

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONTROL SİSTEMLERİNİN KONTROL
EDİLEBİLİRLİĞİ VE MATEMATİKSEL
MODELLENMESİ**

Matematikçi Kerem TUNA

**FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ayşe KARA

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. LİE GRUPLARI.....	2
2.1 Manifoldlar.....	2
2.2 Lie Grupları.....	5
2.3 Lie Cebiri	9
2.4 Üstel Tasvir	11
2.5 Adjoint Gösterilim.....	14
2.6 Lie Türevi.....	15
3. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ.....	17
3.1 $\mathbf{R}^n$ Üzerindeki Lineer Kontrol Sistemleri.....	19
3.2 $\mathbf{R}^n$ Üzerindeki Bilineer Kontrol Sistemleri	20
3.3 $\mathbf{R}^n$ Üzerindeki Afin Kontrol Sistemleri.....	20
3.4 Lie Grubu Üzerindeki İnvaryant Kontrol Sistemleri	21
3.5 Bazı İnvaryant Kontrol Sistemleri için Kontrol Edilebilirlik Karakterizasyonu...	22
4. MATEMATİKSEL MODELLER.....	24
KAYNAKLAR.....	28
ÖZGEÇMİŞ.....	29

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4.1 Göldeki yelkenli modeli.....	25
Şekil 4.2 Araba park modeli	26

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında bilgisini ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Ayşe KARA' ya ve her zaman desteklerini yanımda hissettiğim aileme çok teşekkür ederim.

Kerem TUNA

ÖZET

Kontrol teorideki bazı sistemler ve kontrol edilebilirlik karakterizasyonları incelenmiş ve bazı mevcut matematik modelleri verilmiştir.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kontrol teorisinin temel kavramları olan manifold, tanjant vektörü, tanjant uzayı ve vektör alanı tanımlarına yer verilmektedir. Ayrıca Lie grubu, Lie cebiri, onların üstel tasvir ve adjoint gösterilimi ile olan bağıntıları ve örnekler yer almaktadır.

İkinci bölümde, kontrol sistemlerinin bazı çeşitlerinin tanımları ve mevcut kontrol edilebilirlik karakterizasyonları verilmektedir.

Üçüncü bölümde ise, kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirlikleri çeşitli matematik modeller üzerinde incelenmektedir.

Anahtar kelimeler: Kontrol sistemler, kontrol edilebilirlik, matematiksel modeller, Lie grup, Lie cebir

ABSTRACT

Some Systems in Control Theory and their controllability characterizations are studied, and some existed mathematical models are given.

This work consists of three chapters.

In the first chapter, manifold, tangent vector, tangent space and vector fields notions which are fundamentals in Control Theory are contained. Moreover, Lie group, Lie algebra, their connection via exponential map and adjoint representation, and examples are contained.

In the second chapter, definition of some classes of control systems and their existed controllability characterizations are given.

In the third chapter, controllabilities of control systems are studied on some mathematical models.

Keywords: Control systems, controllability, mathematical models, Lie group, Lie algebra

1. GİRİŞ

Matematiğin soyut kavramlarının somut örneklerle incelenmesi her zaman ilgi çekici olmuştur. Bu tez çalışması bu temel üzerine kurulmuştur. Öncelikle soyut kavramlar, genel kontrol sistemlerin, Lie gruplarının, Lie cebirlerinin kurulmasında temel yapıyı oluşturan manifoldlar, ona bağlı olarak tanjant vektörü, tanjant uzayı, vektör alanı tanımlarına yer verilmiştir. Ayrıca Lie grubu, Lie cebiri onların üstel tasvir ve adjoint gösterilimi ile olan bağıntıları ve örnekleri incelenmiştir. Bu tanımlar ve incelemeler tamamlandıktan sonra bir Σ genel kontrol sisteminin, durum (state) uzayı denilen sonlu boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldundan ve sistemin stratejileri denilen vektör alanlarının bir sınıfı olan D dinamiğinden oluşan $\Sigma=(M,D)$ ikilisi olduğu söylenmiştir. Bu Σ kontrol sisteminin kontrol edilebilirliğinin, $x \in M$ 'in M ve D üzerinde hangi koşullar altında D deki vektör alanlarının neden olduğu negatif olmayan zamanlı yerel difeomorfizmlerin tüm bileşkeleri kullanıldığında x den başlayarak M 'nin her bir y noktasına ulaşılmasına bağlı olduğu belirtilmiştir. Genel kontrol sisteminin kontrol edilebilirliği oldukça zor bir problemdir.

Dolayısıyla sistemler bazı özel manifoldlar üzerinde incelenmiştir. $\mathbf{R}^n$ üzerindeki lineer kontrol sistemleri, $\mathbf{R}^n$ üzerindeki bilineer kontrol sistemleri, $\mathbf{R}^n$ üzerindeki afin kontrol sistemleri, Lie grubu üzerindeki invaryant kontrol sistemleri tanımları ve bunların mevcut kontrol edilebilirlik karakterizasyonları verilerek sistemler örneklerle gösterilmiştir. Tezin son bölümünde ise kontrol sistemlerin modeller üzerinde incelenmesi yapılmıştır.

2. LİE GRUPLARI

Bu bölümde kontrol teoreminin temel kavramları olan manifold, tanjant vektörü, tanjant uzayı, vektör alanı tanımlarına yer verilmiştir. Ayrıca Lie grubu, Lie cebiri olma koşulları, onların üstel tasvir ve adjoint gösterilimi ile olan bağıntıları ve örnekler yer almaktadır.

2.1 Manifoldlar

Tanım: M bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. M 'nin her noktasının R^n 'nin bir açık alt kümesine homeomorf olan bir komşuluğu var ise M ye **n boyutlu yerel öklid uzayı** denir.

M n boyutlu topolojik manifold olmak üzere, φ de $U \subset M$ nin açık alt kümesinden R^n 'nin açık alt kümesine giden homeomorfizm ise, (U, φ) çifti M 'nin koordinat civarı olarak adlandırılır.

$\varphi: U \subset M \rightarrow R^n$ homomorfizm olmak üzere, (U, φ) koordinat civarından $((U, x_1, x_2, \dots, x_n))$ şeklinde de gösterilir.) $x_i = r_i \circ \varphi$ koordinat fonksiyonu yardımıyla $r_i: R^n \rightarrow R$, $r_i(a) = a_i$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ olmak üzere R 'ye gidilebilir. $(U \subset M \xrightarrow{\varphi} R^n \xrightarrow{r_i} R)$

Tanım: $\mathfrak{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ koordinat civarlarının oluşturduğu kolleksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa M üzerinde C^∞ sınıfından bir yapı oluştururlar.

$$(a) \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$$

(b) $\forall \alpha, \beta \in A$ için $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \in C^\infty$ sınıfındandır.

(c) $\mathfrak{S}$ kolleksiyonu maksimaldir.

Bu üç şart sağlanıyorsa M ' ye C^∞ sınıfından **n boyutlu diferansiyellenebilir manifold** denir.

