

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BULANIK GRUPLAR VE HALKALAR

Matematikçi Tansu İNCEKALAN

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. BULANIK KÜMELER.....	2
3. BULANIK ALT GRUPLAR.....	12
4. NORMAL BULANIK ALT GRUPLAR.....	22
5. HOMOMORFİZMALAR.....	36
6. BULANIK ALT HALKALAR.....	46
7. SONUÇLAR	61
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	63

SİMGE LİSTESİ

$\wedge$	Minimum veya infimum
$\emptyset$	Boş küme
I	Boş kümeden farklı indeks kümesi
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\subseteq$	Alt küme
$\supseteq$	İçerir
$A \setminus B$	A fark B
$[0,1]^X$	X in bulanık kuvvet kümesi
$\mu(X)$	$\mu(X) = \{\mu(x) : x \in X\}$, μ nin görüntüsü
$\text{Im}(\mu)$	$\text{Im}(\mu) = \{\mu(x) : x \in X\}$, μ nin görüntüsü
μ_a	μ nin a -seviye alt kümesi
$\cup$	Kümelerin birleşimi
$\cap$	Kümelerin kesişimi
$f(\mu)$	μ nin f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(\nu)$	ν nin f altındaki ters görüntüsü
$\mu \circ \nu$	μ ve ν nin bileşkesi
μ^{-1}	μ nin tersi
$[0,1](G)$	G grubunun bütün bulanık alt gruplarının kümesi
$\langle \mu \rangle$	μ ile üretilen G grubunun bulanık alt grubu
$N(\mu)$	μ nin normalizatörü
$\mu \triangleleft \nu$	μ , ν bulanık alt grubunun bulanık normal alt grubu
G/μ	G nin μ bulanık normal alt grubuna göre bölüm grubu
ν/μ	Bulanık bölüm grubu
$\sqsubset$	Zayıf homomorfik
$\sqsubset$	Zayıf izomorfik
$\approx$	Homomorfik
$\cong$	İzomorfik

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY' a,

Değerli hocam merhum Yard. Doç. Dr. Hakan DEMİRBÜKER' e,

Yardımlarından dolayı Ar. Gör. Fatma ÇELİKER, Ar. Gör. Pınar KANAR ve Mat. Öğrt. Yüksel DOĞAN' a,

Maddi ve manevi desteklerini öğrenim hayatım boyunca hiçbir zaman esirgemeyen aileme,
Bu tezin hazırlanmasında varlığıyla beni mutlu eden, her daim yanımda olan, bana güç veren, yaşam kaynağım, eşim Şule İNCEKALAN' a

Saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bulanık gruplar ve bulanık halkalar adlı tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde bulanık küme kavramı tezin diğer kısımlarında kullanılan temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde Bulanık grup kavramı verilip örneklendirildikten sonra görüntü ve ters görüntü kavramı yardımıyla klasik cebirdeki teoremlerle uyumlu olduğu gösterildi.

Üçüncü bölümde bulanık normal alt grup kavramı ile ilgili değişmeli cebirdeki yapıya benzeyen beş eşdeğer tanımı verilip, kümelerin bulanık normal alt grup olması ile iki bulanık alt grubun normallığı üzerine teoremler geliştirildi.

Sonraki bölümde Bulanık homomorfizma tanımlanıp değişmeli cebirdeki doğal homomorfizma teoreminin ve izomorfizma teoremlerinin bulanık değişmeli cebirde de geçerli olduğu gösterildi.

Tezin son bölümünde bulanık halka bulanık ideal kavramı verilip idealler ile bulanık idealler arasındaki ilişkiler incelendi. Halkalardaki temel teoremlerin bulanık değişmeli cebirdeki yansımaları verildi.

Anahtar Kelimeler: Bulanık alt grup, Bulanık normal alt grup, Homomorfizma, Bulanık halkalar, Bulanık idealler.

ABSTRACT

This thesis with the title “fuzzy groups and fuzzy rings” consists of five chapters.

In chapter 1, the concept of the fuzzy sets and the basic properties and theorems which is used in the other part of the thesis is given.

In chapter 2, after the concept of the fuzzy subgroups is given and exemplified, we showed that it is compatible with classical algebra's theorems by assistance of the concept of image and inverse image.

In chapter 3, five equivalence definitions which resemble the structure of normal subgroups in commutative algebra interested in fuzzy normal subgroups is given. When the sets are fuzzy normal subgroups, the theorems which are interested in two fuzzy normal subgroups are improved.

In the following chapter, we have defined the fuzzy homomorphism and showed that the homomorphism and isomorphism theorems of commutative algebra are valid for the fuzzy commutative algebra.

In the last chapter, the concepts of fuzzy rings and ideals are given and the relations between ideals and fuzzy ideals are analyzed. In fuzzy commutative algebra the reflection of the basic theorems of rings is given.

Keywords: Fuzzy subgroups, Normal Fuzzy subgroups, Homomorphism, Fuzzy rings, Fuzzy ideals.

1. GİRİŞ

Bulanık Mantık'ın ilk kez 1965 yılında L.A.Zadeh tarafından ortaya konulmasından kısa bir süre sonra, bu mantığa olan gereksinim, ona karşı olan ilginin hızla artmasıyla, kendiliğinden kanıtlanmıştır. Özellikle 1980 li yılların ortalarından itibaren, gerek bilimde ve gerekse teknolojiye kullanılmaya başlanması ile bu iki alanda da farklı düzeylerde inanılmaz gelişmelerin yaşanmasına neden olmuştur.

L. A. Zadeh'in öğrencisi C. L. Chang 1968 yılında "Bulanık Topolojik Uzaylar" adlı makalesinden sonra bir cebirci olan Azriel Rosenfeld , "Eğer Chang bunu topolojik uzaylar için yapabiliyorsa, ben de bunu cebirsel yapılar için yapabilirim ", diyerek yola koyuldu ve 1971 yılında " Bulanık Gruplar" adlı makalesini yayınladı. Bu bulanık cebir alanında yayınlanan ilk eserdir. Daha sonra birçok bilim adamı tarafından cebirin hemen hemen bütün yapılarında kullanılarak geliştirilmiştir.

Bu tezimizde yüksek lisans ve doktora öğrencilerine temel teşkil edecek biçimde bulanık değişmeli cebirdeki bazı yapıları inceledik. İlk dört bölümde bulanık gruplardaki temel yapılar ve bunların klasik değişmeli cebirdeki yapılar ve bunlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Örneklerle beraber temel teoremlerin varlığını gösterdik.

Son bölümde ise bu yapının halkalar için geçerli olduğunu belirttik. Yani bulanık halka ve bununla ilgili temel yapılar ve teoremler incelendi. Bu tezde verilen kaynaklar tezin içinde yoğun bir şekilde kullanılmıştır.

2.BULANIK KÜMELER

Bu kısımda tezimizle ilgili temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: S herhangi bir küme olmak üzere, $\mu: S \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna S nin bulanık (fuzzy) alt kümesi denir. S nin bütün bulanık alt kümelerinin oluşturduğu kümeye S nin bulanık kuvvet kümesi denir ve $[0,1]^S$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2: $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\{\mu(x) : x \in S\}$ ile tanımlanan kümeye μ nün görüntü kümesi denir ve $\mu(S)$ ya da $\text{Im}(\mu)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3: $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\mu^* = \{x : \mu(x) > 0, x \in S\}$ kümesine μ nün destekleyicisi denir. Eğer μ^* sonlu bir küme ise μ ye sonlu bulanık küme, μ^* sonsuz bir küme ise μ ye de sonsuz bulanık küme denir. Ayrıca $1 \in \mu(S)$ ise μ ye S nin birimli bulanık alt kümesi denir.

Tanım 2.4: $Y \subset S$ ve $a \in [0,1]$ olmak üzere $a_y \in [0,1]^S$ şu şekilde tanımlanır.

$$a_y(x) = \begin{cases} a; & x \in Y \\ 0; & x \notin Y \end{cases} \quad (2.1)$$

Özel olarak; eğer $Y = \{x\}$ ise a_y kümesi $a_{\{x\}}$ şeklinde ifade edilir ve $[0,1]$ - nokta (point) veya $[0,1]$ singleton adı verilir.

Eğer $a=1$ ise

$$1_y(x) = \begin{cases} 1; & x \in Y \\ 0; & x \in S \setminus Y \end{cases} \quad (2.2)$$

fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir.

Tanım 2.5: $\mu, \nu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\forall x \in S$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise ν bulanık kümesi, μ bulanık kümesini kapsar denir ve $\mu \subseteq \nu$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6: $\mu, \nu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\mu \cap \nu, \mu \cup \nu \in [0,1]^S$ kümeleri şu şekilde tanımlanır.

$\forall x \in S$ için

$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) \quad (2.3)$$

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) \quad (2.4)$$

dir

Tanım 2.6’da verilen iki bulanık fonksiyon arasındaki kesişim ve birleşim işlemleri her hangi bir bulanık fonksiyon ailesi için şu şekilde genelleştirilir.

$\mathfrak{I} = \{\mu_i : i \in I\}$ şeklinde S nin bulanık alt küme ailesi olsun. $\forall x \in S$ için

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x) \quad (2.5)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)(x) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(x) \quad (2.6)$$

dir.

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ ise

$$\bigcap_{i \in I} \mu_i = \bigcap_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 \cap \mu_2 \cap \dots \cap \mu_n \quad (2.7)$$

$$\bigcup_{i \in I} \mu_i = \bigcup_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 \cup \mu_2 \cup \dots \cup \mu_n \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.7: $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere $a \in [0,1]$ için $\mu_a = \{x : x \in S, \mu(x) \geq a\}$ kümesine μ nün seviye alt kümesi denir.

Teorem 2.8: $\mu, \nu \in [0,1]^S$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$i) \quad \mu \subseteq \nu, \quad a \in [0,1] \Rightarrow \mu_a \subseteq \nu_a \quad (2.9)$$

$$ii) \quad a \leq b, \quad a, b \in [0,1] \Rightarrow \mu_b \subseteq \mu_a \quad (2.10)$$

$$iii) \quad \mu = \nu \Leftrightarrow \mu_a = \nu_a, \quad \forall a \in [0,1] \quad (2.11)$$

İspat:

i) $\mu \subseteq \nu$ olsun. $\forall x \in S$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ dir. $a \in [0,1]$ için $y \in \mu_a$ ise $a \leq \mu(y)$ dir. Ayrıca $\mu_a \subseteq S$ ve $\mu \subseteq \nu$ olduğundan $\mu(y) \leq \nu(y)$ dir. Dolayısıyla $a \leq \mu(y) \leq \nu(y)$ ve $a \leq \nu(y)$ dir. $a \leq \nu(y)$ ise $y \in \nu_a$ dir. Yani $\mu_a \subseteq \nu_a$ elde edilir.

ii) $a, b \in [0,1]$ olmak üzere $a \leq b$ olsun. $x \in \mu_b$ olsun. O takdirde $b \leq \mu(x)$ ve $a \leq b \leq \mu(x)$ dir. $a \leq \mu(x)$ sonucu bulunur ve $x \in \mu_a$ dir. Böylece $\mu_b \subseteq \mu_a$ elde edilir.

iii) $\mu = \nu$ olsun. $a \in [0,1]$ için $x \in \mu_a$ ise $\mu(x) \geq a$ dir. $\mu = \nu$ olduğundan $\forall x \in S$ için $\mu(x) = \nu(x)$ dir. $\mu(x) = \nu(x) \geq a$ ise $x \in \nu_a$ dir ve $\mu_a \subseteq \nu_a$ elde edilir.

Benzer şekilde $\nu_a \subseteq \mu_a$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak $\mu_a = \nu_a$ elde edilir.

Bu kez $\forall a \in [0,1]$ için $\mu_a = \nu_a$ olsun. $\forall x \in S$ için $\mu(x) = \nu(x) \geq a$ ve $\mu = \nu$ elde edilir.

Teorem 2.9: $\{\mu_i : i \in I\} \subseteq [0,1]^S$ olmak üzere her hangi bir $a \in [0,1]$ için

$$i) \bigcup_{i \in I} (\mu_i)_a \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)_a \quad (2.12)$$

$$ii) \bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a = \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)_a \quad (2.13)$$

dir.

İspat:

$$i) x \in \bigcup_{i \in I} (\mu_i)_a = (\mu_1)_a \cup (\mu_2)_a \cup \dots \cup (\mu_k)_a \cup \dots \quad (2.14)$$

olsun.

O takdirde $x, (\mu_i)_a$ nın en az birinde mevcuttur ve $k \in I$ için $x \in (\mu_k)_a$ olsun.

$$x \in (\mu_k)_a \Rightarrow a \leq (\mu_k)(x)$$

$$\Rightarrow a \leq \mu_1(x) \vee \mu_2(x) \vee \dots \vee \mu_k(x) \dots = \left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)(x)$$

$$x \in \left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)_a ; \quad (2.15)$$

ve

$$\bigcup_{i \in I} (\mu_i)_a \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)_a \quad (2.16)$$

elde edilir.

$$\text{ii) } x \in \bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a = (\mu_1)_a \cap (\mu_2)_a \cap \dots \quad (2.17)$$

olsun.

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a &\Leftrightarrow x \in (\mu_1)_a \Leftrightarrow a \leq \mu_1(x) \\ &\quad x \in (\mu_2)_a \quad a \leq \mu_2(x) \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\Leftrightarrow a \leq \mu_1(x) \wedge \mu_2(x) \wedge \dots = \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)(x) \quad ; \end{aligned} \quad (2.18)$$

ve

$$\bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a = \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)_a \quad (2.19)$$

elde edilir.

Teorem 2.10: $\mu \in [0,1]^S$ ve $\{a_i : i \in I\} \subset [0,1]$ olmak üzere

$$b = \bigwedge_{i \in I} a_i \quad , \quad c = \bigvee_{i \in I} a_i \text{ için}$$

$$\text{i) } \bigcup_{i \in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_b \quad (2.20)$$

$$\text{ii) } \bigcap_{i \in I} \mu_{a_i} = \mu_c \quad (2.21)$$

dir.

İspat:

i) $x \in \bigcup_{i \in I} \mu_{a_i}$ olsun. $a_t \leq \mu(x)$ olmak üzere en az bir $t \in I$ vardır.

$b = \bigwedge_{i \in I} a_i \leq a_t$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} b \leq a_t \leq \mu(x) &\Rightarrow b \leq \mu(x) \\ &\Rightarrow x \in \mu_b \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_b \end{aligned} \quad (2.22)$$

ii) $x \in \bigcap_{i \in I} \mu_{a_i}$ olsun. $\forall i \in I$ için $a_i \leq \mu(x)$ dir.

$c = \bigvee_{i \in I} a_i$ için $c \leq \mu(x)$ elde edilir ve

$$x \in \mu_c \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_c \quad (1) \quad (2.23)$$

$x \in \mu_c$ olsun. $c = \bigvee_{i \in I} a_i$ olmak üzere $\forall i \in I$ için

$$\bigvee_{i \in I} a_i = c \leq \mu(x) \Rightarrow a_i \leq \mu(x) \quad , \quad (\forall i \in I) \quad (2.24)$$

Dolayısıyla $x \in \bigcap_{i \in I} \mu_{a_i}$ dir

$$\Rightarrow \mu_c \subseteq \bigcap_{i \in I} \mu_{a_i} \quad (2) \quad (2.25)$$

(1) ve (2) den $\bigcap_{i \in I} \mu_{a_i} = \mu_c$ elde edilir.

Teorem 2.11: $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\mu = \bigcup_{a \in [0,1]} a_{\mu_a} = \bigcup_{a \in \mu(S)} a_{\mu_a}$ dir.

