

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                 | Sayfa |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ .....                                                                             | iii   |
| ŞEKİL LİSTESİ .....                                                                             | iv    |
| ÖNSÖZ.....                                                                                      | v     |
| ÖZET .....                                                                                      | vi    |
| ABSTRACT .....                                                                                  | vii   |
| 1. GİRİŞ.....                                                                                   | 1     |
| 2. ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLER .....                                                                 | 2     |
| 2.1 Tanım.....                                                                                  | 2     |
| 2.2 Özdeğer Ve Özvektörün Hesaplanması.....                                                     | 3     |
| 2.3 Köşegenleştirme Ve Benzer Matrisler.....                                                    | 5     |
| 2.4 Simetrik Matrislerin Köşegenleştirilmesi .....                                              | 9     |
| 3. EYLEMSİZLİK TANSÖRÜ .....                                                                    | 17    |
| 3.1 Eylemsizlik Ve Çarpım Eylemsizlik Momentleri.....                                           | 17    |
| 3.2 Bir Eksene Göre Eylemsizlik Momenti .....                                                   | 19    |
| 3.3 Asal Eylemsizlik Eksenleri.....                                                             | 21    |
| 3.4 Eylemsizlik Momentlerinin Dönüşümü-Tansör Özelliği .....                                    | 23    |
| 3.5 Rijit Cismin Sabit Nokta Etrafında Dönme Hareketi .....                                     | 25    |
| 3.6 Doğru Eksenli Çubukların Eğilmesi .....                                                     | 28    |
| 4. GERİLME TANSÖRÜ.....                                                                         | 33    |
| 4.1 İç Kuvvet Ve Gerilme.....                                                                   | 33    |
| 4.2 Bir Noktada n Normalli Yüzey Üzerindeki Normal Gerilme.....                                 | 35    |
| 4.3 Asal Gerilmeler, Gerilme Bileşenlerinin Dönüşümü Ve Tansör Özelliği.....                    | 38    |
| 5. ŞEKİL DEĞİŞTİRME TANSÖRÜ .....                                                               | 41    |
| 5.1 Şekil Değiştirmenin Tanımı.....                                                             | 41    |
| 5.2 Şekil Değiştirmelerin Yer Değiştirmeler Cinsinden İfadesi .....                             | 45    |
| 5.3 Herhangi Bir Doğrultudaki Birim Boy Değişimi .....                                          | 48    |
| 5.4 Asal Şekil Değiştirmeler, Şekil Değiştirme Bileşenlerinin Dönüşümü Ve Tansör Özelliği ..... | 51    |
| 6. SONUÇLAR.....                                                                                | 53    |
| KAYNAKLAR.....                                                                                  | 54    |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                                                   | 55    |

## SİMGE LİSTESİ

|               |                          |
|---------------|--------------------------|
| $I$           | Eylemsizlik Momenti      |
| $\rho$        | Yoğunluk                 |
| $J$           | Jakobi Matrisi           |
| $M$           | Moment                   |
| $\omega$      | Açısal Hız               |
| $P$           | Gerilme Vektörü          |
| $H$           | Açısal Momentum          |
| $\sigma$      | Normal Gerilme           |
| $\varepsilon$ | Şekil Değiştirme Tansörü |

## ŞEKİL LİSTESİ

|            |                                                                 |    |
|------------|-----------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2. 1 | Matris ve Özvektör İlişkisi .....                               | 2  |
| Şekil 2. 2 | Matris ve Özvektörün Geometrik Yorumu .....                     | 3  |
| Şekil 3. 1 | Kütle Eylemsizlik Momentleri .....                              | 17 |
| Şekil 3. 2 | Alan Eylemsizlik Momentleri .....                               | 19 |
| Şekil 3. 3 | Keyfî Bir Eksene Göre Eylemsizlik Momenti .....                 | 19 |
| Şekil 3. 4 | Sabit Bir Nokta Etrafında Dönme .....                           | 26 |
| Şekil 3. 5 | Eğik Eğilme .....                                               | 30 |
| Şekil 4. 1 | Gerilme Vektörü .....                                           | 33 |
| Şekil 4. 2 | Üç Eksenli Gerilme Hali .....                                   | 34 |
| Şekil 4. 3 | Dik Üç Kesit .....                                              | 36 |
| Şekil 5. 1 | Uzunluk Değişimi .....                                          | 41 |
| Şekil 5. 2 | Açı Değişimi .....                                              | 42 |
| Şekil 5. 3 | Şekil Değiştirme Durumu .....                                   | 44 |
| Şekil 5. 4 | Şekil Değiştirmelerin Yer Değiştirmeler Cinsinden İfadesi ..... | 45 |

## ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamamda bana yardımcı olan Sayın Prof. Dr. Ayşe Soyuçok'a teşekkür ederim.

Bazı bölümlerin hazırlanmasında yardımcı olan ve bazı şekillerin AutoCAD te çizimini yapan değerli arkadaşım inşaat mühendisi Mesut Şimşek'e ve yardımlarından dolayı Arş. Gör. Ramazan Tekercioğlu'na teşekkür ederim

Son olarak eğitimimde hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan ve bana her zaman destek olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Rahmetli babamın aziz hatırasına...

Aralık 2006

Hasan Hüseyin Yurtcu

## ÖZET

Özdeğer ve özvektör problemleri birçok mühendislik alanında karşımıza çıkar.

Bu tezde, özdeğer ve özvektörleri uygulamada önemli olan bazı matrisler ele alınmıştır. Bunlar, kütle ve alan eylemsizlik, gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin kartezyen koordinatlardaki bileşenlerinden oluşan matrislerdir.

Çalışmada ele alınan matrisler ve ilgili özdeğer ve özvektör problemlerinin uygulamada nasıl karşımıza çıktığı, bu özdeğer ve özvektörlerin fiziksel anlamlarının ne olduğu ve bunların kullanımının getireceği kolaylıklardan bazıları gösterilmeye çalışılmıştır.

Ayrıca, bu matrislerin, dönüşüm bağıntıları elde edilmiş ve kartezyen koordinatlarda tansör tanımına uyduğu gösterilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Simetrik matris, özdeğer, özvektör, kuadratik form, eylemsizlik momenti, eğilme, gerilme, şekil değiştirme

## ABSTRACT

Eigenvalue and eigenvector problems arise in many engineering applications.

In this thesis, we consider some matrices which are important ones in applications. The elements of these matrices consist of cartesian components of the mass and area inertia tensors, stress tensor and strain tensor.

We give the physical meanings and some facilities of eigenvalues and eigenvectors of these matrices. Moreover we obtained the transformation equations of the mentioned matrices and we showed that they are actually the tensor transformation relations.

**Key words:** Symmetric matrixes, eigenvalue, eigenvector, quadratic form, moment of inertia, flexure, stress, deformation.

## 1. GİRİŞ

Son yıllarda matris yöntemleri üzerinde yapılan çalışmaların fizik, mekanik, yöneylem ve ekonomi gibi uygulamalı bilimlerde verimli bir ortam sağlaması, matrislerin özdeğer ve özvektörleri konusunun önemini artırmıştır. Uygulamada kullanılan matrislerin simetrik matris olarak seçilmesi ile simetrik matrislerin özelliklerinden dolayı uygulamalar daha da kullanışlı hale gelmiştir.

Özdeğer ve özvektör ifadelerinin İngilizce karşılıkları *eigenvalue* ve *eigenvector* dır. *Eigen* terimini ilk olarak David Hilbert ( 1862-1943 ) kullanmıştır. Hilbert *eigenfunktion* ve *eigenwert* ifadelerini ilk olarak integral denklemlerle ilgili bildirilerinde kullanmıştır. Hilbert in çıkış noktası homojen olmayan integral denklemlerin, bir  $\lambda$  parametresiyle matrissel karşılığının  $(I - \lambda A) x = y$  olması idi. Hilbert bu eşitliğin sıfırdan farklı homojen çözümü için  $\lambda$  değerlerine *eigenwerte* adını vermiştir ve  $\lambda$  değerleri A matrisinin karakteristik köklerine karşı gelmektedir. *Eigenvektor* kavramı ise ilk olarak Courant ve Hilbert tarafından sonlu boyut ifadesi açıklanırken kullanılmıştır.

John Von Neuman ( 1903-1957 ) bir eserinde  $f \neq 0$  şartı altında  $Rf = \lambda f$  ifadesindeki  $\lambda$  yı *eigenwerte*,  $f$  yi ise *eigenfunktion* olarak adlandırmıştır. Bu yaygın bir kullanım haline gelmiştir. 1946 da H.&B. Jeffreys in “ Methods of Mathematical Physics ” adlı eserinde özdeğer kavramı karakteristik değer ve gizli kök kavramlarıyla eş anlamlı olarak ifade edilmiştir.

Bu tez çalışması, giriş ve sonuçla birlikte altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde matrislerin özdeğer ve özvektörleri hakkında bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde kütle ve alan eylemsizlik tansörleri, dördüncü bölümde gerilme tansörü, beşinci bölümde de şekil değiştirme tansörü ele alınmıştır. Son olarak altıncı bölümde ise sonuçlar özetlenmiştir..

## 2. ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLER

### 2.1 Tanım

$A$ ,  $n \times n$  lik bir matris ve  $X$  sıfır vektör olmamak üzere;  $AX$  çarpımı  $X$  vektörünün bir katı, yani,

$$AX = \lambda X \quad (2.1)$$

ise,  $\lambda$  ya  $A$  nın *özdeğeri* ve  $X$  e  $A$  nın  $\lambda$  ya karşı gelen *özvektörü* denir.

$AX$  ile  $X$  vektörü arasında genellikle geometrik bir ilişki yoktur (Şekil 2.1a). Bazı durumlarda, sıfır olmayan öyle  $X$  vektörleri bulunabilir ki,  $X$  ile  $AX$  çarpımı birbirlerinin bir katı olurlar (Şekil 2.1b). Bu durumda  $X$  vektörüne  $A$  matrisinin özvektörü denir.



Şekil 2. 1 Matris ve Özvektör İlişkisi

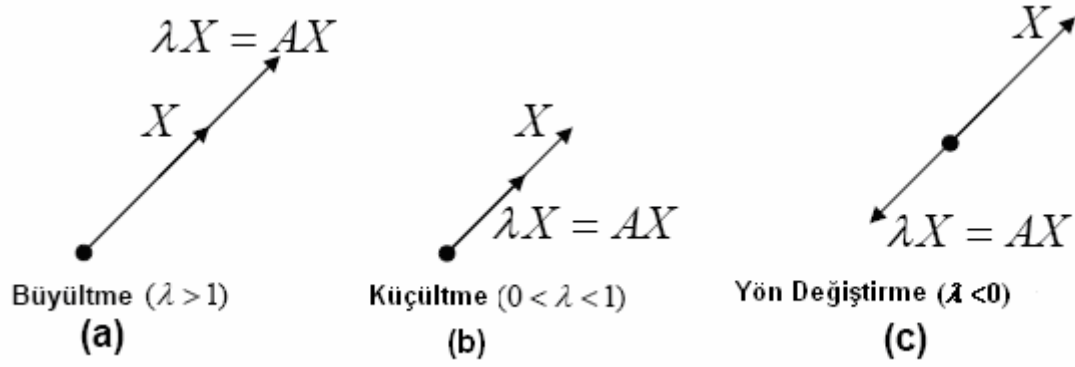
Örneğin  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  vektörü  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$  matrisinin özvektörüdür. Burada  $X$  vektörüne karşılık gelen

özdeğer 3 tür. Yani,

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3X$$

dir.