Örnek: 1-boyutlu S^1, R^2 'de 0 merkezli 1 yarıçaplı çember olsun.

$$U_1 = \{p = (x, y) \in S^1 \mid y > 0\}$$

$$V_1 = \{p = (x, y) \in S^1 \mid y < 0\}$$

$$U_2 = \{p = (x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$$

$$V_2 = \{p = (x, y) \in S^1 \mid x < 0\}$$

olmak üzere $S^1 = U_1 \cup U_2 \cup V_1 \cup V_2$ dir. U_i ve V_i kümeleri S^1 'in açık alt kümeleridir.

$I = \{t \in \mathbb{R} : -1 < t < 1\}$, $\mathbb{R}$ nin bir açık alt aralığıdır.

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow I$$

$$(x, y) \rightarrow x$$

$\varphi_1(x, y) = x$ fonksiyonu sürekli, türetilebilir, 1-1 ve üzerinedir.

$$\varphi_1^{-1} : I \rightarrow U_1$$

$$x \rightarrow (x, \sqrt{1-x^2})$$

$\varphi^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ fonksiyonu da 1-1, sürekli ve U_1 üzerine bir tasvirdir. Dolayısıyla, φ bir homeomorfizmadır.

$\varphi_1(x, y) = x; \varphi_2(x, y) = y; \psi_1(x, y) = x; \psi_2(x, y) = y$ izdüşüm fonksiyonları da birer homeomorfizmadır.

S^1 in diferansiyellenebilir olduğunu gösterelim. Bir $p \in U_1 \cap U_2$ noktası seçelim ve $J = \{t : 0 < t < 1\}$ aralığını alalım.

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow J; \varphi_2 : U_2 \rightarrow J$$

ve

$$f_{21} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$$

$$f_{21} = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_2(x, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f_{21} : x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$$

$i, j = 1, 2$ için f_{ij} ler C^∞ fonksiyonlarıdır.

$S = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)\}$ koleksiyonu S^1 ' in diferansiyellenebilen yapısıdır.

Dolayısıyla S^1 1-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifolddur.

Tanım: M bir manifold ve $p \in M$ olmak üzere p noktası civarında tanımlanmış tüm C^∞ fonksiyonlarının kümesini $\mathfrak{S}(p)$ ile gösterelim. $f \in \mathfrak{S}(p)$ 'ye aşağıdaki şartları sağlayan $v(f) \in \mathbb{R}$ sayısı karşılık gelirse $v : \mathfrak{S}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tasvirine M 'nin p 'deki **tanjant vektörü** denir.

$$f, g \in \mathfrak{S}(p); \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ için;}$$

$$(1) v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$$

$$(2) \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

v ve v' , M 'nin p noktasında tanımlanmış tanjant vektörleri olsunlar. $\lambda \in R$ için

$$(v + v')(f) = v(f) + v'(f), \quad (\lambda v)(f) = \lambda(v(f)) \quad (f \in \mathfrak{Z}(p))$$

vektör uzayı yapısını sağlarsa manifoldun p noktasındaki **tanjant uzayı** denir ve $T_p(M)$ ile gösterilir.

Teorem: M n boyutlu bir manifold ise, $T_p(M)$ tanjant vektör uzayıda n -boyutludur.

Yani,

$$\dim M = \dim T_p(M)$$

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

olur. Her v vektörü bu şekilde ifade edilebilir.

Tanım: M analitik bir manifold ve $p \in M$ olsun.

$$T(M) = \cup_{p \in M} T_p(M)$$

kümesine tanjant demeti denir. Tanjant demeti diferansiyellenebilir manifold yapısındadır.

Tanım: M bir manifold olmak üzere $U \subset M$ nin açık alt kümesinden $T(M)$ e giden sürekli $X : U \subset M \rightarrow T(M)$ fonksiyonuna **vektör alanı** denir.

Tanım: $\text{dom}(X)$ açık cümlesi M diferansiyellenebilir manifold ve X vektör alanı üzerinde tanımlansın. $\forall p \in M$ olmak üzere p noktasındaki teğet vektörün integral eğrisi $\gamma(X, p, \cdot)$ şeklinde tanımlanır. t zamandaki eğrinin teğet vektörü;

$$X_{\gamma(X, p, t)} = \dot{\gamma}(X, p, t)$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak integral eğrisinde $t=0$ ise;

$$\gamma(X, p, 0) = p \text{ dir.}$$

Tanım: X, Y ; M üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanları iseler, $[X, Y]$ 'de bir diferansiyellenebilir vektör alanıdır. Burada, $[X, Y]$ 'ye X ve Y 'nin Lie parantezi denir ve

$$[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $f \in C^\infty$ ve $m \in M$ dir.

Lie Parantezinin Özellikleri

- a) $[X, X] = 0$. (Refleksiflik özelliği)
- b) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Ters simetri özelliği)
- c) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jakobi özdeşliği)

Tanım: M ve N iki manifold olsun. $p \in M$ ve $f : M \rightarrow N$ diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, p noktasını içeren (U, ϕ) koordinat civarı, (V, ψ) koordinat civarında $f(p)$ noktası var ise,

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \phi^{-1}} & \psi(V) \end{array}$$

$\phi(p)$ noktasını götüren diferansiyellenebilir bileşke fonksiyonu vardır.

2.2 Lie Grupları

Lie Grupları manifold ve grup yapısının her ikisine birden sahip kümelerdir.

Tanım: G diferansiyellenebilir bir manifold ve grup yapısına sahip olmak üzere $G \times G \rightarrow G$ tasviri $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma \tau^{-1} \in C^\infty$ ise G'ye **Lie grubu** denir.

Uyarı: G bir Lie grubu olsun. e 'de bu grubun birim elemanı olmak üzere; $\tau \rightarrow \tau^{-1}$ tasviri diferansiyellenebilir, diferansiyellenebilir tasvirin bileşimi

$$\tau \rightarrow (e, \tau) \rightarrow \tau^{-1} \in C^\infty \text{ dur.}$$

Aynı zamanda;

$$\begin{array}{l} G \times G \rightarrow G \\ (\sigma, \tau) \rightarrow \sigma \tau \in C^\infty \text{ 'dur.} \end{array}$$

Dolayısıyla diferansiyellenebilir tasvirin bileşimi

$$(\sigma, \tau) \rightarrow (\sigma, \tau^{-1}) \rightarrow \sigma \tau$$

olur.

Böylece,

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1} \in C^\infty$$

ifadesiyle,

$$G \times G \rightarrow G \quad \text{ve} \quad G \rightarrow G$$

$$(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau \in C^\infty \quad \tau \rightarrow \tau^{-1} \in C^\infty$$

ifadelerinin birbirine denk oldukları görülür.

Genel lineer grup en çok bilinen Lie grubu örneğidir. Lie grubuna ilginç bir örnekte $SU(2, C)$ olarak isimlendirilen 2x2 lik elemanları kompleks sayılardan oluşan transpozisinin eşleniği tersine eşit olan ve determinantı 1 olan matrislerdir.