İspat: $x \in S$ olsun.

$$\begin{aligned} \bigcup_{a \in [0,1]} a_{\mu_a}(x) &= \bigvee_{a \in [0,1]} a_{\mu_a}(x) = \bigvee \{a \in [0,1] : a \leq \mu(x)\} = \mu(x) \\ \Rightarrow \mu &= \bigcup_{a \in [0,1]} a_{\mu_a} \\ \bigcup_{a \in \mu(S)} a_{\mu_a}(x) &= \bigvee_{a \in \mu(S)} a_{\mu_a}(x) = \bigvee \{a \in \mu(S) : a \leq \mu(x)\} = \mu(x) \\ \Rightarrow \mu &= \bigcup_{a \in \mu(S)} a_{\mu_a} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tanım 2.12: $\xi = \{ S_i : i \in I \}$ küme ailesinin $S = \prod_{i \in I} S_i = \{ (x_i)_{i \in I} : x_i \in S_i, i \in I \}$

şeklinde kartezyen çarpımı tanımlansın. $\forall i \in I$ için $\mu \in [0,1]^{S_i}$ olmak üzere $\forall x = (x_i)_{i \in I} \in S$ için $\mu(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x)$ şeklinde tanımlanmış $\mu \in [0,1]^S$ bulanık kümesine μ_i lerin tam direkt

çarpımı denir ve $\mu = \prod_{i \in I} \mu_i$ şeklinde gösterilir.

Eğer $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ise $S = \prod_{i \in I} S_i = S_1 x S_2 x \dots x S_n$ şeklindedir ve

$\prod_{i \in I} \mu_i = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$ şeklinde tanımlanır.

Eğer $\mu_i, \nu_i \in [0, 1]^{S_i}$ ve $\forall i \in I$ için $\mu_i \subseteq \nu_i$ ise $\prod_{i \in I} \mu_i \subseteq \prod_{i \in I} \nu_i$ olduğu açıktır.

Tanım 2.13: X, Y herhangi iki küme ve $\mu \in [0, 1]^X$, $\nu \in [0, 1]^Y$ ayrıca $f : X \rightarrow Y$ bir tasvir olsun. $f(\mu) \in [0, 1]^Y$ ve $f^{-1}(\nu) \in [0, 1]^X$ bulanık kümeler olmak üzere

$\forall y \in Y$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee \{ \mu(x) : x \in X, f(x) = y \} & ; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & ; f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (2.27)$$

$\forall x \in X$ için,

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu f(x) \quad (2.28)$$

şeklindeki fonksiyonlara sırasıyla f nin μ altındaki görüntüsü ve f nin ν altındaki ters görüntüsü denir.

Teorem 2.14: $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ birer fonksiyon olsun. O takdirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

(1) Her hangi $\mu_i \in [0, 1]^X$ ve $\forall i \in I$ için

$$f\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(\mu_i) \quad (2.29)$$

ve $\forall \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]^X$ için

$$\mu_1 \subseteq \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2) \quad (2.30)$$

dir.

(2) Her hangi $\nu_j \in [0, 1]^Y$ ve $\forall j \in J$ için

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} \nu_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(\nu_j) \quad (2.31)$$

ve

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} \nu_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(\nu_j) \quad (2.32)$$

dir. Ayrıca $\forall \nu_1, \nu_2 \in [0,1]^Y$ için

$$\nu_1 \subseteq \nu_2 \Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2) \quad (2.33)$$

(3) $\forall \mu \in [0,1]^X$ için

$$f^{-1}(f(\mu)) \supseteq \mu \quad (2.34)$$

eğer f 1-1 ise

$$f^{-1}(f(\mu)) = \mu \quad (2.35)$$

dir.

(4) $\forall \nu \in [0,1]^Y$ için

$$f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu \quad (2.36)$$

eğer f örten ise

$$f(f^{-1}(\nu)) = \nu \quad (2.37)$$

dir.

$$(5) f(\mu) \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu \subseteq f^{-1}(\nu) \quad (2.38)$$

$\forall \mu \in [0,1]^X, \forall \nu \in [0,1]^Y$ için.

(6) $\forall \mu \in [0,1]^X$ için

$$g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu) \quad (2.39)$$

ve $\forall \varepsilon \in [0,1]^Z$ için

$$f^{-1}(g^{-1}(\varepsilon)) = (g \circ f)^{-1}(\varepsilon) \quad (2.40)$$

İspat:

(1) $\forall y \in Y$ için

$$\begin{aligned}
f\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right)(y) &= \vee \left\{ \bigcup_{i \in I} \mu_i(x) \quad : \quad x \in X, f(x) = y \right\} \\
&= \vee \left\{ \vee_{i \in I} \mu_i(x) \quad : \quad x \in X, f(x) = y \right\} \\
&= \vee_{i \in I} \left\{ \mu_i(x) \quad : \quad x \in X, f(x) = y \right\} = \bigcup_{i \in I} f(\mu_i)(y)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$\forall \mu_1, \mu_2 \in [0,1]^X$ için $\mu_1 \subseteq \mu_2$ olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_1(x) \leq \mu_2(x)$ dir. $\forall y \in Y$ için

$$\begin{aligned}
f(\mu_1)(y) &= \vee \left\{ \mu_1(x) \quad : \quad x \in X, f(x) = y \right\} \\
&\leq \vee \left\{ \mu_2(x) \quad : \quad x \in X, f(x) = y \right\} \\
&= f(\mu_2)(y) \\
&\Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

(2) $\forall x \in X$ için

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} \nu_j\right)(x) &= \bigcup_{j \in J} \nu_j(f(x)) = \vee_{j \in J} \nu_j(f(x)) \\
&= \vee_{j \in J} (\nu_j(f(x))) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(\nu_j)(x)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$\forall x \in X$ için

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} \nu_j\right)(x) = \bigcap_{j \in J} \nu_j(f(x)) = \bigwedge_{j \in J} \nu_j(f(x)) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(\nu_j)(x) \tag{2.44}$$

ve $\forall \nu_1, \nu_2 \in [0,1]^Y, \forall y \in Y$ için

$$\nu_1 \subseteq \nu_2 \Rightarrow \nu_1(y) \leq \nu_2(y) \tag{2.45}$$

dir. $y = f(x)$ olsun.

$\forall x \in X$ için

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\nu_1)(x) &= \nu_1(f(x)) \Rightarrow \nu_1(f(x)) \leq \nu_2(f(x)) \\
&\Rightarrow f^{-1}(\nu_1)(x) \leq f^{-1}(\nu_2)(x) \\
&\Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

(3) $\forall \mu \in [0,1]^X$ ve $\forall x \in X$ için

$$f^{-1}(f(\mu))(x) = f(\mu)(f(x)) = \vee \{ \mu(x_1) : x_1 \in X, f(x_1) = f(x) \} \geq \mu(x) \quad (2.47)$$

Eğer f , 1-1 ise $\forall x_1, x \in X$ için

$$f(x_1) = f(x) \Rightarrow x_1 = x \quad (2.48)$$

dir.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\mu))(x) &= f(\mu)(f(x)) = \vee \{ \mu(x_1) : x_1 \in X, f(x_1) = f(x) \} \\ &= \vee \{ \mu(x) : x \in X, f(x) = f(x_1) \} \\ &= \mu(x) \end{aligned} \quad (2.49)$$

(4) $\forall \nu \in [0,1]^Y, \forall y \in Y$ için

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\nu))(y) &= \vee \{ f^{-1}(\nu)(x) : x \in X, f(x) = y \} \\ &= \vee \{ \nu(f(x)) : x \in X, f(x) = y \} \\ &= \begin{cases} \nu(y) & ; \quad y \in f(X) \\ 0 & ; \quad y \notin f(X) \end{cases} \\ &\leq \nu(y) \\ &\Rightarrow f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu \end{aligned} \quad (2.50)$$

Eğer f örten ise $f(f^{-1}(\nu))(y) \neq 0$ ve $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$ dir.

(5) $\forall \mu \in [0,1]^X, \forall \nu \in [0,1]^Y$ olmak üzere $\forall x \in X$ ve $\forall y \in f(X)$ için

$$\begin{aligned} f(\mu)(y) \leq \nu(y) &\Leftrightarrow \vee \{ \mu(x) : x \in X, f(x) = y \} \leq \nu(y) \\ &\Leftrightarrow \mu(x) \leq \nu(f(x)) \\ &\Leftrightarrow \mu(x) \leq f^{-1}(\nu)(x) \end{aligned} \quad (2.51)$$

(6) $\forall z \in Z, \forall \mu \in [0,1]^X$ için

$$\begin{aligned} g(f(\mu))(z) &= \vee \{ f(\mu)(y) : y \in Y, g(y) = z \} \\ &= \vee \{ \vee \{ \mu(x) : x \in X, f(x) = y \} : y \in Y, g(y) = z \} \\ &= \vee \{ \mu(x) : x \in X, g \circ f(x) = z \} \\ &= (g \circ f)(\mu)(x) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon \in [0,1]^Z$ için

$$(g \circ f)^{-1}(\varepsilon)(x) = \varepsilon(g(f(x))) = g^{-1}(\varepsilon)(f(x)) = f^{-1}(g^{-1}(\varepsilon))(x) \quad (2.52)$$

3. BULANIK ALT GRUPLAR

Bulanık cebirsel yapılardan olan bulanık gruplar ve bunun sonucu olan bulanık grup yapılarının değişmeli cebirdeki gruplar yapısına benzediği ve benzer teoremlerin burada çalıştığı gösterilecektir. Bu aşamada değişmeli cebirdeki grup yapısı ile bulanık değişmeli cebirdeki grup yapıları arasındaki geçişler incelenecektir.

Tanım 3.1: G bir grup ve $\forall \mu, \nu \in [0, 1]^G$ bulanık kümeleri olmak üzere

$\forall x \in G$ için $(\mu \circ \nu)(x) = \vee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) : y, z \in G, yz = x \}$ dir.

$\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$ olarak μ bulanık kümesinin tersi tanımlanır.

Teorem 3.2: G bir grup ve $\mu, \nu, \mu_i \in [0, 1]^G$ ($i \in I$), $a = \vee \{ \mu(x) : x \in G \}$ olsun.

(i) $\forall x \in G$ için,

$$\begin{aligned} (\mu \circ \nu)(x) &= \vee_{y \in G} (\mu(y) \wedge \nu(y^{-1}x)) \\ &= \vee_{y \in G} (\mu(xy^{-1}) \wedge \nu(y)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

(ii) $\forall x, y \in G$ için,

$$(a_y \circ \mu)(x) = \mu(y^{-1}x) \quad (3.2)$$

(iii) $\forall x, y \in G$ için,

$$(\mu \circ a_y)(x) = \mu(xy^{-1}) \quad (3.3)$$

$$(iv) (\mu^{-1})^{-1} = \mu \quad (3.4)$$

$$(v) \mu \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \nu^{-1} \quad (3.5)$$

$$(vi) \left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)^{-1} = \bigcup_{i \in I} \mu_i^{-1} \quad (3.6)$$

$$(vii) \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \mu_i^{-1} \quad (3.7)$$

$$(viii) (\mu \circ \nu)^{-1} = \nu^{-1} \circ \mu^{-1} \quad (3.8)$$

dir.

İspat:

(i) $\forall x \in G$ için,

$$\begin{aligned} (\mu \circ \nu)(x) &= \vee \left\{ \mu(y) \wedge \nu(y^{-1}x) : y(y^{-1}x) = x \right\} \\ &= \vee \left\{ \mu(xy^{-1}) \wedge \nu(y) : (xy^{-1})y = x \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

(ii) $\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned} (a_y \circ \mu)(x) &= \vee \left\{ a_y(y) \wedge \mu(y^{-1}x) : y \in G, x = y(y^{-1}x) \right\} \\ &= \vee \left\{ a \wedge \mu(y^{-1}x) : y \in G, x = y(y^{-1}x) \right\} \\ &= \vee \left\{ \vee \left\{ \mu(x) : x \in G \right\} \wedge \mu(y^{-1}x) : y \in G, x = y(y^{-1}x) \right\} \\ &= \mu(y^{-1}x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(iii) $\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned} (\mu \circ a_y)(x) &= \vee \left\{ \mu(xy^{-1}) \wedge a_y(y) : y \in G, x = (xy^{-1})y \right\} \\ &= \vee \left\{ \mu(xy^{-1}) \wedge \left\{ \vee \left\{ \mu(x) : x \in G \right\} \right\} : y \in G, x = (xy^{-1})y \right\} \\ &= \mu(xy^{-1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

(iv) $\forall x \in G$ için,

$$(\mu^{-1})^{-1}(x) = \mu^{-1}(x^{-1}) = \mu((x^{-1})^{-1}) = \mu(x) \quad (3.12)$$

(v) $\forall x \in G$ için,

$$\begin{aligned} \mu \subseteq \nu &\Leftrightarrow \mu(x) \leq \nu(x) \Leftrightarrow \mu(x^{-1}) \leq \nu(x^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu^{-1}(x) \leq \nu^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \nu^{-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

(vi) $\forall x \in G$ için,

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)^{-1}(x) = \left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)(x^{-1}) = \vee_{i \in I} \mu_i(x^{-1}) = \vee_{i \in I} \mu_i^{-1}(x) = \bigcup_{i \in I} (\mu_i)^{-1}(x) \quad (3.14)$$

(vii) $\forall x \in G$ için,

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)^{-1}(x) = \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)(x^{-1}) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x^{-1}) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i^{-1}(x) = \bigcap_{i \in I} \mu_i^{-1}(x) \quad (3.15)$$

(viii) $\forall x \in G$ için,

$$\begin{aligned} (\mu \circ \nu)^{-1}(x) &= (\mu \circ \nu)(x^{-1}) \\ &= \vee \left\{ \mu(z^{-1}) \wedge \nu(y^{-1}) : y, z \in G, x^{-1} = z^{-1}y^{-1} \right\} \\ &= \vee \left\{ \nu^{-1}(y) \wedge \mu^{-1}(z) : y, z \in G, x = yz \right\} \\ &= (\nu^{-1} \circ \mu^{-1})(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Tanım 3.3: G bir grup ve $\mu \in [0,1]^G$ olsun. Eğer μ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa μ ye G nin bulanık (fuzzy) alt grubu denir.

(G 1) $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad (3.17)$$

(G 2) $\forall x \in G$ için,

$$\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \quad (3.18)$$

Tanım 3.4: G bir grup, μ , G nin bulanık alt grubu ve e , G nin etkisiz elemanı olmak üzere $\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$ şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall x \in G$ için (G 1) koşulundan $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ elde edilir.

Teorem 3.5: G bir grup olsun. μ , G nin bulanık alt grubu olması için gerek ve yeter koşul

$\forall x, y \in G$ için $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olmasıdır.

İspat: μ , G nin bulanık alt grubu olsun

$\forall x, y \in G$ için,

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad (3.19)$$

dir. Bu kez $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad (3.20)$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\mu(xy) &= \mu(xyxy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(yy^{-1}y^{-1}) \\
&\geq \mu(x) \wedge \mu(yy^{-1}) \wedge \mu(y) \\
&\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(y) \wedge \mu(y) \\
&= \mu(x) \wedge \mu(y)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\mu(x^{-1}) &= \mu(x^{-1}xx^{-1}) \geq \mu(x^{-1}x) \wedge \mu(x) = \mu(xx^{-1}) \wedge \mu(x) \\
&\geq \mu(x) \wedge \mu(x) \wedge \mu(x) \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak μ, G grubunun bulanık alt grubu olduğu elde edilir.

Teorem 3.6: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt grubu olsun. $\forall x \in G$ için,

$$(i) \mu(e) \geq \mu(x) \tag{3.22}$$

$$(ii) \mu(x) = \mu(x^{-1}) \tag{3.23}$$

dir.