Geometrik yorum,  $\lambda$  nın değerlerine bağlı olarak Şekil 2.2 de verilmektedir.



Şekil 2. 2 Matris ve Özvektörün Geometrik Yorumu

## 2.2 Özdeğer Ve Özvektörün Hesaplanması

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad n \times n \text{ tipinde bir matris olsun. O zaman, (2.1) denklemini } I_n \text{ birim}$$

matris olmak üzere,

$$AX = \lambda X$$

$$\lambda X - AX = 0$$

$$(\lambda I_n - A)X = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) ifadesi  $(A - \lambda I_n)X = 0$  şeklinde de yazılabilir ve  $(\lambda I_n - A)$  ifadesi için verilecek tanımlar  $(A - \lambda I_n)$  ifadesi için de doğrudur.

$(\lambda I_n - A)$  ifadesi matris formda,

$$\lambda I_n - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu matrisinin determinantına A matrisinin *karakteristik polinomu* denir. (2.2) ifadesinin  $X \neq 0$  çözümü için,

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

olmalıdır. Buna A matrisinin *karakteristik denklemi* denir. Bu denklemin kökleri A matrisinin *özdeğerlerini* verir. Bu özdeğerler (2.2) ifadesinde yerine yazılırsa bu özdeğerlere karşı gelen *özvektörler* elde edilir.

$\det(\lambda I_n - A)$  ifadesini hesapladığımızda  $n$ . inci dereceden bir polinom elde ederiz. A matrisinin karakteristik polinomunda  $\lambda^n$ ,

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

çarpımından elde edilir ve böylece  $\lambda^n$  ifadesinin katsayısı 1 olur. O zaman,

$$\det(\lambda I_n - A) = p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

ifadesini yazabiliriz.  $\lambda = 0$  alırsak,  $\det(\lambda I_n - A) = \det(-A) = a_n$  olur. Yani,  $a_n = (-1)^n \det A$  olur.

## 2.3 Köşegenleştirme Ve Benzer Matrisler

### Tanım 2.1

$P$  tekil olmayan bir matris olmak üzere,  $B = P^{-1}AP$  eşitliği ile birbirleri arasında ilişki kurulabilen  $A$  ve  $B$  matrislerine benzer matrisler denir.

### Teorem 2.1

Benzer matrisler aynı özdeğerlere sahiptir.

İSPAT:

$A$  ve  $B$  benzer matrisler olsun. O halde  $P$  tekil olmayan bir matris ( $PP^{-1} = I_n$ ) olmak üzere  $B = P^{-1}AP$  yazılabilir.  $A$  ve  $B$  matrislerinin karakteristik polinomları olan  $p_A(\lambda)$  ve  $p_B(\lambda)$  nın aynı olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
 p_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) \\
 &= \det(P^{-1}\lambda I_n P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_n - A)P) \\
 &= \det(P^{-1}) \det(\lambda I_n - A) \det(P) \\
 &= \det(P^{-1}) \det(P) \det(\lambda I_n - A) \\
 &= \det(\lambda I_n - A) \\
 &= p_A(\lambda)
 \end{aligned}$$

dır.  $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$  olduğundan,  $A$  ve  $B$  aynı özdeğerlere sahiptir.

### Teorem 2.2

$n \times n$  tipindeki bir  $A$  matrisinin bir  $D$  köşegen matrisi ile benzer olması için gerek ve yeter

şart, A matrisinin özvektörlerinin  $R^n$  de bir baz oluşturmastır. Ayrıca, D matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanları A matrisinin özdeğerleridir.

**Not:** Eğer bir A matrisi, bir köşegen matrisi ile benzer ise A ya *köşegenleştirilebilir matris* denir.

İSPAT:

Eğer  $n \times n$  tipindeki bir A matrisi bir D köşegen matrisine benzer ise tekil olmayan (tersi bulunan) bir P matrisi için  $P^{-1}AP = D$  dir. Şimdi P matrisinin nasıl bir yapıda olduğunu araştıralım.  $AP = PD$  dir.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ve P nin j. sütunu (  $j = 1, 2, \dots, n$  )  $X_j$  olsun. AP nin j. sütununun  $AX_j$  ve PD nin j. sütununun  $\lambda_j X_j$  olduğuna dikkat edelim. Böylece,

$$AX_j = \lambda_j X_j$$

dir. Bunun anlamı, A nın bir özdeğerinin  $\lambda_j$  ve buna karşılık gelen özvektörün  $X_j$  olmasıdır. Tersine,  $n \times n$  tipindeki bir A matrisinin özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ve bunlara karşılık gelen özvektörler  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olmak üzere  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $R^n$  de lineer bağımsız vektörler ise P yi, j. sütunu  $X_j$  olacak şekilde seçebiliriz.  $\text{Rank } P = n$ , dolayısıyla P tekil değildir. Buna göre AP nin j. sütunu  $AX_j$  şeklindedir.  $AX_j = \lambda_j X_j$  olduğundan AP nin j.sütunu  $\lambda_j X_j$  olur. Öte yandan PD nin j. sütununda  $\lambda_j X_j$  olduğu kolayca görülebilir. O halde,  $AP = PD$  veya  $P^{-1}AP = D$  olur. Bunun anlamı ise, A matrisinin köşegenleştirilebilir olmasıdır.

Sonuç olarak  $n \times n$  tipindeki bir A matrisinin  $n$  tane özvektörü  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ve bu

özvektörler  $R^n$  de lineer bağımsız ise, j. sütunu  $X_j$  olan bir P matrisi yardımıyla A matrisi köşegenleştirilebilir. Yani P matrisi yardımıyla  $P^{-1}AP = D$  olacak şekilde bir D matrisi elde edilebilir.

Burada köşegen matrisin esas köşegeni üzerindeki elemanlar A matrisinin özdeğerleri olur. Bunlara karşılık gelen vektörler ise A matrisinin özvektörleridir. P nin sütunlarının sırası, D matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanlarının sırasını belirler.

### **Teorem 2.3**

Eğer  $n \times n$  tipindeki bir A matrisinin karakteristik polinomunun kökleri reel ve hepsi birbirinden farklı ise A matrisi köşegenleştirilebilir bir matristir.

İSPAT:

$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , A matrisinin farklı özdeğerlerinin cümlesi olsun. Bu değerlere karşılık gelen özvektörlerin cümlesi de  $S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  olsun. S nin  $R^n$  için bir baz olduğu ispat etmek isteniyor. Bunun için S nin lineer bağımsız olduğunu göstermek yeterlidir.

S nin lineer bağımlı olduğunu varsayalım. Bu durumda bir  $X_j$  vektörü, S deki vektörlerin birleşimi olarak yazılabilir.  $S_1 = \{X_1, X_2, \dots, X_{j-1}\}$  cümlesinin lineer bağımsız olduğu kabul edilsin. Aksi halde  $S_1$  cümlesinin vektörlerinden biri diğerlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir.  $S_1$  lineer bağımsızdır dolayısıyla  $X_j$ ,

$$X_j = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_{j-1}X_{j-1} \quad (2.3a)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} AX_j &= A(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_{j-1}X_{j-1}) \\ &= a_1AX_1 + a_2AX_2 + \dots + a_{j-1}AX_{j-1} \end{aligned} \quad (2.3b)$$

ifadesi elde edilebilir. Buradan,  $AX_j = \lambda_j X_j$  olduğundan,

$$\lambda_j X_j = a_1 \lambda_1 X_1 + a_2 \lambda_2 X_2 + \dots + a_{j-1} \lambda_{j-1} X_{j-1} \quad (2.3c)$$

elde edilir. (2.3a) denkleminin  $\lambda_j$  ile çarpılmasıyla

$$\lambda_j X_j = \lambda_j a_1 X_1 + \lambda_j a_2 X_2 + \dots + \lambda_j a_{j-1} X_{j-1} \quad (2.3d)$$

olur. (2.3c) den (2.3d) nin çıkarılmasıyla,

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_j)X_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_j)X_2 + \dots + a_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)X_{j-1}$$

bulunur.  $S_1$  lineer bağımsız olduğundan,

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_j) = 0, \quad a_2(\lambda_2 - \lambda_j) = 0, \quad \dots, \quad a_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j) = 0$$

olur.  $\lambda$  lar farklı olduğundan,  $(\lambda_1 - \lambda_j) \neq 0, (\lambda_2 - \lambda_j) \neq 0, \dots, (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \neq 0$  olur. Buradan,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{j-1} = 0$$

bulunur.

Yani  $X_j = 0$  olmalıdır.  $X_j$  bir özvektör olduğundan bu imkânsızdır. O halde  $S$  lineer bağımsızdır ve dolayısıyla  $A$  köşegenleştirilebilirdir.

**NOT:** Teorem 2.3 ün ispatından, şu önemli sonuç elde edilir:  $A$ ,  $n \times n$  tipinde bir matris ve  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$   $A$  nın  $k$  tane farklı özdeğeri ve bunlara karşılık gelen özvektörler de  $X_1, X_2, \dots, X_k$  ise  $X_1, X_2, \dots, X_k$  lineer bağımsızdır.

$A$  nın karakteristik polinomu  $n$  tane çarpan olarak yazılabilir. Bunların her biri  $\lambda - \lambda_0$  formundadır ve  $\lambda_0$  karakteristik polinomun bir reel köküdür. Yani karakteristik polinom,

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$   $A$  nın farklı özdeğerleri ve  $k_1, k_2, \dots, k_r$  toplamları  $n$  olan tamsayılardır. Bu  $k_i$  tamsayısına  $\lambda_i$  nin *katlılığı* denir. Buradan, " $A$  nın karakteristik polinomunun köklerinin hepsi reel ve her bir  $k$  katlı  $\lambda$  özdeğeri için  $k$  tane lineer bağımsız özvektör bulunabilirse  $A$  matrisi köşegenleştirilebilir bir matristir" sonucu ortaya çıkar.

## 2.4 Simetrik Matrislerin Köşegenleştirilmesi

Simetrik matrisler  $A^T = A$  şartını sağlarlar. Simetrik matrisler, genel matrislere göre daha kullanışlıdır ve birçok uygulamada yer alırlar. Bu bölümde simetrik matrislerin özellikleri incelenecektir.

Teorem 2.3 ten  $n$  tane farklı özdeğeri olan bir  $n \times n$  tipindeki  $A$  matrisinin köşegenleştirilebilir olduğu biliniyor. Aksi halde  $A$  matrisi köşegenleştirilemeyebilir.

Simetrik matrisler ise her durumda köşegenleştirilebilir. Yani  $A$  matrisi bir simetrik matris ise  $P^{-1}AP = D$  olacak şekilde tekil olmayan bir  $P$  matrisi vardır. Burada  $D$  bir köşegen matrisdir.

### **Teorem 2.4**

Bir reel simetrik matrisin karakteristik polinomunun bütün kökleri reeldir

İSPAT:

$A$  matrisinin karakteristik polinomunun herhangi bir kökü  $\lambda$  olsun.  $\lambda$  nın bir reel sayı olduğunu yani  $\lambda$  nın kompleks eşleniği  $\bar{\lambda}$  olmak üzere  $\lambda = \bar{\lambda}$  olduğu gösterilecektir.

