerlerinde $\sigma_{nn}/|p|$ 'nin, aynı parametre değerlerinde sarılı olmayan lif değerlerine yakınsaması.

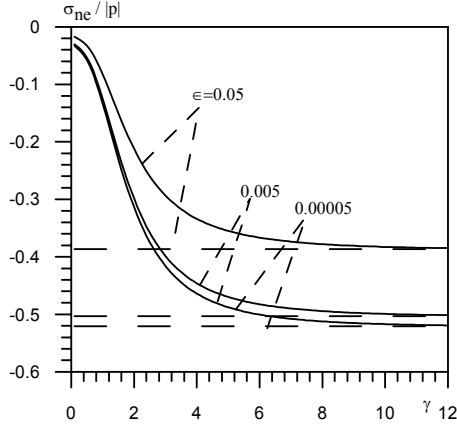


a) Çekme

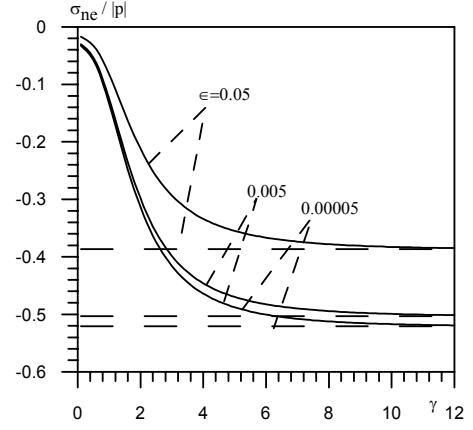


b) Basınç

Şekil 2.3 $E^{(1)}/E^{(2)} = 50$ $E^{(3)}/E^{(2)} = 1/50$ $\kappa = 0.5$ $\varepsilon = 0.015$ değerlerinde $\sigma_{nt}/|p|$ 'nin, aynı parametre değerlerinde sarılı olmayan lif değerlerine yakınsaması.



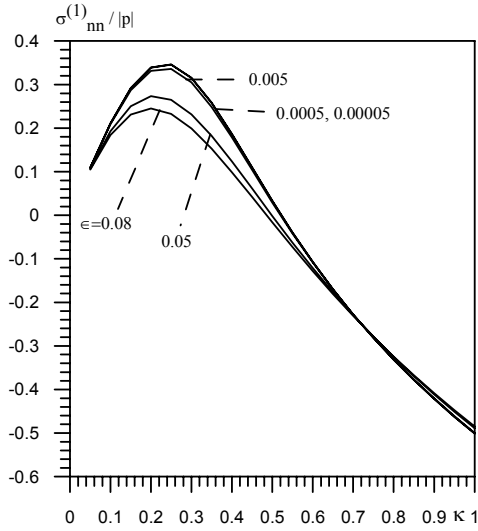
a) Çekme



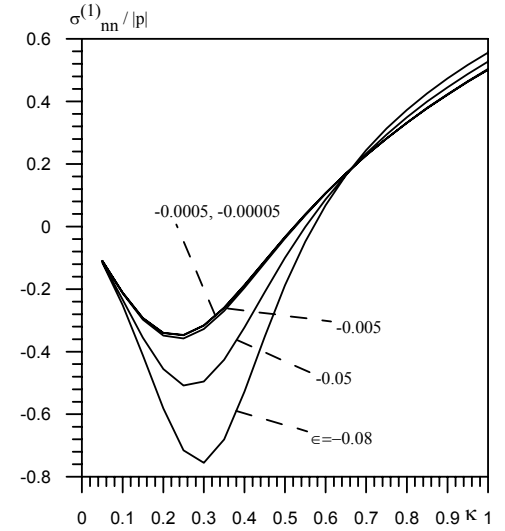
b) Basınç

Şekil 2.4 $\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} = 50$ $\frac{E^{(3)}}{E^{(2)}} = \frac{1}{50}$ $\kappa = 0.5$ $\varepsilon = 0.015$ değerlerinde $\sigma_{ne} / |p|$ 'nin, aynı

parametre değerlerinde sarılı olmayan lif değerlerine yakınsaması.



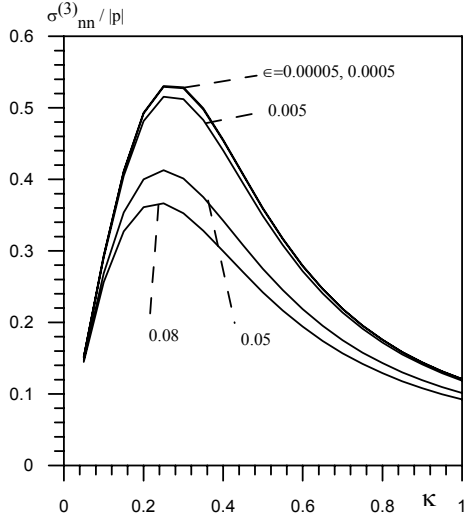
a) Çekme



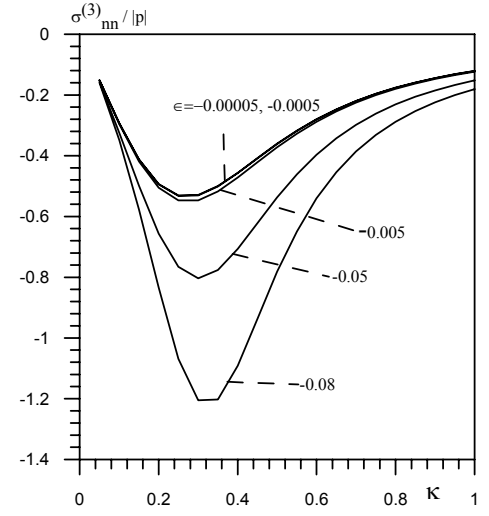
b) Basınç

Şekil 2.5. Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ε

değerlerinde $\sigma_{nn}^{(1)} / |p|$ ile κ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 0.015$)



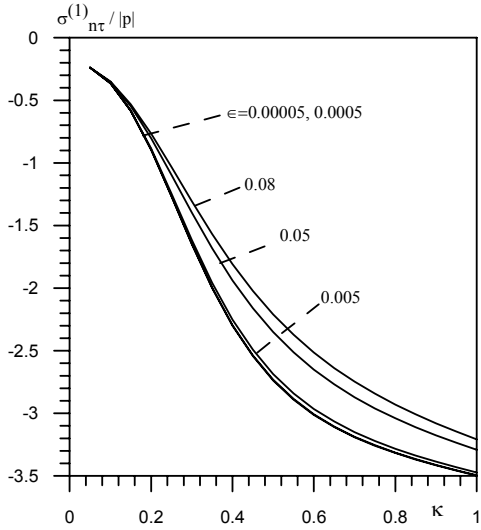
a) Çekme



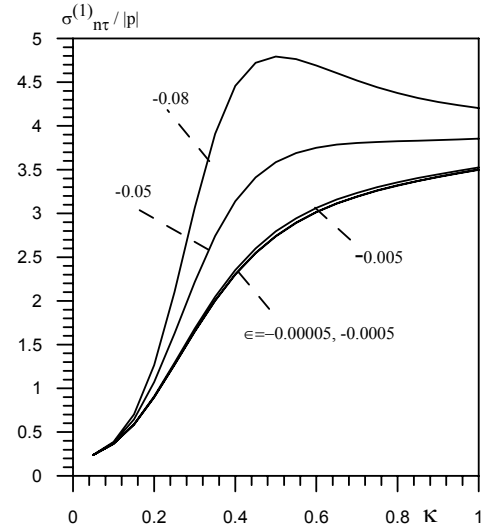
b) Basınç

Şekil 2.6 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{nn}^{(3)} / |p|$ ile κ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \epsilon = 0.015$)



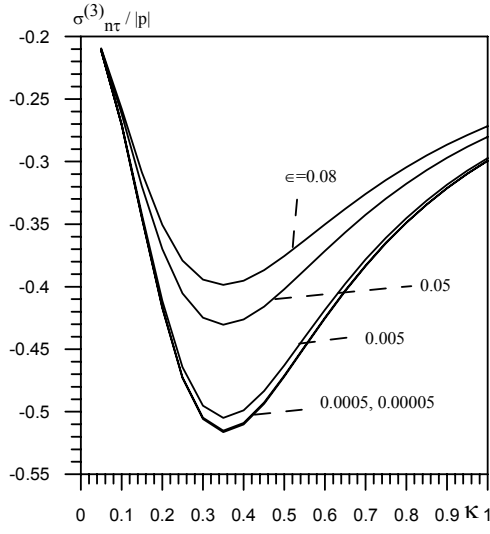
a) Çekme



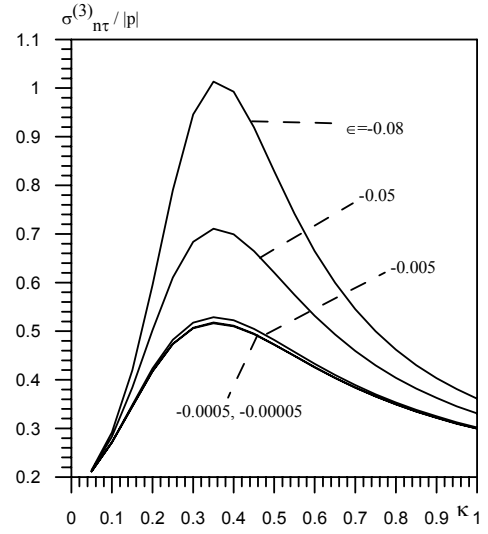
b) Basınç

Şekil2.7 Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{n\tau}^{(1)} / |p|$ ile κ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50, \frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40, \gamma = 0.5, \epsilon = 0.015$)



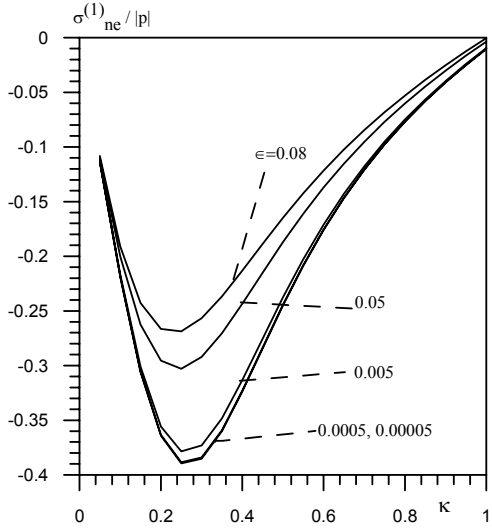
a) Çekme



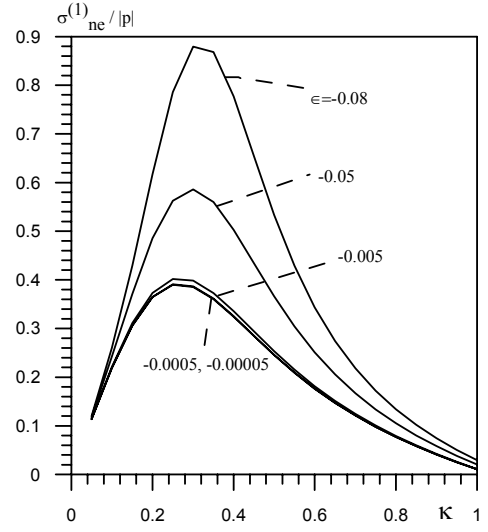
b) Basınç

Şekil 2.8 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{nt}^{(3)} / |p|$ ile κ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\gamma = 0.5$, $\epsilon = 0.015$)