Örnek: $SU(2, C) = \left\{ A \mid \bar{A}^t = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1 \right\}$ cümlesinin Lie grubu olduğunu gösterelim.

z ve w kompleks sayılarını alalım.

$$|z|^2 + |w|^2 = 1 \text{ olsun.}$$

$SU(2, C)$ nin bir elemanı olan A matrisini şöyle yazabiliriz.

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in SU(2, C) \quad (1)$$

Tersine, $A \in SU(2, C)$ ise o zaman öyle z ve w 'ye sahip A vardır ki (1) denklemini sağlar.

$z = x + iy$ ve $w = u + iv$ ise $\det A = 1$ eşitliğinden $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$ olacağı görülür.

Determinant fonksiyonu bir homeomorfizma olduğundan $SU(2, C)$ cümlesi manifold yapısına sahiptir. $SU(2, C)$ cümlesinin açık alt cümlelerine ve bunlara karşılık gelen tasvirleri inceleyelim.

$$z = x + iy \quad \text{olmak üzere;}$$

$$w = u + iv$$

$$U_1 = \{A \mid x > 0\}, \quad U_2 = \{A \mid x < 0\}$$

$$U_3 = \{A \mid y > 0\}, \quad U_4 = \{A \mid y < 0\}$$

$$U_5 = \{A \mid u > 0\}, \quad U_6 = \{A \mid u < 0\}$$

$$U_7 = \{A \mid v > 0\}, \quad U_8 = \{A \mid v < 0\}$$

cümleleri $SU(2, C)$ nin açık alt cümleleridir. $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ kompleks sayıları yukarıdaki koşullara göre değerler alırlar ve bu değerler $SU(2, C)$ nin açık alt cümlelerinin elemanıdır. Bu değerleri determinant fonksiyonuna uygulayacak olursak, açık alt cümlelere karşılık gelen tasvirler şu şekilde olur.

$$\begin{aligned}\varphi_1(A) &= (y, u, v), \varphi_2(A) = (y, u, v) \\ \varphi_3(A) &= (x, u, v), \varphi_4(A) = (x, u, v) \\ \varphi_5(A) &= (x, y, v), \varphi_6(A) = (x, y, v) \\ \varphi_7(A) &= (x, y, u), \varphi_8(A) = (x, y, u)\end{aligned}$$

$SU(2, C)$; $\{(U_i, \varphi_i) | i = 1, \dots, 8\}$ atlası diferansiyellenebilir manifold yapısına sahiptir ve belirlenen matris çarpımıyla gruptur.

$SU(2, C)$ cümlesini R^4 e götüren bir φ tasvirini alalım.

$$\varphi: SU(2, C) \rightarrow R^4$$

Tanımdan $\varphi(A) = (x, y, u, v)$ dir. Elemanları $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $w_1 = u_1 + iv_1$ olan bir A_1 matrisini ve elemanları $z_2 = x_2 + iy_2$ ve $w_2 = u_2 + iv_2$ olan A_2 matrisini alalım. Bu iki matrisin çarpımı sonucunda;

$$\begin{aligned}x_3 &= x_1 x_2 - y_1 y_2 - u_1 u_2 - v_1 v_2 \\ y_3 &= x_1 y_2 + x_2 y_1 + u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ u_3 &= x_1 u_2 + x_2 u_1 - y_1 v_2 + y_2 v_1 \\ v_3 &= x_1 v_2 + x_2 v_1 + y_1 u_2 - y_2 u_1\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da anlaşılacağı gibi $\varphi(A_1 A_2) = (x_3, y_3, u_3, v_3)$ dür ve matris çarpımı diferansiyellenebilirdir.

Şimdi de matrisin tersine bakalım; $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ kompleks sayıları A matrisinin elemanları olsun. $SU(2, C)$ cümlesinde $\bar{A}^t = A^{-1}$ olduğundan $\varphi(A^{-1}) = (x, -y, -u, -v)$ bulunur.

A matrisinin tersi de diferansiyellenebilirdir.

O halde $SU(2, C)$ cümlesi bir Lie grubudur.

Tanım:

$$l_\sigma: G \rightarrow G$$

$$l_\sigma(\tau) = \sigma\tau$$

$l_\sigma : G \rightarrow G$ tasviri bir sol öteleme olarak adlandırılır. l_σ 'nın türevi;

$$dl_\sigma : T(G) \rightarrow T(G),$$

$$dl_\sigma(T_\tau G) \subset T_{\sigma\tau} G$$

dir.

Tanım: X bir vektör alanı, eğer $\forall \sigma \in G$ için

$$X \circ l_\sigma = dl_\sigma(X)$$

ise G üzerinde sol invaryanttır denir.

Teorem: G bir Lie grubu ve $\tilde{g}$ sol invaryant vektör alanlarının bir cümlesi ise o zaman $\tilde{g}$ bir reel vektör uzayıdır ve $\alpha : \tilde{g} \rightarrow T_e(G)$ tasviri $\alpha(X) = X_e$ şeklinde tanımlı $\tilde{g}$, G 'nin birim tanjant uzayına $T_e(G)$ 'ye izomorftur.

İspat: $\tilde{g}$ 'nın bir reel vektör uzayı olduğu açıktır. $X, Y \in \tilde{g}$ ve $a, b \in R$

$$\begin{aligned} \alpha(aX + bY) &= (aX + bY)(e) \\ &= aX(e) + bY(e) \\ &= a\alpha(X) + b\alpha(Y) \end{aligned}$$

olduğundan α lineerdir.

Eğer $\alpha(X) = \alpha(Y)$ ve $\forall \sigma \in G$ için

$$X(\sigma) = dl_\sigma(X(e)) = dl_\sigma(Y(e)) = Y(\sigma)$$

ise $X=Y$ ve burada α (1-1) dir. Bununla beraber, eğer $X \in T_e(G)$ için

$$X(\sigma) = dl_\sigma(X), \forall \sigma \in G$$

sağlanıyorsa α örtendir.

O zaman $\alpha(X) = X$ dir ve X sol invaryanttır. $\forall \sigma, \tau \in G$ için

$$X(\sigma\tau) = dl_{\sigma\tau}(X) = dl_\sigma dl_\tau(X) = dl_\sigma(X(\sigma))$$

dir. Böylece, $\tilde{g} \cong T_e(G)$ olur. Sonuç olarak,

$$\text{boy } \tilde{g} = \text{boy } T_e(G) = \text{boy } G$$

dir.

2.3 Lie Cebiri

g , bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} g \times g &\rightarrow g \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

tasviri aşağıdaki özelliklere sahip ise g ' ye Lie cebiri denir.