$AX = \lambda X$  ifadesinin iki yanı soldan  $\bar{X}^T$  ile çarpılsın,

$$\begin{aligned}\bar{X}^T A X &= \bar{X}^T \lambda X \\ &= \lambda \bar{X}^T X\end{aligned}\tag{2.4}$$

olur. Her iki tarafın eşlenik transpozesi alınır,

$$\bar{X}^T \bar{A}^T X = \bar{\lambda} \bar{X}^T X$$

veya

$$\bar{X}^T A X = \bar{\lambda} \bar{X}^T X \quad (A \text{ reel ve } A = A^T \text{ olduğundan})$$

( 2.4 ) ifadesi de kullanılarak,

$$\lambda \bar{X}^T X = \bar{\lambda} \bar{X}^T X$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$(\lambda - \bar{\lambda})(\bar{X}^T X) = 0$$

bulunur.  $X \neq 0$  olduğundan,  $\bar{X}^T X \neq 0$  dır. Böylece  $\lambda - \bar{\lambda} = 0$  veya  $\lambda = \bar{\lambda}$  olur.

### **SONUÇ 2.1**

A bir simetrik matris ve A nın bütün özdeğerleri farklı ise A *köşegenleştirilebilir* bir matristir.

İSPAT:

A simetrik bir matris olduğundan, karakteristik polinomunun bütün kökleri reeldir. Özdeğerler farklı olduğundan Teorem 2.3 ten A nın köşegenleştirilebilir olduğu anlaşılır.

### **Teorem 2.5**

A bir simetrik matris ise, A nın farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri birbirine diktir.

İSPAT:

A nın  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri  $X_1$  ve  $X_2$  olsun.

$$AX_1 = \lambda_1 X_1$$

$$AX_2 = \lambda_2 X_2$$

dir. Yukarıdaki ilk denklem  $X_2^T$  , ikincisi  $X_1^T$  ile soldan çarpılırsa,

$$X_2^T A X_1 = \lambda_1 X_2^T X_1 \quad (2.5a)$$

$$X_1^T A X_2 = \lambda_2 X_1^T X_2 \quad (2.5b)$$

olur. (2.5b) nin her iki tarafının transpozesi alınarak A nın simetrik matris olduğu göz önüne alınırsa,

$$X_2^T A X_1 = \lambda_2 X_2^T X_1 \quad (2.6)$$

Bulunur. (2.6) ifadesi (2.5a) ifadesinden çıkarılırsa,

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) X_2^T X_1$$

olur.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  olduğundan  $X_2^T X_1 = 0$  elde edilir.

A köşegenleştirebilen bir matris ise P tekil olmayan bir matris olmak üzere  $P^{-1}AP$  köşegen matristir. Ayrıca P nin sütunları A matrisinin özvektörleridir. A simetrik ve özdeğerleri farklı bir matris olmak üzere A matrisinin özvektörlerinin dik cümlesi S ise A matrisinin bir özvektörünü, sıfırdan farklı bir sayı ile çarptığımızda yine A matrisinin bir özvektörü olacağından S cümlesini normalize edebiliriz. Bu ortanormal cümle, A matrisinin özvektörlerinden elde edilen cümle olarak  $T = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  şeklinde yazılabilir. P nin j. sütunu  $X_j$  özvektörü olsun. Bu durumda P nin ne tür bir matris olduğunu anlamak mümkündür. P yi  $P = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  şeklinde satır matrisi olarak yazabiliriz. Buradan

$$P^T = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix} \text{ olur. Burada } X_i^T, n \times 1 \text{ tipindeki } X_i \text{ matrisinin ( vektör ) transpozesidir.}$$

Buradan  $P^T P$  matrisinin  $(i, j)$  bileşeninin  $X_i^T X_j$  olduğu görülür.  $i=j$  için  $X_i^T X_j = 1$  ve  $i \neq j$  için  $X_i^T X_j = 0$  olduğundan  $P^T P = I_n$ . Yani  $P^T = P^{-1}$  olur.

### Tanım 2.2

A bir reel kare matris olmak üzere eğer  $A^{-1} = A^T$  ise A ya *ortogonaldir* denir. Buradan,  $A^T A = I_n$  ise A nın ortogonal olduğu söylenebilir.

### Teorem 2.6

$n \times n$  tipindeki bir A matrisinin ortogonal olması için gerek ve yeter şart A nın sütun vektörlerinin bir ortonormal baz oluşturmasıdır.

### Teorem 2.7

A,  $n \times n$  tipinde bir simetrik matris ise  $P^{-1}AP = P^T AP = D$  köşegen matrisi olacak şekilde bir P ortogonal matrisi vardır. A nın özdeğerleri D nin esas köşegeni üzerindeki elemanlardır.

**ÖRNEK 2.1**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

olsun. A nın karakteristik polinomunun

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 3)^2$$

olduğu bulunur. Buradan,

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3 \text{ ve } \lambda_4 = 3$$

bulunur. Şimdi özvektörleri ve P ortogonal matrisini hesaplayalım. Katlılığı (2) olan -1 özdeğerine karşılık gelen özvektörler  $(-1I_4 - A)X = 0$  homojen sisteminin çözümleridir.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r$  ve  $s$  reel sayılar olmak üzere, bütün vektörlerin cümlesi,

$$\begin{bmatrix} r \\ -r \\ s \\ -s \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece -1 değerine karşı gelen özvektörler,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir. Bu iki vektörün dik olduğu açıktır. Ortonormal baz aradığımızdan,  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  ye karşılık gelen özvektörler sırasıyla,

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

şeklinde alınabilir. Katlılığı iki olan 3 özdeğerine karşılık gelen özvektörler  $(3I_4 - A)X = 0$  homojen sisteminin çözümleridir.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

r ve s reel sayılar olmak üzere, bütün vektörlerin cümlesi,

$$\begin{bmatrix} r \\ r \\ s \\ s \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece 3 özdeğerine karşılık gelen özvektörler,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir. Bu iki dik vektörün normalize edilmesiyle  $\lambda_3$  ve  $\lambda_4$  e karşılık gelen özvektörler sırasıyla,

$$X_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

bulunur. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler diktir ve böylece,  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$   $R^4$  için bir ortonormal bazdır. P matrisi, j. sütunu  $X_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) olan matristir. Yani,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olur.

A,  $n \times n$  tipinde bir simetrik matris ise  $P^{-1}AP$  bir köşegen matris olacak şekilde bir P ortogonal matrisinin nasıl bulunabileceği biliniyor. Tersine,  $P^{-1}AP = D$  bir köşegen matrisi

olacak şekilde bulunabilecek  $P$  ortogonal matrisi için bir  $A$  matrisi göz önüne alınsın.  $A$  ne tür bir matristir?  $P^{-1}AP = D$  olduğundan  $A = PDP^{-1}$  dir. Aynı zamanda  $P$  ortogonal olduğundan  $P^{-1} = P^T$  dir. Böylece,

$$A^T = (PDP^{-1})^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

olur, yani  $A$  matrisi simetrik bir matristir.

Birçok uygulamada, sadece verilen bir  $A$  matrisine benzer olan  $D$  köşegen matrisini bulmaya ihtiyaç duyulur. Yani  $P^{-1}AP = D$  olacak şekilde özvektörlerin normalize edilmesiyle oluşan  $P$  matrisini açıkça bilme zorunluluğu yoktur.  $D$  matrisi  $A$  matrisinin özdeğerlerinin köşegen matris formunda yazılmasıyla elde edilebilir.

Özdeğer problemleri birçok mühendislik ve matematik uygulamalarında yer alır. Bunlar, aerodinamik, esneklik, nükleer fizik, mekanik, kimya mühendisliği, biyoloji, diferansiyel denklemler ve bunun gibi alanlardır. Uygulama problemlerindeki birçok köşegenleştirilebilir matris simetriktir. Ya da karakteristik polinomunun bütün kökleri reeldir. İlerleyen bölümlerde özellikle mekanik alanındaki uygulamalar incelenecektir.

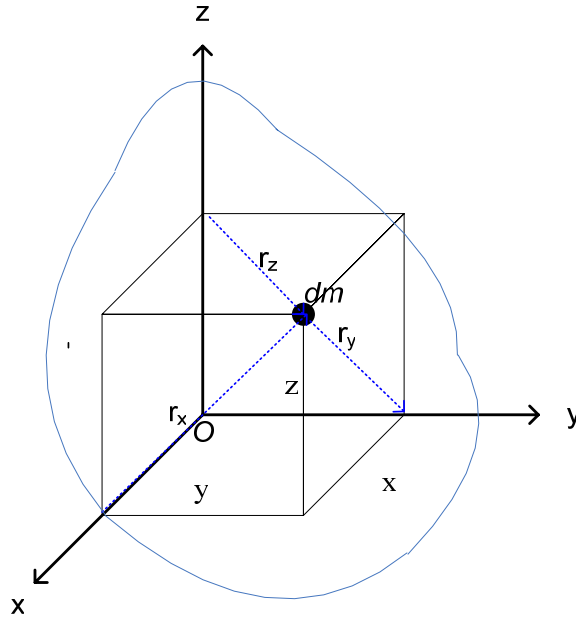
### 3. EYLEMSİZLİK TANSÖRÜ

Bundan sonraki bölümlerde mühendislik mekaniğinde karşımıza çıkan bazı matrisler ele alınacaktır. Bu matrislerin özdeğer ve özvektörlerinin önemli anlamları ve işlevleri vardır. Ayrıca, bu matrisler tansör dönüşüm özelliği göstermektedirler. Dolayısıyla bu matrislerden genellikle tansör diye söz edilir.

Bu bölümde eylemsizlik tansörü ele alınacaktır.

#### 3.1 Eylemsizlik Ve Çarpım Eylemsizlik Momentleri

Eylemsizlik momentleri bir cismin, ya da bir düzlemsel yüzeyin, belirli bir yönelim ve başlangıç noktasına sahip, verilen bir koordinat sistemine göre kütle ya da alan dağılımını özel bir şekilde belirler.



Şekil 3. 1 Kütle Eylemsizlik Momentleri

Şekil 3.1 de gösterilen rijit cismi ele alalım. Cismin dönme hareketi incelenirken karşılaşılan, cismin hacmi üzerinden alınan,

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_m r_x^2 dm = \int_V (y^2 + z^2) \rho dv \\
 I_{yy} &= \int_m r_y^2 dm = \int_V (x^2 + z^2) \rho dv \\
 I_{zz} &= \int_m r_z^2 dm = \int_V (x^2 + y^2) \rho dv
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

integrallerine eksenlere göre ( sırasıyla x,y,z) *kütle eylemsizlik momentleri*,

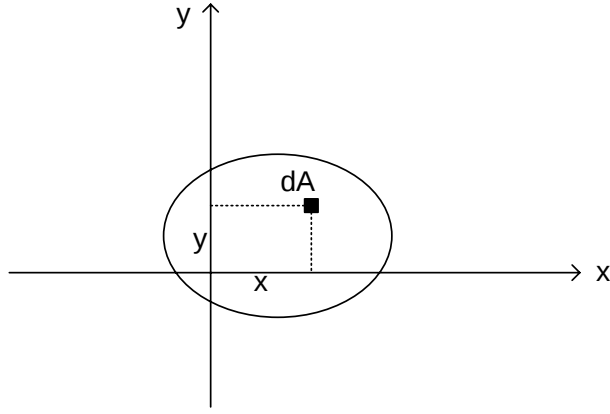
$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= I_{yx} = - \int_V xy \rho dv \\
 I_{yz} &= I_{zy} = - \int_V yz \rho dv \\
 I_{xz} &= I_{zx} = - \int_V xz \rho dv
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

integrallerine de *kütle çarpım eylemsizlik momentleri* adı verilir. Burada  $\rho$  yoğunluktur. Dik düzlemlerden biri veya her ikisi kütlenin simetri eksenleri ise bu düzlemlere göre çarpım eylemsizlik momentleri sıfır olur.