İspat: $\forall x \in G$ için,

$$(i) \mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x) \tag{3.24}$$

$$(ii) \mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \tag{3.25}$$

Teorem 3.7: G sonlu bir grup olmak üzere eğer $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ise μ, G grubunun bulanık alt grubudur.

İspat: $\forall x \in G$ olsun. G sonlu bir grup olduğundan x in bütün pozitif kuvvetleri birbirinden farklı olamazlar. Şu halde $r > s > 0$ olmak üzere $r, s \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $x^r = x^s$ dir. Kısaltma özelliğinden $x^{r-s} = e \in G$ dir. Böylece $r - s - 1 \geq 0$ olup $x^{-1} = x^{r-s-1} \in G$ elde edilir.

$$\mu(x^{-1}) = \mu(x^{r-s-1}) \geq \mu(x) \tag{3.26}$$

elde edilir ve μ, G grubunun bulanık alt grubudur.

Teorem 3.8: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için

$\mu(xy) = \mu(y)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu(x) = \mu(e)$ olmasıdır

İspat : $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(y)$ olsun. $y = e$ olarak alınırsa $\mu(x) = \mu(e)$ elde edilir.

Bu kez $\forall x, y \in G$ için $\mu(x) = \mu(e)$ olsun. Şu halde

$$\mu(x) \geq \mu(y) \quad (3.27)$$

olup

$$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad (3.28)$$

den

$$\mu(xy) \geq \mu(y) \quad (1) \quad (3.29)$$

elde edilir.

$$\mu(y) = \mu(x^{-1}xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(xy) \quad (3.30)$$

dir.

$$\mu(x) = \mu(e) \quad (3.31)$$

Olduğundan

$$\mu(y) \geq \mu(xy) \quad (2) \quad (3.32)$$

elde edilir.

(1) ve (2) den $\mu(xy) = \mu(y)$ olduğu görülür.

Teorem 3.9: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için

$$\mu(x) < \mu(y) \text{ ise } \mu(xy) = \mu(yx) = \mu(x) \quad (3.33)$$

dir

İspat : $\forall x, y \in G$ için $\mu(x) < \mu(y)$ olsun.

$$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(x) \text{ ve } \mu(xy) \geq \mu(x) \text{ olur.}$$

$$\mu(x) = \mu(xyy^{-1}) \geq \mu(xy) \wedge \mu(y) \text{ den } \mu(xy) \leq \mu(x) \text{ olur.}$$

Sonuç olarak $\mu(xy) = \mu(x)$ elde edilir.

$\forall x, y \in G$ için $\mu(x) < \mu(y)$ olsun.

$\mu(yx) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(x)$ ve $\mu(yx) \geq \mu(x)$ olur.

$\mu(x) = \mu(y^{-1}yx) \geq \mu(y) \wedge \mu(yx)$ den $\mu(yx) \leq \mu(x)$ olur.

Sonuç olarak $\mu(yx) = \mu(x)$ elde edilir.

Teorem 3.10: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt kümesi olsun. μ, G nin bulanık alt grubu ise $\forall a \in [0, \mu(e)]$ için μ_a kümesi G nin bir alt grubudur.

İspat: $\forall x \in G$ için $\mu(e) \geq a$ dır ve $e \in \mu_a$ olur. Dolayısıyla $\mu_a \neq \emptyset$ dır.

$\forall x, y \in \mu_a$ için $\mu(x) \geq a, \mu(y) \geq a$ dır.

$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = a \wedge a = a$ olduğundan $xy \in \mu_a$ dır.

$\forall x \in \mu_a$ için $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \geq a$ olduğundan $\mu(x^{-1}) \geq a$ ve $x^{-1} \in \mu_a$ dır.

Sonuç olarak μ_a, G nin alt grubu olduğu elde edilir.

Teorem 3.11: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt kümesi olsun. $\forall a \in \text{Im}(\mu)$ için

μ_a, G nin alt grubu ise μ, G grubunun bulanık alt grubudur.

İspat: $x, y \in G$, $\mu(x) = a, \mu(y) = b$ ve $a \wedge b = a$ olsun. O taktirde $a \leq b$ dir ve

$\mu_b \subseteq \mu_a$ dır. Yani $y \in \mu_a$ dır. μ_a, G nin alt grubu olduğundan $xy^{-1} \in \mu_a$ elde edilir.

$\mu(xy^{-1}) \geq a = a \wedge b = \mu(x) \wedge \mu(y)$ dir.

Şu halde μ, G grubunun bulanık alt grubudur.

Teorem 3.12: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt grubu ise μ_*, G nin alt grubudur.

İspat:

$\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$ dir. $x = e$ için $\mu(x) = \mu(e)$, $e \in \mu_*$ ve $\mu_* \neq \emptyset$ dir.

$\forall x, y \in \mu_*$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(e) \wedge \mu(e) = \mu(e)$ ve $xy \in \mu_*$ dır.

$\forall x \in \mu_*$ için $\mu(x^{-1}) = \mu(x) = \mu(e)$ ve $x^{-1} \in \mu_*$ dır.

Sonuç olarak μ_*, G grubunun alt grubudur.

Teorem 3.13: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt grubu ise μ^*, G nin alt grubudur.

İspat:

$\mu^* = \{x: \mu(x) > 0, x \in G\}$ dir. $\mu(e) > 0$ ve $e \in \mu^*$ olduğundan $\mu^* \neq \emptyset$ dir.

$\forall x, y \in \mu^*$ için $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) > 0$ ve $xy^{-1} \in \mu^*$ elde edilir.

Sonuç olarak μ^*, G grubunun bir alt grubudur.

Teorem 3.14: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt grubu olması için gerek ve yeter koşul

$$(i) \mu \circ \mu \subseteq \mu \quad (3.34)$$

$$(ii) \mu^{-1} \subseteq \mu \text{ veya } \mu \subseteq \mu^{-1} \text{ veya } \mu = \mu^{-1} \quad (3.35)$$

olmasıdır.

İspat:

μ, G grubunun bulanık alt grubu olsun. $\forall x \in G$ için

$$\begin{aligned} (\mu \circ \mu)(x) &= \vee \{ \mu(y) \wedge \mu(z) : y, z \in G, x = yz \} \\ &= \mu(t) \end{aligned}$$

$x = tk \quad t, k \in G$ olduğuna göre $\mu(x) = \mu(tk) \geq \mu(t) \wedge \mu(k) = \mu(t)$ elde edilir.

Sonuç olarak $(\mu \circ \mu)(x) \leq \mu(x)$ ve $\mu \circ \mu \subseteq \mu$ bulunur.

$\forall x \in G$ için $\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1}) = \mu(x)$ olduğundan $\mu = \mu^{-1}$ elde edilir.

Bu kez

$$(i) \mu \circ \mu \subseteq \mu$$

$$(ii) \mu = \mu^{-1} \text{ olsun.}$$

$\forall x, y, z \in G$ için $z = xy$ olsun

$$\begin{aligned} \mu(z) &\geq (\mu \circ \mu)(z) = \vee \{ \mu(x) \wedge \mu(y) : x, y \in G, z = xy \} \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$\forall x \in G$ için $\mu(x) = \mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$ dir. Şu halde μ, G grubunun bulanık alt grubudur.

Teorem 3.15: G bir grup ve μ, ν, G grubunun bulanık alt grupları olmak üzere $\mu \circ \nu, G$ grubunun bulanık alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ olmasıdır.

İspat: $\mu \circ \nu, G$ grubunun bulanık alt grubu olsun. Teorem 3.14 , (ii) den $\mu = \mu^{-1}$ ve $\nu = \nu^{-1}$ dir. Dolayısıyla $\mu \circ \nu = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \nu \circ \mu$ elde edilir.

Bu kez $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ olsun.

$$\begin{aligned} (\mu \circ \nu) \circ (\mu \circ \nu) &= \mu \circ (\nu \circ \mu) \circ \nu \\ &= \mu \circ (\mu \circ \nu) \circ \nu \\ &= \mu \circ \nu \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$(\mu \circ \nu)^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = \mu \circ \nu$$

dir.

Dolayısıyla Teorem 3.14 ten $\mu \circ \nu, G$ nin bulanık alt grubudur.

Teorem 3.16: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt grubu ve H de bir grup olsun.

f, G den H ye bir izomorfizma olmak üzere $f(\mu), H$ grubunun bulanık alt grubudur.

İspat: $\forall u, v \in H$ için $f(x) = u, f(y) = v$ olacak şekilde $\exists x, y \in G$ vardır.

$$\begin{aligned} (f(\mu))(uv) &= \vee \{ \mu(z) : z \in G, f(z) = uv \} \\ &\geq \vee \{ \mu(xy) : x, y \in G, f(x) = u, f(y) = v \} \\ &\geq \vee \{ \mu(x) \wedge \mu(y) : x, y \in G, f(x) = u, f(y) = v \} \\ &= \left(\vee \{ \mu(x) : x \in G, f(x) = u \} \right) \wedge \left(\vee \{ \mu(y) : y \in G, f(y) = v \} \right) \\ &= (f(\mu))(u) \wedge (f(\mu))(v) \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} (f(\mu))(u^{-1}) &= \vee \{ \mu(x^{-1}) : x \in G, f(x^{-1}) = u^{-1} \} \\ &= \vee \{ \mu(x) : x \in G, f(x) = u \} \\ &= (f(\mu))(u) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Sonuç olarak $f(\mu), H$ grubunun bulanık alt grubudur.

Teorem 3.17: H bir grup ve ν, H nin bulanık alt grubu ve G de bir grup olsun.

f, G den H ye homomorfizma olmak üzere $f^{-1}(\nu), G$ nin bulanık alt grubudur.

İspat: $\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\nu)(xy) &= \nu(f(xy)) = \nu(f(x)f(y)) \\ &= \nu(f(x)) \wedge \nu(f(y)) \\ &= f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$f^{-1}(\nu)(x^{-1}) = \nu(f(x^{-1})) = \nu(f^{-1}(x)) = \nu(f(x)) = f^{-1}(\nu)(x) \quad (3.41)$$

Sonuç olarak $f^{-1}(\nu), G$ nin bulanık alt grubudur.

Teorem 3.18: G bir grup ve $\forall i \in I$ için μ_i, G nin bulanık alt grupları olmak üzere

$\bigcap_{i \in I} \mu_i, G$ nin bulanık alt grubudur.

İspat: $\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)(xy^{-1}) &= \bigwedge_{i \in I} \mu_i(xy^{-1}) \geq \bigwedge_{i \in I} (\mu_i(x) \wedge \mu_i(y)) \\ &= \left(\bigwedge_{i \in I} \mu_i(x) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in I} \mu_i(y) \right) \\ &= \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)(x) \wedge \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)(y) \end{aligned} \quad (3.42)$$

ve $\bigcap_{i \in I} \mu_i, G$ nin bulanık alt grubudur.

Tanım 3.19: G bir grup ve μ, G grubunun bulanık alt kümesi olmak üzere

$\langle \mu \rangle = \bigcap \{ \nu : \mu \subseteq \nu, \nu, G \text{ nin bulanık alt grubu} \}$ kümesine G nin μ ile üretilmiş alt grubu denir.

Ayrıca $\langle \mu \rangle, \mu$ yi içeren en küçük alt gruptur. $\langle \mu \rangle$ yapısı üzerindeki başka bir gösterim ise

$\mu^1 = \mu$ ve $\mu^n = \mu^{n-1} \circ \mu, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ şeklinde tanımlanır.

Örnekler 3.20:

(1) $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi $+$ işlemine göre bir gruptur. $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ 'e $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $\mu(x) = \frac{2}{3}$

olarak tanımlanan μ bulanık kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin bulanık alt grubudur.

(2) $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ 'e $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ; x \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.43)$$

olarak tanımlanan μ bulanık kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin bulanık alt grubudur.

(3) $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ 'e $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} 3/4 & ; x = 0 \\ 1/3 & ; x \in 2\mathbb{Z} - \{0\} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.44)$$

olarak tanımlanan μ bulanık kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin bulanık alt grubudur.

(4) G , Klein 4' lü grup $G = \{e, a, b, ab\}$ ve $a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$ iken

$\mu: G \rightarrow [0,1]$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\mu(e) = 1$, $\mu(a) = \mu(b) = t$ ($0 < t < 1$), $\mu(ab) = 1$ olsun.

Şu halde μ , G grubunun bulanık alt grubudur.

4. NORMAL BULANIK ALT GRUPLAR

Tanım 4.1: G bir grup ve μ, G nin bulanık alt grubu olmak üzere $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$ ise μ ye G nin normal bulanık alt grubu (bulanık normal alt grubu) denir.

Teorem 4.2: G bir grup ve μ, G nin bulanık alt grubu olmak üzere $\forall x, y \in G$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

$$(N1) \quad \mu(xy) = \mu(yx) \quad (4.1)$$

$$(N2) \quad \mu(xyx^{-1}) = \mu(y) \quad (4.2)$$

$$(N3) \quad \mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \quad (4.3)$$

$$(N4) \quad \mu(xyx^{-1}) \leq \mu(y) \quad (4.4)$$

dir.

İspat:

$$(N1) \Rightarrow (N2)$$

$\forall x, y \in G$ için

$$\mu(xyx^{-1}) = \mu(xy.x^{-1}) = \mu(x^{-1}.xy) = \mu(y) \quad (4.5)$$

elde edilir.

$$(N2) \Rightarrow (N3)$$

$\forall x, y \in G$ için

$$\mu(xyx^{-1}) = \mu(y) \quad (4.6)$$

olduğundan

$$\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \quad (4.7)$$

dir.

$$(N3) \Rightarrow (N4)$$

$\forall x, y \in G$ için

$$\mu(xyx^{-1}) \leq \mu(x^{-1}.xyx^{-1}.(x^{-1})^{-1}) = \mu(x^{-1}.xyx^{-1}.x) = \mu(y) \quad (4.8)$$

dir.

$$(N4) \Rightarrow (N1)$$

$\forall x, y \in G$ için

$$\mu(xy) = \mu(xyxx^{-1}) = \mu(x.yx.x^{-1}) \leq \mu(yx) \quad (i) \quad (4.9)$$

$$\mu(yx) = \mu(yxyy^{-1}) = \mu(y.xy.y^{-1}) \leq \mu(xy) \quad (ii) \quad (4.10)$$

(i) ve (ii) den $\mu(xy) = \mu(yx)$ olduğu elde edilir.

μ, ν G nin iki bulanık alt grubu olmak üzere öyle bir $u \in G$ vardır ki $\forall x \in G$ için $\mu(x) = \nu(uxu^{-1})$ dir. Şu halde μ ve ν ye u ya göre eşleniktir denir ve $\mu = \nu_u$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1 den 1_G ve 1_e , G nin normal bulanık alt grubu olduğu açıktır ayrıca eğer G grubu değişmeli ise her bulanık alt grup da normaldir.

Teorem 4.2 den G nin μ bulanık alt grubunun normal olması için gerek ve yeter koşul $\forall z \in G$ için $\mu = \mu_z$ olmasıdır.

Teorem 4.3: G bir grup ve μ, ν G nin bulanık alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$ olması için gerek ve yeter koşul ν, G bulanık alt grubu olmak üzere $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ olmasıdır.

İspat: $\forall x, y \in G$ olmak üzere $\mu(xy) = \mu(yx)$ olsun.

$$\begin{aligned} (\mu \circ \nu)(x) &= \bigvee \left\{ \mu(xy^{-1}) \wedge \nu(y) : y \in G \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \mu(y^{-1}x) \wedge \nu(y) : y \in G \right\} \\ &= (\nu \circ \mu)(x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Böylece $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ elde edilir.