1. K üzerinde bilineer (ikili-lineer)

$$\begin{aligned} [\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] &= \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y] \\ [X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] &= \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2] \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 &\in K \end{aligned}$$

2. Ters simetrik:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3. Jakobi özdeşliği:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Uyarı: G Lie grubunun Lie cebiri, G üzerindeki sol – invaryant vektör alanlarının Lie cebiri olarak da tanımlanır.

Bundan başka, G 'nin Lie cebiri birimdeki $T_e(G)$ tanjant uzayı olarak da verilir.

Örnek: 3- BOYUTLU HEISENBERG GRUBU

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

$\forall t \in R$ için, G ' de bir notaya sahiptir ve $\gamma(t)$, G üzerinde bir eğridir.

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e,$$

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X \in T_e(G)$$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Benzer şekilde, $\forall t \in R$ için, G' de bir noktaya sahiptir ve $\alpha(t)$, G üzerinde bir eğridir.

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e,$$

$$\dot{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \in T_e(G)$$

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Benzer şekilde, $\forall t \in R$ için, G' de bir noktaya sahiptir ve $\beta(t)$, G üzerinde bir eğridir.

$$\beta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e,$$

$$\dot{\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \in T_e(G)$$

$$T_e(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z,$$

$$[X, Z] = 0 \text{ ve } [Y, Z] = 0.$$

2.4 Üstel Tasvir

G 'nin $L(G)$ Lie cebirini G üzerindeki tüm sol invaryant vektör alanlarının kümesi veya birimdeki tanjant uzayı olarak düşünebileceğimizi gördük. Bu kısımda ise bir parametrelili alt grupların kümesi vasıtasıyla Lie cebirinin üçüncü tanımını göreceğiz.

Tanım: $\varphi: R \rightarrow G$ şeklindeki homomorfizmaya G 'nin 1-parametrelili alt grubu denir.

G bir Lie grubu ve $L(G)$ 'de onun Lie cebiri olsun.

$$\lambda \frac{d}{dr} \rightarrow \lambda X$$

R 'nin Lie cebirinin $L(G)$ içine bir homomorfizmidir. Reel doğru basit bağlantılı olduğundan (yani, temel grubu aşikar olan bağlantılı topolojik uzay),

$$d \exp \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X$$

olacak şekilde $\exp_x: R \rightarrow G$ tek 1-parametrelili alt grubu vardır.

Diğer bir deyişle, $t \rightarrow \exp_x(t)$ sıfırdaki teğet vektöre $X(e)$ olan G 'nin tek 1-parametrelili alt grubudur.

$$\exp(X) = \exp_x(1) \text{ alınarak}$$

$\exp: L(G) \rightarrow G$ üstel tasviri elde edilir.

$$X \in L(G)$$

$$\exp t(X), t \in R$$

$$\exp tX \in G$$

$$\exp tX = e^{tX}$$

Teorem: X , Lie grubunun $L(G)$ Lie cebirine ait olsun.

$$1. \exp(tX) = \exp_x(t), \forall t \in R.$$

$$2. \exp(t_1 + t_2)X = (\exp(t_1 X))(\exp(t_2 X)), t_1, t_2 \in R.$$

$$3. \exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}.$$

İspat:

1. φ ve ψ ; R ' den G içine

$$\psi(t) = \exp_{sX}(t)$$

ve

$$\varphi(t) = \exp_x(st)$$

şeklinde tanımlanan tasvirler olsunlar. Burada $s \in R$ dir. sX ' in tek integral eğrisi ψ 'dir ve $\psi(0) = e$ dir.

$$d\varphi\left(\frac{d}{dr}\Big|_t\right) = d\exp_x\left(s\frac{d}{dr}\Big|_{st}\right) = sX|_{\exp_x(st)}$$

Böylece φ , sX ' in integral eğrisidir ve $\varphi(0) = e$ dir. İntegral eğrileri tek olduğundan $\varphi = \psi$ dir. Böylece,

$$\exp_{sX}(t) = \exp_x(st), (s, t \in R; X \in L(G))$$

Yukarıdaki eşitlikte t yerine $t=1$ yazalım ve s yerine t yazalım

$$\exp_{tX}(1) = \exp_{(X)}(t)$$

elde ederiz.

2. Burada, $\exp_x$ R ' den G içine bir homeomorfizmadır ve 1 den

$$\begin{aligned} \exp(t_1 + t_2)X &= \exp_x(t_1 + t_2) \\ &= \exp_x t_1 \cdot \exp_x t_2 = \exp(t_1 X) \cdot \exp(t_2 X) \end{aligned}$$

$$3. \exp(-tX) = \exp_x(-t) = (\exp_x(t))^{-1} = (\exp(tX))^{-1}$$

Teorem: $\varphi: H \rightarrow G$ tasviri bir homeomorfizma olsun. O takdirde,

$$\begin{array}{ccc} L(H) & \xrightarrow{d\varphi} & L(G) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array} \quad (2)$$

diyagramı değişmelidir.

İspat: $X \in L(G)$ olsun. O zaman $\varphi(\exp(X0)) \in G$. $t \rightarrow \varphi(\exp(tX))$, 0 ' daki tanjantı $d\varphi(X(e))$ G ' de diferansiyellenebilir eğridir. φ bir homeomorfizma olduğundan bu aynı

zamanda G 'nin 1-parametrelili alt grubu olur. Fakat, $t \rightarrow \exp(t(d\varphi(X)))$ 'in 0'daki tanjantı $(d\varphi(X))(e)$ olan bir tek G 'nin 1-parametrelili alt grubudur. Buradan,

$$\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X)))$$

olur. $t=1$ alırsak

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X))$$

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi$$

elde ederiz.

Örnek: A , $n \times n$ 'lik bir matris olsun ve $\varphi: R \rightarrow GL(n, R)$ tasviri

$$\varphi(t) = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \exp(tA)$$

şeklindedir. Burada, $\exp(tX) = \exp_X(t)$ ve $\exp_X$, R 'nin bir homeomorfizmasıdır ve $(d\varphi) \circ (t) = A$ dır. φ , $GL(n)$ 'nin 1-parametrelili alt grubudur. Böylece, bir matris grubu için üstel tasvir

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

olur ve Lie cebiri bütün matrislerin vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Örnek: G , 3-boyutlu Heisenberg grubu ve $L(G)$ onun Lie cebiri olsun.

$$\exp: L(G) \rightarrow G$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(G)$$

$$X^2 = 0 \text{ olmak üzere;}$$

$$\exp(tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n$$

$$(tX)^2 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \exp(tX) = I + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Buradan,

$$\exp X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

2.5 Adjoint Gösterilim

M diferansiyellenebilir bir manifold ve G' de bir Lie grubu olsun. G' nin M üzerindeki soldan etkisi şeklinde meydana gelen diferansiyellenebilir tasvir

$$\mu : G \times M \rightarrow M$$

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m))$$

$$\mu(e, m) = m; \quad \forall \sigma, \tau \in G \text{ ve } \forall m \in M$$

şeklindedir. Eğer $\mu : G \times M \rightarrow M$ tasviri G' nin M üzerinde soldan bir etkisi ise sabit bir $\sigma \in G$ için $m \rightarrow \mu(\sigma, \tau)$ tasviri M' nin bir difeomorfizmidir. Bu μ_σ ile gösterilir.