Benzer şekilde, örneğin çubukların eğilmesi ve düzlemsel yüzeylere gelen akışkan kuvvetlerinin incelenmesinde karşılaşılan,

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA, \quad I_{yy} = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = - \int_A xy dA \tag{3.3}$$

alan integrallerinin, ilk ikisi *alan eylemsizlik momentleri*, sonuncusu da *alan çarpım eylemsizlik momenti* olarak adlandırılır. Şekil 3.2.

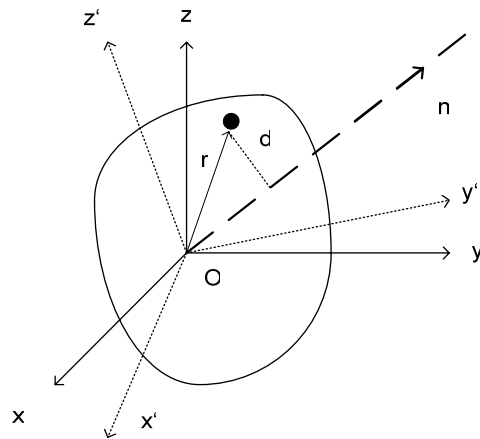


Şekil 3. 2 Alan Eylemsizlik Momentleri

Alan, bir eksene göre simetrikse çarpım eylemsizlik momenti sıfırdır.

### 3.2 Bir Eksene Göre Eylemsizlik Momenti

Şekil 3.3 teki cismi göz önüne alalım. Cismin, O noktasından geçen ve  $n$  birim vektörü doğrultusundaki bir eksene göre eylemsizlik momenti,



Şekil 3. 3 Keyfî Bir Eksene Göre Eylemsizlik Momenti

$$I_{(n)} = \int_m d^2 dm = \int_V \rho d^2 dv \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır. Cismin herhangi bir noktasının O noktasına göre yer vektörü  $r$  ise, görülebileceği gibi,

$$d^2 = |r \times n|^2$$

yazılabilir. Bu eşitlikte,

$$r = xi + yj + zk, \quad n = n_x i + n_y j + n_z k \quad (3.5)$$

olduğu göz önünde tutulursa (3.4) ,

$$I_{(n)} = \int_V \left[ (yn_z - zn_y)^2 + (zn_x - xn_z)^2 + (xn_y - yn_x)^2 \right] \rho dv$$

olur. Parantezler açılır ve koordinatlardan bağımsız olan  $n_x, n_y$  ve  $n_z$  nin çarpımları integrallerin dışına çıkarılırsa,

$$I_{(n)} = I_{xx} n_x^2 + I_{yy} n_y^2 + I_{zz} n_z^2 + 2I_{xy} n_x n_y + 2I_{yz} n_y n_z + 2I_{xz} n_x n_z \quad (3.6)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade bir kuadratik formdur.

Buradan, bir düzlemsel alanın koordinat merkezinden geçen ve  $n$  birim vektörü doğrultusundaki eksene göre eylemsizlik momentinin,

$$I_{(n)} = I_{xx} n_x^2 + I_{yy} n_y^2 + I_{xy} n_x n_y \quad (3.7)$$

olacağı söylenebilir.

### 3.3 Asal Eylemsizlik Eksenleri

Cismin eylemsizlik momentinin ekstremum değerler aldığı eksenlere *asal eksenler*, bu eksenlere göre eylemsizlik momentlerine de *asal eylemsizlik momentleri* denir. Ayrıca, bu eksenlere göre çarpım eylemsizlik momentleri de sıfırdır. Oxyz sisteminin O noktasından geçen  $n(n_x, n_y, n_z)$  birim vektörü doğrultusundaki eksene göre eylemsizlik momentini veren  $I_{(n)} = I_{(n)}(n_x, n_y, n_z)$  fonksiyonunun ( Bkz.(3.6) ) ekstrem (uç) değerler aldığı doğrultular ve bu ekstrem değerler bulunmak istenirse,  $n_x, n_y, n_z$  bileşenlerinin bağımsız olmadığı, yani,  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  olduğu hatırlanmalıdır. Bu durumda Lagrange çarpımı yöntemi kullanılarak çözüme varılabilir. Buna göre,  $I$  Lagrange çarpımı olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_n &= I_{(n)}(n_x, n_y, n_z) - I(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1) \\ &= I_{xx}n_x^2 + I_{yy}n_y^2 + I_{zz}n_z^2 + 2I_{xy}n_xn_y + 2I_{yz}n_y n_z + 2I_{xz}n_x n_z - I(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1) \end{aligned}$$

denirse, ekstremum koşulları,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_n}{\partial n_x} &= \frac{\partial I_n}{\partial n_x} - 2In_x = 0 \\ \frac{\partial G_n}{\partial n_y} &= \frac{\partial I_n}{\partial n_y} - 2In_y = 0 \\ \frac{\partial G_n}{\partial n_z} &= \frac{\partial I_n}{\partial n_z} - 2In_z = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} (I_{xx} - I)n_x + I_{xy}n_y + I_{xz}n_z &= 0 \\ I_{xy}n_x + (I_{yy} - I)n_y + I_{yz}n_z &= 0 \\ I_{xz}n_x + I_{yz}n_y + (I_{zz} - I)n_z &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu,  $n_x, n_y, n_z$  cinsinden homojen bir denklem sistemidir. Bu denklem sistemi matris formda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} (I_{xx} - I) & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & (I_{yy} - I) & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & (I_{zz} - I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

olur. Bu ifadenin  $(A - \lambda I_n)X = 0$  denklemi formatında olduğu görülür. Dolayısıyla,  $I_{(n)}$  eylemsizlik momentinin ekstremum değer aldığı doğrultular yani asal eksenler, (3.6) kuadratik formunun katsayılar matrisi olan, simetrik

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

matrisinin  $I_1, I_2, I_3$  özdeğerlerine karşı gelen  $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$  özvektörleridir. Teorem 2.5 e göre  $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$  özvektörleri karşılıklı olarak birbirlerine diktir. (3.9) denklemlerinin birincisini  $n_x$ , ikincisini  $n_y$  ve üçüncüsünü  $n_z$  ile çarpıp taraf tarafa toplarsak  $I = I_n$  buluruz

Buna göre I matrisinin özdeğerleri olan  $I_1, I_2$  ve  $I_3$ , sırasıyla, doğrultuları  $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$  vektörleri ile belirli  $x_1, y_1, z_1$  eksenlerine göre asal eylemsizlik momentlerinden ibarettir. Bu üç asal eylemsizlik momentinin biri cismin eylemsizlik momentinin maksimumu, bir diğeri minimumudur.

### 3.4 Eylemsizlik Momentlerinin Dönüşümü-Tansör Özelliği

Eylemsizlik momentleri kartezyen koordinatlarda tanımlanmıştır. Dolayısıyla bu kesimde  $Oxyz$  ve  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  gibi iki kartezyen koordinat sisteminin eksenlerine göre alınan eylemsizlik ve çarpım eylemsizlik momentlerinin yer aldığı  $I$  ve  $\bar{I}$  matrislerinin dönüşüm bağıntısını elde edeceğiz. Bu amaçla, cismin  $n$  birim vektörü ile verilen eksene göre eylemsizlik momentinin  $Oxyz$  sistemindeki ifadesini veren (3.6) kuadratik formunu ele alalım. Bu form matrislerle,

$$I_{(n)} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$= n^T I n$$

şeklinde yazılabilir. Bir  $P$  noktasının konum vektörünün  $Oxyz$  kartezyen sistemindeki bileşenleri ile bir  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  deki bileşenlerini birbirine bağlayan dönüşümün  $J$  Jacobi matrisinin doğrultu kosinüslerinden oluşup, ortogonal olduğu ( $J^{-1} = J^T$ ) kolayca görülebilir. Bu dönüşüm sütun vektörlerle,

$$\bar{X} = J X$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde,  $n$  birim vektörünün  $Oxyz$  deki bileşenleri  $(n_x, n_y, n_z)$  ile  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  deki  $(\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_z)$  bileşenlerini bağlayan bağıntılar sütun vektörler ve  $J$  nin ortogonalliği kullanılarak,

$$\bar{n} = J n \quad , \quad n = J^T \bar{n} \quad (3.13)$$

dir. (3.12) ve (3.13) den

$$I_{(n)} = \bar{n}^T J I J^T \bar{n} \quad (3.14)$$

olur. Diğer taraftan  $I_{(n)}$  in  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  koordinat sistemindeki ifadesi,

$$I_{(n)} = \bar{I}_{xx} \bar{n}_x^2 + \bar{I}_{yy} \bar{n}_y^2 + \bar{I}_{zz} \bar{n}_z^2 + 2\bar{I}_{xy} \bar{n}_x \bar{n}_y + 2\bar{I}_{yz} \bar{n}_y \bar{n}_z + 2\bar{I}_{xz} \bar{n}_x \bar{n}_z$$

$$I_{(n)} = \begin{bmatrix} \bar{n}_x & \bar{n}_y & \bar{n}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{xx} & \bar{I}_{xy} & \bar{I}_{xz} \\ \bar{I}_{xy} & \bar{I}_{yy} & \bar{I}_{yz} \\ \bar{I}_{xz} & \bar{I}_{yz} & \bar{I}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \\ \bar{n}_z \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$= \bar{n}^T \bar{I} \bar{n}$$

şeklindedir. (3.14) ve (3.15) karşılaştırılacak olursa,

$$\bar{I} = J I J^T \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu ise ikinci basamaktan kartezyen tansörler için dönüşüm bağıntısıdır. Bu nedenle  $I$  ya *eylemsizlik tansörü* denilmektedir.

Buradan, bir kuadratik formun katsayılar matrisinin kartezyen tansör dönüşüm kuralına uyduğu sonucu çıkarılabilir.

$(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  takımının  $(Ox_1y_1z_1)$  asal eksen takımı olarak alınması halinde, P, ikinci bölümde sözü edilen, yani,  $I$  nın özvektörlerini sütun kabul eden ortogonal matris olmak üzere,  $J = P^T$  olacaktır. Bu durumda  $\bar{I} = P^T I P$  olur (3.16). Bu matrisin  $I$  nın özdeğerlerinin yer aldığı köşegen matris olduğu ikinci bölümde açıklanmıştı. Dolayısıyla (3.6) kuadratik formuyla verilen  $I_{(n)}$ , asal eksen takımında,  $(n_1, n_2, n_3)$  n vektörünün bu takımdaki bileşenleri olmak üzere,

$$I_{(n)} = I_1 n_1^2 + I_2 n_2^2 + I_3 n_3^2 \quad (3.17)$$

olacaktır. Dolayısıyla, asal eksenlere göre eylemsizlik momentlerinin ( ekstrem değerler ) eylemsizlik tansörünün özdeğerleri olan  $I_1, I_2, I_3$  olduğu buradan da görülmektedir. Ayrıca buradan bu eksenlere göre çarpım eylemsizlik momentlerinin sıfır olduğu söylenebilir.