Bu kez $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ olsun

$\forall x, y \in G$ için $1_{\{y^{-1}\}} \circ \mu = \mu \circ 1_{\{y^{-1}\}}$ ve

$$\left(1_{\{y^{-1}\}} \circ \mu \right)(x) = \bigvee \left\{ 1_{\{y^{-1}\}}(y^{-1}) \wedge \mu(yx) : y \in G \right\} = \mu(yx) \quad (i) \quad (4.12)$$

$$\left(\mu \circ 1_{\{y^{-1}\}} \right)(x) = \bigvee \left\{ \mu(xy) \wedge 1_{\{y^{-1}\}}(y^{-1}) : y \in G \right\} = \mu(xy) \quad (ii) \quad (4.13)$$

(i) ve (ii) den $\mu(xy) = \mu(yx)$ elde edilir.

Terem 4.4: G bir grup ve μ , G nin bulanık normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $t \in [0,1]$ için μ_t seviye alt kümesinin G nin normal alt grubu olmasıdır.

İspat: μ , G nin bulanık normal alt grubu olsun. Teorem 3.10 dan μ_t , G nin bir alt grubudur.

$\forall x \in G$ ve $\forall y \in \mu_t$ için $\mu(xy x^{-1}) = \mu(y) \geq t \Rightarrow xy x^{-1} \in \mu_t$ ve μ_t , G nin normal alt grubudur.

Bu kez μ_t , G nin normal alt grubu olsun. Teorem 3.11 den μ , G nin bulanık alt grubudur.

$x, y \in G$ ve $\mu(y) = t$ olsun. Böylece $y \in \mu_t$ dir ve μ_t normal alt grup olduğundan $xy x^{-1} \in \mu_t$ dir.

Dolayısıyla $\mu(xy x^{-1}) \geq t = \mu(y)$ elde edilir. Teorem 4.2 den $\mu(xy x^{-1}) \geq \mu(y)$ olduğundan μ , G nin bulanık normal alt grubudur.

Teorem 4.5: G bir grup ve μ , G nin bulanık normal alt grubu olmak üzere μ_* ve μ^* kümeleri G nin normal alt grubudur.

İspat: Teorem 3.12 den $\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$, G nin alt grubudur.

$\forall y \in \mu_*$ için $\mu(y) = \mu(e)$ dir.

$\forall x \in G$ için $\mu(xy x^{-1}) = \mu(y) = \mu(e)$ dir ve $xy x^{-1} \in \mu_*$ dir. Sonuç olarak μ_* , G nin normal alt grubudur.

Teorem 3.13 ten $\mu^* = \{x : \mu(x) > 0, x \in G\}$, G nin alt grubudur. $\forall y \in \mu^*$ için $\mu(y) > 0$ dir.

$\forall x \in G$ için $\mu(xy x^{-1}) = \mu(y) > 0$ dir ve $xy x^{-1} \in \mu^*$ dir.

Sonuç olarak μ^* , G nin normal alt grubudur.

Teorem 4.6: G bir grup ve μ , G nin bulanık alt grubu olsun.

$N(\mu) = \{x : x \in G, \mu(xy) = \mu(yx), \forall y \in G\}$ kümesi G nin bir alt grubudur. Ayrıca μ nin $N(\mu)$ altındaki kısıtlanması $\mu|_{N(\mu)}$ de $N(\mu)$ nin bulanık normal alt grubudur.

İspat: G bir grup olduğundan $\forall x \in G$ için $\mu(ex) = \mu(x) = \mu(xe)$ ve $e \in N(\mu) \neq \emptyset$ dir.

(i) $\forall a, b \in N(\mu)$ ve $\forall x \in G$ için

$$\mu(abx) = \mu(a.bx) = \mu(bx.a) = \mu(b.xa) = \mu(xa.b) = \mu(xab) \quad (4.14)$$

ve $ab \in N(\mu)$ elde edilir.

(ii) $\forall y \in N(\mu)$ ve $\forall z \in G$ için

$$\mu(y^{-1}z) = \mu\left(\left(z^{-1}y\right)^{-1}\right) = \mu\left(z^{-1}y\right) = \mu\left(yz^{-1}\right) = \mu\left(\left(zy^{-1}\right)^{-1}\right) = \mu\left(zy^{-1}\right) \quad (4.15)$$

ve $y^{-1} \in N(\mu)$ elde edilir.

(i) ve (ii) den $N(\mu)$, G nin bir alt grubudur.

μ , G nin bulanık alt grubu ve $N(\mu)$, G nin alt grubu olduğundan $\forall y \in N(\mu)$ için $y \in G$ dir.

Dolayısıyla $\forall x, y \in N(\mu)$ için $\mu|_{N(\mu)}(xy) = \mu|_{N(\mu)}(yx)$ elde edilir

Sonuç olarak $\mu|_{N(\mu)}$, $N(\mu)$ nin bulanık normal alt grubudur.

Teorem 3.6 daki G grubunun $N(\mu)$ alt grubuna μ nin G deki normalizatörü denir.

Teorem 4.7: G bir grup ve ν , G nin bulanık alt grubu olmak üzere $\bigcap_{u \in G} \nu_u$, G nin bulanık normal alt grubudur ve ν nin içindeki en büyük bulanık normal alt gruptur.

İspat: $\forall u \in G$ için ν_u , G nin bulanık alt grubudur. Teorem 3.18 den $\bigcap_{u \in G} \nu_u$, G nin bulanık alt grubu olur. Her hangi $x \in G$ için $\{\nu_u : u \in G\} = \{\nu_{ux} : u \in G\}$ dir.

$\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} \bigwedge_{u \in G} \nu_u(xy x^{-1}) &= \bigwedge_{u \in G} \nu(uxy x^{-1} u^{-1}) \\ &= \bigwedge_{u \in G} \nu(uxy(ux)^{-1}) \\ &= \bigwedge_{u \in G} \nu_u(y) \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir ve Teorem 3.2 den $\bigcap_{u \in G} \nu_u$, G nin bulanık normal alt grubudur.

μ , G nin $\mu \subseteq \nu$ olacak şekilde bulanık normal alt grubu olsun. $\forall u \in G$ için $\mu = \mu_u \subseteq \nu_u$ ve buradan $\mu \subseteq \bigcap_{u \in G} \nu_u$ elde edilir. Sonuç olarak $\bigcap_{u \in G} \nu_u$, ν nin içindeki en büyük bulanık normal alt grubudur.

Tanım 4.8: G bir grup ve $x, y \in G$ olsun. $x^{-1}y^{-1}xy$ elemanına x ve y nin komütatörü denir ve $[x, y]$ ile gösterilir.

Teorem 4.9: G bir grup ve μ , G nin bulanık alt grubu olsun. μ , G grubunun bulanık normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ olmak üzere $\mu([x, y]) = \mu(e)$ olmasıdır.

İspat: μ , G nin bulanık normal alt grubu olsun.

$\forall x, y \in G$ için

$$\mu(x^{-1}y^{-1}x) = \mu(y^{-1}) \quad (4.17)$$

dir.

$$\mu(x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}) = \mu(y^{-1}) \Rightarrow \mu([x, y]y^{-1}) = \mu(y^{-1}) \quad (4.18)$$

Teorem 2.8 den $\mu([x, y]) = \mu(e)$ elde edilir.

Bu kez $\forall x, y \in G$ için $\mu([x, y]) = \mu(e)$ olsun.

Teorem 2.8 den

$$\begin{aligned} \mu([x, y]y^{-1}x^{-1}) &= \mu(y^{-1}x^{-1}) \Leftrightarrow \mu(x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}x^{-1}) = \mu(y^{-1}x^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu(x^{-1}y^{-1}) = \mu(y^{-1}x^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu(yx) = \mu(xy) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sonuç olarak μ , G grubunun bulanık normal alt grubudur.

Teorem 4.10: G bir grup ve μ , G nin bulanık alt grubu olsun. μ , G grubunun bulanık normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ olmak üzere $\mu([x, y]) \geq \mu(x)$ olmasıdır.

İspat: μ , G grubunun bulanık normal alt grubu olsun.

$\forall x, y \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mu([x, y]) &= \mu(x^{-1}y^{-1}xy) \geq \mu(x^{-1}) \wedge \mu(y^{-1}xy) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(x) \\ &= \mu(x)\end{aligned}\tag{4.20}$$

elde edilir.

Bu kez $\forall x, y \in G$ için $\mu([x, y]) \geq \mu(x)$ olsun.

$$\begin{aligned}\mu(y^{-1}xy) &= \mu(xx^{-1}y^{-1}xy) = \mu(x[x, y]) \geq \mu(x) \wedge \mu([x, y]) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(x) \\ &= \mu(x)\end{aligned}\tag{4.21}$$

elde edilir ve Teorem 3.2 den μ , G grubunun bulanık normal alt grubu olur.

Tanım 4.11: μ sonlu bir G grubunun indeksi r olan bulanık alt grubu olsun. μ nin mertebesi $\circ(\mu)$;

$$\circ(\mu) = \frac{\circ(G)}{r}\tag{4.22}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 4.12: G bir grup ve ν , G nin bulanık alt grubu olmak üzere $\{\nu_u : u \in G\}$ kümesinin kardinalitesi, $[G : N(\nu)]$ nin indeksine eşittir.

İspat: $u, v \in G$ olsun. Şu halde $\forall x \in G$ için

$$\begin{aligned}\nu_u = \nu_v &\Leftrightarrow \nu(uxu^{-1}) = \nu(vxv^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \nu(uv^{-1}.x) = \nu(x.uv^{-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow uv^{-1} \in N(v) \\
&\Leftrightarrow u^{-1}N(v) = v^{-1}N(v)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Dolayısıyla $\{v_u : u \in G\}$ den $\{uN(v) : u \in G\}$ ye $v_u \rightarrow u^{-1}N(v)$ şeklinde bire bir ve örten fonksiyon vardır.

Tanım 4.13: G bir grup ve μ , G nin bulanık alt grubu ve $x \in G$ olsun. $\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu$ ye μ nin x 'e göre bulanık sol koseti denir ve $x\mu$ ile gösterilir. $\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}$ ye μ nin x 'e göre bulanık sağ koseti denir ve μx ile gösterilir. Eğer μ , G nin bulanık normal alt grubu ise $x\mu = \mu x$ dir.

Bulanık koseti aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

Tanım 4.14: G bir grup ve μ , G nin bulanık alt grubu olsun. $\forall x \in G$ için

$$\hat{\mu}_x : G \rightarrow [0,1] \text{ ile } g \in G \text{ için}$$

$$\hat{\mu}_x(g) = \mu(gx^{-1}) \tag{4.24}$$

dönüşümü ile tanımlanan $\hat{\mu}_x$ e x ile tanımlı μ nin bulanık sağ koseti denir.

$\hat{\mu}_x(g) = \mu(x^{-1}g)$ dönüşümü ile tanımlanan $\hat{\mu}_x$ e x ile tanımlı μ nin bulanık sol koseti denir.

Tanım 4.15: μ sonlu bir G grubunun bulanık alt grubu ve F , μ nin bulanık kosetlerinin kümesi olsun. O taktirde F nin kardinalitesi μ nin indeksidir.

Tanım 4.16: μ sonlu bir G grubunun bulanık alt grubu olsun. Eğer μ , G nin değişmeli alt grubu ise μ ye bulanık değişmeli alt grup denir.

Teorem 4.17: p asal tamsayı olmak üzere p^2 mertebeli G grubunun bulanık alt grubu değişmelidir.

İspat: $\circ(\mu) = p^2$ olacak şekilde μ , G grubunun bulanık alt grubu olsun. Teorem 3.5 ten μ , G nin normal alt grubudur.

$$\circ(\mu) = \frac{\circ(G)}{r} \quad (4.25)$$

den

$$\circ(\mu) = \frac{\circ(G)}{\circ(G)/\circ(\mu_*)} = \circ(\mu_*) \quad (4.26)$$

elde edilir.

p^2 mertebeli bir grubun değişmeli olduğu grup teoriden bilinir. Böylece μ_* değişmelidir ve sonuç olarak μ bulanık değişmelidir.

Teorem 4.18: G bir grup ve μ , G nin bulanık alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için

$$1) x\mu = y\mu \Leftrightarrow x\mu_* = y\mu_* \quad (4.27)$$

$$2) \mu x = \mu y \Leftrightarrow \mu_* x = \mu_* y \quad (4.28)$$

dir.

İspat :

$$1) \quad x\mu = y\mu \text{ olsun. O takdirde } \forall z \in G \text{ için } \mu(x^{-1}z) = \mu(y^{-1}z) \text{ dir.}$$

$$z = y \text{ olarak alınırsa } \mu(x^{-1}y) = \mu(y^{-1}y) = \mu(e) \text{ ve } x^{-1}y \in \mu_* \text{ dır.}$$

Sonuç olarak $x\mu_* = y\mu_*$ elde edilir.

Bu kez $x\mu_* = y\mu_*$ olsun. Şu halde $x^{-1}y \in \mu_*$ ve $y^{-1}x \in \mu_*$ dır.

$\forall z \in G$ için

$$\begin{aligned} \mu(x^{-1}z) &= \mu(x^{-1}yy^{-1}z) \geq \mu(x^{-1}y) \wedge \mu(y^{-1}z) \\ &= \mu(e) \wedge \mu(y^{-1}z) \\ &= \mu(y^{-1}z) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$\forall z \in G$ için

$$\mu(y^{-1}z) = \mu(y^{-1}xx^{-1}z) \geq \mu(y^{-1}x) \wedge \mu(x^{-1}z)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu(e) \wedge \mu(x^{-1}z) \\
&= \mu(x^{-1}z)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Sonuç olarak $\mu(x^{-1}z) = \mu(y^{-1}z)$ ve $x\mu = y\mu$ elde edilir.

2) 1) deki ispata benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.19: G bir grup ve μ , G nin bulanık normal alt grubu olsun. Eğer $x, y \in G$ için $x\mu = y\mu$ ise $\mu(x) = \mu(y)$ dir.

İspat: $x\mu = y\mu$ olsun. Teorem 3.18 den $x^{-1}y \in \mu_*$ ve $y^{-1}x \in \mu_*$ dir.

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \mu(yy^{-1}x) \geq \mu(y) \wedge \mu(y^{-1}x) \\
&= \mu(y) \wedge \mu(e) \\
&= \mu(y)
\end{aligned} \tag{1} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\mu(y) &= \mu(xx^{-1}y) \geq \mu(x) \wedge \mu(x^{-1}y) \\
&= \mu(x) \wedge \mu(e) \\
&= \mu(x)
\end{aligned} \tag{2} \tag{4.32}$$

(1) ve (2) den $\mu(x) = \mu(y)$ elde edilir.

Teorem 4.20: G bir grup ve μ , G nin bulanık normal alt grubu olsun.

$\hat{\mu}: G/\mu_* \rightarrow [0,1]$, $\hat{\mu}(\mu_*x) = \mu(x)$ olarak tanımlanan $\hat{\mu}$ tasviri iyi tanımlıdır ve $\hat{\mu}$,

G/μ_* in bulanık normal alt grubudur.

İspat: $\forall x, y \in G$ için $\mu_*x = \mu_*y$ ise Teorem 3.19 dan $\mu(x) = \mu(y)$ dir.

$\mu(x) = \mu(y) \Rightarrow \hat{\mu}(\mu_*x) = \hat{\mu}(\mu_*y)$ ve $\hat{\mu}$ iyi tanımlı olduğu görülür.