Benzer olarak G' nin M üzerinde sağdan bir etkisi ile meydana gelen $\mu : M \times G \rightarrow M$ bir diferansiyellenebilir tasvirdir. $\forall \sigma, \tau \in G$ ve $\forall m \in M$ için:

$$\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau)$$

$$\mu(m, e) = m$$

şeklindedir.

Tanım: Bir G Lie grubunun kendisi üzerinde soldan etkisi ile oluşan iç otomorfizması

$$i : G \times G \rightarrow G$$

$$i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau)$$

şeklindedir. Özdeşlik, bu etkinin bir sabit noktasıdır, $\forall \sigma \in G$ için $i_\sigma(e)$ dir. O takdirde

$$\sigma \rightarrow di_\sigma \mid_e T_e(G) \cong L(G)$$

tasviri G' nin $\text{Aut}(L(G))$ içine bir gösterilimidir. Bu **adjoint gösterilimi** diye adlandırılır ve

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(L(G))$$

şeklinde gösterilir. (2)' deki değişmeli diyagramımızdan, aşağıdaki değişmeli diyagramlar elde edilir:

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{d\rho} & \text{End}(L(G)) \\ \exp \downarrow & & \exp \downarrow \\ G & \xrightarrow{\rho} & \text{Aut}(L(G)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & L(G) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{i_\sigma} & G \end{array}$$

$$\text{expt}\rho(\sigma)(X) = \sigma(\text{expt}X)\sigma^{-1}$$

$$\exp \circ \rho_\sigma = i_\sigma \circ \exp$$

2.6 Lie Türevi

$\forall t \in R$ için $X_t(m) = \gamma_m(t)$ seçilerek

$$D_t = \{m \in M \mid t \in (a(m), b(m))\}$$

tanım kümesi bir X_t dönüşümünü tanımlayalım. Burada,

$$\gamma_m : (a(m), b(m)) \rightarrow M$$

$0 \in (a(m), b(m))$ ve $\gamma_m(0) = m$ olacak şekilde X' in bir integral eğrisidir.

Eğer her t için $D_t = M$ ise, yani $(\forall m \in M \text{ için } \gamma_m \text{ 'nin tanım kümesi } (-\infty, \infty))$ M üzerinde diferansiyellenebilir X vektör alanı tamdır. Bu durumda, X_t dönüşümleri X' in 1-parametrelili grubu olarak adlandırılan reel sayılar vasıtasıyla parametrelenen M' nin dönüşümlerinin bir grubu şeklini alır.

Eğer X tam değilse, tanım bölgeleri t' ye bağlı olduğundan X_t dönüşümleri bir grup biçimini almazlar. Bu durumda X' in lokal 1-parametrelili grubu olarak X_t dönüşümlerinin koleksiyonuna başvurabiliriz.

Bir M manifoldu üzerinde sabit bir diferansiyellenebilir X vektör alanı alalım. X_t , X ile ilişkilendirilmiş dönüşümlerin lokal 1-parametrelili grubunu gösterebiliriz. Y' de M üzerinde diğer bir diferansiyellenebilir vektör alanı olsun. $m \in M$ noktasında Y' nin X' e göre türevini tanımlayacağız. İlk olarak, X' in integral eğrisini m' den $X_t(m)$ noktasına takip ediyoruz ve

orada Y' yi değerlendiriyoruz. O taktirde $Y_{X_t(m)}$ ' i, X_{-t} difeomorfizmasının dX_{-t} diferansiyeli vasıtasıyla $T_m(M)$ ' ye geri taşıyoruz. $T_m(M)$ ' de $dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ ve Y_m vektörlerinin farkını alıp, t ile farkına bölünür ve daha sonra $t \rightarrow 0$ giderken limit alınır. Diğer bir deyişle $T_m(M)$ değerli diferansiyellenebilir $t \rightarrow dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ fonksiyonu gözönüne alınır ve $t=0$ ' daki türevi alınır. $T_m(M)$ ' de farklı olan $dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ fonksiyon değerini düşünelim ve $t=0$ ' da kendi türevlerini alalım. Sonuç olarak $T_m(M)$, m noktasında X' e göre Y' nin **Lie türevi** olarak adlandırılır ve $(L_X Y)_m$ ile gösterilir.

Buna göre,

$$(L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(m)}) - Y_m}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (dX_{-t}(Y_{X_t(m)}))$$

olur.

Önerme: M üzerinde X bir diferansiyellenebilir vektör alanı olsun. Buradan, M üzerinde her bir diferansiyellenebilir Y vektör alanı için

$$L_X Y = [X, Y]$$

dir.

Önerme: $L(G)$ Lie cebriyle bir Lie grubu G olsun. $X, Y \in L(G)$ için

$$d\rho(X)(Y) = [X, Y]$$

dir.

3. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ

M bir diferansiyellenebilen bir manifold olsun ve $X(M)$ M 'nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı tüm pürüzsüz (smooth) vektör alanlarının ailesini gösterebiliriz. Pürüzsüz (smooth) kavramı C^∞ veya analitik anlamında kullanıyoruz.

Her bir $X \in X(M)$, M üzerinde ki yerel difeomorfizmlerin bir 1-parametrelili grubunu tanımlar. Yani X için olanaklı her bir $t \in R$ için manifoldlar üzerinde vektör alanları vasıtasıyla üretilmiş adi diferansiyel denklemlerin varlık teoreminden dolayı

$$X_t : \text{dom}(X_t) \subset M \rightarrow M$$

nin bir yerel difeomorfizm olduğu elde edilir ve eğer $\gamma^X(.,x), x$ noktasındaki vektör alanının integral eğrisi ise bu taktirde

$$X_t(x) = \gamma^X(t, x)$$

ile tanımlıdır.

X_t için aşağıdaki özellikler mevcuttur.

$$i) X_t \circ X_s = X_{t+s}$$

$$ii) (X_t)^{-1} = X_{-t}$$

$$iii) X_0 = Id$$

Tanım: Σ bir kontrol sistemi $\Sigma = (M, D)$ şeklindeki bir ikili olarak tanımlanır. Burada, M diferansiyellenebilen bir manifold ve $D, X(M)$ 'in bir alt ailesidir.

M, Σ 'nın durum uzayıdır.

D 'nin elemanları sistemin stratejileri ve Σ kontrol sisteminin kontrolleridir.

Σ kontrol sistemi;

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \mid X^j \in D, t_j \in R, r \in N\}$$

sözde (pseudo) grubu tanımlar ve Σ tarafından M 'de x 'in yörüngesi, x 'de G_Σ 'nin etkisi (action) ile verilir.

$$G_\Sigma = \{\phi(x) \mid \phi \in G_\Sigma\}$$

Tanım: Eğer $G_\Sigma(x) = M$ olacak şekilde $x \in M$ varsa Σ kontrol sistemine geçişlidir denir.