Bir noktadan geçen asal eylemsizlik takımının pratik açıdan en önemli özeliği o noktada asal eksenlere göre çarpım eylemsizlik momentlerinin sıfır olmasıdır.

(3.6) ve (3.7) kuadratik formları karşılaştırılacak olursa, kesim 3.3 ve bu kesimde kütle eylemsizlik momentleri ile ilgili olarak elde edilen sonuçların, iki boyutta, alan eylemsizlik momentleri için de geçerli olacağı söylenebilir.

### 3.5 Rijit Cismin Sabit Nokta Etrafında Dönme Hareketi

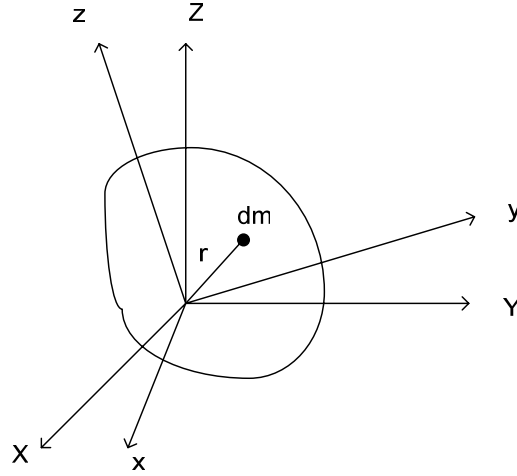
Kütle eylemsizlik momentleri ile rijit cismin bir nokta etrafındaki dönme hareketinin denklemleri elde edilirken karşılaşıldığı belirtilmişti. Burada kısaca, bu denklemlerin elde edilişi verilecek ve asal eksenlerin yararı vurgulanacaktır. Rijit cismin bir nokta etrafındaki dönme hareketinin denklemleri M ve H, sırasıyla, bu noktaya göre, kuvvetlerin toplam momentleri ve cismin açısal momentumu olmak üzere,

$$M = \frac{dH}{dt} \quad (3.18)$$

denklemlerinden elde edilir. Cismin toplam açısal momentumu tanım gereği,

$$H = \int_m r \times v dm = \int_V (r \times v) \rho dv \quad (3.19)$$

dir, (Şekil 3.4).



Şekil 3. 4 Sabit Bir Nokta Etrafında Dönme

Cismin anlık açısal hız vektörü  $\omega$  ise  $dm$  kütesinin anlık hızının,

$$v = \omega \times r \quad (3.20)$$

olacağı kolayca görülebilir. (3.20),  $r$ ,  $\omega$  ve  $H$  vektörlerinin Oxyz dik koordinat sisteminde,  $r = xi + yj + zk$ ,  $\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$ ,  $H = H_x i + H_y j + H_z k$  şeklindeki bileşenlerle ifadeleri kullanılırsa, (3.19) dan

$$\begin{aligned} H_x i + H_y j + H_z k = & \left[ \omega_x \int_m (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_m xy dm - \omega_z \int_m xz dm \right] i \\ & + \left[ -\omega_x \int_m xy dm + \omega_y \int_m (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int_m yz dm \right] j \\ & + \left[ -\omega_x \int_m zx dm - \omega_y \int_m yz dm + \omega_z \int_m (x^2 + y^2) dm \right] k \end{aligned} \quad (3.21)$$

bulunur. İntegral ifadelerinin eylemsizlik ve çarpım eylemsizlik momentlerini gösterdiği göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ H_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ H_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir.

Bu denklemler asal eylemsizlik eksenleri seçildiğinde daha da basitleşir. Bu eksenler kullanıldığında, çarpım eylemsizlik momentleri  $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$  olur.

$I_x = I_{xx}$ ,  $I_y = I_{yy}$  ve  $I_z = I_{zz}$  ile gösterilirse, açısal momentumun üç bileşeni,

$$H_x = I_x\omega_x, \quad H_y = I_y\omega_y, \quad H_z = I_z\omega_z$$

olur. Ayrıca cisim asal eylemsizlik eksenlerinden biri boyunca yönelmiş  $\omega$  açısal hızıyla dönecek olursa, cismin, bu eksene göre eylemsizlik momenti  $I$  olmak üzere, açısal momentumun  $H = I\omega$  olacağı açıktır. Yani cismin açısal momentumu bu eksen doğrultusundadır.

Ayrıca, bir  $A$  vektörünün sabit  $(X,Y,Z)$  ve  $\omega$  açısal hızı ile hareketli  $(x,y,z)$  koordinat sistemlerine göre değişim hızları arasında,

$$\left( \frac{dA}{dt} \right)_{XYZ} = \left( \frac{dA}{dt} \right)_{xyz} + \omega \times A \quad (3.23)$$

bağıntısı olduğu bilinmektedir Bu durumda (3.18)

$$M = (\dot{H})_{xyz} + \omega \times H \quad (3.24)$$

şekline gelir.  $xyz$  eksenleri cisim içinde sabit olacak ve cisimle birlikte hareket edecek şekilde

seçilebilir. Bu durumda cismin, bu eksenlere göre eylemsizlik ve çarpım eylemsizlik momentleri hareket süresince sabit olacağından, bu vektörel denklem açısal momentum bileşenleri için (3.22) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z + I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) \\
&\quad + I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) + I_{xz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) \\
M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x + I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) \\
&\quad + I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) + I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) \\
M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y + I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) \\
&\quad + I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) + I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

şeklinde üç skaler denklem haline getirilebilir. Cisimle birlikte hareket eden  $x, y$  ve  $z$  eksenleri *asal eylemsizlik eksenleri* olarak seçilirse, çarpım eylemsizlik momentleri sıfır ve  $I_{xx} = I_x$  vs. olur ve denklem (3.25),

$$\begin{aligned}
M_x &= I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\
M_y &= I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\
M_z &= I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y
\end{aligned} \tag{3.26}$$

şekline dönüşür. (3.26) denklem takımı Euler hareket denklemleri olarak bilinir. Burada asal eylemsizlik eksenleri kullanıldığında (3.25) denklemlerinin ne kadar kullanılabilir hale geldiği görülmektedir.

### 3.6 Doğru Eksenli Çubukların Eğilmesi

Alan eylemsizlik momentleri ile çubukların eğilmesinin incelenmesinde karşılaşıldığı

belirtilmişti. Bu kısımda doğrusal çubukların basit eğilme gerilmelerinin hesabı kısaca verilecek ve alan eylemsizlik tansörünün özdeğer ve özvektörlerinin işlevi vurgulanacaktır.

Basit mukavemet hallerinden biri, kesitte yalnız eğilme momentinin bulunduğu basit eğilme halidir. Eğilme momenti genellikle kesme kuvvetiyle birlikte bulunmasına rağmen, bazı özel yükleme hallerinde tek başına da bulunabilir.

Bu kısımda, basit eğilme denilen bu durumda gerilmelerin hesabı incelenecektir. Önce bazı tanımlar verilecektir.

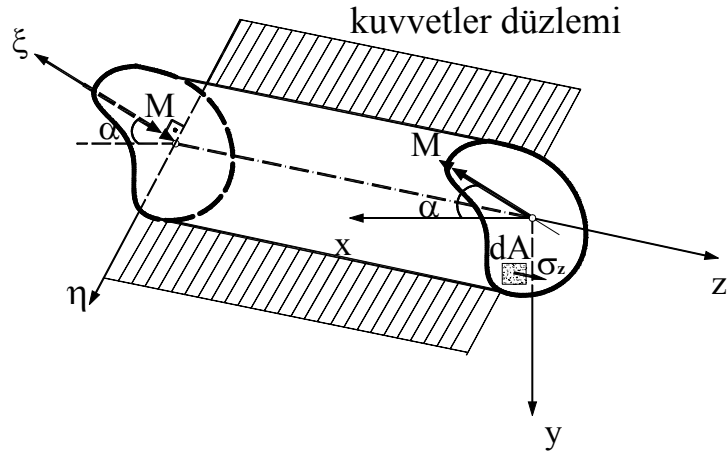
Eğilmeden önce doğru olan ve z eksenini ile çakışan çubuk ekseninin, eğilmeden sonra aldığı eğri şekle *elastik eğri*, çubuğa tesir eden kuvvetlerin içinde bulunduğu düzleme *kuvvetler düzlemi* denir. Kuvvetlerin içinde bulunduğu düzlemle elastik eğriyi içinde bulunduran düzlem çakışıyorsa *düz eğilmeden*, aksi halde *eğik eğilmeden* söz edilir. Eğilme halinde boy değişimine uğramayan çubuk liflerini içinde bulunduran düzleme *tarafsız düzlem*, bu düzlemle çubuk en kesitinin ara kesitine *tarafsız eksen* denir.

Ayrıca, basit eğilme halinde gerilme dağılışını tespit edebilmek için aşağıdaki kabuller yapılır:

Eğilmeden önce çubuk eksenine dik olan düzlemler, eğilmeden sonra da elastik eğriye dik ve düzlem kalırlar (Bernoulli-Navier Hipotezi).

Malzeme lineer elastiktir. Yani gerilme ile şekil değiştirme ilişkileri doğrusaldır,  $\sigma = E\varepsilon$  dir (Hooke cismi).(Not: Gerilme ve şekil değiştirme tanımları 4. ve 5. bölümlerde verilmiştir.)

Şekil 3.5 te simetrik olmayan herhangi bir çubuk kesiti görülmektedir. Bu çubuk, herhangi bir eksenini doğrultusunda tesir eden M eğilme momentinin etkisi altında olsun,



Şekil 3. 5 Eğik Eğilme

Yukarıda sözü edilen kabullere dayanarak kesit üzerinde alınacak bir  $dA$  alan elemanındaki normal gerilme,

$$\sigma_z = f(x, y) = c_1 x + c_2 y \quad (3.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,  $c_1$  ve  $c_2$  tayin edilmesi gereken sabitlerdir. Kesite etkiyen bileşke normal kuvvet  $N$  için,

$$N = \int_A \sigma_z dA$$

Moment bileşenleri  $M_x$  ve  $M_y$  için,

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA \quad M_y = - \int_A x \sigma_z dA$$

eşdeğerlik denklemleri sağlanmalıdır. Bunlara göre,

$$N = \int_A \sigma_z dA = \int_A (c_1 x + c_2 y) dA = c_1 \int_A x dA + c_2 \int_A y dA \quad (3.28)$$

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA = \int_A (c_1 x + c_2 y) y dA = c_1 \int_A x y dA + c_2 \int_A y^2 dA \quad (3.29)$$

$$M_y = - \int_A x \sigma_z dA = - \int_A (c_1 x + c_2 y) x dA = -c_1 \int_A x^2 dA - c_2 \int_A x y dA \quad (3.30)$$

yazılabilir. Basit eğilme halinde  $N = 0$  olacaktır. Bunun için (3.28) ifadesindeki integrallerin sıfır olması gerekir.  $xy$  eksen takımı ağırlık merkezinden geçtiğinden, bu şart kendiliğinden sağlanır ( Herhangi bir kesitin ağırlık merkezine göre statik momentleri sıfırdır ).

Bölüm (3.1) de verilen eylemsizlik momentleri tanımları gereğince (3.29) ve (3.30) ifadeleri,

$$M_x = -c_1 I_{xy} + c_2 I_x$$

$$M_y = -c_1 I_y + c_2 I_{xy}$$

şeklini alırlar. Bu iki denklemden  $c_1$  ve  $c_2$  elde edilip, bu değerler (3.27) de yerleştirilirse,

$$\sigma_z = \frac{-M_x I_{xy} - M_y I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} x + \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y \quad (3.31)$$

gerilme formülü elde edilir. Böylece en genel eğilme halinde normal gerilme ifadesi çıkartılmış olur.