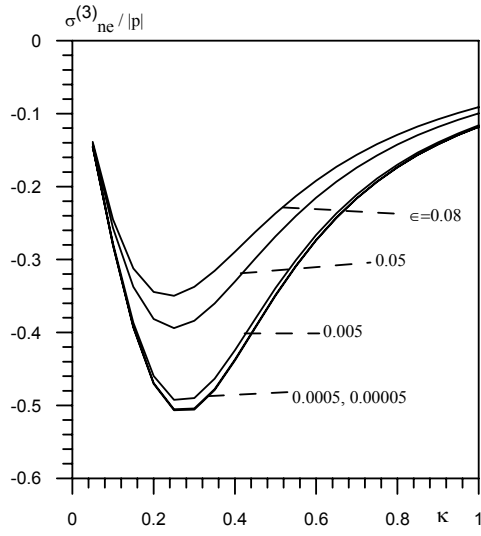
a) Çekme



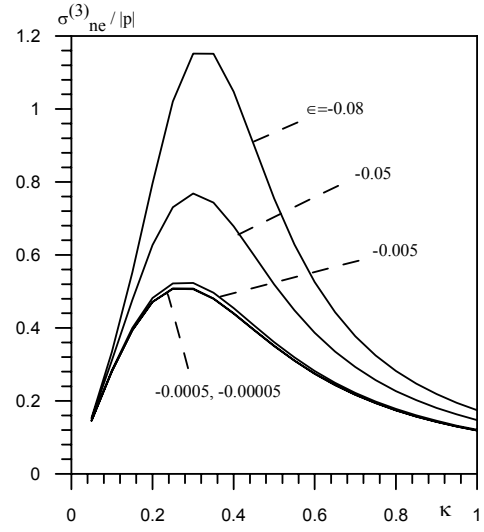
b) Basınç

Şekil 2.9 Lif -geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{ne}^{(1)} / |p|$ ile κ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\gamma = 0.5$, $\epsilon = 0.015$)



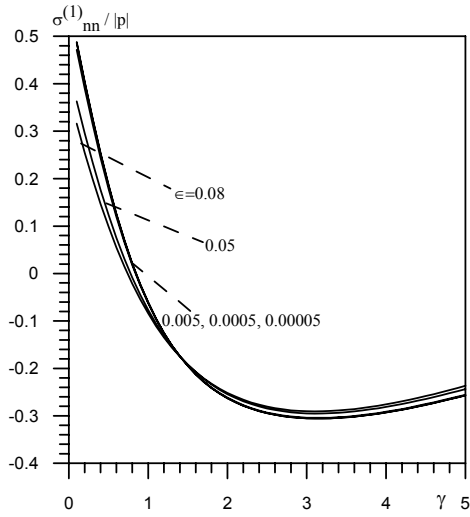
a) Çekme



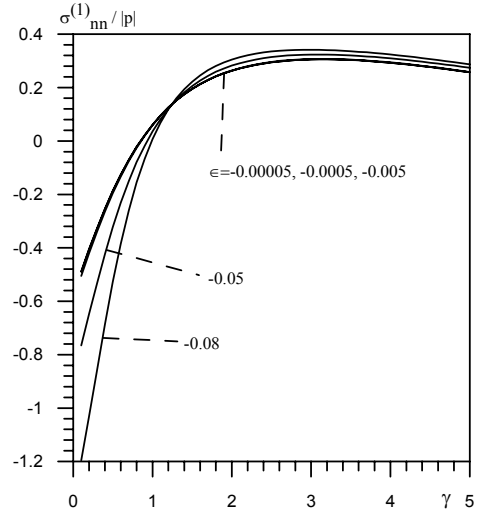
b) Basınç

Şekil 2.10 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{ne}^{(3)} / |p|$ ile κ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\gamma = 0.5$, $\epsilon = 0.015$)



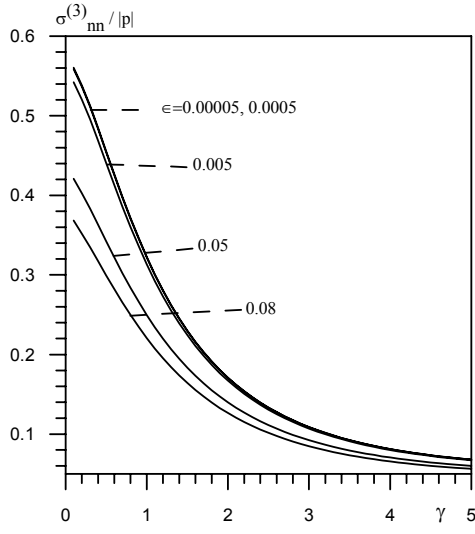
a) Çekme



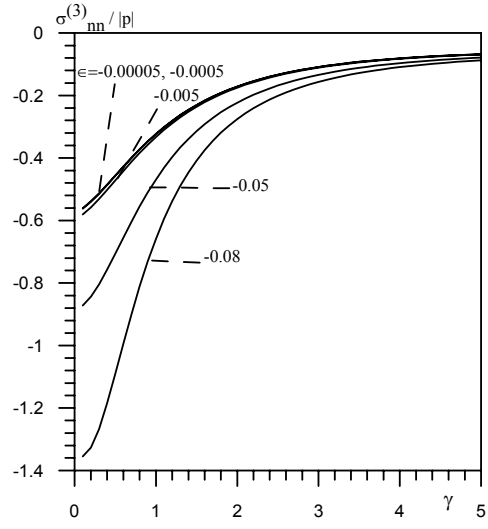
b) Basınç

Şekil 2.11 Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{nn}^{(1)} / |p|$ ile κ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\gamma = 0.5$, $\epsilon = 0.015$)



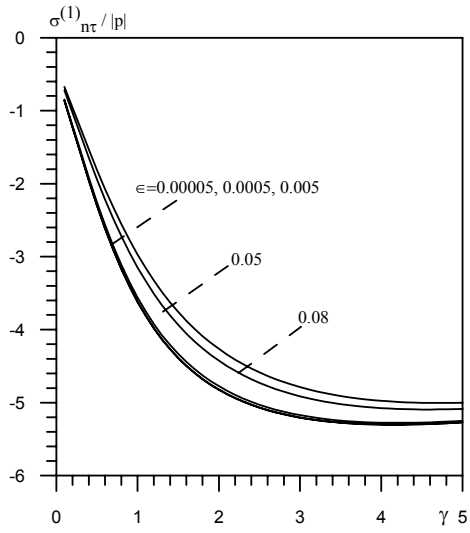
a) Çekme



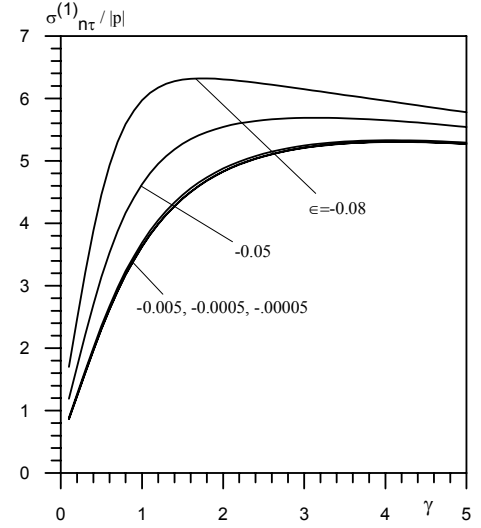
b) Basınç

Şekil 2.12 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{nn}^{(3)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = 0.015$)



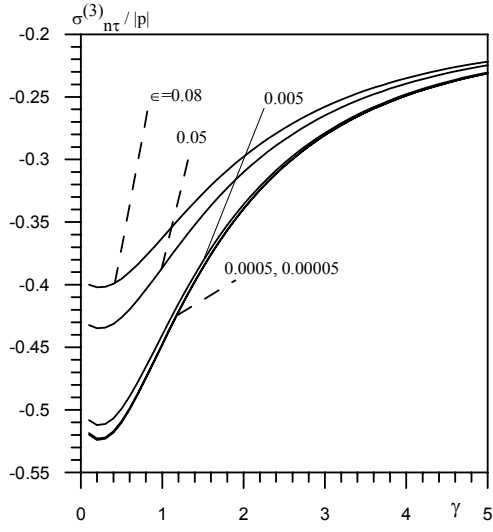
a) Çekme



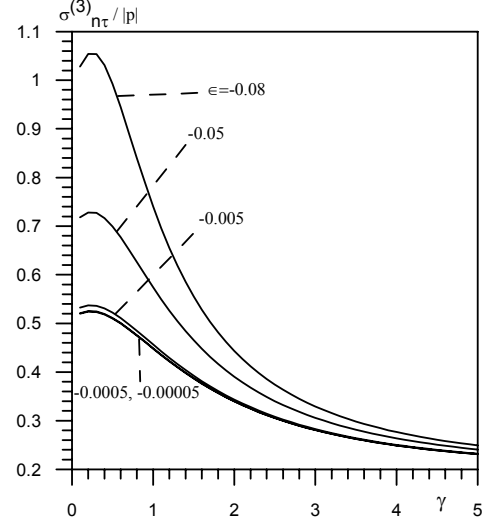
b) Basınç

Şekil 2.13....Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{nt}^{(1)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = 0.015$)



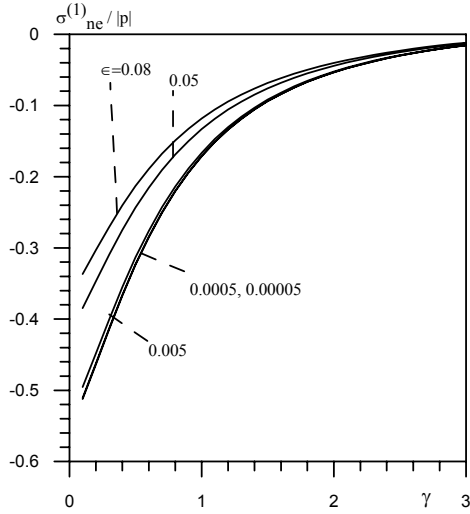
a) Çekme



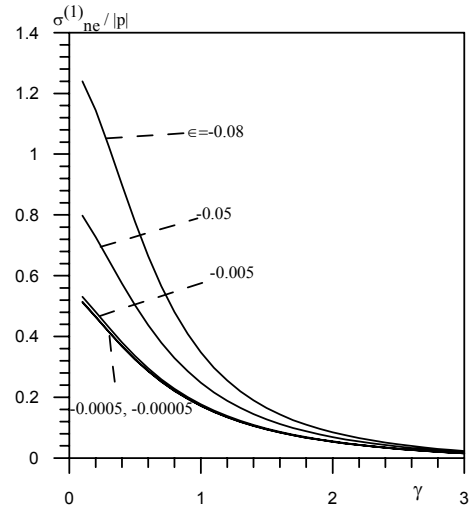
b) Basınç

Şekil 2.14 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{nt}^{(3)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = 0.015$)