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in G_{\Sigma}(x)$$

olacak şekilde G_{Σ} , M üzerinde bir “ $\sim$ ” bağıntısını tanımlayalım. “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısıdır.

Σ kontrol sistemi geçişli ise $G_{\Sigma}(x) = M$, $\forall x \in M$ ’dir.

Ayrıca Σ ile birleşmiş,

$$S_{\Sigma} = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \mid X^j \in D, t_j \geq 0, r \in N\}$$

sözde yarı (pseudo-semi) grubu elde edilir ve bu S_{Σ} x’ den Σ ’nın ulaşılabilirlik (accessibility) cümlesi denilen Σ ile M ’deki x’ in pozitif yörüngesi

$$S_{\Sigma} = \{\varphi(x) \mid \varphi \in S_{\Sigma}\}$$

şeklinde dir.

$$S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x), \quad \forall x \in M$$

S_{Σ} tarafından tanımlanan M üzerindeki “ $\sim$ ” bağıntısı simetrik bir bağıntı değildir. $t > 0$ ise X_{-t} ’nin S_{Σ} ’ya ait olması gerekmez.

$$x \in D \Rightarrow -x \in D \text{’ dir.}$$

Kontrol edilebilirliğin temel problemi $S_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde M , D ve $x \in M$ altındaki koşulları bulmaktır. Problemimizin çözümü bir x başlangıç noktasından başlayarak Σ ’nın D negatif olmayan stratejileri ile M ’in her noktasına ulaşmaktır. Yani $S_{\Sigma}(x) = M$ ne zaman doğrudur?

$$S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x) \subset M$$

olduğunu biliyoruz. Σ ’nın geçişliliği bu problemi çözmek için gerekli bir koşuldur ancak yeterli değildir. Örneğin;

$$\Sigma = \left(R, \left\{ \frac{d}{dx} \right\} \right) \text{ alınırsa o zaman}$$

$S_{\Sigma}(0) = [0, \infty) \subsetneq G_{\Sigma}(0) = R$ olur. Bu basit örnek kontrol edilebilirlik probleminin çok zor bir soru olduğunu gösterir.

Kontrol Edilebilirlik

$\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ’ya

Eğer $S_{\Sigma}(x) = M$ ise, x' de kontrol edilebilirdir.

Eğer Σ kontrol sistemi M' nin her elemanında kontrol edilebilir ise kontrol edilebilirdir denir.

Şimdi, teorik açıdan önemli bir sonuç olan sistemin dinamiğinin tüm özelliklerini koruyan, M' deki herhangi bir başlangıç koşulu için durum uzayının yörüngesine indirgenmesine olanak veren “Yörünge (Orbit) Teoremi” ni inceleyeceğiz.

Teorem: $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ ise, $G_{\Sigma}(x)$ yörüngesi bir diferansiyellenebilen manifold yapısına sahiptir.

3.1 R^n Üzerindeki Lineer Kontrol Sistemleri

Lineer kontrol sistemleri, uygulamaları açısından kontrol sistemlerinin en önemli sınıflarından birini oluşturmaktadır. R^n üzerinde

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

dinamiği ile $\Sigma_{lineer} = (R^n, D_{lineer})$ şeklinde tanımlanır. Burada $A \in M_{n \times n}(R)$, $B \in M_{n \times k}(R)$ ve $u = \{u : [0, \infty) \rightarrow R^k \mid u \text{ parçalı sabit bir fonksiyon}\}$ kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerin sınıfı olmak üzere $u \in U$ 'dur . Bu durumda

$$D_{lineer} = \{Ax + Bu \mid u \in U\}$$

dur.

R^n üzerindeki lineer kontrol sistemi $\Sigma_{lineer} = (R^n, D_{lineer})$ kontrol edilebilirdir ancak ve ancak

$$\text{rank}(BABA^2B \dots A^{n-1}B) = n$$

Bu sonuç lineer kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği için rank koşulu olan gerek ve yeter bir cebirsel koşul veren Kalmann Teoremi olarak bilinir.

Örnek: Aşağıdaki lineer kontrol sistemleri örneklerinde kontrol edilebilirliğe karar vermek için sadece rank koşulunu kullanıyoruz.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \mid u \in R \right\}$$

$\Sigma = (R^2, D)$ kontrol edilemez.

Örnek:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \mid u \in R \right\}$$

ile $\Sigma = (R^2, D)$ kontrol edilebilirdir.

3.2 R^n Üzerindeki Bilineer Kontrol Sistemleri

$\Sigma_{bilinear} = (R^n, D_{bilinear})$ bilinear kontrol sistemi

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^k u_j A^j x$$

diferansiyel denklemleri ile tanımlıdır.

Burada, $x \in R^n$; $A, A^j \in M_n(R)$; $j = 1, 2, \dots, k$; $u \in U$ ($M_n(R)$ tüm n kare matrislerin kümesi)

3.3 R^n Üzerindeki Afin Kontrol Sistemleri

$$\dot{x} = Ax + a + \sum_{i=1}^p u_i (B_i x + b_i)$$

ile belirli $\Sigma_{afin} = (R^n, D_{afin})$ kontrol sistemi afin kontrol sistemini tanımlamaktadır. Burada $x \in R^n$, $A, B_i \in M_n(R)$, $a, b_i \in R^n$ (vektör olarak) ve u_i ' lerde kontrollerdur.

Kontrol Edilebilirlik Karakterizasyonu

Σ_{afin} kontrol sistemi eğer singüler bir noktaya sahip değilse ve ilişik olan $\Sigma_{bilinear}$ kontrol sistemi kontrol edilebilirse kontrol edilebilirdir. $\Sigma_{bilinear}$ kontrol sistemi;

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^p u_i B_i x$$

diferansiyel denklemleri ile tanımlı olan sistemdir.

Bu durumun bir genellemesi genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu üzerindeki afin sistemlere yapılabilmektedir.

V ve Z sonlu boyutlu reel vektör uzayları ve $\beta: V \times V \rightarrow Z$ simplektik tasviri (yani; dejenere olmayan ters-simetrik bilinear tasvir) olmak üzere $V \times Z$ vektör uzayı $[(v_1, z_1), (v_2, z_2)] = (0, \beta(v_1, v_2))$ parantez işlemi ile bir Lie cebiri yapısına sahiptir.

Genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu ise buna karşılık gelen özel bir Lie grubudur. R^n üzerindeki aynı karakterizasyon Genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemlerine de genelleştirilmektedir.

Örnekler

1) $\Sigma_{linear} = (R^2, D_{linear})$ olmak üzere;

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2) $\Sigma_{bilinear} = (R^2, D_{bilinear})$ olmak üzere;

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3) $\Sigma_{afin} = (R^2, D_{afin})$ olmak üzere;

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \left(\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

Afin kontrol sistemleri genel olarak lineer ve bilinear kontrol sistemlerinden daha geniş bir sınıfı temsil ederler. Yukarıdaki örnekte yer aldığı gibi afin sistemdeki sütun vektörler sıfır vektörü olarak alındığında sistem bilinear kontrol sistemine dönüşmektedir.