Özel olarak  $x y$  eksen takımının, kesitin asal eylemsizlik takımı olması halinde  $I_{xy}=0$  olacağından, normal gerilme için,

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (3.32)$$

bulunur. M vektörünün asal eksenlerden biri, örneğin x doğrultusunda ( y eksenini kuvvetler düzlemi içinde ) olması halinde,

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

olur. Bu durumda, gerilmeler y nin fonksiyonu olduğundan, eğilme düz eğilme olur. Tarafsız eksen x eksenidir. Sonuç olarak, kuvvetler düzlemi kesitin asal eksenlerinden birini içerirse, eğilme diğer eksen etrafında düz eğilme olur.

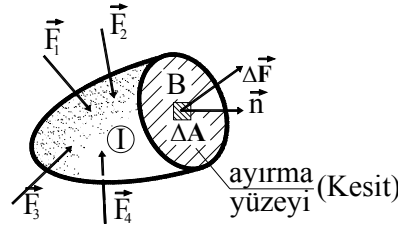
## 4. GERİLME TANSÖRÜ

Bu kesimde şekil değiştiren cisimler mekaniğinde önemli yeri olan gerilme tansörü ele alınacak ve bu tansörün özdeğer ve özvektörlerinin fiziksel karşılıkları belirtilecektir.

### 4.1 İç Kuvvet Ve Gerilme

Bir cismin, zihnen düşünülen çeşitli parçaları arasındaki etki ve tepkiye *iç kuvvet* denir. Ayırma yüzeyinin seçilen tarafına göre, iç kuvvet belirli bir yön kazanır. Seçilen taraflarda değişiklik yapılırsa iç kuvvet de yönünü değiştirir.

İç kuvvetlerin esas özelliklerinden biri de, kesit yüzeyi boyunca sürekli bir tarzda *dağılı* olmalarıdır. Yüzeye dağılı iç kuvvetin herhangi bir noktada dağılma şiddetini belirtmek için, o civarda birim alana isabet eden değerinin verilmiş olması gerekmektedir, bu şiddete *gerilme* denir.



Şekil 4. 1 Gerilme Vektörü

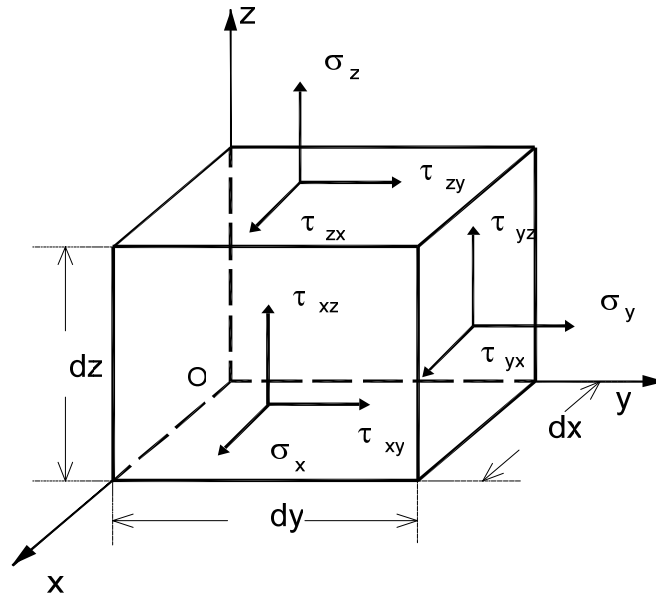
Şekil 4.1 de gösterilen kesitin B noktası civarında alınan  $\Delta A$  ile gösterilen alan elemanına isabet eden iç kuvvet tutarı  $\Delta \vec{F}$  ile gösterilirse, bu civarda gerilme vektörü,

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \right) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Gerilme vektörü genel olarak ayırma yüzeyinin normalinden farklı doğrultudadır.

Gerilme vektörünün ayırma yüzeyinin normali doğrultusundaki izdüşümüne *normal gerilme*, ayırma yüzeyi üzerindeki bir doğrultudaki izdüşümüne o doğrultudaki *kayma gerilmesi* adı verilir.

Nokta civarında göz önüne alınan bir küpün bir yüzünden diğer yüzüne gerilmelerin değişmesi ve içeride hacim kuvvetlerinin (atalet) bulunması ihtimalleri mevcuttur. Önce a, b, c boyutunda bir eleman düşünülüp sonra limite gidildiğinde, bu terimlerin yüksek mertebeden küçük olduğu, dolayısıyla *ihmal* edilebileceği görülür.



Şekil 4. 2 Üç Eksenli Gerilme Hali

Şekil 4.2 de normalleri  $x,y,z$  doğrultularında olan yüzeylerdeki gerilmeler, seçilen eksen sistemindeki bileşenleri ile gösterilmiştir. Karşı yüzlerdeki gerilme bileşenleri ters yönlerde olacaktır.

Kayma gerilmelerindeki birinci indis gerilmelerin bulunduğu yüzün normalinin doğrultusunu, ikincisi ise gerilmenin doğrultusunu belirtir. Moment denge denklemlerinden,

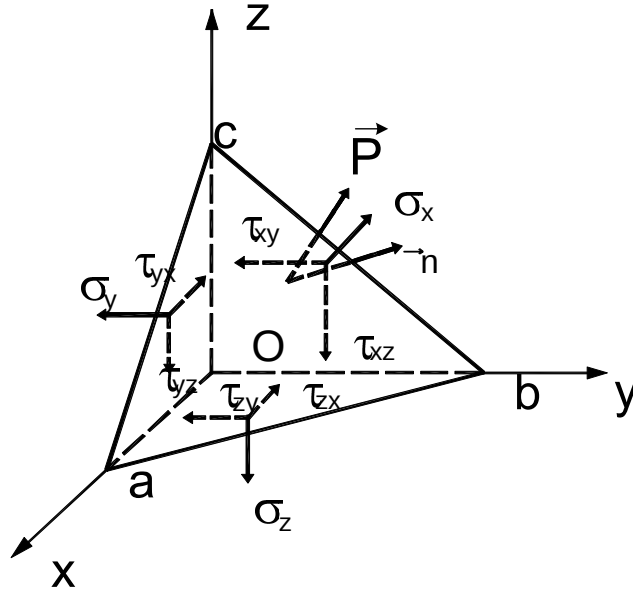
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (4.2)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

#### 4.2 Bir Noktada $n$ Normalli Yüzey Üzerindeki Normal Gerilme

Gerilmenin tanımında bir  $\Delta A$  kesit alanı elemanının seçilmesi öngörülmüştü. Buna göre bir noktadan geçen, çeşitli doğrultulu yüzey elemanları düşünülebileceğinden, aynı nokta için her defasında başka bir gerilme bulunacaktır. Kısaca söylemek gerekirse  $n$  değiştikçe  $p$  gerilme vektörü ona bağlı olarak değişecek demektir. Söz konusu nokta civarında, kenarları sonsuz küçük bir dört yüzlünün dengesi düşünülerek bu iki vektör arasındaki *vektör fonksiyonu* belirlenebilir.

Bu amaçla sözü edilen nokta civarında alınan Şekil 4.3 teki dörtyüzlüyü göz önüne alalım.



Şekil 4. 3 Dik Üç Kesit

$n$  birim vektörünün bileşenleri sırasıyla  $(n_x, n_y, n_z)$  ve bu yüzeydeki gerilme vektörünün bileşenleri de  $p_x, p_y, p_z$  olsun. Şekildeki cismin dengesinde,  $(x)$  eksenini doğrultusunda yazılacak izdüşüm denklemi,

$$p_x \cdot \Delta abc = \sigma_x \cdot \Delta obc + \tau_{yx} \cdot \Delta oac + \tau_{zx} \cdot \Delta oab$$

şeklindedir. Halbuki çeşitli yüzlerin alanları arasında,

$$\Delta obc = n_x \cdot \Delta abc, \quad \Delta oac = n_y \cdot \Delta abc, \quad \Delta oab = n_z \cdot \Delta abc$$

bağıntıları mevcut olduğundan, denge denklemi,

$$p_x = n_x \cdot \sigma_x + n_y \cdot \tau_{yx} + n_z \cdot \tau_{zx} \quad (4.3)$$

haline gelir. Benzer şekilde diğer eksenler boyunca izdüşüm denge denklemlerinden de,

$$p_y = n_x \cdot \tau_{xy} + n_y \cdot \sigma_y + n_z \cdot \tau_{zy} \quad (4.4)$$

$$p_z = n_x \cdot \tau_{xz} + n_y \cdot \tau_{yz} + n_z \cdot \sigma_z \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.3), (4.4) ve (4.5) denklemleri,  $p(p_x, p_y, p_z)$  gerilme vektörü ile  $n(n_x, n_y, n_z)$  normal vektörü arasındaki *lineer vektör fonksiyonunu* tarif eden ifadelerdir. Bu vektör fonksiyonunun,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

ile verilen katsayılar matrisine *gerilme tansörü* adı verilir.

Matris formda (4.3) ,(4.4), (4.5) bağıntıları,

$$p = n^T \sigma \quad (4.7)$$

şeklindedir. (4.2) simetri bağıntıları göz önünde bulundurulursa, gerilme tansörünün simetrik olduğu görülür. Dolayısıyla gerilme vektörü için (4.7) ifadesi,

$$p = \sigma n \quad (4.8)$$

olarak yazılabilir. abc kesitindeki normal gerilme,

$$\sigma_{(n)} = p \cdot n = n_x \cdot p_x + n_y \cdot p_y + n_z \cdot p_z$$

eder ki (4.3), (4.4) ve (4.5) denklemleri yardımıyla  $\sigma_{(n)}$  için,

$$\sigma_{(n)} = n_x^2 \cdot \sigma_x + n_y^2 \cdot \sigma_y + n_z^2 \cdot \sigma_z + 2 \cdot n_x \cdot n_y \cdot \tau_{xy} + 2 \cdot n_x \cdot n_z \cdot \tau_{xz} + 2 \cdot n_y \cdot n_z \cdot \tau_{yz} \quad (4.9)$$

yada matris formda,

$$\sigma_{(n)} = n^T \sigma n \quad (4.10)$$

bulunur.

### 4.3 Asal Gerilmeler, Gerilme Bileşenlerinin Dönüşümü Ve Tansör Özelliği

Bir cismin bir noktasından geçen ve birim normali  $n(n_x, n_y, n_z)$  olan yüzeydeki normal gerilme (4.9) kuadratik formu ile verilmiştir. Bu ifade  $I_{(n)}$  eylemsizlik momenti için verilen (3.6) ifadesinin benzeridir. Dolayısıyla (3.6) ifadesi kullanılarak, 3.3 ve 3.4 kesimlerinde elde edilen sonuçlar gerilmeler için de kullanılabilir.