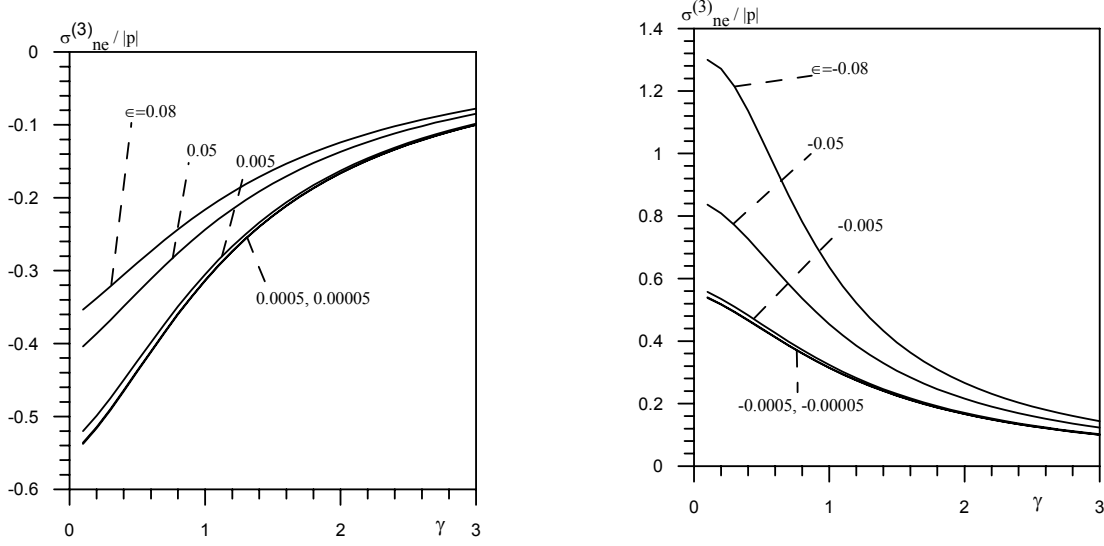
a) Çekme



b) Basınç

Şekil 2.15 Lif-geçiş malzemesi arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (b) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{ne}^{(1)} / |p|$ ile γ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = 0.015$)



Şekil 2.16 Geçiş malzemesi-matris arakesit yüzeyinde çekme (a) ve basınçta (a) çeşitli ϵ

değerlerinde $\sigma_{ne}^{(1)}/|p|$ ile γ arasındaki ilişki ($\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = 0.015$)

Şekil 2.2, 2.3, 2.4'ler aynı parametre değerlerinde $\frac{H}{R}$ 'nin büyümesi ile (Köşker 2002) kaynağındaki verilere ulaşıldığını göstermektedir. Burada kesikli çizgilerle verilen asimptotlar kaynaktaki değerleri ifade etmektedir.

Şekil 2.5, 2.6 , 2.7, 2.8, 2.9, 2.10' de $\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\gamma = 0.5$, $\epsilon = 0.015$ parametre değerlerinde sırası ile $\sigma_{nn}^{(1)}/|p|$, $\sigma_{nn}^{(3)}/|p|$, $\sigma_{nt}^{(3)}/|p|$, $\sigma_{nt}^{(1)}/|p|$, $\sigma_{ne}^{(1)}/|p|$, $\sigma_{ne}^{(3)}/|p|$ ile κ arasındaki ilişki görülmektedir. Aynı şekilde Şekil 2.11, 2.12 , 2.13, 2.14, 2.15, 2.16' da $\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}} = 50$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}} = 40$, $\kappa = 0.4$, $\epsilon = 0.015$ parametre değerlerinde sırası ile $\sigma_{nn}^{(1)}/|p|$, $\sigma_{nn}^{(3)}/|p|$, $\sigma_{nt}^{(3)}/|p|$, $\sigma_{nt}^{(1)}/|p|$, $\sigma_{ne}^{(1)}/|p|$ ile γ arasındaki ilişki verilmiştir.

Grafiklerden görüldüğü gibi, $|\epsilon|$ değerleri küçüldükçe ele alınan gerilmelerin değerleri geometrik lineer durumundaki (Akbarov ve Guz, 1985a, 2000) değerlere yaklaşmakta ve

$|\epsilon| = 5.10^{-5}$ durumunda ise çakışmaktadır.

Çizelge 2.1 $\epsilon = 0.015$, $\kappa = 0.4$, $\gamma = 0.5$ değerlerinde $\sigma_{nt}/|p|$ (Bu değerler büyük olduğundan bunları incelemek yeterli görülmüştür.

$\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}}$	$\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}}$	Yak No	ϵ							
			Çekme				Basınç			
			5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
50 (1-2)	10	1	-1.098	-1.096	-1.079	-0.951	1.098	1.100	1.118	1.399
		2	-1.098	-1.096	-1.079	-0.951	1.098	1.100	1.118	1.399
	20	1	-1.545	-1.542	-1.517	-1.328	1.546	1.548	1.576	2.013
		2	-1.545	-1.542	-1.517	-1.328	1.546	1.548	1.576	2.013
	30	1	-1.942	-1.938	-1.903	-1.652	1.942	1.946	1.984	2.591
		2	-1.942	-1.938	-1.903	-1.652	1.942	1.946	1.984	2.591
	40	1	-2.299	-2.295	-2.251	-1.938	2.300	2.305	2.353	3.139
		2	-2.299	-2.295	-2.251	-1.938	2.300	2.305	2.353	3.139
50 (2-3)	10	1	-0.468	-0.467	-0.460	-0.403	0.468	0.469	0.477	0.599
		2	-0.468	-0.467	-0.460	-0.403	0.468	0.469	0.477	0.599
	20	1	-0.487	-0.486	-0.477	-0.41	0.487	0.488	0.497	0.637
		2	-0.487	-0.486	-0.477	-0.41	0.487	0.488	0.497	0.637
	30	1	-0.499	-0.498	-0.489	-0.421	0.500	0.501	0.511	0.670
		2	-0.499	-0.498	-0.489	-0.421	0.500	0.501	0.511	0.670
	40	1	-0.510	-0.509	-0.498	-0.426	0.510	0.511	0.522	0.699
		2	-2.299	-2.295	-2.251	-1.938	2.300	2.305	2.353	3.139

Yine tablolardan, $|\epsilon| = 5.10^{-5}$ durumunda gerilmelerin çekme ve basınçtaki mutlak değerleri hemen hemen aynı olduğu izlenebilmektedir. Bundan başka Çizelge 2.1 de verilen sonuçların karşılaştırılması gösterir ki, çekme durumlarında $|\epsilon|$ değerlerinin artması ile gerilmelerin mutlak değeri küçülmekte, basınç durumunda ise büyümektedir. Dolayısı ile ele alınan gerilmelerin hesaplanmasında geometrik nonlineeritenin göz önüne alınmasının önemi görülmektedir.

Çizelgelerde, birinci ve ikinci yaklaşımlarda elde edilen sonuçların karşılaştırılmasında, uygulanan çözüm yönteminin sonuçların yakınsaklığı açısından çok etkili bir yöntem

olduğunu göstermektedir. Belirtelim ki, Çizelge 2.1’de verilen sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılan ϵ değerleri tek lifin sonsuz matristeki iç stabilite kaybına uygun gelen ϵ_{cr} değerlerinden (Babich, 1973; Guz, 1990) çok küçük yani $|\epsilon| \ll |\epsilon_{cr}|$ olarak alınmıştır.

Grafiklerden de görüldüğü gibi geometrik nonlineeritenin etkisi basınçta çekmeye göre daha büyüktür. σ_{nt} kayma gerilmesinin parametrelere göre değişimi incelenen diğer gerilmelere göre daha belirgindir. Bu duruma paralel olarak σ_{nt} gerilmesinin daha etkili olduğunu söyleyebiliriz. Gerilmeler ile κ ve $\gamma = \frac{H}{R}$ parametreleri arasındaki ilişki doğrusal değildir. $\frac{H}{R}$ değeri büyüdükçe ele aldığımız malzeme sarılı olmayan periyodik eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik ortam gibi davranmaktadır.

3. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Tezde yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

1. Akbarov ve Guz (2000) yaklaşımı sonsuzda lif yönünde yoğunluğu p olan düzgün yayılmış normal kuvvetler etkisindeki düşük yoğunluklu periyodik eğrilikli sarılı lifler içeren sonsuz elastik ortamda gerilme dağılımına geometrik nonlinearitenin etkisinin incelenmesine uygun olarak geliştirilmiştir. Malzemede düşük yoğunluklu lif olması, lifler arasındaki etkileşimin ihmal edilebildiği anlamında kullanılmış ve lifin başlangıç periyodik eğrilik genliğinin (amplitudun) eğrilik periyoduna göre küçük olduğu kabul edilmiştir.

2. Uygun sınır-değer problemlerinin matematiksel formülasyonu, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin kesin geometrik nonlinear denklemlerinden yararlanılarak yapılmıştır.

3. Formülasyonu yapılmış sınır-değer problemlerinin çözümü için Akbarov ve Guz (1985c, 2000)'de verilmiş sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Buna göre aranan büyüklükler, eğrilik derecesini ifade eden küçük parametreye göre seri halinde yazılmıştır. Sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşıma ait kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı ve uygun sınır ve temas koşulları elde edilmiştir. Birinci ve ikinci yaklaşım için elde edilen lineer denklem sistemleri çözülmüştür.

4. Periyodik eğrilikli geçiş malzemeli tek lif durumu için lif-geçiş malzemesi-matris arayüzeyinde, sarılı tek lif durumu için ise lif-örtük malzemesi, örtük malzemesi-matris arayüzeylerinde etki gösteren normal ve kayma gerilmeleri için çok sayıda sayısal sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçların yorumları yapılmıştır. Bu gerilmelere geometrik nonlinearitenin etkisi detaylı bir biçim de incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Akbarov, S.D. (1998), "On the Three –Dimensinal Stability Loss Problems of Elements of Structures of Viscoelastik Composite Materials", *Mechanics of Composite Materials*, 34, 537-544.

Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985a), "Stress State of a Fiber Composite with Curved Structures with a Low Fiber Concentration", *Soviet Appl. Mech.*, 21(6), 560-565.

Bolotin, V.V. ve Novichkov, Yu.N. (1980), *Mechanics of Multilayer Structures*, Mashinostroenie, Moscow, 376 pp. (Rusça).

Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2004), "Mechanics of Curved Composites and Some Related Problems for Structral Members," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11:445-515.

Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985a), "Stress State of a Fiber Composite with Curved Structures with a Low Fiber Concentration", *Soviet Appl. Mech.*, 21(6), 560-565.

Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985c), "Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites with Curved Structures", *Soviet Appl. Mech.*, 20(9), 777-790.

Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2000), *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academic Publishers, 464pp.

Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2002), "Mechanics of Curved Composites (Piecewise Homogeneous Body Modely)," *Int. Appl. Mech.* 38, No: 12, 1415-1439.

Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2004), "Mechanics of Curved Composites and Some Related Problems for Structral Members," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11:445-515.

Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2001), "Fiber Bucling in a Viscoelastic Matrix", *Mechanics of Composite Materials*, Vol 37, No:4, 299-306.

Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2003a), "On a Stresss Analysis in the Infinite Elastic Body with Two Neighbouring Curved Fibers", *Composites Part B*: 34 (2003) 143-150.

Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2003b), "Influence of the Interaction Two Neighbouring Curved Fibers", *Composites Part B: Vol 34 No:2* 143-150.

Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2003c), "Stress Distribution Caused by Anti-Phase Periodical Curving of Two Neighbouring Fibers in a Composite Materials", *European Journal of Mechanics A/Solids*, No:22 (2003), 243-256.

Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2004), "Internal Stability Loss of Two Neighboring Fibers in a iscoelastic Matrix ", *Internal Journal of Engineering Science*, No: 42 (2004), 1847-1873.

Akbarov, S.D., Cilli, A. ve Guz, A.N. (1999), "The Theoretical Strength Limit in compression of Viscoelastic Layered Composite Materials", *Composites Part B: Engineering*, 30, 465-472.

Akbarov, S.D., Guz A.N. ve Cherekov, M.A. (1982), "Stability of Two Fibers in the Elastic Matrix at Finite Precritical Deformations ", *Mech Compos Mater.*, 2, 42-51a.

- Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioğlu N. (1997), "On the Fracture of The Unidirectional Composites in Compression", *Int. J. Engng. Sci*, 35(12/13), 1115-1136.
- Akbarov, S.D.,Yahnioğlu N. ve Kutug, Z. (2001), "On the Three Dimensional Stability Loss Problem of the Viscoelastic Composite Plate", *Int. J. Engr. Science*, 39, 1443-1457.
- Akbarov, S.D., Kosker, R. ve Simsek, K. (2005), "Stress Dustribution in an Elastic Body with a Locally Curved Fiber in a Geometrical Nonlinear Statement", *Mechanics of Composite Materials*, Vol 41, No:4, 291-302
- Babaev, M. S., Guz, A.N. ve Cherekov, M.A. (1985), "Stability of the Row of Fibers in the Elastic Matrix at Small Precritical Deformations ", *Soviet Appl. Mech.*, 21(5), 27-34.
- Babich, I.Yu. ve Guz, A.N. (1992), "Stability of a Fibrous Composites", *Appl. Mech. Rev.*, 45(2), 60-80.
- Babich, I.Yu., Guz, A.N. ve Chekhov, V.N. (2001), "A Three Dimensional Theory of Stability of a Fibrous", *Int. Appl. Mech. Rev.*, 37(9), 1103-1141.
- Babich, I.Yu., Guz, A.N. ve Shul'ga, N.A. (1982), "Study of the Dynamics and Stability of Composite Materials in a Three DimensionalFormulation ",*Soviet Appl. Mech.*, 18(1), 3-27.
- Babich, I.Yu., Garashchuk, I.N ve Guz, A.N. (1983), "Stability of a Fiber in an Elastic Matrix with a Inhomogeneous Prectical State", *Soviet Appl. Mech.*, 19(1), 21-27.
- Biezeno, C.B. ve Hencky, H. (1930), " On the General Theory of Elastic Stability ", *K Akad Wet Amsterdam Proc.* 32, 444-56.
- Biot, M.A. (1965), *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, New York, 504 pp.
- Ersoy, Halit Yaşa (2001), *Kompozit Malzeme, Literatür Yayınları*
- Köşker R. (2002) "Tek Yönlü Lifli Elastik ve Viskoelastik Kompozitlerin İç Stabilitesi ve Gerilme Durumuna Ait Bazı problemler "
- Kosker, R. and Uçan, Y. (2004), "On the Normal Stresses in the Elastikc Body with Periodical Curved Row Fibres", *Sigma* No: 2004/4, 294-304.
- Şimşek K. (2006) "Yerel Eğrilikli Tek Lif ve Sarılı Tek Lif İçeren Sonsuz Ortamların gerilme Durumuna ait Nonlineer Sınır Değer Problemleri."
- Watson, G.N., 1944. *A Treatise on the Theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, England 753pp.

İNTERNET KAYNAKLARI

- [1] http://www.teknolojikarastirmalar.com/eegitim/yapi_malzemesi/icerik/kompozit.htm#KOMPOZ%DDT%20MALZEMELER%DDN%20%D6ZELL%DDKLE R%DD
- [2] http://www.gmcomposite.com/index.php?option=com_content&task=view&id=&Itemid=59

EKLER

Ek 1 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri

Ek 1 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri

(0.65) fonksiyonların açık ifadeleri:

$$\begin{aligned}
 \overline{A}_i^{(1)} F_{\text{m(i)}}^{(1)} = & \frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left(A_1^{(1)} \left(\frac{4}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(1)} \kappa) - \frac{2\xi_1^{(1)}}{\kappa} (I_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(1)} \kappa)) + \frac{(\xi_1^{(1)})^2}{2} (3I_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right) \right) + \\
 & A_2^{(1)} \left(-\frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)}}{\kappa^2} (I_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(1)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(1)} (\xi_2^{(1)})^2}{4\kappa} (3I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(1)} \kappa)) + \right. \\
 & \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^3}{8} (3I_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + 4I_2(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_4(\xi_2^{(1)} \kappa)) + \frac{2\lambda^{(1)}}{\kappa^3} I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) - \\
 & \left. \frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1,0)} \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} (I_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(1)} \kappa)) \right) + \\
 & A_3^{(1)} \left(-\frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)}}{\kappa^2} (I_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(1)} (\xi_3^{(1)})^2}{4\kappa} (3I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \right. \\
 & \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^3}{8} (3I_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + 4I_2(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_4(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \frac{2\lambda^{(1)}}{\kappa^3} I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) - \\
 & \left. \frac{\lambda^{(2)} \xi_3^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2,0)} \right]}{2(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} (I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{A}_i^{(2)} F_{\text{m(i)}}^{(2)} = & A_1^{(2)} \left(\frac{4}{\kappa^2} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{2\xi_1^{(2)}}{\kappa} (I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_1^{(2)})^2}{2} (3I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right) + \\
 & A_2^{(2)} \left(-\frac{\lambda^{(2)} \xi_2^{(2)}}{\kappa^2} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(2)} (\xi_2^{(2)})^2}{4\kappa} (3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \right. \\
 & \left. \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^3}{8} (3I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + 4I_2(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_4(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \frac{2\lambda^{(2)}}{\kappa^3} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(I_0(\xi_2^{(2)}\kappa) + I_2(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) \Bigg) + \\
& A_3^{(2)} \left(-\frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}}{\kappa^2} \left(I_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_2(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \frac{\lambda^{(2)} \left(\xi_3^{(2)} \right)^2}{4\kappa} \left(3I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_3(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \right. \\
& \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^3}{8} \left(3I_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + 4I_2(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_4(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \frac{2\lambda^{(2)}}{\kappa^3} I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) - \\
& \left. \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^3}{8} \left(3I_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + 4I_2(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_4(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \frac{2\lambda^{(2)}}{\kappa^3} I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \\
& A_4^{(2)} \left(\frac{\mu^{(2)} 4}{\kappa^3} K_1(\xi_1^{(2)}\kappa) + \frac{\mu^{(2)} 2\xi_1^{(2)}}{\kappa^2} \left(K_0(\xi_1^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_1^{(2)}\kappa) \right) + \frac{\mu^{(2)} \left(\xi_1^{(2)} \right)^2}{2\kappa} \left(3K_1(\xi_1^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_1^{(2)}\kappa) \right) \right) + \\
& A_5^{(2)} \left(\frac{\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)}}{\kappa^2} \left(K_0(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) + \frac{\lambda^{(2)} \left(\xi_2^{(2)} \right)^2}{4\kappa} \left(3K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) \right. \\
& - \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^3}{8} \left(3K_0(\xi_2^{(2)}\kappa) + 4K_2(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_4(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) + \frac{2\lambda^{(2)}}{\kappa^3} K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) \\
& \left. + \frac{\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(K_0(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) \right) + \\
& A_6^{(2)} \left(\frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}}{\kappa^2} \left(K_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \frac{\lambda^{(2)} \left(\xi_3^{(2)} \right)^2}{4\kappa} \left(3K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) \right. \\
& - \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^3}{8} \left(3K_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + 4K_2(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_4(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \frac{2\lambda^{(2)}}{\kappa^3} K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \\
& \left. + \frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(K_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\mathbf{A}}_j^{(3)} \mathbf{F}_{\text{mr}(j)}^{(3)} = \\
& \mathbf{A}_1^{(3)} \left(\frac{\mu^{(3)} 4}{\kappa^3} \mathbf{K}_1(\xi_1^{(3)} \kappa) + \frac{\mu^{(3)} 2 \xi_1^{(3)}}{\kappa^2} (\mathbf{K}_0(\xi_1^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_1^{(3)} \kappa)) + \frac{\mu^{(3)} (\xi_1^{(3)})^2}{2 \kappa} (3 \mathbf{K}_1(\xi_1^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_1^{(3)} \kappa)) \right) + \\
& \mathbf{A}_2^{(3)} \left(\frac{\lambda^{(3)} \xi_2^{(3)}}{\kappa^2} (\mathbf{K}_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_2^{(3)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(3)} (\xi_2^{(3)})^2}{4 \kappa} (3 \mathbf{K}_1(\xi_2^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_2^{(3)} \kappa)) \right. \\
& \quad - \frac{(\lambda^{(3)} + 2 \mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^3}{8} (3 \mathbf{K}_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + 4 \mathbf{K}_2(\xi_2^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_4(\xi_2^{(3)} \kappa)) + \frac{2 \lambda^{(3)}}{\kappa^3} \mathbf{K}_1(\xi_2^{(3)} \kappa) \\
& \quad \left. + \frac{\lambda^{(3)} \xi_2^{(3)} \left[(\lambda^{(3)} + 2 \mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{2 (\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} (\mathbf{K}_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_2^{(3)} \kappa)) \right) + \\
& \mathbf{A}_3^{(3)} \left(\frac{\lambda^{(3)} \xi_3^{(3)}}{\kappa^2} (\mathbf{K}_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_3^{(3)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(3)} (\xi_3^{(3)})^2}{4 \kappa} (3 \mathbf{K}_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_3^{(3)} \kappa)) \right. \\
& \quad - \frac{(\lambda^{(3)} + 2 \mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^3}{8} (3 \mathbf{K}_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + 4 \mathbf{K}_2(\xi_3^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_4(\xi_3^{(3)} \kappa)) + \frac{2 \lambda^{(3)}}{\kappa^3} \mathbf{K}_1(\xi_3^{(3)} \kappa) \\
& \quad \left. + \frac{\lambda^{(3)} \xi_3^{(3)} \left[(\lambda^{(3)} + 2 \mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{2 (\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} (\mathbf{K}_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_3^{(3)} \kappa)) \right) \\
& \overline{\mathbf{A}}_i^{(1)} \mathbf{F}_{\text{tr}(i)}^{(1)} = \\
& \mathbf{A}_1^{(1)} \left(\frac{\mu^{(1)} 2}{\kappa^3} \mathbf{I}_1(\xi_1^{(1)} \kappa) - \frac{\mu^{(1)} \xi_1^{(1)}}{\kappa^2} (\mathbf{I}_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + \mathbf{I}_2(\xi_1^{(1)} \kappa)) + \frac{\mu^{(1)} (\xi_1^{(1)})^2}{4 \kappa} (3 \mathbf{I}_1(\xi_1^{(1)} \kappa) + \mathbf{I}_3(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu^{(1)} (\xi_1^{(1)})^3}{8} (3 \mathbf{I}_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + 4 \mathbf{I}_2(\xi_1^{(1)} \kappa) + \mathbf{I}_4(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right) + \\
& \mathbf{A}_2^{(1)} \left(- \frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} \mathbf{I}_1(\xi_2^{(1)} \kappa) - \frac{2 \xi_2^{(1)}}{\kappa} (\mathbf{I}_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + \mathbf{I}_2(\xi_2^{(1)} \kappa)) + \frac{(\xi_2^{(1)})^2}{2} (3 \mathbf{I}_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + \mathbf{I}_3(\xi_2^{(1)} \kappa)) \right) \right) + \\
& \mathbf{A}_3^{(1)} \left(- \frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} \mathbf{I}_1(\xi_3^{(1)} \kappa) - \frac{2 \xi_3^{(1)}}{\kappa} (\mathbf{I}_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + \mathbf{I}_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(1)})^2}{2} (3 \mathbf{I}_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + \mathbf{I}_3(\xi_3^{(1)} \kappa)) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{i}}^{(2)} \mathbf{F}_{\text{tr}(\mathbf{i})}^{(2)} =$$