Ayrıca, afin kontrol sisteminde drift vektör alanındaki sütun vektörü sıfır vektörü ve aynı zamanda kontrolle birleşmiş vektör alanı ise sadece sütun vektöründen meydana geliyorsa, sistem lineer kontrol sistemidir.

3.4 Lie Grubu Üzerindeki İnvaryant Kontrol Sistemleri

G bir Lie grubu ve $L(G)$ ' de G üzerindeki sol-invaryant vektör alanlarının kümesine izomorfik olarak onun Lie cebiri olmak üzere

$$\dot{g} = X_g + \sum_{j=1}^d u_j(t) Y_g^j$$

ile belirli $\Sigma = (G, D)$ kontrol sistemi G Lie grubu üzerindeki invaryant kontrol sistemini tanımlar. Burada $g \in G$, $X, Y^1, Y^2, \dots, Y^d \in L(G)$ ve u_j kontrolleridir.

$$h(G) = \text{Span}_{L.A.} \{Y^1, Y^2, \dots, Y^d\}$$

kontrol vektörleri ile üretilmiş $L(G)$ ' nin bir alt Lie cebiridir.

Verilen bir Σ invaryant kontrol sistemi için, $L(G)$ G üzerindeki sol-invaryant vektör alanları tarafından üretildiğinden

$$S_{\Sigma}(g) = g \cdot S_{\Sigma}(e)$$

dir. Dolayısıyla, invaryant kontrol sistemi Σ 'nın kontrol edilebilirliği için birim eleman e 'de kontrol edilmesi yeterlidir.

3.5 Bazı İnvaryant Kontrol Sistemleri için Kontrol Edilebilirlik Karakterizasyonu

Σ nilpotent, basit bağlantılı Lie grupları üzerindeki invaryant kontrol sistemi ancak ve ancak $L(G) = h(G)$

ise kontrol edilebilirdir.

Önerme : $\Sigma = (G, D)$ bağlantılı kompakt bir Lie grubu üzerinde bir invaryant kontrol sistemi olsun. O takdirde, $\Sigma = (G, D)$ 'nin kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter koşul transitif (geçişmeli) olmasıdır.

Örnek : 3-boyutlu Heisenberg Lie grubu üzerindeki aşağıdaki kontrol sistemini göz önüne alalım :

$$\dot{x} = 1$$

$$\dot{y} = 2u$$

$$\dot{z} = y.$$

Bu durumda,

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dir. Burada, } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Heisenberg grubunun Lie cebirinin}$$

elemanlarıdır ve u da kontrolü göstermektedir.

$$h(G) = \text{Span}_{L.A.} \{Y\}$$

dir. $L(G) \neq h(G)$ olduğundan bu sistem kontrol edilemezdir.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ u \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki sapan vektör alanı olmayan u ve v kontrollerine sahip sistemi göz önüne alalım.

$$h(G) = \text{Span}_{L.A.} \{X, Y\} = L(G)$$

olduğundan ikinci sistem kontrol edilebilir bir sistemdir.

4. MATEMATİKSEL MODELLER

Bu bölümde kontrol sistemleri ve kontrol edilebilirlik problemleriyle ilgili bazı örneklerle yer vereceğiz.

Örnek : Göldeki sandal örneği ;

Göldeki motorlu bir sandalı göz önüne alalım. Gölü R^2 'nin bir X alt kümesi ile özdeşleyerek ve sandalın durumunu $(x_1, x_2) \in X$ olacak şekilde belirleyerek bir koordinat sistemi seçebiliriz. Sandalın hareketinin en basit bir matematik modeli aşağıdaki kontrol sistemidir.

$$\dot{x} = u$$

Burada, $u = (u_1, u_2)$ kontrolü $U = \{u \in R^2 : \|u\| \leq m\}$ kümesine ait olan hız vektörüdür.

$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ u ' nun normudur ve m ise sandalın mümkün olan en büyük hızıdır.

Eğer motorlu sandal (veya kürekli bir sandal) nehir üzerinde göz önüne alınırsa problemin farklı bir uyarlaması elde edilir. O taktirde sandalın hızlarının kümesi $F(x)$ sandalın nehirde bulunduğu noktadaki akıntısına bağlıdır. Bu durum ise modelimizdeki $\dot{x} = u$ denkleminin

$$\dot{x} = f(x) + u$$

denklemini ile değişmesi anlamına gelir.

Burada u kontrolü $U = \{u \in R^2 : \|u\| \leq m\}$ kümesinin elemanıdır ve $f(x)$ nehrin x noktasındaki akıntısının hız vektörünü gösterir.

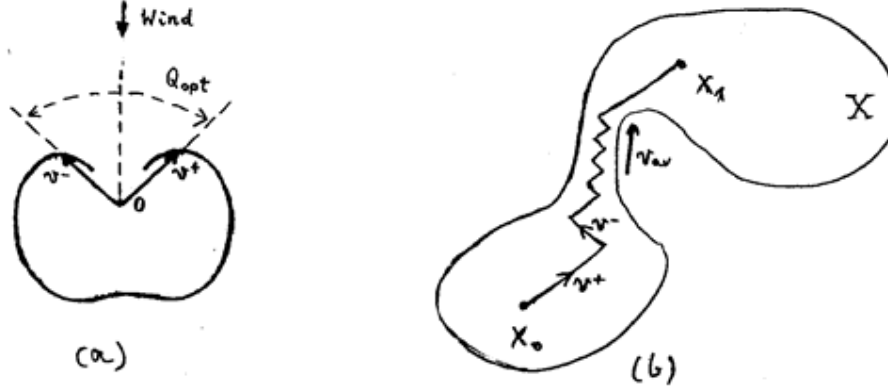
Aynı zamanda $\dot{x} = u$ denklemini $\tilde{U}(x) = f(x) + U$ kontrol kümesini x ' e bağlı seçerek alabiliriz. Özetle, $F(x) = f(x) + U$ mevcut hızların kümesi 0 'ı içeriyorsa, o taktirde sandal yeterli zaman kullanılırsa herhangi bir başlangıç konumundan herhangi bir bitiş konumuna gidebilir.

Örnek : Göldeki yelkenli örneği ;

Rüzgarın yön ve kuvvetinin sabit olduğunu kabul ederek aşağıdaki denklem ile göldeki bir yelkenlinin hareketini modelleştirebiliriz.

$$\dot{x} = v(\theta),$$

Burada, θ yelkenlinin ekseni ile rüzgarın arasındaki açıdır. θ açısı kontrol olarak göz önüne alınır ve $U = (\alpha, 2\pi - \alpha)$ kümesinden değerler alır. Burada α yelkenlinin rüzgara karşı gidebileceği en küçük açıdır. θ' 'nın bir fonksiyonu olarak v hızı rüzgara bağlı olarak yelkenlinin karakteristiklerine bağlıdır ve genellikle aşağıdaki şekil 4.1.a ' da ki gibidir.