$\forall x, y \in G$ için

$$\hat{\mu}(\mu_*x\mu_*y) = \hat{\mu}(\mu_*xy) = \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \tag{4.33}$$

ve

$$\hat{\mu}(\mu_*xy) \geq \hat{\mu}(\mu_*x) \wedge \hat{\mu}(\mu_*y)$$

$$\hat{\mu}(\mu_*x) = \mu(x) = \mu(x^{-1}) = \hat{\mu}(\mu_*x^{-1}) \quad (4.34)$$

Buradan $\hat{\mu}, G/\mu_*$ ın bulanık alt grubu olduğu görülür.

$$\hat{\mu}(\mu_*x\mu_*y) = \hat{\mu}(\mu_*xy) = \mu(xy) = \mu(yx) = \hat{\mu}(\mu_*yx) = \hat{\mu}(\mu_*y\mu_*x) \quad (4.35)$$

Sonuç olarak $\hat{\mu}, G/\mu_*$ ın bulanık normal alt grubudur.

Teorem 4.21: G bir grup ve μ, G nin bulanık normal alt grubu olsun. $\forall x \in G$ ve $g \in G$ için

$$\hat{\mu}_x(xg) = \hat{\mu}_x(gx) = \mu(g) \quad (4.36)$$

dir.

İspat:

$$\hat{\mu}_x(xg) = \mu(xgx^{-1}) = \mu(g)$$

$$\hat{\mu}_x(gx) = \mu(gxx^{-1}) = \mu(g) \quad (4.37)$$

Sonuç olarak $\forall x \in G$ ve $g \in G$ için $\hat{\mu}_x(xg) = \hat{\mu}_x(gx) = \mu(g)$ elde edilir.

Teorem 4.22: G bir grup ve μ, G nin bulanık normal alt grubu olmak üzere

$G/\mu = \{x\mu : x \in G\}$ kümesi verilsin. O takdirde,

$$1) (x\mu) \circ (y\mu) = (xy)\mu \quad \forall x, y \in G \quad (4.38)$$

$$2) \left(G/\mu, \circ \right) \quad (4.39)$$

yapısı bir gruptur.

$$3) G/\mu \cong G/\mu_* \quad (4.40)$$

4) $\mu^{(*)}(x\mu) = \mu(x)$, $\forall x \in G$ ile tanımlanan $\mu^{(*)}, G/\mu$ nin bulanık normal alt grubudur.

İspat:

1) $\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}
 (x\mu) \circ (y\mu) &= (\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu) \circ (\mu(e)_{\{y\}} \circ \mu) \\
 &= \mu(e)_{\{x\}} \circ (\mu \circ \mu(e)_{\{y\}}) \circ \mu \\
 &= (\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu(e)_{\{y\}}) \circ (\mu \circ \mu) \\
 &= (xy)\mu
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

2) 1) den G/μ , $\circ$ işlemi altında kapalıdır.

$\forall x, y, z \in G$ için

$$\begin{aligned}
 ((x\mu) \circ (y\mu)) \circ (z\mu) &= ((\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu) \circ (\mu(e)_{\{y\}} \circ \mu)) \circ (\mu(e)_{\{z\}} \circ \mu) \\
 &= (\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu) \circ ((\mu(e)_{\{y\}} \circ \mu) \circ (\mu(e)_{\{z\}} \circ \mu)) \\
 &= (\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu) \circ ((\mu(e)_{\{y\}} \circ \mu(e)_{\{z\}}) \circ \mu) \\
 &= (x\mu) \circ (y\mu \circ z\mu)
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$\forall x \in G$ için

$$\mu \circ (x\mu) = (e\mu) \circ (x\mu) = (ex)\mu = x\mu \tag{4.43}$$

$\forall x \in G$ için

$$(x^{-1}\mu) \circ (x\mu) = (x^{-1}x)\mu = e\mu = \mu \tag{4.44}$$

3) G/μ den G/μ_* a $f : x\mu \rightarrow x\mu_*$ bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in G$ için

$$f(x\mu \circ y\mu) = f(xy\mu) = xy\mu_* = (x\mu_*)(y\mu_*) = f(x\mu)f(y\mu) \tag{4.45}$$

ve f bir homomorfizmadır. $\forall x_1, x_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}
f(x_1\mu) = f(x_2\mu) &\Leftrightarrow x_1\mu_* = x_2\mu_* \\
&\Leftrightarrow x_1\mu = x_2\mu
\end{aligned} \tag{4.46}$$

f , 1-1 dir. $\forall x\mu_* \in G/\mu_*$ için $f(a) = x\mu_*$ olacak şekilde $\exists a = x\mu \in G/\mu$ vardır ve f örtendir.

Sonuç olarak $G/\mu \cong G/\mu_*$ elde edilir.

4) $\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}
\mu^{(*)}(x\mu \circ y\mu) &= \mu^{(*)}(xy\mu) \\
&= \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \\
&= \mu^{(*)}(x\mu) \wedge \mu^{(*)}(y\mu)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$\forall x \in G$ için

$$\mu^{(*)}((x\mu)^{-1}) = \mu^{(*)}(x^{-1}\mu) = \mu(x^{-1}) = \mu(x) = \mu^{(*)}(x\mu) \tag{4.48}$$

$\mu^{(*)}, G/\mu$ nin bulanık alt grubudur. $\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}
\mu^{(*)}(x\mu \circ y\mu) &= \mu^{(*)}(xy\mu) \\
&= \mu(xy) \\
&= \mu(yx) \\
&= \mu^{(*)}(yx\mu) \\
&= \mu^{(*)}(y\mu \circ x\mu)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

ve $\mu^{(*)}, G/\mu$ nin bulanık normal alt grubudur. Teorem 4.22 deki G/μ grubuna G nin μ bulanık normal alt grubuna göre bölüm grubu denir.

Teorem 4.23: G bir grup, ν , G nin bulanık normal alt grubu ve N de G nin normal alt grubu olsun. $\varepsilon \in [0,1]^{G/N}$ öyle ki $\forall x \in G$ için $\varepsilon([x]) = \vee \{\nu(z) : z \in [x]\}$ ve $[x] = xN$ şeklinde tanımlanan $\varepsilon, G/N$ bölüm grubunun bulanık alt grubudur.

İspat: $\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}
\varepsilon([x][y]) &= \vee \{ \nu(z) : z \in [xy] \} \\
&= \vee \{ \nu(uv) : u \in [x], v \in [y] \} \\
&\geq \vee \{ \nu(u) \wedge \nu(v) : u \in [x], v \in [y] \} \\
&= \left(\vee \{ \nu(u) : u \in [x] \} \right) \wedge \left(\vee \{ \nu(v) : v \in [y] \} \right) \\
&= \varepsilon([x]) \wedge \varepsilon([y])
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$\forall x \in G$ için

$$\begin{aligned}
\varepsilon([x]^{-1}) &= \varepsilon([x^{-1}]) \\
&= \vee \{ \nu(z) : z \in [x^{-1}] \} \\
&= \vee \{ \nu(w^{-1}) : w^{-1} \in [x^{-1}] \} \\
&\geq \vee \{ \nu(w) : w \in [x] \} \\
&= \varepsilon([x])
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Sonuç olarak ε , G/N nin bulanık alt grubudur. Teorem 4.23 deki bulanık alt grup ε 'a ν bulanık alt grubunun N normal alt grubuna göre bölüm grubu denir ve ν/N şeklinde gösterilir.

Teorem 4.24: G bir grup, μ , G nin bulanık normal alt grubu ve H de bir grup olsun.

f fonksiyonu G den H ye izomorfizma olmak üzere $f(\mu)$ bulanık kümesi H grubunun bulanık normal alt grubudur.

İspat:

Teorem 3.16 dan $f(\mu)$, H nin bulanık alt grubudur.

f örten olduğundan $f(u) = x \in H$ olacak şekilde $u \in G$ vardır.

$\forall x, y \in H$ için

$$f(\mu)(xyx^{-1}) = \vee \{ \mu(w) : w \in G, f(w) = xyx^{-1} \}$$

$$\begin{aligned}
&= \vee \left\{ \mu(u^{-1}wu) : w \in G, f(u^{-1}wu) = y \right\} \\
&= \vee \left\{ \mu(u^{-1}wu) : u^{-1}wu \in G, f(w) = y \right\} \\
&= \vee \left\{ \mu(w) : w \in G, f(w) = y \right\} = f(\mu)(y)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Teorem 3.2 den $f(\mu)$, H nin bulanık normal alt grubudur.

Teorem 4.25: H bir grup ve ν , H nin bulanık normal alt grubu olsun. f , G grubundan

H grubuna bir homomorfizma olmak üzere $f^{-1}(\nu)$, G grubunun bulanık normal alt grubudur.

İspat: Teorem 3.17 den $f^{-1}(\nu)$, G nin bulanık alt grubudur.

$\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\nu)(xy) &= \nu(f(xy)) = \nu(f(x)f(y)) \\
&= \nu(f(y)f(x)) \\
&= \nu(f(yx)) \\
&= f^{-1}(\nu)(yx)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Teorem 3.2 den $f^{-1}(\nu)$, G nin normal bulanık alt grubudur.

5. HOMOMORFİZMALAR

Tanım 5.1: G bir grup, $\mu \subseteq \nu$ olacak şekilde μ, ν, G nin bulanık alt grupları olsun.

Eğer $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy x^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x)$ ise μ ye ν nin bulanık normal alt grubu denir ve $\mu \triangleleft \nu$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.2: G bir grup olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (1) Eğer G_1, G_2, G nin iki alt grubu ise G_1, G_2 nin normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $1_{G_1}, 1_{G_2}$ nin bulanık normal alt grubu olmasıdır.
- (2) $\mu \subseteq \nu$ olmak üzere μ, G nin bulanık normal alt grubu ve ν, G nin bulanık alt grubu ise μ, ν nin bulanık normal alt grubudur.
- (3) Her bulanık alt grup kendisinin bulanık alt grubudur.
- (4) μ, G nin bulanık normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\mu, 1_G$ nin bulanık normal alt grubu olmasıdır.

İspat:

- (1) $(\Rightarrow)$ G_1, G_2 nin normal alt grubu olsun.

$\forall x \in G_2$ ve $\forall y \in G_1$ için

$$xyx^{-1} = y \quad (5.1)$$

dir.

$$1_{G_1}(y) = 1_{G_1}(xyx^{-1}) \geq 1_{G_1}(y) \wedge 1_{G_2}(x) \quad (5.2)$$

olduğu açıktır ve $1_{G_1} \triangleleft 1_{G_2}$ elde edilir.

- $(\Leftarrow)$ $\forall x \in G_2$ ve $\forall y \in G_1$ için

$$\begin{aligned} 1_{G_1}(xyx^{-1}) &\geq 1_{G_1}(y) \wedge 1_{G_2}(x) \\ &\geq 1_{G_1}(y) = 1_{G_1}(x^{-1}xyx^{-1}x) \\ &\geq 1_{G_1}(xyx^{-1}) \wedge 1_{G_2}(x^{-1}) \\ &= 1_{G_1}(xyx^{-1}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

ve $1_{G_1}(xyx^{-1}) = 1_{G_1}(y) = 1$ elde edilir.

Sonuç olarak $\forall x \in G_2$ ve $\forall y \in G_1$ için $xyx^{-1} \in G_1$ ve G_1, G_2 nin normal alt grubudur.

(2) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y)$ ve $\nu(xy) \geq \nu(x) \wedge \nu(y)$ dir.

$\mu \subseteq \nu$ olduğundan $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ve

$\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x)$ elde edilir.

Sonuç olarak $\mu \triangleleft \nu$ dir.

(3) $\forall x, y \in G$ için μ, G nin bulanık alt grubu olsun .

$$\begin{aligned} \mu(xyx^{-1}) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(x^{-1}) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Sonuç olarak μ kendisinin bulanık normal alt grubudur.

(4) $(\Rightarrow) \forall x, y \in G$ için μ, G nin bulanık normal alt grubu olsun ve $\mu \subseteq 1_G$ dir.

$\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \Rightarrow \mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \wedge 1_G(x)$ olduğu açıktır.

Sonuç olarak $\mu \triangleleft 1_G$ dir.

$(\Leftarrow) \forall x, y \in G$ için $\mu \triangleleft 1_G$ olsun.

$\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \wedge 1_G(x) = \mu(y)$ dir ve

μ, G nin bulanık normal alt grubudur.

Teorem 5.3: G bir grup ve μ, ν, G nin bulanık alt grupları olmak üzere, $\mu \triangleleft \nu$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in \text{Im}(\mu)$ için μ_a, ν_a nin normal alt grubu olmasıdır.

İspat :

$(\Rightarrow) \mu \triangleleft \nu$ olsun.

Yani $\forall x, y \in G$ için $\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x)$ olsun. $\forall a \in \text{Im}(\mu)$ için $\mu_a \subseteq \nu_a$ dır. $\forall y \in \mu_a$ ve $\forall x \in \nu_a$ için

$$\mu(xy x^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x) \geq a \quad (5.5)$$

dır ve $xyx^{-1} \in \mu_a$ elde edilir. Sonuç olarak μ_a, ν_a nın normal alt grubudur.

($\Leftarrow$) $\forall a \in \text{Im}(\mu)$ için $\mu_a \triangleleft \nu_a$ olsun. $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} \mu(xy x^{-1}) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \\ &\geq \mu(y) \wedge \nu(x) \end{aligned} \quad (5.6)$$

ve $\mu \triangleleft \nu$ elde edilir.

Teorem 5.4: G bir grup ve μ, ν, G nin bulanık alt grupları olsun. Eğer $\mu \triangleleft \nu$ ise

μ_*, ν_* in ve μ^*, ν^* in normal alt grubudur.

İspat: $\mu \triangleleft \nu$ olsun. $\forall y \in \mu_*$ ve $\forall x \in \nu_*$ için

$$\mu(xy x^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x) = \mu(e) \quad (5.7)$$

ve

$$\mu(e) \geq \mu(xy x^{-1}) \quad (5.8)$$

olduğundan $\mu(xy x^{-1}) = \mu(e)$ ve $xyx^{-1} \in \mu_*$ dir. Sonuç olarak μ_*, ν_* in normal alt grubudur. $\forall y \in \mu^*$ ve $\forall x \in \nu^*$ için

$$\mu(xy x^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x) > 0 \quad (5.9)$$

ve $xyx^{-1} \in \mu^*$ dir. Sonuç olarak μ^*, ν^* in normal alt grubudur.

Teorem 5.5: G bir grup ve μ, G nin bulanık normal alt grubu ve ν, G nin alt grubu olsun.

O takdirde $\mu \cap \nu \triangleleft \nu$ dir.

İspat: Teorem 3.18 den $\mu \cap \nu, G$ nin bulanık alt grubudur. Ayrıca $\mu \cap \nu \subseteq \nu$ dir.

$\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)(xy x^{-1}) &= \mu(xy x^{-1}) \wedge \nu(xy x^{-1}) \\ &\geq \mu(y) \wedge \nu(x) \wedge \nu(y) \wedge \nu(x^{-1}) \\ &\geq (\mu(y) \wedge \nu(y)) \wedge \nu(x) \end{aligned}$$

$$=(\mu \cap \nu)(y) \wedge \nu(x) \quad (5.10)$$

Böylece $\mu \cap \nu \triangleleft \nu$ elde edilir.

Teorem 5.6: G bir grup ve μ, ν, ε , G nin bulanık alt grupları olsun. Ayrıca μ, ν bulanık alt grupları ε nun bulanık normal alt grupları olsun. O takdirde $\mu \cap \nu$, ε nun bulanık normal alt grubudur.

İspat: Teorem 3.18 den $\mu \cap \nu$, G nin bulanık alt grubudur. Ayrıca $\mu \cap \nu \subseteq \varepsilon$ olduğu açıktır.