$$\mathbf{A}_1^{(2)} \left(\frac{\mu^{(2)} 2}{\kappa^3} \mathbf{I}_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{\mu^{(2)} \xi_1^{(2)}}{\kappa^2} (\mathbf{I}_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + \mathbf{I}_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) + \frac{\mu^{(2)} (\xi_1^{(2)})^2}{4\kappa} (3\mathbf{I}_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + \mathbf{I}_3(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right. \\ \left. - \frac{\mu^{(2)} (\xi_1^{(2)})^3}{8} (3\mathbf{I}_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + 4\mathbf{I}_2(\xi_1^{(2)} \kappa) + \mathbf{I}_4(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right) +$$

$$\mathbf{A}_2^{(2)} \left(-\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} \mathbf{I}_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{2\xi_2^{(2)}}{\kappa} (\mathbf{I}_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + \mathbf{I}_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_2^{(2)})^2}{2} (3\mathbf{I}_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + \mathbf{I}_3(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$\mathbf{A}_3^{(2)} \left(-\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} \mathbf{I}_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{2\xi_3^{(2)}}{\kappa} (\mathbf{I}_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + \mathbf{I}_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(2)})^2}{2} (3\mathbf{I}_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + \mathbf{I}_3(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$\mathbf{A}_4^{(2)} \left(\mu^{(2)} \left(\frac{2}{\kappa^3} \mathbf{K}_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + \frac{\xi_1^{(1)}}{\kappa^2} (\mathbf{K}_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_1^{(1)})^2}{4\kappa} (3\mathbf{K}_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\xi_1^{(2)})^3}{8} (3\mathbf{K}_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + 4\mathbf{K}_2(\xi_1^{(2)} \kappa) + \mathbf{K}_4(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$\mathbf{A}_5^{(2)} \left(-\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} \mathbf{K}_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + \frac{2\xi_2^{(2)}}{\kappa} (\mathbf{K}_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_2^{(2)})^2}{2} (3\mathbf{K}_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$\mathbf{A}_6^{(2)} \left(-\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} \mathbf{K}_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + \frac{2\xi_3^{(2)}}{\kappa} (\mathbf{K}_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(2)})^2}{2} (3\mathbf{K}_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$\overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{j}}^{(3)} \mathbf{F}_{\text{tr}(\mathbf{j})}^{(3)} =$$

$$\mathbf{A}_1^{(3)} \left(\mu^{(3)} \left(\frac{2}{\kappa^3} \mathbf{K}_1(\xi_1^{(3)} \kappa) + \frac{\xi_1^{(3)}}{\kappa^2} (\mathbf{K}_0(\xi_1^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_1^{(3)} \kappa)) + \frac{(\xi_1^{(3)})^2}{4\kappa} (3\mathbf{K}_1(\xi_1^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_1^{(3)} \kappa)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\xi_1^{(3)})^3}{8} (3\mathbf{K}_0(\xi_1^{(3)} \kappa) + 4\mathbf{K}_2(\xi_1^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_4(\xi_1^{(3)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$\mathbf{A}_2^{(3)} \left(-\frac{\mu^{(3)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} \mathbf{K}_1(\xi_2^{(3)} \kappa) + \frac{2\xi_2^{(3)}}{\kappa} (\mathbf{K}_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_2^{(3)} \kappa)) + \frac{(\xi_2^{(3)})^2}{2} (3\mathbf{K}_1(\xi_2^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_2^{(3)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$\mathbf{A}_3^{(3)} \left(-\frac{\mu^{(3)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} \mathbf{K}_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + \frac{2\xi_3^{(3)}}{\kappa} (\mathbf{K}_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_2(\xi_3^{(3)} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(3)})^2}{2} (3\mathbf{K}_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + \mathbf{K}_3(\xi_3^{(3)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$A_3^{(3)} \left(-\frac{\mu^{(3)}}{\kappa} \left(\frac{4}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + \frac{2\xi_3^{(3)}}{\kappa} (K_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(3)} \kappa)) + \frac{(\xi_3^{(3)})^2}{2} (3K_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(3)} \kappa)) \right) \right)$$

$$\bar{A}_i^{(1)} F_{tt(i)}^{(1)} =$$

$$A_1^{(1)} \left(\frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left(\frac{2}{\kappa} I_1(\xi_1^{(1)} \kappa) - \xi_1^{(1)} (I_0(\xi_1^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(1)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$A_2^{(1)} \left(\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \xi_2^{(1)}}{2\kappa} (I_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(1)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(1)} (\xi_2^{(1)})^2}{4} (3I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(1)} \kappa)) -$$

$$\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) - \frac{\lambda^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) +$$

$$A_3^{(1)} \left(\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \xi_3^{(1)}}{2\kappa} (I_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(1)} (\xi_3^{(1)})^2}{4} (3I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(1)} \kappa)) -$$

$$\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) - \frac{\lambda^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} \right]}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) \right)$$

$$\bar{A}_i^{(2)} F_{tt(i)}^{(2)} =$$

$$A_1^{(2)} \left(\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left(\frac{2}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \xi_1^{(2)} (I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right) \right) +$$

$$A_2^{(2)} \left(\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \xi_2^{(2)}}{2\kappa} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) + \frac{\lambda^{(2)} (\xi_2^{(2)})^2}{4} (3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa)) -$$

$$\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{\kappa^2} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& A_3^{(2)} \left(\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\xi_2^{(2)}}{2\kappa} (I_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_2(\xi_3^{(2)}\kappa)) + \frac{\lambda^{(2)}(\xi_3^{(2)})^2}{4} (3I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_3(\xi_3^{(2)}\kappa)) - \right. \\
& \left. \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{\kappa^2} I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + \\
& A_4^{(2)} \left(\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left(\frac{2}{\kappa} K_1(\xi_1^{(2)}\kappa) + \xi_1^{(2)} (K_0(\xi_1^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_1^{(2)}\kappa)) \right) \right) + \\
& A_5^{(2)} \left(-\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\xi_2^{(2)}}{2\kappa} (K_0(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_2^{(2)}\kappa)) + \frac{\lambda^{(2)}(\xi_2^{(2)})^2}{4} (3K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_2^{(2)}\kappa)) \right. \\
& \left. - \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) + \\
& A_6^{(2)} \left(-\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\xi_3^{(2)}}{2\kappa} (K_0(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_3^{(2)}\kappa)) + \frac{\lambda^{(2)}(\xi_3^{(2)})^2}{4} (3K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_3^{(2)}\kappa)) \right. \\
& \left. - \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) - \frac{\lambda^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) \\
& \overline{A}_j^{(3)} F_{tt(j)}^{(3)} = \\
& A_1^{(3)} \left(\frac{\mu^{(3)}}{\kappa} \left(\frac{2}{\kappa} K_1(\xi_1^{(3)}\kappa) + \xi_1^{(3)} (K_0(\xi_1^{(3)}\kappa) + K_2(\xi_1^{(3)}\kappa)) \right) \right) + \\
& A_2^{(3)} \left(-\frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})\xi_2^{(3)}}{2\kappa} (K_0(\xi_2^{(3)}\kappa) + K_2(\xi_2^{(3)}\kappa)) + \frac{\lambda^{(3)}(\xi_2^{(3)})^2}{4} (3K_1(\xi_2^{(3)}\kappa) + K_3(\xi_2^{(3)}\kappa)) \right. \\
& \left. - \frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})}{\kappa^2} K_1(\xi_2^{(3)}\kappa) - \frac{\lambda^{(3)} \left[(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} K_1(\xi_2^{(3)}\kappa) \right) +
\end{aligned}$$

$$A_3^{(3)} \left(-\frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})\xi_3^{(3)}}{2\kappa} (K_0(\xi_3^{(3)}\kappa) + K_2(\xi_3^{(3)}\kappa)) + \frac{\lambda^{(3)}(\xi_3^{(3)})^2}{4} (3K_1(\xi_3^{(3)}\kappa) + K_3(\xi_3^{(3)}\kappa)) \right. \\ \left. - \frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})}{\kappa^2} K_1(\xi_3^{(3)}\kappa) - \frac{\lambda^{(3)} \left[(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} K_1(\xi_3^{(3)}\kappa) \right)$$

$$\bar{A}_i^{(1)} F_{t3(i)}^{(1)} =$$

$$A_1^{(1)} \left(-\mu^{(1)} \frac{\xi_1^{(1)}}{2} (I_0(\xi_1^{(1)}\kappa) + I_2(\xi_1^{(1)}\kappa)) \right) + A_2^{(1)} \left(-\mu^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2}{\kappa(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} I_1(\xi_2^{(1)}\kappa) \right) +$$

$$A_3^{(1)} \left(-\mu^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2}{\kappa(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} I_1(\xi_3^{(1)}\kappa) \right)$$

$$\bar{A}_j^{(2)} F_{t3(j)}^{(2)} =$$

$$A_1^{(2)} \left(-\mu^{(2)} \frac{\xi_1^{(2)}}{2} (I_0(\xi_1^{(2)}\kappa) + I_2(\xi_1^{(2)}\kappa)) \right) + A_2^{(2)} \left(-\mu^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2}{\kappa(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) +$$

$$A_3^{(2)} \left(-\mu^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2}{\kappa(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + A_4^{(2)} \left(\mu^{(2)} \frac{\xi_1^{(2)}}{2} (K_0(\xi_1^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_1^{(2)}\kappa)) \right) +$$

$$A_5^{(2)} \left(-\mu^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2}{\kappa(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) \right) + A_6^{(2)} \left(-\mu^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2}{\kappa(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) \right)$$

$$\bar{A}_i^{(3)} F_{t3(i)}^{(3)} = A_1^{(3)} \left(\mu^{(3)} \frac{\xi_1^{(3)}}{2} (K_0(\xi_1^{(3)}\kappa) + K_2(\xi_1^{(3)}\kappa)) \right) + A_2^{(3)} \left(-\mu^{(3)} \frac{\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2}{\kappa(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} K_1(\xi_2^{(3)}\kappa) \right) +$$

$$A_3^{(3)} \left(-\mu^{(3)} \frac{\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2}{\kappa(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} K_1(\xi_3^{(3)}\kappa) \right)$$

$$\bar{A}_i^{(1)} F_{r33(i)}^{(1)} =$$

$$A_1^{(1)} \left(-\frac{\mu^{(1)}}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(1)}\kappa) - \frac{\xi_1^{(1)}}{2} (I_0(\xi_1^{(1)}\kappa) + I_2(\xi_1^{(1)}\kappa)) \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& A_2^{(1)} \left(\mu^{(1)} \frac{\left(\xi_2^{(1)} \right)^2 \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} \left(3I_1(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(1)} \kappa) \right) \right) + \\
& A_3^{(1)} \left(\mu^{(1)} \frac{\left(\xi_3^{(1)} \right)^2 \left[\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} \left(3I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(1)} \kappa) \right) \right) \\
& \overline{A}_i^{(2)} F_{r33(i)}^{(2)} = A_1^{(2)} \left(-\frac{\mu^{(2)}}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_1^{(2)}}{2} \left(I_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_1^{(2)} \kappa) \right) \right) \right) + \\
& A_2^{(2)} \left(\mu^{(2)} \frac{\left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(3I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) \right) + \\
& A_3^{(2)} \left(\mu^{(2)} \frac{\left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(3I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) \right) + \\
& A_4^{(2)} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + \frac{\xi_1^{(2)}}{2} \left(K_0(\xi_1^{(2)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(2)} \kappa) \right) \right) + \\
& A_5^{(2)} \left(\mu^{(2)} \frac{\left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(3K_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + K_3(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) \right) + \\
& A_6^{(2)} \left(\mu^{(2)} \frac{\left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \left[\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \right]}{4 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \left(3K_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + K_3(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) \right) \\
& \overline{A}_j^{(3)} F_{r33(j)}^{(3)} = \\
& A_1^{(3)} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(3)} \kappa) + \frac{\xi_1^{(3)}}{2} \left(K_0(\xi_1^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_1^{(3)} \kappa) \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$A_2^{(3)} \left(\mu^{(3)} \frac{(\xi_2^{(3)})^2 \left[\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 \right]}{4(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} (3K_1(\xi_2^{(3)}\kappa) + K_3(\xi_2^{(3)}\kappa)) \right) +$$

$$A_3^{(3)} \left(\mu^{(3)} \frac{(\xi_3^{(3)})^2 \left[\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 \right]}{4(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} (3K_1(\xi_3^{(3)}\kappa) + K_3(\xi_3^{(3)}\kappa)) \right)$$

$$\overline{A}_i^{(1)} F_{\text{nt}(i)}^{(1)} =$$

$$A_1^{(1)} \left(-\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(1)}\kappa) - \frac{\xi_1^{(1)}}{2} (I_0(\xi_1^{(1)}\kappa) + I_2(\xi_1^{(1)}\kappa)) \right) \right) +$$

$$A_2^{(1)} \left(\frac{(\xi_2^{(1)})^2}{4} (3I_1(\xi_2^{(1)}\kappa) + I_3(\xi_2^{(1)}\kappa)) \right) + A_3^{(1)} \left(\frac{(\xi_3^{(1)})^2}{4} (3I_1(\xi_3^{(1)}\kappa) + I_3(\xi_3^{(1)}\kappa)) \right)$$

$$\overline{A}_i^{(2)} F_{\text{nt}(i)}^{(2)} = A_1^{(2)} \left(-\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_1^{(2)}\kappa) - \frac{\xi_1^{(2)}}{2} (I_0(\xi_1^{(2)}\kappa) + I_2(\xi_1^{(2)}\kappa)) \right) \right) +$$

$$A_2^{(2)} \left(\frac{(\xi_2^{(2)})^2}{4} (3I_1(\xi_2^{(2)}\kappa) + I_3(\xi_2^{(2)}\kappa)) \right) - A_3^{(2)} \left(\frac{(\xi_3^{(2)})^2}{4} (3I_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + I_3(\xi_3^{(2)}\kappa)) \right) +$$

$$A_4^{(2)} \left(-\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(2)}\kappa) + \frac{\xi_1^{(2)}}{2} (K_0(\xi_1^{(2)}\kappa) + K_2(\xi_1^{(2)}\kappa)) \right) \right) +$$

$$A_5^{(2)} \left(\frac{(\xi_2^{(2)})^2}{4} (3K_1(\xi_2^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_2^{(2)}\kappa)) \right) + A_6^{(2)} \left(\frac{(\xi_3^{(2)})^2}{4} (3K_1(\xi_3^{(2)}\kappa) + K_3(\xi_3^{(2)}\kappa)) \right)$$

$$\overline{A}_j^{(3)} F_{\text{nt}(j)}^{(3)} =$$

$$A_1^{(3)} \left(-\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_1^{(3)}\kappa) + \frac{\xi_1^{(3)}}{2} (K_0(\xi_1^{(3)}\kappa) + K_2(\xi_1^{(3)}\kappa)) \right) \right) +$$

$$A_2^{(3)} \left(\frac{(\xi_2^{(3)})^2}{4} (3K_1(\xi_2^{(3)}\kappa) + K_3(\xi_2^{(3)}\kappa)) \right) + A_3^{(3)} \left(\frac{(\xi_3^{(3)})^2}{4} (3K_1(\xi_3^{(3)}\kappa) + K_3(\xi_3^{(3)}\kappa)) \right)$$

$$\overline{A}_i^{(1)} F_{\text{nt}(i)}^{(1)} =$$

$$A_1^{(1)} \left(-\frac{(\xi_1^{(1)})^2}{4} (3I_1(\xi_1^{(1)}\kappa) + I_3(\xi_1^{(1)}\kappa)) \right) + A_2^{(1)} \left(\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_2^{(1)}\kappa) - \frac{\xi_2^{(1)}}{2} (I_0(\xi_2^{(1)}\kappa) + I_2(\xi_2^{(1)}\kappa)) \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& A_3^{(1)} \left(\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_3^{(1)} \kappa) - \frac{\xi_3^{(1)}}{2} (I_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(1)} \kappa)) \right) \right) \\
& \overline{A_i}^{(2)} F_{\text{tt}(i)}^{(2)} = \\
& A_1^{(2)} \left(-\frac{(\xi_1^{(2)})^2}{4} (3I_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + I_3(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right) - \\
& A_2^{(2)} \left(\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_2^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_2^{(2)}}{2} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right) \right) - A_3^{(2)} \left(\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) - \frac{\xi_3^{(2)}}{2} (I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right) \right) - \\
& A_4^{(2)} \left(-\frac{(\xi_1^{(2)})^2}{4} (3K_1(\xi_1^{(2)} \kappa) + K_3(\xi_1^{(2)} \kappa)) \right) - A_5^{(2)} \left(\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_2^{(2)} \kappa) + \frac{\xi_2^{(2)}}{2} (K_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right) \right) - \\
& A_6^{(2)} \left(\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_3^{(2)} \kappa) + \frac{\xi_3^{(2)}}{2} (K_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(2)} \kappa)) \right) \right) \\
& \overline{A_j}^{(3)} F_{\text{tt}(j)}^{(3)} = \\
& A_1^{(3)} \left(-\frac{(\xi_1^{(3)})^2}{4} (3K_1(\xi_1^{(3)} \kappa) + K_3(\xi_1^{(3)} \kappa)) \right) - \\
& A_2^{(3)} \left(\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_2^{(3)} \kappa) + \frac{\xi_2^{(3)}}{2} (K_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_2^{(3)} \kappa)) \right) \right) - A_3^{(3)} \left(\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} K_1(\xi_3^{(3)} \kappa) + \frac{\xi_3^{(3)}}{2} (K_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + K_2(\xi_3^{(3)} \kappa)) \right) \right) \\
& \overline{A_i}^{(1)} F_{3\text{nt}(i)}^{(1)} = \\
& A_2^{(1)} \left(\frac{\xi_2^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1,0)} \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} (I_0(\xi_2^{(1)} \kappa) + I_1(\xi_2^{(1)} \kappa)) \right) + \\
& A_3^{(1)} \left(\frac{\xi_3^{(1)} \left[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1,0)} \right]}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} (I_0(\xi_3^{(1)} \kappa) + I_1(\xi_3^{(1)} \kappa)) \right) - \\
& \overline{A_i}^{(2)} F_{3\text{nt}(i)}^{(2)} = A_2^{(2)} \left(\frac{\xi_2^{(2)} \left[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2,0)} \right]}{2(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} (I_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + I_1(\xi_2^{(2)} \kappa)) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_3^{(2)} \left(\frac{\xi_3^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \right) \left(I_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + I_1(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) \Bigg) - \\
& A_5^{(2)} \left(- \frac{\xi_2^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \right) \left(K_0(\xi_2^{(2)} \kappa) + K_1(\xi_2^{(2)} \kappa) \right) \Bigg) - \\
& A_6^{(2)} \left(- \frac{\xi_3^{(2)} \left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} \right) \left(K_0(\xi_3^{(2)} \kappa) + K_1(\xi_3^{(2)} \kappa) \right) \Bigg) \\
& \overline{A}_j^{(3)} F_{3\pi(j)}^{(3)} = A_2^{(3)} \left(- \frac{\xi_2^{(3)} \left[\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)} \right)} \right) \left(K_0(\xi_2^{(3)} \kappa) + K_1(\xi_2^{(3)} \kappa) \right) \Bigg) - \\
& A_3^{(3)} \left(- \frac{\xi_3^{(3)} \left[\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} \right]}{2 \left(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)} \right)} \right) \left(K_0(\xi_3^{(3)} \kappa) + K_1(\xi_3^{(3)} \kappa) \right) \Bigg) \quad (0.80)
\end{aligned}$$

Yukarıda yer alan ifadelerde lif ile geçiş malzemesi sınır koşullarında kullanılan indisler $i=1,2,3$ $j=1,2,3,4,5,6$ iken; geçiş malzemesi ile matris arasındaki sınır koşullarında ise $i=1,2,3,4,5,6$ $j=1,2,3$ şeklindedir.