Şekil 4.1 Göldeki yelkenli modeli

Yelkenci için ilginç bir problem, hedefin başlangıç noktasından baktığımızda yelkenlinin “ölü koni” de olduğu zaman ortaya çıkar. Bu durumda yelkenlinin hareketi, ölü koni de olsa bile hedefe ulaşacak şekilde seçilen hareket serilerinden meydana gelir. Gerçekten, rüzgara karşı yelkenlinin hareketi $\theta = \pm\theta_{opt}$ sadece iki kontrolün kullanılmasına kısıtlanabilir. Burada θ_{opt} rüzgara karşı yönelmiş olan $v(\theta)$ rüzgar bileşenine paralel olarak büyütür. Bu durumda sistem iki uygun $v^+ = v(\theta_{opt})$ $v^- = v(-\theta_{opt})$ hızları ile iki dinamik sisteme indirgenir. Sırasıyla her bir sol ve sağ hareket için harcanan zaman ile hareketleri λ_+ ve λ_- ($\lambda_+ + \lambda_- = 1$) sabitlerine değiştirilmesi ile yelkenli $v_{av} = \lambda_+ v(\theta_{opt}) + \lambda_- v(-\theta_{opt})$ ortalama hız ile gidiyormuş gibi durum alır.

Yukarıda ki örneğin gözlenmesi aşağıdaki formal olmayan duruma genelleştirilebilir.

Sonuç (Konveksleştirme prensibi): Sistemlerin kontrol edilebilirlik özelliklerinin incelenmesinde, uygun $F(x) = \{f(x, u) : u \in U\}$ hızlarının kümesi konveks kabuğuyla yer değiştirebilir. Konveksleştirilmiş sistemin çözümleri orijinal sistemin çözümleriyle (C^0 topolojisinde) yaklaştırılabilirler. Özellikle, eğer tüm $x \in X$ için $0 \in \text{int co } F(x)$ ise, o takdirde sistem tamamen kontrol edilebilirdir. Yani herhangi bir durum herhangi bir diğer durumdan ulaşılabilir.

Örnek : Araba park etme örneği ;

Sokağın kenarında iki araba arasına bloke olmuş arabamızı park yerinden çıkarmak istediğimizi düşünelim. (Şekil 4.2.a 'ya bakınız)

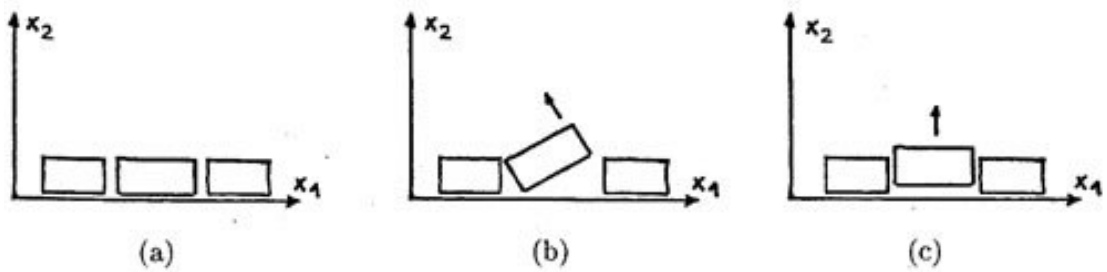
Bunun için en basit olan ancak her zaman uygulanamayabilen strateji arabayı sokağa çıkarana kadar hareketlerin bir serisini uygulamaktır. (Şekil 4.2.b'ye bakınız)

Bu problem için aşağıdaki matematik modelini kullanacağız. x_1 ve x_2 arabanın arka tekerleğinin geometrik merkezinin Öklid koordinatlarını ve ϕ x_1 eksenine ile arabanın eksenindeki açığı gösterebilir. Sokağın x_1 eksenine ile paralel olduğunu varsayıyoruz. Direksiyonun iki ekstrem hali ile hareketinin göz önüne alınması yeterlidir. Eğer arabanın $\mp b$ sabit açısal hızıyla hareket ettiğini kabul edersek, o takdirde ön tekerleklerin merkezinin hızı bir çember çevresi boyunca hareket eder. (Direksiyonun her bir pozisyonunda) $x = (x_1, x_2, \phi)$ koordinatlarında ki arabanın kinematik hareketleri aşağıdaki iki vektör alanı ile $R^2 \times (-\pi, \pi) \subset R^3$ de tanımlanabilir:

$$f = (r \cos \phi, r \sin \phi, b)^T \quad g = (r \cos \phi, r \sin \phi, -b)^T$$

Burada r bir sabittir. Stratejimiz eşit uzunluktaki kısa hareketlerin bir serisini kullanmaktır.

Burada direksiyonun en soldaki hali ile ileriye hareketi ve en sağdaki hali ile geriye hareketini değiştiriyoruz. (-g vektör alanıdır) Tüm hareket f ve $-g$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olan vektör ile yaklaşık olarak tanımlanabilecektir. Hareketlerin serisinin tam bir dönüş ile yaklaştırabileceğini öneren $(\frac{1}{2})f - (\frac{1}{2})g = (0,0,b)$ 'yi elde ederiz.



Şekil 4.2 Araba park modeli

Bu strateji, eğer arabalar yaklaşık olarak dikdörtgensel biçimde ise ve ön ve arkadaki arabalar çok yakın park etmişlerse uygulanamaz. Çünkü arabanın dönmesine geometrileri uygun olmayacaktır. Bu durumda ise vektör alanlarının Lie parantezi kavramını temel alan daha

sofistike bir strateji kullanmalıyız. Bu strateji neredeyse arabamızı sokağa dik bir doğrultuda sürmemize olanak verir. (Şekil 4.2.c'ye bakınız)

KAYNAKLAR

Agrachev, A. A., *editor*, Mathematical Control Theory, ictp lecture notes, the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2002.

Ayala, V., *Controllability of Nilpotent Systems*, Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions, Banach Center Publications, Vol., 32, pp. 35-46, 1995. Institute of Math. Polish Academy of Science.

Jurdjevic, V., *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.

Kara Hacibekiroglu, A *Controllability Theorem for Invariant Systems on Lie Groups*, Dissertation of 1993-94 Diploma Course in Mathematics, International Centre for Theoretical Physics, Italy, August 1994

Kara A. and San Martin L. A. B., *Controllability of Affine Control System for the Generalized Heisenberg Lie Groups*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 29, No. 1, pp. 1-6, 2006.

Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, 1971.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	03.03.1978	
Doğum yeri	Konya	
Lise	1991-1994	Küçükçekmece Lisesi
Lisans	1996-2001	Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2000-2003	Poligon Interactive, Yazılım Geliştirme
2004-Devam ediyor	M.E.B’lığında Matematik Öğretmeni