$\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)(xyx^{-1}) &= \mu(xyx^{-1}) \wedge \nu(xyx^{-1}) \\ &\geq (\mu(y) \wedge \varepsilon(x)) \wedge (\nu(y) \wedge \varepsilon(x)) \\ &= (\mu(y) \wedge \nu(y)) \wedge \varepsilon(x) \\ &= (\mu \cap \nu)(y) \wedge \varepsilon(x) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sonuç olarak $\mu \cap \nu$, ε nun bulanık normal alt grubu olduğu elde edilir.

Teorem 5.7: G bir grup, μ, ν , G nin bulanık alt grupları ve μ, ν nin bulanık normal alt grubu olsun. H bir grup olmak üzere f , G den H ye bir izomorfizma olsun. O takdirde $f(\mu)$, $f(\nu)$ nin bulanık normal alt grubudur.

İspat: Teorem 3.16 dan $f(\mu)$, $f(\nu)$, H nin bulanık alt gruplarıdır ve $f(\mu) \subseteq f(\nu)$ dir.

$\forall x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} (f(\mu))(xyx^{-1}) &= \vee \{ \mu(z) : z \in G, f(z) = xyx^{-1} \} \\ &= \vee \{ \mu(uvu^{-1}) : u, v \in G, f(u) = x, f(v) = y \} \\ &\geq \vee \{ \mu(v) \wedge \nu(u) : u, v \in G, f(u) = x, f(v) = y \} \\ &= (\vee \{ \mu(v) : v \in G, f(v) = y \}) \wedge (\vee \{ \nu(u) : u \in G, f(u) = x \}) \\ &= (f(\mu)(y)) \wedge (f(\nu)(x)) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Sonuç olarak $f(\mu)$, $f(\nu)$ nin bulanık normal alt grubudur.

Teorem 5.8: H bir grup ve $\mu \triangleleft \nu$ olacak şekilde μ, ν , H nin bulanık alt grupları olsun.

f , G grubundan H grubuna bir homomorfizma olsun. O takdirde $f^{-1}(\mu) \triangleleft f^{-1}(\nu)$ dir.

İspat:

Teorem 3.17 den $f^{-1}(\mu)$, $f^{-1}(\nu)$, G nin bulanık alt gruplarıdır ve $f^{-1}(\mu) \subseteq f^{-1}(\nu)$ olduğu açıktır. $\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mu)(xyx^{-1}) &= \mu(f(xyx^{-1})) \\ &= \mu(f(x)f(y)f(x^{-1})) \\ &\geq \mu(f(y)) \wedge \nu(f(x)) \\ &= f^{-1}(\mu)(y) \wedge f^{-1}(\nu)(x) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Sonuç olarak $f^{-1}(\mu) \triangleleft f^{-1}(\nu)$ olduğu elde edilir.

Teorem 5.9: G bir grup ve μ, ν , $\mu \subseteq \nu$ olacak şekilde G nin bulanık alt grupları olsun.

O takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \mu \triangleleft \nu \quad (5.14)$$

$$(2) \forall x, y \in G \text{ için}$$

$$\mu(yx) \geq \mu(xy) \wedge \nu(y) \quad (5.15)$$

$$(3) \forall x \in G \text{ için}$$

$$\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu \supseteq (\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}) \cap \nu \quad (5.16)$$

dir.

İspat:

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$\mu \triangleleft \nu$ olsun.

$\forall x, y \in G$ için

$$\mu(yx) = \mu(yxyy^{-1}) = \mu(y.xy.y^{-1}) \geq \mu(xy) \wedge \nu(y) \quad (5.17)$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$\forall x, y \in G$ için

$$\mu(yx) \geq \mu(xy) \wedge \nu(y) \quad (5.18)$$

olsun.

$$\begin{aligned} (\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu)(y) &= \mu(e) \wedge \mu(x^{-1}y) = \mu(x^{-1}y) \\ &\geq \mu(yx^{-1}) \wedge \nu(y) \\ &= (\mu \circ \mu(e)_{\{x\}})(y) \wedge \nu(y) \\ &= (\mu \circ \mu(e)_{\{x\}} \cap \nu)(y) \end{aligned} \quad (5.19)$$

(3) $\Rightarrow$ (1)

$\forall x, y \in G$

$$\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu \supseteq (\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}) \cap \nu \quad (5.20)$$

olsun.

$$\begin{aligned} \mu(xyx^{-1}) &= (\mu(e)_{\{x^{-1}\}} \circ \mu)(yx^{-1}) \\ &\geq ((\mu \circ \mu(e)_{\{x^{-1}\}}) \cap \nu)(yx^{-1}) \\ &= (\mu \circ \mu(e)_{\{x^{-1}\}})(yx^{-1}) \wedge \nu(yx^{-1}) \\ &\geq \mu(y) \wedge \nu(y) \wedge \nu(x) \\ &\geq \mu(y) \wedge \nu(x) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sonuç olarak $\mu \triangleleft \nu$ elde edilir.

Tanım 5.10: G ve H birer grup ve μ, G nin ν, H nin bulanık alt grupları olsun f, G den H ye bir homomorfizma olmak üzere,

(i) Eğer $f(\mu) = \nu$ ise f ye μ den ν ye bir homomorfizma denir. Ayrıca f, μ den ν ye bir homomorfizma ise μ ile ν homomorfiktir denir ve $\mu \approx \nu$ ile gösterilir. f, G den H ye bir izomorfizma olmak üzere

(ii) Eğer $f(\mu) = \nu$ ise f ye μ den ν ye bir izomorfizma denir. Ayrıca f , μ den ν ye bir izomorfizma ise μ ile ν izomorfiktir denir ve $\mu \cong \nu$ ile gösterilir.

μ, ν, G nin $\mu \triangleleft \nu$ olacak şekilde bulanık alt grupları olsun. O takdirde μ^*, ν^* in normal alt grubudur. $\nu|_{\nu^*}, \nu^*$ in bulanık alt grubudur. Şu halde Teorem 3.23 e göre $\nu|_{\nu^*}$ in μ^* a göre bölüm grubu vardır. Uygunluk için bu bölüm grubu ν/μ şeklinde tanımlanır ve bu bölüm grubuna ν nin μ ye göre bölüm grubu denir.

Teorem 5.11: G bir grup ve $\mu \triangleleft \nu$ olacak şekilde μ, ν, G nin bulanık alt grupları olsun.

O takdirde $\nu|_{\nu^*} \approx \nu/\mu$ dir.

İspat: f, ν^* dan ν^*/μ^* a doğal homomorfizma olsun. f örtendir. $\forall x \in \nu^*$ için $[x] = x\mu^*$

$$f(\nu|_{\nu^*})([x]) = \vee \{ \nu|_{\nu^*}(z) : z \in [x], f(z) = [x] \} = \vee \{ \nu(y) : y \in [x] \} = (\nu/\mu)([x]) \quad (5.22)$$

Sonuç olarak $\nu|_{\nu^*} \approx \nu/\mu$ elde edilir.

Teorem 5.12: G ve H birer grup ve ν, G nin ε, H nin $\nu \approx \varepsilon$ olacak şekilde bulanık alt grupları olsun. ν nin μ gibi öyle bir bulanık normal alt grubu vardır ki $\nu/\mu \cong \varepsilon|_{\varepsilon^*}$ dir.

İspat : $\nu \approx \varepsilon$ olduğundan f, G den H ye bir epimorfizmadır.

$\mu \in [0,1]^G$ olsun ve $\forall x \in G$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} \nu(x) & ; x \in \text{Ker}f \\ 0 & ; x \notin \text{Ker}f \end{cases} \quad (5.23)$$

şeklinde tanımlansın.

$\forall x, y \in \text{Ker}f$ için

$$\mu(xy) = \nu(xy) \geq \nu(x) \wedge \nu(y)$$

$$\mu(x^{-1}) = \nu(x^{-1}) \geq \nu(x) = \mu(x) \quad (5.24)$$

$\forall x, y \in G \setminus \text{Ker}f$ için $\mu(x) = 0$ olduğundan μ, G nin bulanık alt grubudur ve $\mu \subseteq \nu$ dir.

$x \in \text{Kerf}$ ve $\forall y \in G$ için $xyx^{-1} \in \text{Kerf}$ dir.

$$\mu(yxy^{-1}) = \nu(yxy^{-1}) \geq \nu(x) \wedge \nu(y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \quad (5.25)$$

$x \in G \setminus \text{Kerf}$ için $\mu(x) = 0$ dir. $\forall y \in G$ için

$$\mu(yxy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \nu(y) \quad (5.26)$$

dir. Sonuç olarak μ, ν nin bulanık alt grubudur. $\nu \approx \varepsilon$ olduğundan $f(\nu^*) = \varepsilon^*$ dir. $g = f|_{\nu^*}$ olsun. g, ν^* dan ε^* örten homomorfizmadır ve $\text{Ker}g = \mu^*$ dir. Şu halde $h, \nu^*/\mu^*$ dan ε^* a bir izomorfizmadır öyle ki $\forall x \in \nu^*$ için $h([x]) = g(x) = f(x)$ dir. $\forall z \in \varepsilon^*$ için

$$\begin{aligned} h\left(\nu/\mu\right)(z) &= \vee \left\{ \left(\nu/\mu\right)([x]) : x \in \nu^*, h([x]) = z \right\} \\ &= \vee \left\{ \vee \left\{ \nu(y) : y \in [x] \right\} : x \in \nu^*, g(x) = z \right\} \\ &= \vee \left\{ \nu(y) : y \in \nu^*, g(y) = z \right\} \\ &= \vee \left\{ \nu(y) : y \in G, f(y) = z \right\} \\ &= \varepsilon(z) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Sonuç olarak $\nu/\mu \cong \varepsilon|_{\varepsilon^*}$ dir.

Teorem 5.13: G bir grup ve μ, G nin bulanık normal alt grubu ve ν de G nin $\mu(e) = \nu(e)$ olacak şekilde bulanık alt grubu olsun. O takdirde $\nu/(\mu \cap \nu) \cong (\mu \circ \nu)/\mu$ dir.

İspat: Teorem 4.5 ten μ^*, G nin normal alt grubudur. Grupların ikinci izomorfizma teoremine göre

$$\nu^*/(\mu^* \cap \nu^*) \cong (\nu^* \mu^*)/\mu^* \quad (5.28)$$

dir. Ayrıca

$$(\mu \cap \nu)^* = \mu^* \cap \nu^* \text{ ve } (\mu \circ \nu) = \mu^* \nu^* \quad (5.29)$$

dir. Böylece

$$\nu^* / (\mu \cap \nu)^* \cong (\nu \circ \mu)^* / \mu^* \quad (5.30)$$

elde edilir öyle ki $\forall x \in \nu^*$ için $f(x(\mu \cap \nu)^*) = x\mu^*$ dir. $\forall y \in \nu^*$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\nu / (\mu \cap \nu)\right)(y\mu^*) &= \left(\nu / (\mu \cap \nu)\right)(y(\mu \cap \nu)^*) && (f, 1-1 \text{ olduğundan}) \\ &= \nu\{z : z \in y(\mu \cap \nu)^*\} \\ &\leq \nu\{(\mu \circ \nu)(z) : z \in y(\mu^* \cap \nu^*)\} \\ &\leq \nu\{(\mu \circ \nu)(z) : z \in y\mu^*\} && (\mu(e) = \nu(e) \text{ olduğundan}) \\ &= \left((\mu \circ \nu) / \mu\right)(y\mu^*) && (5.31) \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$f\left(\nu / (\mu \cap \nu)\right) \subseteq \left((\mu \circ \nu) / \mu\right) \text{ dir ve } \nu / (\mu \cap \nu) \sqsubseteq (\mu \circ \nu) / \mu \quad (5.32)$$

Teorem 5.14: G bir grup μ, ν, ε , G nin bulanık alt grupları olmak üzere μ, ν nin bulanık normal alt grubu, μ, ν de ε nun bulanık normal alt grubu olsun. O takdirde

$$\left(\varepsilon / \mu\right) / \left(\nu / \mu\right) \cong \varepsilon / \nu \text{ dir.}$$

İspat: Teorem 5.4 ten μ^*, ν^* in ve μ^* ile ν^* da ε^* in normal alt gruplarıdır. Grupların üçüncü izomorfizma teoremine göre

$$\left(\varepsilon^* / \mu^*\right) / \left(\varepsilon^* / \nu^*\right) \cong \varepsilon^* / \nu^* \quad (5.33)$$

dir öyle ki $\forall x \in \varepsilon^*$ için,

$$f\left(x\mu^* \cdot \left(\nu^* / \mu^*\right)\right) = x\nu^* \quad (5.34)$$

dir. $\forall x \in \varepsilon^*$ için,

$$f\left(\left(\varepsilon / \mu\right) / \left(\nu / \mu\right)\right)(x\nu^*) = \left(\left(\varepsilon / \mu\right) / \left(\nu / \mu\right)\right)\left(x\mu^* \cdot \left(\nu^* / \mu^*\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \vee \left\{ \left(\varepsilon / \mu \right) (y \mu^*) : y \in \varepsilon^*, y \mu^* \in x \mu^* . \left(\nu^* / \mu^* \right) \right\} \\
&= \vee \left\{ \vee \left\{ \varepsilon (z) : z \in y \mu^* \right\} : y \in \varepsilon^*, y \mu^* \in x \mu^* . \left(\nu^* / \mu^* \right) \right\} \\
&= \vee \left\{ \varepsilon (z) : z \in \varepsilon^*, z \mu^* \in x \mu^* . \left(\nu^* / \mu^* \right) \right\} \\
&= \vee \left\{ \varepsilon (z) : z \in x \mu^* . \left(\nu^* / \mu^* \right) \right\} \\
&= \vee \left\{ \varepsilon (z) : z \in \varepsilon^*, f(z) \in x \nu^* \right\} \\
&= \left(\varepsilon / \nu \right) (x \nu^*) \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $\left(\varepsilon / \mu \right) / \left(\nu / \mu \right) \cong \varepsilon / \nu$ elde edilir.

6. BULANIK HALKALAR VE İDEALLER

Buraya kadar tezimizde bulanık grup yapısından bahsettik. Şimdi bu benzerliğin ve ilişkinin halkalar içinde olduğunu göstereceğiz.

Tanım 6.1: R bir halka μ, ν R halkasının bulanık alt kümeleri olsun. $\mu + \nu, -\mu, \mu - \nu, \mu \circ \nu$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall x \in R$,

$$(\mu + \nu)(x) = \vee \left\{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y + z = x \right\}, \quad (6.1)$$

$$(-\mu)(x) = \mu(-x), \quad (6.2)$$

$$(\mu - \nu)(x) = \vee \left\{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y - z = x \right\}, \quad (6.3)$$

$$(\mu \circ \nu)(x) = \vee \left\{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, yz = x \right\}, \quad (6.4)$$

$\mu + \nu, \mu - \nu$ ve $\mu \circ \nu$ sırasıyla μ ve ν nın toplamı, farkı ve çarpımı olarak adlandırılır. $-\mu$, μ nün negatifi olarak tanımlanır. Tanımdan R bir halka; μ, ν , R halkasının bulanık alt kümeleri $\mu + \nu = \nu + \mu$, $\mu - \nu = \mu + (-\nu)$ dir. R halkası değişmeli olduğundan $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ dir.

Tanım 6.2: Tanımdan R bir halka; μ, ν, ξ R halkasının bulanık alt kümeleri olsun.

Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

1. $\mu \circ \nu \subseteq \mu \nu$
2. $\nu \subset \xi \Rightarrow \mu \nu \subseteq \mu \xi$
3. $(\mu \nu) \xi = \mu(\nu \xi)$
4. $(\mu \nu)(x + y) \geq (\mu \nu)(x) \wedge (\mu \nu)(y) \quad \forall x, y \in R$
5. Eğer R halkasının birim elemanı 1 ve $1_{(1)} \subseteq \nu$ ise $\mu \subseteq \mu \nu$ dir.
6. $1_R \circ \mu \subseteq \mu$

R bir halka ve $\forall w \in R$ için,

$$((\mu \nu) \xi)(w) = \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\mu(x_i) \wedge \nu(y_i) \wedge \xi(z_i)) \mid x_i, y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n x_i y_i z_i = w \right\} \quad (6.5)$$

dir.

Tanım 6.3: R bir halka ve μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. μ^n ve $\mu^{(n)}$ R halkasının bulanık alt kümeleri olmak üzere $n \in N, n \geq 1$ için μ^n ve $\mu^{(n)}$ yi aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\mu^1 = \mu$$

$$\mu^n = \mu^1 \circ \mu^{n-1}$$

$$\mu^{(1)} = \mu$$

$$\mu^{(n)} = \mu^{(1)} \mu^{(n-1)}$$

Tanım 6.4: R bir halka ve μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda eğer;

$$(R_1) \mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall x, y \in R \quad (6.6)$$

ve

$$(R_2) \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall x, y \in R \quad (6.7)$$

sağlanırsa μ ye R halkasının bulanık alt halkası denir.

Tanım 6.5: R bir halka ve μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun ve μ , (R_1) şartını sağlasın. Eğer μ ,

$$(R_3) \mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y) \quad \forall x, y \in R \quad (6.8)$$

şartını sağlıyorsa R halkasının bulanık ideali olarak adlandırılır. Eğer R bir halka; μ , R nin bulanık ideali ise, bu durumda;

$$\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\} \quad (6.9)$$

R bir halka ve μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. R halkası değişmeli olduğundan μ nün (R_3) ü sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\mu(xy) \geq \mu(x) \quad \forall x, y \in R \quad (6.10)$$

olmasıdır.

Örnekler 6.6:

(1) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası için $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ 'e $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $\mu(x) = \frac{4}{5}$ olarak tanımlanan μ bulanık kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin bulanık alt idealidir.

(2) $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ 'e $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}; & x \in 2\mathbb{Z} \\ 0; & x \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (6.11)$$

olarak tanımlanan μ bulanık kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bulanık idealidir.

(3) $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ 'e $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} 1; & x = 0 \\ 2/5; & x \in 2\mathbb{Z} - \{0\} \\ 1/5; & x \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (6.12)$$

olarak tanımlanan μ bulanık kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bulanık idealidir.

Teorem 6.7: $A \subseteq R$ olsun. A nın R nin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul 1_A nın R halkasının bir bulanık ideali olmasıdır.

Teorem 6.8: R bir halka ve μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. μ nün R nin bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in \mu(R) \cup \{b \in [0,1] | b < \mu(0)\}$ için μ_a nın R halkasının bir ideali olmasıdır.

İspat: R bir halka ve μ , R nin bulanık idealler kümesi olsun. $a \leq \mu(0)$ veya $a \in \mu(R)$ olacak şekilde bir $a \in [0,1]$ olsun. $x, y \in \mu_a, r \in R$ olsun. Bu durumda $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ve $\mu(rx) \geq \mu(x) \geq a$ dır. Buradan $x-y, rx \in \mu_a$ dır. Yani μ_a R halkasının bir idealidir. Tersine $\mu_a \forall a \in \mu(R) \cup \{b \in [0,1] | b \leq \mu(0)\}$ için R halkasının bir ideali olsun. R bir halka, $\forall x, y \in R$ ve $a = \mu(x) \wedge \mu(y)$ olsun. Bu durumda $a \leq \mu(0)$ ve $x, y \in \mu_a$ dır. Yani $x-y \in \mu_a$ dır. Bu durumda $\mu(x-y) \geq a = \mu(x) \wedge \mu(y)$ dır. $b = \mu(x) \in$

$\mu(R)$ olsun. Yani $x \in \mu b$ dir. μb R nin bir ideali olduğundan $rx \in \mu b$ dir. Yani $\mu(rx) \geq b = \mu(x)$ dir. O halde μ R halkasının bulanık idealidir.

Teorem 6.9: R bir halka ve μ, ν R nin bulanık ideali olsun.

- (1) $\mu(0) \geq \mu(x) \quad \forall x \in R$
- (2) R halkası birimli olduğundan $\mu(1) \leq \mu(x) \quad \forall x \in R$
- (3) $x, y \in R$ olsun. $\mu(x-y) = \mu(0)$ ise $\mu(x) = \mu(y)$ dir.
- (4) μ_* R nin bir idealidir.
- (5) $\mu^* [0,1]$ de ise R nin bir idealidir.
- (6) $\mu_* \cap \nu_* \subseteq (\mu \cap \nu)_*$

İspat:

$$(1) \mu(0) = \mu(x-x) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x) \quad (6.13)$$

$$(2) \mu(x) = \mu(x1) \geq \mu(1) \quad (6.14)$$

$$(3) \mu(x) = \mu(x-y+y) \geq \mu(x-y) \wedge \mu(y) = \mu(0) \wedge \mu(y) = \mu(y) \quad (6.15)$$

Benzer şekilde

$$\mu(y) \geq \mu(x). \quad (6.16)$$

Yani

$$\mu(y) = \mu(x) \quad (6.17)$$

(4) ve (5) benzer şekilde yapılır.

(6) $x \in \mu_* \wedge \nu_*$ olsun. $\mu(x) = \mu(0)$ ve $\nu(x) = \nu(0)$ olduğundan

$$(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) = \mu(0) \wedge \nu(0) = (\mu \wedge \nu)(0) \quad (6.18)$$

Buradan $x \in (\mu \wedge \nu)$ dir. Yani

$$\mu_* \cap \nu_* \subseteq (\mu \wedge \nu)_* \quad (6.19)$$

Tanım 6.10: Regülerlik: $\forall a, b \in [0,1]$ için $a=0, b=0$ olmak üzere $a \wedge b = 0$ a ve b ye reguler denir.

Genel olarak tanım 5.8(6) nolu eşitlik durumu sağlanmak zorunda değildir.

Örnek 6.11: $L = [0,1]$ olsun. R bir halka ve μ, ν R nin bulanık alt kümeleri olacak şekilde $\mu(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in R$ ve $\nu(x) = \frac{1}{2}$ eğer $x \neq 0$ ise ve $\nu(0) = 1$ Bu durumda μ, ν R nin bulanık idealidir. Yani $\mu_* \cap \nu_* = R \cap \{0\} = \{0\}$ ve $(\mu \cap \nu)_* = R$

Yardımcı teorem 6.12: R bir halka μ, ν R nin bulanık ideali olsun ve $\mu(0) = \nu(0)$ olsun. Bu durumda $\mu_* \cap \nu_* = (\mu \cap \nu)_*$ dir.

İspat: $x \in (\mu \cap \nu)_*$ olsun. Bu durumda $(\mu \cap \nu)(x) = (\mu \cap \nu)(0)$. Yani $\mu(x) \cap \nu(x) = \mu(0) \cap \nu(0)$. Bu durumda $\mu(x) = \mu(0) = \nu(0) = \nu(x)$ tir. Bundan dolayı $x \in \mu_* \cap \nu_*$ buradan $(\mu \cap \nu)_* \subseteq \mu_* \cap \nu_*$ dir. Yani $\mu_* \cap \nu_* \subseteq (\mu \cap \nu)_*$ tir. (Teorem 5.10 dan). Yani $\mu_* \cap \nu_* = (\mu \cap \nu)_*$ dir.

Teorem 6.13: R bir halka ve μ, ν, η R nin bulanık idealleri olsun. Bu durumda $\mu \circ \nu \subseteq \eta$ için gerek ve yeter koşul $\mu\nu \subseteq \eta$ dir.

İspat: Açıkça, $\mu \circ \nu \subseteq \mu\nu$. Yani $\mu\nu \subseteq \eta$ dir. Bu durumda $\mu \circ \nu \subseteq \eta$ dir. Tersine $\mu \circ \nu \subseteq \eta$ olduğunu kabul edelim. $x \in R$ olsun ve

$$x = \sum_{i=1}^n y_i z_i, \quad y_i z_i \in R, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.20)$$

Bu durumda

$$\eta(x) = \eta\left(\sum_{i=1}^n y_i z_i\right) \geq \bigwedge_{i=1}^n \eta(y_i z_i) \quad (6.21)$$

Yani,

$$\eta(y_i z_i) \geq (\mu \circ \nu)(y_i z_i) \geq \mu(y_i) \wedge \nu(z_i) \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (6.22)$$

Yani,

$$\bigwedge_{i=1}^n \{\mu(y_i) \wedge \nu(z_i)\} \leq \bigwedge_{i=1}^n \{\mu(y_i z_i)\} \leq \eta(x) \quad (6.23)$$

Buradan

$$\vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\mu(y_i) \wedge \nu(z_i)) \mid x = \sum_{i=1}^n y_i z_i, n \in N \right\} \leq \eta(x) \quad (6.24)$$

Yani $\mu\nu(x) \leq \eta$. Bu durumda $\mu\nu \subseteq \eta$ olur.

Teorem 6.14: R bir halka, μ R nin bulanık ideali ve ν R nin bulanık alt halkası olsun. Bu durumda $\mu\nu$ R nin bulanık ideali ve $\mu\nu = \langle \mu \circ \nu \rangle$ dir.

İspat: $x, y \in R$ olsun. Açıkça

$$(\mu\nu)(-x) = \mu\nu(x) \quad (6.25)$$

dir. Tanım 5.2(4) ten dolayı

$$(\mu\nu)(x+y) \geq (\mu\nu)(x) \wedge (\mu\nu)(y) \quad (6.26)$$

dir. Yani

$$\begin{aligned} (\mu\nu)(xy) &\geq \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\mu(xu_i) \wedge \nu(v_i)) \mid u_i, v_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n u_i v_i = y \right\} \\ &\geq \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\mu(u_i) \wedge \nu(v_i)) \mid u_i, v_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n u_i v_i = y \right\} \\ &= (\mu\nu)(y) \quad \forall x, y \in R. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Bundan dolayı R halkadır. $\mu\nu$, R halkasının bulanık idealidir. Tanım 5.2(1) den dolayı $\mu \circ \nu \subseteq \mu\nu$ dir. ξ , R nin bulanık ideali ve $\mu \circ \nu \subseteq \xi$ olsun. $x \in R$ olsun.

$$\begin{aligned} (\mu\nu)(x) &= \vee \left\{ \left(\bigwedge_{i=1}^n (\mu(y_i) \wedge \nu(z_i)) \right) \mid y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n y_i z_i = x \right\} \\ &\leq \vee \left\{ \left(\bigwedge_{i=1}^n (\mu \circ \nu)(y_i z_i) \right) \mid y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n y_i z_i = x \right\} \\ &\leq \vee \left\{ \left(\bigwedge_{i=1}^n \xi(y_i z_i) \right) \mid y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n y_i z_i = x \right\} \\ &\leq \vee \left\{ \left(\xi \left(\sum_{i=1}^n y_i z_i = x \right) \right) \mid y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n y_i z_i = x \right\} \\ &= \xi(x) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Bundan dolayı $\mu\nu \subseteq \xi$ dir. Yani $\mu\nu = \langle \mu \circ \nu \rangle$ dir.

Teorem 6.15: R bir halka, μ, ν R nin bulanık ideali olsun. Bu durumda $\mu\nu \subseteq \mu \cap \nu$ dir.

İspat: Teorem 5.13 yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 6.16: R bir halka μ R nin bulanık alt halkası olsun ve $x \in R$ olsun. Bu durumda $\mu(0)_{\{x\}} + \mu$, μ nin bir koseti olarak adlandırılır.

$x, y \in R$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
(\mu(0)_{\{x\}} + \mu)(y) &= \vee \{ \mu(0)_{\{x\}}(u) \wedge \mu(v) \mid u, v \in R, u + v = y \} \\
&= \mu(0)_{\{x\}}(x) \wedge \mu(x - y) \\
&= \mu(x - y)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$\mu(0)_{\{x\}} + \mu$ için $x + \mu$ olsun. Bu durumda

$$(x + \mu)_{\{y\}} = \mu(x - y) \tag{5.30}$$

$\forall y \in R$ dir.

Teorem 6.17: R bir halka μ, R nin bulanık ideali ve $x, y \in R$ olsun. Bu durumda $x + \mu = y + \mu$ için gerek ve yeter koşul $\mu(x - y) = \mu(0)$ dir.

İspat: $x + \mu = y + \mu$ olsun. Bu durumda $(x + \mu)(x) = (y + \mu)(x)$ ve buradan $\mu(0) = \mu(y - x) = \mu(x - y)$ (5.31)

dir.

Tersine $\mu(0) = \mu(x - y)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
(x + \mu)(z) &= \mu(z - x) \\
&= \mu(z - y + y - x) \\
&\geq \mu(z - y) \wedge \mu(x - y) \\
&= \mu(z - y) \\
&= (y + \mu)(z) \quad \forall z \in R.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Bu durumda $x + \mu \supseteq y + \mu$ dir. Benzer şekilde $(y + \mu) \supseteq x + \mu$. Yani $x + \mu = y + \mu$
 $R / \mu = \{x + \mu \mid x \in R\}$ olsun. + ve. yı R / μ de aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$(x + \mu) + (y + \mu) = (x + y) + \mu \tag{6.33}$$

$$(x + \mu).(y + \mu) = x.y + \mu \tag{6.34}$$

+ ve . iyi tanımlıdır. $x, y, u, v \in R$ ve $x + \mu = u + \mu$ olsun. Bu durumda

$$\mu(x - u) = \mu(y - v) = \mu(0) \tag{6.35}$$

dir. Buradan,

$$\mu(x + y - u - v) \geq \mu(x - u) \wedge \mu(y - v) = \mu(0) \tag{6.36}$$

Buradan

$$\mu(x+y-u-v)=\mu(0) \quad (6.37)$$

olur. Bu yüzden

$$(x+y)+\mu=(u+v)+\mu. \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \mu(uv-xy) &= \mu(uv-uy+uy-xy) \\ &\geq \mu(u(v-y)) \wedge \mu((u-x)y) \\ &\geq (\mu(u) \vee \mu(v-y)) \wedge (\mu(u-x) \vee \mu(y)) \\ &= \mu(0) \end{aligned} \quad (6.39)$$

Bu durumda

$$xy+\mu=uv+\mu \quad (6.40)$$

Buradan $+$ ve $\cdot$ iyi tanımlıdır.

Açıkça, $-(x+\mu)=(-x)+\mu \quad \forall x \in R$ ve $0+\mu=\mu$ R/μ nin sıfır elemanıdır.

Tanım 6.18: R bir halka μ R nin bulanık ideali olsun. Bu durumda R/μ halkası R nin bölüm halkası olarak adlandırılır.

Teorem 6.19: R bir halka; μ , R nin bulanık ideali olsun. Bu durumda $R/\mu \square R/\mu_*$ dir.

İspat:

$f: R \rightarrow R/\mu, f(x)=x+\mu, \forall x \in R$ dir. Bu durumda Çek $f=\mu_*$ ve R den R/μ ye üzerine ise f bir homomorfizmadır. Yani $R/\mu \square R/\mu_*$ dir. R ve S halkalar ve μ R nin bulanık ideali, ν de S nin bulanık ideali olsun. $f: R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. O' S nin sıfır elemanı olarak adlandırılır.

Teorem 6.20: R, S, μ, ν ve f yukarıdaki gibi tanımlansın.