αz içeren temas koşulları:

$$M_{112}^{(1)} = 0, \quad M_{122}^{(1)} = 0, \quad M_{132}^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned}
M_{120}^{(1)} &= \frac{4\xi_2^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} I_1 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) + 4 \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(I_0 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) + I_2 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right) \right) \\
&\quad - 8\lambda^{(1)} \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right)
\end{aligned}$$

$$M_{130}^{(1)} = \frac{4\xi_3^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} I_1 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) + 4 \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(I_0 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) + I_2 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) \right)$$

$$-8\lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0(2\xi_3^{(1)}\kappa)$$

$$M_{112}^{(2)} = 0, \quad M_{122}^{(2)} = 0, \quad M_{132}^{(2)} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{120}^{(2)} &= \frac{4\xi_2^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} I_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) + 4(\xi_2^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (I_0(2\xi_2^{(2)}\kappa) + I_2(2\xi_2^{(2)}\kappa)) \\ &\quad - 8\lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0(2\xi_2^{(2)}\kappa) \\ &\quad + \frac{4\xi_2^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} K_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) - 4(\xi_2^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (K_0(2\xi_2^{(2)}\kappa) + K_2(2\xi_2^{(2)}\kappa)) \\ &\quad + 8\lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0(2\xi_2^{(2)}\kappa) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{130}^{(2)} &= \frac{4\xi_3^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} I_1(2\xi_3^{(2)}\kappa) + 4(\xi_3^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (I_0(2\xi_3^{(2)}\kappa) + I_2(2\xi_3^{(2)}\kappa)) \\ &\quad - 8\lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0(2\xi_3^{(2)}\kappa) \\ &\quad + \frac{4\xi_3^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} K_1(2\xi_3^{(2)}\kappa) - 4(\xi_3^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (K_0(2\xi_3^{(2)}\kappa) + K_2(2\xi_3^{(2)}\kappa)) \\ &\quad + 8\lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0(2\xi_3^{(2)}\kappa) \end{aligned}$$

$$M_{112}^{(3)} = 0, \quad M_{122}^{(3)} = 0, \quad M_{132}^{(3)} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{120}^{(3)} &= \frac{4\xi_2^{(3)}\lambda^{(3)}}{\kappa} K_1(2\xi_2^{(3)}\kappa) - 4(\xi_2^{(3)})^2 (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (K_0(2\xi_2^{(3)}\kappa) + K_2(2\xi_2^{(3)}\kappa)) \\ &\quad + 8\lambda^{(3)} \frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})(\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_0(2\xi_2^{(3)}\kappa) \end{aligned}$$

$$M_{130}^{(3)} = \frac{4\xi_3^{(3)}\lambda^{(3)}}{\kappa} K_1(2\xi_3^{(3)}\kappa) - 4(\xi_3^{(3)})^2 (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (K_0(2\xi_3^{(3)}\kappa) + K_2(2\xi_3^{(3)}\kappa))$$

$$+8\lambda^{(3)} \frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})(\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_0(2\xi_3^{(3)}\kappa)$$

$$M_{212}^{(1)} = \frac{4\mu^{(1)}}{\kappa^2} I_2(2\xi_1^{(1)}\kappa) - \frac{4\mu^{(1)}\xi_1^{(1)}}{\kappa} (I_1(2\xi_1^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_1^{(1)}\kappa))$$

$$M_{222}^{(1)} = \frac{2\xi_2^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} (I_1(2\xi_2^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_2^{(1)}\kappa)) + 2(\xi_2^{(1)})^3 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (I_0(2\xi_2^{(1)}\kappa) + 2I_2(2\xi_2^{(1)}\kappa) \\ + I_4(2\xi_2^{(1)}\kappa)) - \frac{8\lambda^{(1)}}{\kappa^2} I_2(2\xi_2^{(1)}\kappa) - 8\lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_2(2\xi_2^{(1)}\kappa)$$

$$M_{232}^{(1)} = \frac{2\xi_3^{(1)}\lambda^{(1)}}{\kappa} (I_1(2\xi_3^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_3^{(1)}\kappa)) + 2(\xi_3^{(1)})^3 (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (I_0(2\xi_3^{(1)}\kappa) + 2I_2(2\xi_3^{(1)}\kappa) \\ + I_4(2\xi_3^{(1)}\kappa)) - \frac{8\lambda^{(1)}}{\kappa^2} I_2(2\xi_3^{(1)}\kappa) - 8\lambda^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_2(2\xi_3^{(1)}\kappa)$$

$$M_{220}^{(1)} = 0, \quad M_{230}^{(1)} = 0$$

$$M_{212}^{(2)} = \frac{4\mu^{(2)}}{\kappa^2} I_2(2\xi_1^{(2)}\kappa) - \frac{4\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}}{\kappa} (I_1(2\xi_1^{(2)}\kappa) + I_3(2\xi_1^{(2)}\kappa)) \\ - \frac{4\mu^{(2)}}{\kappa^2} K_2(2\xi_1^{(2)}\kappa) - \frac{4\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}}{\kappa} (K_1(2\xi_1^{(2)}\kappa) + K_3(2\xi_1^{(2)}\kappa))$$

$$M_{222}^{(2)} = \frac{2\xi_2^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} (I_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) + I_3(2\xi_2^{(2)}\kappa)) + 2(\xi_2^{(2)})^3 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (I_0(2\xi_2^{(2)}\kappa) + 2I_2(2\xi_2^{(2)}\kappa) \\ + I_4(2\xi_2^{(2)}\kappa)) - \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2(2\xi_2^{(2)}\kappa) - 8\lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2(2\xi_2^{(2)}\kappa) \\ + \frac{2\xi_2^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} (K_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) + K_3(2\xi_2^{(2)}\kappa)) - 2(\xi_2^{(2)})^3 (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (K_0(2\xi_2^{(2)}\kappa) + 2K_2(2\xi_2^{(2)}\kappa) \\ + K_4(2\xi_2^{(2)}\kappa)) + \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} K_2(2\xi_2^{(2)}\kappa) + 8\lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_2(2\xi_2^{(2)}\kappa)$$

$$\begin{aligned}
M_{232}^{(2)} = & \frac{2\xi_3^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} \left(I_1(2\xi_3^{(2)}\kappa) + I_3(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right) + 2\left(\xi_3^{(2)}\right)^3 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(I_0(2\xi_3^{(2)}\kappa) + 2I_2(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right. \\
& + I_4(2\xi_3^{(2)}\kappa) \left. \right) - \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} I_2(2\xi_3^{(2)}\kappa) - 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_2(2\xi_3^{(2)}\kappa) \\
& + \frac{2\xi_3^{(2)}\lambda^{(2)}}{\kappa} \left(K_1(2\xi_3^{(2)}\kappa) + K_3(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right) - 2\left(\xi_3^{(2)}\right)^3 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(K_0(2\xi_3^{(2)}\kappa) + 2K_2(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right. \\
& + K_4(2\xi_3^{(2)}\kappa) \left. \right) + \frac{8\lambda^{(2)}}{\kappa^2} K_2(2\xi_3^{(2)}\kappa) + 8\lambda^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_2(2\xi_3^{(2)}\kappa)
\end{aligned}$$

$$M_{220}^{(2)} = 0, \quad M_{230}^{(2)} = 0$$

$$M_{212}^{(3)} = -\frac{4\mu^{(3)}}{\kappa^2} K_2(2\xi_1^{(3)}\kappa) - \frac{4\mu^{(3)}\xi_1^{(3)}}{\kappa} \left(K_1(2\xi_1^{(3)}\kappa) + K_3(2\xi_1^{(3)}\kappa) \right)$$

$$\begin{aligned}
M_{222}^{(3)} = & \frac{2\xi_2^{(3)}\lambda^{(3)}}{\kappa} \left(K_1(2\xi_2^{(3)}\kappa) + K_3(2\xi_2^{(3)}\kappa) \right) - 2\left(\xi_2^{(3)}\right)^3 \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(K_0(2\xi_2^{(3)}\kappa) + 2K_2(2\xi_2^{(3)}\kappa) \right. \\
& + K_4(2\xi_2^{(3)}\kappa) \left. \right) + \frac{8\lambda^{(3)}}{\kappa^2} K_2(2\xi_2^{(3)}\kappa) + 8\lambda^{(3)} \frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_2(2\xi_2^{(3)}\kappa)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{232}^{(3)} = & \frac{2\xi_3^{(3)}\lambda^{(3)}}{\kappa} \left(K_1(2\xi_3^{(3)}\kappa) + K_3(2\xi_3^{(3)}\kappa) \right) - 2\left(\xi_3^{(3)}\right)^3 \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(K_0(2\xi_3^{(3)}\kappa) + 2K_2(2\xi_3^{(3)}\kappa) \right. \\
& + K_4(2\xi_3^{(3)}\kappa) \left. \right) + \frac{8\lambda^{(3)}}{\kappa^2} K_2(2\xi_3^{(3)}\kappa) + 8\lambda^{(3)} \frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_2(2\xi_3^{(3)}\kappa)
\end{aligned}$$

$$M_{220}^{(3)} = 0, \quad M_{230}^{(3)} = 0$$

$$\begin{aligned}
M_{312}^{(1)} = & -\mu^{(1)} \left[\frac{4}{\kappa^2} I_2(2\xi_1^{(1)}\kappa) + \frac{\xi_1^{(1)}}{\kappa} \left(I_1(2\xi_1^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_1^{(1)}\kappa) \right), \right. \\
& \left. - \left(\xi_1^{(1)} \right)^2 \left(I_0(2\xi_1^{(1)}\kappa) + 2I_2(2\xi_1^{(1)}\kappa) + I_4(2\xi_1^{(1)}\kappa) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$M_{322}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[\frac{8\xi_2^{(1)}}{\kappa} \left(I_1(2\xi_2^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_2^{(1)}\kappa) \right) - \frac{8}{\kappa^2} I_2(2\xi_2^{(1)}\kappa) \right]$$

$$M_{332}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[\frac{8\xi_3^{(1)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) \right) - \frac{8}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right) \right]$$

$$M_{320}^{(1)} = 0, \quad M_{330}^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{312}^{(2)} = & -\mu^{(2)} \left[\frac{4}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) + \frac{\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) \right) \right. \\ & \left. - \left(\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \right)^2 \left(I_0 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) + 2I_2 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) + I_4 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) \right) \right] \\ & -\mu^{(2)} \left[\frac{4}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) - \frac{\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) \right) \right. \\ & \left. + \left(\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \right)^2 \left(K_0 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) + 2K_2 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) + K_4 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(2)} \kappa \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{322}^{(2)} = & -\mu^{(2)} \left[\frac{8\xi_2^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right) - \frac{8}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right] \\ & -\mu^{(2)} \left[\frac{8\xi_2^{(2)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right) + \frac{8}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{332}^{(2)} = & -\mu^{(2)} \left[\frac{8\xi_3^{(2)}}{\kappa} \left(I_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) + I_3 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right) - \frac{8}{\kappa^2} I_2 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right] \\ & -\mu^{(2)} \left[\frac{8\xi_3^{(2)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right) + \frac{8}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right) \right] \end{aligned}$$

$$M_{320}^{(2)} = 0, \quad M_{330}^{(2)} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{312}^{(3)} = & -\mu^{(3)} \left[\frac{4}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(3)} \kappa \right) - \frac{\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(3)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(3)} \kappa \right) \right), \right. \\ & \left. + \left(\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(3)} \right)^2 \left(K_0 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(3)} \kappa \right) + 2K_2 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(3)} \kappa \right) + K_4 \left(2\xi_{\mathfrak{s}_1}^{(3)} \kappa \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$M_{322}^{(3)} = -\mu^{(3)} \left[\frac{8\xi_2^{(3)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_2^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right) + \frac{8}{\kappa^2} K_2 \left(2\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right]$$

$$M_{323}^{(3)} = -\mu^{(3)} \left[\frac{8\xi_3^{(3)}}{\kappa} \left(K_1 \left(2\xi_3^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_3^{(3)} \kappa \right) \right) + \frac{8}{\kappa^2} K_3 \left(2\xi_2^{(3)} \kappa \right) \right]$$

$$M_{320}^{(3)} = 0, \quad M_{330}^{(3)} = 0$$

$$M_{412}^{(1)} = 0, \quad M_{422}^{(1)} = 0, \quad M_{432}^{(1)} = 0$$

$$M_{420}^{(1)} = -8\mu^{(1)} \xi_2^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_1 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right)$$