Örneğin, normal gerilmelerin en büyük ve en küçük değerlerinin bulunması istenirse,  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  koşulu altında (4.9) da verilen,

$$\sigma_{(n)} = n_x^2 \cdot \sigma_x + n_y^2 \cdot \sigma_y + n_z^2 \cdot \sigma_z + 2 \cdot n_x \cdot n_y \cdot \tau_{xy} + 2 \cdot n_x \cdot n_z \cdot \tau_{xz} + 2 \cdot n_y \cdot n_z \cdot \tau_{yz}$$

kuadratik formunun ekstremumu aranacaktır. 3. bölümde elde edilen sonuçlara göre,  $\sigma_{(n)}$  nin

ekstremum olduğu değerler (4.9) kuadratik formunun katsayılar matrisi olan,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

simetrik matrisinin  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  özdeğerleridir. Sırasıyla bu özdeğerlere karşı gelen  $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$  özvektörleri de bu gerilmelerin doğrultularını vermektedir. Bu ekstremum değerlere *asal gerilmeler* denmektedir. Bu değerlerden biri en büyük, diğeri en küçük normal gerilmedir.

Yine O noktasında bir  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  dik koordinat sisteminde Şekil 4.3 tekine benzer olarak alınan bir dörtyüzlünün dik yüzeylerine etkiyen gerilme bileşenlerinden oluşan,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\sigma}_y & \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{xz} & \bar{\tau}_{yz} & \bar{\sigma}_z \end{bmatrix}$$

matrisi ile  $\sigma$  matrisi arasındaki dönüşüm bağıntısı, koordinat dönüşümünün Jacobi matrisi J olmak üzere,

$$\bar{\sigma} = J \sigma J^T$$

dir. Buradan,  $\sigma$  nın en azından kartezyen koordinatlarda tansör özelliği gösterdiği sonucu çıkar. Gerilme bileşenlerinin genel koordinatlarda da tansör özelliğine sahip olduğu gösterilebilir.

Ayrıca gerilme tansörünün özvektör doğrultularının belirlediği eksen sisteminde,  $n(n_1, n_2, n_3)$  olmak üzere,

$$\sigma_{(n)} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

dir. Yani normali özvektörler doğrultusunda olan düzlemlerde (asal gerilme düzlemleri) kayma gerilmeleri sıfırdır.

## 5. ŞEKİL DEĞİŞTİRME TANSÖRÜ

Bu bölümde şekil değiştiren cisimlerin incelenmesinde önemli bir büyüklük olan şekil değiştirme tansörü ele alınacaktır.

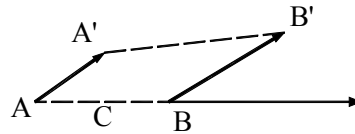
### 5.1 Şekil Değiştirmenin Tanımı

Şekil değiştiren cisimler mekaniğinde önemli bir kavram olan şekil değiştirme, diğer önemli bir kavram olan gerilmeden soyutlanabilir ve ondan bağımsız olarak tanımlanıp incelenebilir.

Bir cismin şekil değiştirmesinin biri *uzunluk değişimi* diğeri *açı değişimi* olan iki ana elemanı vardır.

Bu incelemede değişimlerin ana büyüklükler yanında çok küçük, matematik deyiimi ile sonsuz küçük oldukları, kabul edilecektir. Böylece, bu değişimler sonlu büyüklüklerin yanında ihmal edilebilecekleri gibi değişimlerin kareleri ve daha yukarı mertebe değerleri de kendileri yanında ihmal edilecekler demektir.

**Uzunluk değişimi:** Ana elemanlardan uzunluk veya boy değişiminin tanımlanması için başlangıçta bir  $x$  doğrultusu üzerinde bulunan A ve B noktaları göz önüne alınsın, Şekil 5.1 AB doğru parçası şekil değiştirmeden sonra  $A'B'$  durumuna gelmiş olsun.



Şekil 5. 1 Uzunluk Değişimi

Şimdi,

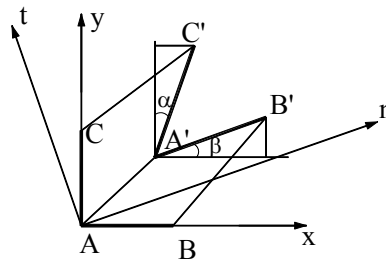
$$\varepsilon_{xo} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}}$$

oranı düşünölsün. Bu oran  $x$  doğrultusundaki  $AB$  doğru parçasının içerisindeki birim boylarda meydana gelen ortalama boy değışimini tanımlar. Eğer yalnız  $A$  noktasında ve  $x$  doğrultusundaki boy değışimi tanımlanmak isteniyorsa  $B$  noktası  $A$  ya yaklaştırlarak limite geçilmelidir. Böylece  $A$  da  $x$  doğrultusundaki birim boy değışimi,

$$\varepsilon_x = \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanabilir. Herhangi bir noktada ve herhangi bir doğrultudaki boy değışimini tanımlayan böyle değörlere *uzama oranı* veya *birim boy değışimi* adları verilir.

**Açı değışimi:** Şekil değıştiren cisimler mekaniğinde ve mukavemette *dik açıdaki değışim*, açı değışimi birimi olarak kullanılır. Bu değışimi tanımlamak için bir  $A$  noktasından geçen birbirine dik  $x$  ve  $y$  doğrultuları ile tanımlanan bir dik açı düşünölsün, Şekil 5.2.



Şekil 5. 2 Açı Değışimi

Başlangıçta  $x$  ve  $y$  doğrultuları üzerinde ve  $A$  ya yakın bir konumda bulunan  $B$  ve  $C$  noktaları ile  $A$  noktası, şekil değıştirme sonucunda  $B'$ ,  $C'$  ve  $A'$  konumlarına gelirler. Böylece Şekil 5.2

den de görüleceği üzere, başlangıçta  $90^\circ$  olan  $xAy$  açısında  $\gamma = \alpha + \beta$  kadarlık bir değişim meydana gelir. Bu değer, şekil değiştirmenin birinci mertebeden sonsuz küçük bir değer olduğu hakkında daha önce yapılan varsayıma göre, çok küçüktür ve bunun radyan cinsinden değeri A daki x ve y doğrultuları ile tanımlanan dik açıdaki ortalama değişimi tanımlar. B ve C noktaları A ya yaklaştırılarak limite geçildiğinde, A noktasındaki  $xAy$  dik açısındaki değişim,

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{B \rightarrow A \\ C \rightarrow A}} (\alpha + \beta)$$

olarak tanımlanır

Böylece  $\pi/2$  radyanlık açıdaki değişimi yine radyan cinsinden tanımlayan  $\gamma_{xy}$  ye A daki x, y doğrultularına ait *açı değişim oranı* ya da *kayma açısı* adı verilir.

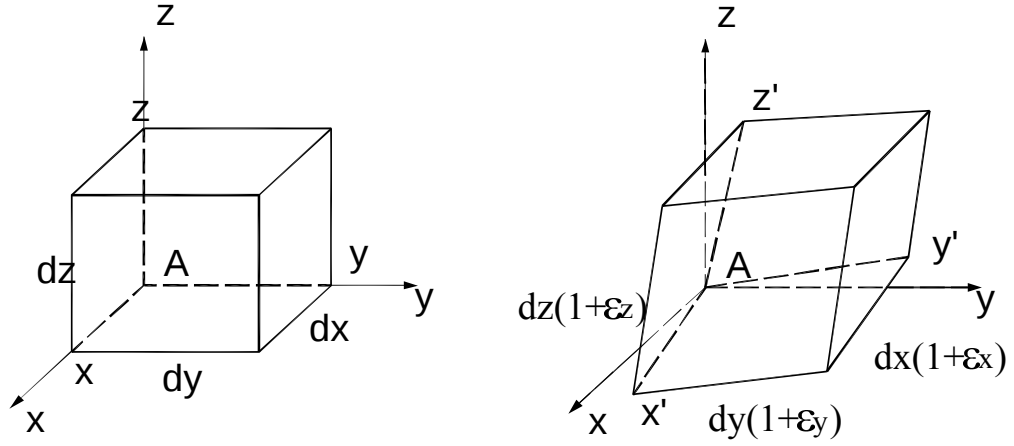
Bu şekilde tanımlanan şekil değiştirme elemanları katı cismin belirli bir noktasında, bu noktadan geçen her doğrultu ve tepesi bu noktada bulunan her dik açı için birbirlerinden farklıdırlar. Bir noktadaki şekil değiştirmenin bilinmesi, somut olarak, bu noktadaki sonsuz küçük bir hacim elemanının şekil değiştirmeden sonraki yeni biçiminin bilinmesi anlamında tarif edilebilir. Bu hacim elemanı, kenarları  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  olan bir dikkörtgenler prizması olarak alınırsa, Şekil 5.3a, bu sonsuz küçük prizmanın şekil değiştirmiş halinin, Şekil 5.3b, bilinebilmesi için her kenarının yeni boyunun ve A köşesindeki her üç açının yeni değerinin bilinmesi, yani, x, y, z doğrultularındaki  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  boy uzama oranları ile  $xAy$ ,  $xAz$ ,  $yAz$  dik açılarındaki  $\gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  açı değişimi oranlarının bilinmesi gerekir.

Böylece A daki şekil değiştirme halinin bilinmesi için gerekli altı eleman,  $\frac{\gamma_{xy}}{2} = \epsilon_{xy}$  v.b.

tanımları ile simetrik bir matrisin elemanları olarak,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu matris tansör dönüşüm kuralına da uyduğundan, bu matris *şekil değiştirme tansörü* olarak adlandırılır.



Şekil 5.3 Şekil Değiştirme Durumu

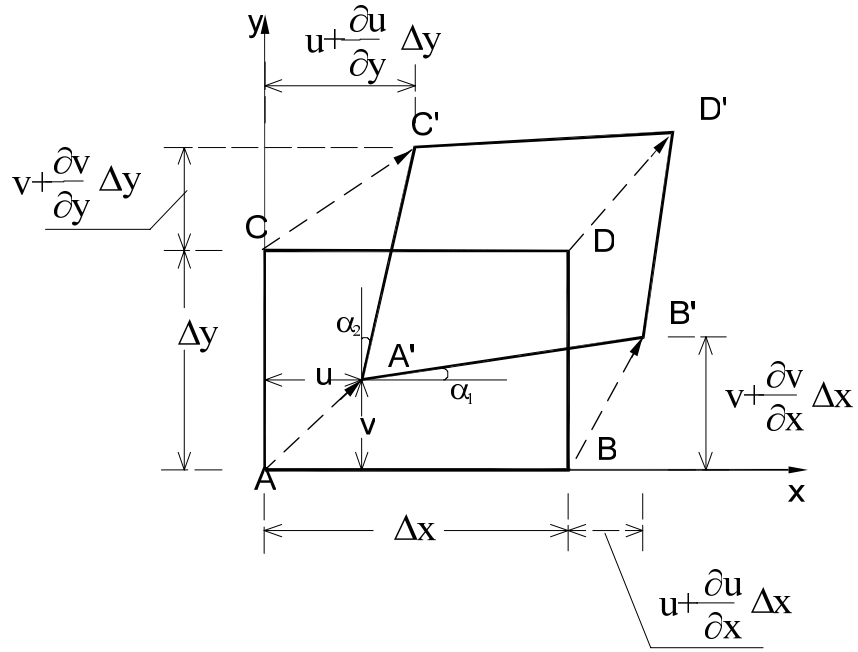
Özel durum olarak, cismin şekil değiştirmesi esnasında noktaların yer değiştirme vektörleri daima belirli bir düzleme paralel kalıyorsa, böylesi şekil değiştirme haline düzlem şekil değiştirme hali adı verilir. Düzlem şekil değiştirme halinde (5.2) ifadesi,

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

## 5.2 Şekil Değiştirmelerin Yer Değiştirmeler Cinsinden İfadesi

Burada geometrik gösterimlerde kolaylık sağlayacağı için, ifadeler, düzlem şekil değiştirme durumu için elde edilecektir. Cismin A noktasında alınan ve boyutları  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  olan bir ABCD dikdörtgeni, şekil değiştirdikten sonra  $A'B'C'D'$  şekline dönüşecektir, Şekil 5.4.  $AA'$  yer değiştirmesinin  $x$ ,  $y$  eksenleri doğrultularındaki bileşenleri  $u$  ve  $v$  olsun,



Şekil 5. 4 Şekil Değiştirmelerin Yer Değiştirmeler Cinsinden İfadesi

A noktasından  $\Delta x$  mesafedeki B noktasının  $u_B$  yer değiştirme bileşeni,

$$u_B = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$$

olur. Şu halde  $x$  doğrultusundaki  $\epsilon_x$  birim uzaması,

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - \Delta x}{\Delta x} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1$$

olarak bulunur.  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial v}{\partial x}$  değerleri sonsuz küçük olduklarından, yüksek mertebeden terimler terk edilmek şartıyla,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.3)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde  $\varepsilon_y$  için,

$$\varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{\Delta y \sqrt{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - \Delta y}{\Delta y} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.4)$$

elde edilir. BAC dik açısında meydana gelen açı değişimi  $\gamma_{xy}$  ise,

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \hat{BAC} - \hat{B'A'C'} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (5.5)$$

olacaktır.