(1) $f^{-1}(\nu)$ Çek f üzerinde sabit olan bir bulanık idealidir.

$$(2) f^{-1}(\nu_*)=(f^{-1}(\nu))_*$$

(3) Eğer f üzerine ise $(f \circ f^{-1})(\nu)=\nu$ dir

(4) μ Çek f üzerinde sabit ise $(f^{-1} \circ f)(\mu)=\mu$ dir.

İspat:

(1) $\forall x, y \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\nu)(x-y) &= \nu(f(x-y)) \\
 &= \nu(f(x)-f(y)) \\
 &\geq \nu(f(x)) \wedge \nu(f(y)) \\
 &= f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y)
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

ve

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\nu)(xy) &= \nu(f(xy)) \\
 &= \nu(f(x)f(y)) \\
 &\geq \nu(f(x)) \vee \nu(f(y)) \\
 &= f^{-1}(\nu)(x) \vee f^{-1}(\nu)(y)
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

bu durumda $f^{-1}(\nu)$ R nin bulanık idealler kümesidir. $x \in \text{Ker} f$ olsun. Buradan,

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)) = \nu(f(0)) = \nu(0') \tag{6.43}$$

Bu durumda $f^{-1}(\nu)$ $\text{Ker} f$ üzerinde sabittir.

(2) $x \in R$ olsun. Yani

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(\nu_*) &\Leftrightarrow \nu(f(x)) = \nu(0') \vee \nu(f(0)) \\
 &\Leftrightarrow f^{-1}(\nu)(x) = f^{-1}(\nu)(0) \\
 &\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(\nu))_*
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Buradan,

$$f^{-1}(\nu_*) = (f^{-1}(\nu))_* \tag{6.45}$$

dır.

(3) $y \in S$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$ için $x \in R$. Yani

$$((f \circ f^{-1}))(\nu)(y) = f(f^{-1}(\nu))(y).$$

$$\begin{aligned}
&= f(f^{-1}(\nu))(f(x)) \\
&= f^{-1}(\nu)(x) \\
&= \nu(f(x)) \\
&= \nu(y).
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Bu durumda

$$(f \circ f^{-1})(\nu) = \nu \tag{6.47}$$

dir.

(4) $x \in R$ olsun. Bu durumda μ Çek f üzerinde sabit olduğundan

$$\begin{aligned}
((f^{-1} \circ f)(\mu))(x) &= f^{-1}(f(\mu))(x) \\
&= f(\mu) \\
&= f((x)) \\
&= \mu(x)
\end{aligned} \tag{6.48}$$

dir.

Bu durumda

$$(f^{-1} \circ f)(\mu) = \mu \tag{6.49}$$

dir.

Teorem 6.21: f, R, S ve μ yukarıdaki gibi tanımlansın. f içinedir. Bundan dolayı S bir halka, $f(\mu)$ S nin bulanık idealidir. Çek f üzerinde μ sabit ise $f(\mu_*) = (f(\mu))_*$ dir.

İspat: $u, v \in S$ olsun. Buradan $u = f(x), v = f(y)$ $x, y \in R$ Yani

$$\begin{aligned}
f(\mu)(u-v) &= \vee \{ \mu(z) \mid z \in R, f(z) = u-v \} \\
&\geq \vee \{ (x-y) \mid x, y \in R, f(x) = u, f(y) = v \} \\
&\geq \vee \{ \mu(x) \wedge \mu(y) \mid x, y \in R, f(x) = u, f(y) = v \} \\
&= \left(\vee \{ \mu(x) \mid x \in R, f(x) = u \} \right) \wedge \left(\vee \{ \mu(y) \mid y \in R, f(y) = v \} \right)
\end{aligned}$$

$$= f(\mu)(u) \wedge f(\mu)(v) \quad (6.50)$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} f(\mu)(uv) &= \bigvee \{ \mu(z) \mid z \in R, f(z) = uv \} \\ &\geq \bigvee \{ \mu(xy) \mid x, y \in R, f(x) = u, f(y) = v \} \\ &\geq \bigvee \{ \mu(x) \vee \mu(y) \mid x, y \in R, f(x) = u, f(y) = v \} \\ &= \left(\bigvee \{ \mu(x) \mid x \in R, f(x) = u \} \right) \vee \left(\bigvee \{ \mu(y) \mid y \in R, f(y) = v \} \right) \\ &= f(\mu)(u) \vee f(\mu)(v) \end{aligned} \quad (6.51)$$

Buradan S bir halka $f(\mu)$, S nin bulanık idealidir. $u \in (f(\mu))_*$ olsun. Böylece $f(\mu)(u) = f(\mu)(0') = \mu(0)$. Bu yüzden $x \in R, \mu = f(x)$ olacak şekilde f üzerindedir. Buradan Teorem 6.20.(5) ten dolayı $f(\mu)(u) = \mu(x)$ tir. Yani $\mu(x) = \mu(0)$ veya $x \in \mu_*$ dir. Bundan dolayı $u = f(x) \in f(\mu_*)$ dir.

Teorem 6.22: (Bulanık idealler için Correspondence Teoremi)

R ve S birer halka olmak üzere $f: R \rightarrow S$ bir epimorfizm olsun. Bu durumda $\mathcal{C}ek f$ üzerinde sabit olan S nin fuzzy idealleri ile R nin fuzzy idealleri arasında birebir eşleme vardır.

İspat: Bulanık idealler kümesi $\mathcal{C}ek f$ üzerinde sabit ise $f(R)$ dir. $\Phi: F(R) \rightarrow LI(S)$ ve $\Psi: LI(S) \rightarrow F(R)$ olarak tanımlansın. Buradan $\forall \mu \in F(R)$ ve $\forall \nu \in LI(S)$ için $\Phi(\mu) = f(\mu)$ ve $\Psi(\nu) = f^{-1}(\nu)$ dir. Φ ve Ψ iyi tanımlı olduklarından ve tüm elemanların tersi olduğundan teorem 5.18 ve 5.19 gereğince birebir benzerliktir. Açıktır ki benzerlik sıralamayı koruyacak.

Teorem 6.23: R bir halka μ , R nin bulanık ideali olsun. Bu durumda R/μ bir halka μ^* , R/μ nün bulanık ideali ve μ^* , R/μ nin bulanık alt halkasında $\mu^*(x + \mu) = \mu(x) \quad \forall x \in R$ tanımlanır.

Teorem 6.24: R bir halka ν , R nin bulanık alt halkası olsun ve A , R nin bir ideali olsun. ξ , R/A halkasında ξ , R/A nın alt halkası aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\xi([x]) = \bigvee \{ \nu(z) \mid z \in [x] \} \quad (6.52)$$

$\forall x \in R$, $[x] = x + A$ dir. Bu durumda R/A halka ξ , R/A nın bulanık alt halkası olur.

İspat: $x, y \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \xi([x] - [y]) &= \xi([x - y]) \\ &= \bigvee \{ \nu(x - y + z) \mid z \in A \} \\ &\geq \bigvee \{ \nu(x - y + a - b) \mid a, b \in A \} \\ &\geq \bigvee \{ \nu(x + a) \wedge \nu(y + b) \mid a, b \in A \} \\ &= \left(\bigvee \{ \nu(x + a) \mid a \in A \} \right) \wedge \left(\bigvee \{ \nu(y + b) \mid b \in A \} \right) \\ &= \xi([x]) \wedge \xi([y]) \end{aligned} \quad (6.53)$$

Diğer yandan

$$\begin{aligned} \xi([x][y]) &= \xi([xy]) \\ &= \bigvee \{ \nu(xy + z) \mid z \in A \} \\ &\geq \bigvee \{ \nu(xy + (xv + uy + uv)) \mid u, v \in A \} \\ &= \bigvee \{ \nu(x + u)(y + v) \mid u, v \in A \} \\ &\geq \bigvee \{ \nu(x + u) \wedge \nu(y + v) \mid u, v \in A \} \\ &= \left(\bigvee \{ \nu(x + u) \mid u \in A \} \right) \wedge \left(\bigvee \{ \nu(y + v) \mid v \in A \} \right) \\ &= \xi([x]) \wedge \xi([y]) \end{aligned} \quad (6.54)$$

Buradan R/A halka ξ , R/A nın bulanık alt halkasıdır.

Teorem 6.25: R bir halka μ , R nin bulanık alt kümesi ve ν R nin bulanık alt halkası olsun. Bu durumda μ nün ν nin bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in \mu(R) \cup \{ b \in L \mid b \leq \mu(0) \}, \mu_a, \nu_a$ nın idealidir.

Teorem 6.26: R bir halka ν , R nin bulanık alt halkası ve μ ν nin ideali olsun. Bu durumda μ_*, ν_* in idealidir. Ayrıca L regülerse bu durumda μ^*, ν^* in idealidir.

Teorem 6.27: R bir halka μ , R nin bulanık ideali ve ν , R nin bulanık alt halkası olsun. Bu durumda $\mu \cap \nu$, ν nin bulanık idealidir.

İspat: Açıkça $\mu \cap \nu \subseteq \nu$ ve $\mu \cap \nu$, R nin toplamsal grubunda bulanık alt gruptur. Bundan başka,

$$(\mu \cap \nu)(xy) = \mu(xy) \wedge \nu(xy) \geq \mu(y) \wedge \nu(x) \wedge \nu(y) = \nu(x) \wedge (\mu \cap \nu)(y) \quad x, y \in R \quad (6.55)$$

Buradan $\mu \cap \nu$, ν nin bulanık idealidir.

Teorem 6.28: R bir halka ξ , R nin bulanık alt halkası, μ ve ν ξ nin iki bulanık ideali olsun. Bu durumda $\mu \cap \nu$ ξ nin bulanık idealidir.

İspat: Açıkça $\mu \cap \nu \subseteq \xi$ ve $\mu \cap \nu$, R halkasının toplamsal grubunun bulanık alt grubudur. Bundan başka $x, y \in R$

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)(xy) &= \mu(xy) \wedge \nu(xy) \\ &\geq (\xi(x) \wedge \mu(y)) \wedge (\xi(x) \wedge \nu(y)) \\ &\geq \xi(x) \wedge (\mu(y) \wedge \nu(y)) \\ &= \xi(x) \wedge (\mu \cap \nu)(y). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Bundan dolayı $\mu \cap \nu$, ξ nin bulanık idealidir.

R bir halka μ , R nin bulanık alt halkası olsun. Buradan S değişmeli halka ve ν S nin bulanık alt halkası olsun. Bu durumda f , S den R ya bir homomorfizma ise $f(\mu)$, S de bulanık alt halka ve $f^{-1}(\nu)$, R de bulanık alt halkadır. Böylelikle istenilen elde edilmiş olur.

Teorem 6.29: R bir halka ν , R nin bulanık alt halkası ve μ , ν nin bulanık ideali olsun. S bir halka f , R den S içine bir homomorfizma olsun. Bu durumda $f(\mu)$, $f(\nu)$ nin bulanık idealidir.

İspat: $f(\mu)$ ve $f(\nu)$, R nin toplamsal grubunun bulanık alt grubudur ve $f(\mu) \subseteq f(\nu)$ dir.

$$\begin{aligned}
 f(\mu)(xy) &= \vee \{ \mu(w) \mid w \in R, f(w) = xy \} \\
 &\geq \vee \{ \mu(uv) \mid u, v \in R, f(u) = x, f(v) = y \} \\
 &\geq \vee \{ \nu(u) \wedge \mu(v) \mid u, v \in R, f(u) = x, f(v) = y \} \\
 &= \left(\vee \{ \nu(u) \mid u \in R, f(u) = x \} \right) \wedge \left(\vee \{ \mu(v) \mid v \in R, f(v) = y \} \right) \\
 &= f(\nu)(x) \wedge f(\mu)(y) \quad \forall x, y \in S.
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Bundan dolayı $f(\mu)$, $f(\nu)$ nin bulanık idealidir.

Teorem 6.30: S bir halka f , R den S nin içine bir homomorfizma olsun. ν , S nin bulanık alt halkası ve μ , ν nin bulanık ideali olsun. Bu durumda $f^{-1}(\mu)$, $f^{-1}(\nu)$ nin bulanık idealidir.

Tanım 6.31: S değişmeli bir halka μ , R nin ν S nin fuzzy alt halkası olsun.

f , R den S ye bir homomorfizma(izomorfizma) olmak üzere,

(i) Eğer $f(\mu) \subseteq \nu$ ise f ye μ den ν ye örten zayıf bir homomorfizma (izomorfizma) denir. μ ye ν nin homomorfik(izomorfik) görüntüsü denir. Ayrıca f , μ den ν ye bir homomorfizma(izomorfizma) ise μ ile ν homomorfiktir(izomorfik) denir ve $\mu \approx \nu$ ($\mu \preceq \nu$) ile gösterilir.

(ii) Eğer $f(\mu) = \nu$ ise f ye μ den ν ye örten homomorfizma (izomorfizma) denir. μ ye ν nin homomorfik(izomorfik) görüntüsü denir. Ayrıca f , μ den ν ye bir homomorfizma(izomorfizma) ise μ ile ν homomorfiktir(izomorfik) denir ve $\mu \cong \nu$ ($\mu \equiv \nu$) ile gösterilir.

μ, R nin ve μ, ν nin bir fuzzy ideali olsun. O taktirde μ^*, ν^* in bir idealidir. $\nu|_{\nu^*}, \nu^*$ in bulanık alt halkasıdır. Şu halde Teorem 4.23 e göre $\nu|_{\nu^*}$ in μ^* a göre bölüm alt halkası vardır ve ν/μ ile gösterilir.

7. SONUÇLAR

Bu tezimizde gruplar ve halkalardaki temel yapılar ve bu yapıların bulanık değişmeli cebirdeki karşılıklarının ne olduğunu gösterdik. Bulanık değişmeli cebir hakkında bilgi edinmek isteyenler için temel teşkil edecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

Abou-Zaid S. : On Fuzzy Subgroups, Cairo University, Giza, Egypt, 1992

Ajmal N. : Homomorphism Of Fuzzy Groups and Quatient Groups, University Of Delhi, New Delhi, India, 1993

Alkhamees, Y. and Mordeson, J. N., *Fuzzy Localized Subrings*, Information Sciences 99 183-193, 1997.

Alkhamees, Y. and Mordeson, J. N., *Fuzzy principal ideals and fuzzy simple field extensions*, Fuzzy sets and systems 96 247-253, 1998.

Bhattacharya P. :Fuzzy Relations and Fuzzy Groups, Kuwait University, Kuwait, 1985

Kumar, R., *Certain fuzzy ideals of rings redefined*, Fuzzy sets and systems 46 251-260, 1992.

Kumar, R., Dixit, V.N. and Ajmal, N., *On fuzzy rings*, Fuzzy sets and systems 49 205-213, 1992.

Malik D.S. and MORDERSON J. : Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Co. Pte. Ltd., Singapore ,1998

Malik, D.S., and Mordeson, J. N., *Fuzzy Commutative Algebra*, World scientific Publishing, 1998.

Rosenfeld,A. *Fuzzy groups*, J. Math. Anal. Appl. 35 512-517, 1971.

Yazıcı, Muhammed, Bulanık Alt Gruplar, Bitirme Tezi, YTU Matematik Bölümü 2006.

Zadeh, L. A., *Fuzzy sets*, Inform. Control 8 383-353, 1965.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 07.04.1977

Doğum yeri Adana

Lise 1991-1994 Adana Atatürk Lisesi

Lisans 1996-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fak. Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2001-2003 İstanbul Bil Dersaneleri

2003-2004 İstanbul Gökşen Dersaneleri

2004-2005 Muş Rekabet Kurumu Lisesi

2005-Devam ediyor Zeytinburnu Tekstil Meslek Lisesi