$$M_{430}^{(1)} = -8\mu^{(1)} \xi_3^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_1 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right)$$

$$M_{412}^{(2)} = 0, \quad M_{422}^{(2)} = 0, \quad M_{432}^{(2)} = 0$$

$$M_{420}^{(2)} = -8\mu^{(2)} \xi_2^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right)$$

$$-8\mu^{(2)} \xi_2^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_1 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right)$$

$$M_{430}^{(2)} = -8\mu^{(2)} \xi_3^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right)$$

$$-8\mu^{(2)} \xi_3^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_1 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right)$$

$$M_{412}^{(3)} = 0, \quad M_{422}^{(3)} = 0, \quad M_{432}^{(3)} = 0$$

$$M_{420}^{(3)} = -8\mu^{(3)} \xi_2^{(3)} \frac{\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 \left(2\xi_2^{(3)} \kappa \right)$$

$$M_{430}^{(3)} = -8\mu^{(3)} \xi_3^{(3)} \frac{\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 \left(2\xi_3^{(3)} \kappa \right)$$

$$M_{512}^{(1)} = \frac{4\mu^{(1)}}{\kappa} I_2 \left(2\xi_1^{(1)} \kappa \right)$$

$$M_{522}^{(1)} = -4\mu^{(1)}\xi_2^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_2^{(1)})^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \left(I_1(2\xi_2^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_2^{(1)}\kappa) \right)$$

$$M_{532}^{(1)} = -4\mu^{(1)}\xi_3^{(1)} \frac{\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0} + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \left(I_1(2\xi_3^{(1)}\kappa) + I_3(2\xi_3^{(1)}\kappa) \right)$$

$$M_{520}^{(1)} = 0, \quad M_{530}^{(1)} = 0$$

$$M_{512}^{(2)} = \frac{4\mu^{(2)}}{\kappa} I_2(2\xi_1^{(2)}\kappa) - \frac{4\mu^{(2)}}{\kappa} K_2(2\xi_1^{(2)}\kappa)$$

$$M_{522}^{(2)} = -4\mu^{(2)}\xi_2^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(I_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) + I_3(2\xi_2^{(2)}\kappa) \right) \\ - 4\mu^{(2)}\xi_2^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(K_1(2\xi_2^{(2)}\kappa) + K_3(2\xi_2^{(2)}\kappa) \right)$$

$$M_{532}^{(2)} = -4\mu^{(2)}\xi_3^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(I_1(2\xi_3^{(2)}\kappa) + I_3(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right) \\ - 4\mu^{(2)}\xi_3^{(2)} \frac{\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(K_1(2\xi_3^{(2)}\kappa) + K_3(2\xi_3^{(2)}\kappa) \right)$$

$$M_{520}^{(2)} = 0, \quad M_{530}^{(2)} = 0$$

$$M_{512}^{(3)} = -\frac{4\mu^{(3)}}{\kappa} K_2(2\xi_1^{(3)}\kappa)$$

$$M_{522}^{(3)} = -4\mu^{(3)}\xi_2^{(3)} \frac{\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})(\xi_2^{(3)})^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} \left(K_1(2\xi_2^{(3)}\kappa) + K_3(2\xi_2^{(3)}\kappa) \right)$$

$$M_{532}^{(3)} = -4\mu^{(3)}\xi_3^{(3)} \frac{\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0} + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})(\xi_3^{(3)})^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} \left(K_1(2\xi_3^{(3)}\kappa) + K_3(2\xi_3^{(3)}\kappa) \right)$$

$$M_{520}^{(3)} = 0, \quad M_{530}^{(3)} = 0,$$

$$M_{612}^{(1)} = 0, \quad M_{622}^{(1)} = 0, \quad M_{632}^{(1)} = 0, \quad M_{620}^{(1)} = 4\xi_2^{(1)} I_1(2\xi_2^{(1)}\kappa), \quad M_{630}^{(1)} = 4\xi_3^{(1)} I_1(2\xi_3^{(1)}\kappa)$$

$$M_{612}^{(2)} = 0, M_{622}^{(2)} = 0, M_{632}^{(2)} = 0,$$

$$M_{620}^{(2)} = 4\xi_2^{(2)} I_1(2\xi_2^{(2)} \kappa) + 4\xi_2^{(2)} K_1(2\xi_2^{(2)} \kappa), M_{630}^{(2)} = 4\xi_3^{(2)} I_1(2\xi_3^{(2)} \kappa) + 4\xi_3^{(2)} K_1(2\xi_3^{(2)} \kappa)$$

$$M_{612}^{(3)} = 0, M_{622}^{(3)} = 0, M_{632}^{(3)} = 0, M_{620}^{(3)} = 4\xi_2^{(3)} K_1(2\xi_2^{(3)} \kappa), M_{630}^{(3)} = 4\xi_3^{(3)} K_1(2\xi_3^{(3)} \kappa)$$

$$M_{712}^{(1)} = -\frac{2}{\kappa} I_2(2\xi_1^{(1)} \kappa), M_{722}^{(1)} = 2\xi_2^{(1)} (I_1(2\xi_2^{(1)} \kappa) + I_3(2\xi_2^{(1)} \kappa))$$

$$M_{732}^{(1)} = 2\xi_3^{(1)} (I_1(2\xi_3^{(1)} \kappa) + I_3(2\xi_3^{(1)} \kappa)), M_{720}^{(1)} = 0, M_{730}^{(1)} = 0$$

$$M_{712}^{(2)} = -\frac{2}{\kappa} I_2(2\xi_1^{(2)} \kappa) + \frac{2}{\kappa} K_2(2\xi_1^{(2)} \kappa),$$

$$M_{722}^{(2)} = 2\xi_2^{(2)} (I_1(2\xi_2^{(2)} \kappa) + I_3(2\xi_2^{(2)} \kappa)) + 2\xi_2^{(2)} (K_1(2\xi_2^{(2)} \kappa) + K_3(2\xi_2^{(2)} \kappa))$$

$$M_{732}^{(2)} = 2\xi_3^{(2)} (I_1(2\xi_3^{(2)} \kappa) + I_3(2\xi_3^{(2)} \kappa)) + 2\xi_3^{(2)} (K_1(2\xi_3^{(2)} \kappa) + K_3(2\xi_3^{(2)} \kappa)),$$

$$M_{720}^{(2)} = 0, M_{730}^{(2)} = 0$$

$$M_{712}^{(3)} = \frac{2}{\kappa} K_2(2\xi_1^{(3)} \kappa), M_{722}^{(3)} = 2\xi_2^{(3)} (K_1(2\xi_2^{(3)} \kappa) + K_3(2\xi_2^{(3)} \kappa))$$

$$M_{732}^{(3)} = 2\xi_3^{(3)} (K_1(2\xi_3^{(3)} \kappa) + K_3(2\xi_3^{(3)} \kappa)), M_{720}^{(3)} = 0, M_{730}^{(3)} = 0$$

$$M_{812}^{(1)} = \xi_1^{(1)} (I_1(2\xi_1^{(1)} \kappa) + I_3(2\xi_1^{(1)} \kappa)), M_{822}^{(1)} = -\frac{4}{\kappa} I_2(2\xi_2^{(1)} \kappa)$$

$$M_{832}^{(1)} = -\frac{4}{\kappa} I_2(2\xi_3^{(1)} \kappa), M_{820}^{(1)} = 0, M_{830}^{(1)} = 0$$

$$M_{812}^{(2)} = \xi_1^{(2)} (I_1(2\xi_1^{(2)} \kappa) + I_3(2\xi_1^{(2)} \kappa)) + \xi_1^{(2)} (K_1(2\xi_1^{(2)} \kappa) + K_3(2\xi_1^{(2)} \kappa)),$$

$$M_{822}^{(2)} = -\frac{4}{\kappa} I_2(2\xi_2^{(2)} \kappa) + \frac{4}{\kappa} K_2(2\xi_2^{(2)} \kappa)$$

$$M_{832}^{(2)} = -\frac{4}{\kappa} I_2(2\xi_3^{(2)} \kappa) + \frac{4}{\kappa} K_2(2\xi_3^{(2)} \kappa), M_{820}^{(2)} = 0, M_{830}^{(2)} = 0$$

$$M_{812}^{(3)} = \xi_1^{(3)} \left(K_1 \left(2\xi_1^{(3)} \kappa \right) + K_3 \left(2\xi_1^{(3)} \kappa \right) \right), \quad M_{822}^{(3)} = \frac{4}{\kappa} K_2 \left(2\xi_2^{(3)} \kappa \right), \quad M_{832}^{(3)} = \frac{4}{\kappa} K_2 \left(2\xi_3^{(3)} \kappa \right)$$

$$M_{820}^{(3)} = 0, \quad M_{830}^{(3)} = 0,$$

$$M_{912}^{(1)} = 0, \quad M_{922}^{(1)} = 0, \quad M_{932}^{(1)} = 0$$

$$M_{920}^{(1)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right)$$

$$M_{930}^{(1)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_0 \left(2\xi_3^{(1)} \kappa \right),$$

$$M_{912}^{(2)} = 0, \quad M_{922}^{(2)} = 0, \quad M_{932}^{(2)} = 0$$

$$M_{920}^{(2)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right)$$

$$+ 4 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0 \left(2\xi_2^{(2)} \kappa \right)$$

$$M_{930}^{(2)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right)$$

$$+ 4 \frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_0 \left(2\xi_3^{(2)} \kappa \right),$$

$$M_{912}^{(3)} = 0, \quad M_{922}^{(3)} = 0, \quad M_{932}^{(3)} = 0, \quad M_{920}^{(3)} = 4 \frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_0 \left(2\xi_2^{(3)} \kappa \right)$$

$$M_{930}^{(3)} = 4 \frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_0 \left(2\xi_3^{(3)} \kappa \right),$$

$$M_{1012}^{(1)} = 0, \quad M_{1020}^{(1)} = 0, \quad M_{1030}^{(1)} = 0$$

$$M_{1022}^{(1)} = -4 \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_2 \left(2\xi_2^{(1)} \kappa \right)$$

$$M_{1032}^{(1)} = -4 \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} I_2(2\xi_3^{(1)}\kappa)$$

$$M_{1012}^{(2)} = 0, \quad M_{1020}^{(2)} = 0, \quad M_{1030}^{(2)} = 0$$

$$M_{1022}^{(2)} = -4 \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2(2\xi_2^{(2)}\kappa)$$

$$+4 \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_2(2\xi_2^{(2)}\kappa)$$

$$M_{1032}^{(2)} = -4 \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_2(2\xi_3^{(2)}\kappa)$$

$$+4 \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_2(2\xi_3^{(2)}\kappa)$$

$$M_{1012}^{(3)} = 0, \quad M_{1020}^{(3)} = 0, \quad M_{1030}^{(3)} = 0$$

$$M_{1022}^{(3)} = 4 \frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_2(2\xi_2^{(3)}\kappa)$$

$$M_{1032}^{(3)} = 4 \frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^{(3),0}}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_2(2\xi_3^{(3)}\kappa) \quad (0.81)$$

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 30.05.1981

Doğum yeri Çanakkale

Lise 1995-1999 Bursa Erkek Lisesi

Lisans 1999-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Müh.

Çalıştığı kurum(lar)

2005-... Fortis Bank A.Ş Bilgi Sistemleri