Diğer taraftan B noktasının  $v_B$  yer değiştirme bileşeni

$$v_B = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

olur. Buna göre  $\alpha_1$  açısı,

$$\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x - v}{u + \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

şeklinde elde edilir.  $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$  olup ihmal edilebilir. Bu durumda,

$$\alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.6}$$

olur. Aynı şekilde,

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.7}$$

olarak elde edilir. Böylece  $\varepsilon_{xy}$ , (5.5), (5.6) ve (5.7) den,

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{5.8}$$

şeklinde bulunmuş olur.

### 5.3 Herhangi Bir Doğrultudaki Birim Boy Değişimi

Cismin bir noktasındaki uzama oranlarının bu noktadan geçen her doğrultuda farklı olduğu belirtilmişti Burada  $n$  birim vektörü ile belirli bir doğrultudaki  $\varepsilon_{(n)}$  uzama oranının  $n(n_x, n_y, n_z)$  ile ilişkisi şekil 5.4 teki  $\overrightarrow{AD}$  vektörünün değişimi incelenerek elde edilecektir. Yine şekil değişimlerinin küçük olduğu varsayılacak ve koordinatların artımı yerine diferansiyeli kullanılacaktır.

Şekil 5.4 te D noktasının yer değiştirme vektörü  $\overrightarrow{DD'}$  nün bileşenleri,

$$\begin{aligned} u_D &= u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ v_D &= v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (5.9)$$

şeklinde yazılabilir. Şekilden,  $\overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{AA'}$  olduğu görülmektedir. Bu eşitliğin sol tarafı  $\overrightarrow{AD} = d\mathbf{r}$  diferansiyel vektöründeki değişimi göstermektedir. Bu vektörü matris formda

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlik, kare matris simetrik ve ters simetrik kısımlara ayrılarak,

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin sağındaki birinci terimdeki kare matris  $\varepsilon$  şekil değiştirme tansörüdür. ( Bkz.(5.4)(5.8)(5.9) )

Ters simetrik olan ikinci terimdeki kare matris  $\Omega$  ile gösterilirse, (5.11) ifadesi matrislerle,

$$d(dr) = \varepsilon dr + \Omega dr \quad (5.12)$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan  $ds$ ,  $dr$  vektörünün boyunu göstermek üzere,

$$d(ds^2) = d(dr)^2$$

dir. Buradan,

$$ds d(ds) = dr.d(dr) \quad (5.13)$$

olur. Bu da, (5.12) kullanılarak, matrislerle,

$$ds d(ds) = dr^T \varepsilon dr + dr^T \Omega dr \quad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir.  $\Omega$  matrisi ters simetrik olduğundan, eşitliğin sağındaki ikinci terim sıfır olur. Dolayısıyla,

$$ds \, d(ds) = d r^T \, \varepsilon \, d r$$

olur. Her iki taraf  $ds^2$  ye bölünüp,  $\frac{dr}{ds} = n$  olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{d(ds)}{ds} = n^T \, \varepsilon \, n \quad (5.15)$$

olur. (5.15) in sol tarafı  $n$  birim vektörü doğrultusundaki birim boyun değişimini göstermektedir. Bu terim  $\varepsilon_{(n)}$  ile gösterilecek olursa,

$$\varepsilon_{(n)} = n^T \, \varepsilon \, n$$

yani,

$$\varepsilon_{(\bar{n})} = \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + 2\varepsilon_{xy} n_x n_y$$

bulur. Benzer şekilde, üç boyutlu şekil değiştirme durumunda,  $\varepsilon_{(n)}$  nin,

$$\varepsilon_{(\bar{n})} = \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2 + 2\varepsilon_{xy} n_x n_y + 2\varepsilon_{yz} n_y n_z + 2\varepsilon_{xz} n_x n_z \quad (5.16)$$

olacağı açıktır. (5.16) ifadesi, katsayılar matrisi *şekil değiştirme tansörü* olan bir kuadratik formdur.

#### 5.4 Asal Şekil Değişiklikler, Şekil Değişiklik Bileşenlerinin Dönüşümü Ve Tansör Özelliği

Cismin bir noktasındaki uzama oranlarının bu noktadan geçen doğrultuya bağlılığı kısım 5.3 te incelenmiş ve  $n(n_x, n_y, n_z)$  birim normali ile belirlenen doğrultudaki uzama oranı  $\varepsilon_{(n)}$  (5.16) kuadratik formu ile verilmiştir. Bu ifade (3.6) da ve (4.9) da verilen kuadratik formların benzeridir. (3.6) ifadesi kullanılarak 3.3 ve 3.4 kesimlerinde çıkarılan sonuçlar burada da geçerlidir.

Örneğin, uzama oranının en büyük ve en küçük değerleri bulunmak istenirse  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  koşulu altında

$$\varepsilon_{(\vec{n})} = \varepsilon_{xx}n_x^2 + \varepsilon_{yy}n_y^2 + \varepsilon_{zz}n_z^2 + 2\varepsilon_{xy}n_xn_y + 2\varepsilon_{yz}n_y n_z + 2\varepsilon_{xz}n_x n_z$$

Kuadratik formunun ekstremumu aranacaktır. Bu kuadratik formun katsayılar matrisi olan

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

matrisinin  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  özdeğerleri  $\varepsilon_{(n)}$  nin ekstremum değerleridir. Bu ekstremum değerlere *asal şekil değişiklikler* denmektedir.  $\varepsilon$  matrisinin  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  özdeğerlerine, sırasıyla, karşı gelen ve birbirlerine dik olan  $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$  özvektörleri asal şekil değişikliklerin doğrultularını (asal eksenleri) belirtmektedir. Bu eksenlerde  $n(n_1, n_2, n_3)$  olmak üzere,

$$\varepsilon_{(\vec{n})} = \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2$$

dir. Yani bu eksen sisteminde kayma şekil değıştirmeleri sıfırdır. Ayrıca bir  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  koordinat sisteminde tanımlanan şekil değıştirme elemanlarından oluşan,

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \bar{\varepsilon}_{xy} & \bar{\varepsilon}_{xz} \\ \bar{\varepsilon}_{xy} & \bar{\varepsilon}_y & \bar{\varepsilon}_{yz} \\ \bar{\varepsilon}_{xz} & \bar{\varepsilon}_{yz} & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}$$

matrisi ile, Oxyz de (5.17) ile tanımlı  $\varepsilon$  matrisi arasındaki dönüşüm bağıntısı, koordinat dönüşümünün Jacobi matrisi J olmak üzere,

$$\bar{\varepsilon} = J \varepsilon J^T$$

dir. Buna göre şekil değıştirme elemanları ya da şekil değıştirme bileşenleri kartezyen koordinatlarda, tansör dönüşüm kuralına uyar. Şekil değıştirme bileşenlerinin de gerilme bileşenleri gibi genel koordinatlarda tansör özelliğine sahip olduğu söylenebilir.

## 6. SONUÇLAR

Bu çalışmada matris özdeğer ve özvektörlerin mekanikteki bazı uygulamaları incelenmiştir. Uygulamalarda kullanılan matrisler simetrik matrislerdir. Çalışmada ele alınan matrislerle ilgili özdeğer ve özvektör problemlerinin uygulamada nasıl karşımıza çıktığı, bu özdeğer ve özvektörlerin fiziksel olarak anlamlarının ne olduğu ve bunların kullanımının getireceği kolaylıklardan bazıları gösterilmeye çalışılmıştır.

## KAYNAKLAR

- Anton H. ,Elementary Linear Algebra, John Wiley & Sons, Newyork
- Anton H.,Rorres C.,Elementary Linear Algebra-Applications Version, John Wiley & Sons, Newyork
- Bakioğlu M.,Kadioğlu N.,Engin H., Mukavemet Problemleri-Cilt1,Beta Yayınları
- Hibbeler R.C.,(2004) Mühendislik Mekaniği/Dinamik, Çevirenler:Soyuçok A., Soyuçok Ö.,Literatür Yayınları
- Hibbeler R.C., (2005), Mühendislik Mekaniği/Statik, Çevirenler:Soyuçok A., Soyuçok Ö.,Literatür Yayınları
- Hill D.R., (2002) ,Uygulamalı Lineer Cebir ,Çeviri Editörü Akın Ö., Palme Yayıncılık
- İnan M, (1973), Cisimlerin Mukavemeti, Ofset Matbacılık
- Johnson, Art., (1994), History of Mathematical Terms, *Classic Math: History Topics for the Classroom*,. Dale Seymour Publications,.
- Kocatürk T.,(2000) , Mukavemet Ders Notları
- Köklüce B., (2005), Kuadratik Sayı Cisimlerinde Çarpanlara Ayırma, İdeal Sınıf Grubu, ve L Fonksiyonları, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü
- Omurtag H.,M., (2005), Mukavemet, Birsen Yayınevi
- Özbek T., Mukavemet, Birsen Yayınevi
- Rızaoğlu E.,Sünel N. ,(2002), Klasik Mekanik , Tokat
- Soyuçok Z., Soyuçok A. (2003), Tansör Analizi ve Uygulamaları, YTÜ Basım-Yayın
- Şuhubi E.S.,(1981) , Rijit Cisimler Dinamiği , Fatih Yayınevi Matbaası ,İstanbul
- <http://members.aol.com/jeff570/>

**ÖZGEÇMİŞ**

|               |            |                                                                                                                |
|---------------|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Doğum tarihi  | 02.11.1979 |                                                                                                                |
| Doğum yeri    | Afyon      |                                                                                                                |
| Lise          | 1995-1998  | Eskişehir Ertuğrulgazi Lisesi                                                                                  |
| Lisans        | 1998-2003  | Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fak.<br>Matematik Mühendisliği Bölümü                               |
| Yüksek Lisans | 2003-      | Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü<br>Matematik Müh. Anabilim Dalı, Matematik Müh.<br>Programı |

**Çalıştığı kurum(lar)**

2005-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi