

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMEL GRUPLAR

Seçil ERGENE

**Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşe Kara

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. HOMOTOPİLER VE HOMOTOPİK TASVİRLER.....	1
2. TEMEL GRUPLAR.....	8
3. ÖRTÜ UZAYLARI.....	17
4. ÇEMBERİN TEMEL GRUBU.....	21
5. DELİKLİ DÜZLEMİN TEMEL GRUBU.....	29
6. S^n 'NİN TEMEL GRUBU.....	33
7. YÜZEYLERİN TEMEL GRUPLARI.....	36
8. SONUÇLAR.....	48
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	50

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1a	F homotopisinin tanımlı olduğu kümeler arasındaki gösterilişi.....	1
Şekil 1.1b	F homotopisinin tanımlı olduğu kümeler arasındaki başka bir gösterilişi.....	1
Şekil 1.2	Bir uzayda belli bir noktadan başka bir noktaya tanımlı yol.....	2
Şekil 1.3a	F yol homotopisinin tanımlı olduğu kümeler arasındaki gösterilişi.....	3
Şekil 1.3b	F yol homotopisinin tanımlı olduğu kümeler arasındaki başka bir gösterilişi.....	3
Şekil 1.4	$f * g$ iç çarpımının grafiksel gösterilişi.....	6
Şekil 2.1	f ilmeğinin tanımlı olduğu kümeler arasındaki gösterilişi.....	8
Şekil 2.2	x_0 ve x_1 noktaları arasındaki α ve $\bar{\alpha}$ yollarının; x_0 noktasındaki f ve g ilmeklerinin gösterilişi.....	9
Şekil 2.3	$\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ iç çarpımının x_1 tabanlı bir ilmek oluşunun gösterilişi.....	9
Şekil 2.4	x_0 ve x_1 noktaları arasındaki α ve $\bar{\alpha}$ yollarının gösterilişi.....	10
Şekil 2.5	$\bar{f} * f$ iç çarpımının x_0 tabanlı bir ilmek oluşunun gösterilişi.....	11
Şekil 2.6	X kümesinin f yolu vasıtasıyla yol bağlantılı oluşunun gösterilişi.....	12
Şekil 2.7	f ve g 'nin, x_0 'dan x_1 'e iki yol oluşunun gösterilişi.....	13
Şekil 2.8	f 'nin, X 'te x_0 tabanlı bir ilmek; $h \circ f: [0,1] \rightarrow Y$, y_0 tabanlı bir ilmek oluşunun gösterilişi.....	14
Şekil 2.9	$h \circ f$ 'nin, $h \circ f$ ve $h \circ f'$ arasında bir yol homotopisi oluşunun gösterilişi.....	15
Şekil 3.1	p örtü tasvirinin gösterilişi.....	18
Şekil 3.2	$\{V_\alpha\}$ topluluğunun dilimlere ayrılmış $p^{-1}(U)$ 'nin bir ayrışımı oluşunun gösterilişi..	18
Şekil 3.3	$p \times p$ çarpım tasvirinin T 'nin örtü tasviri oluşunun gösterilişi.....	21
Şekil 4.1	f 'nin kaldırmasının gösterilişi.....	23
Şekil 4.2	Örneklendirilmiş tasvirlerin kaldırımlarının şematik gösterilişi.....	24
Şekil 4.3	$\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$ kaldırma tasvirinin gösterilişi.....	26
Şekil 5.1	$f(s)$ noktasının $g(s)$ noktasına gelineye dek yavaş yavaş radial ışını boyunca hareketi.....	33
Şekil 5.2	Çift delikli düzlem.....	36
Şekil 6.1	$U \cap V$ 'deki yollar.....	39
Şekil 7.1	Tamsayı noktalarının p vasıtasıyla x_0 temel noktasıyla eşleşmesi.....	45
Şekil 7.2	Çift torus.....	47

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca ve öncesinde ilgisini ve desteğini hiç bir zaman esirgemeyen danışman hocam SAYIN Doç. Dr. Ayşe Kara'ya ve her zaman, her yerde yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

ÖZET

TEMEL GRUPLAR

Seçil ERGENE
Matematik, Yüksek Lisans Tezi

Bu tezin amacı; cebirsel topolojide önemli bir yeri olan temel grupları, tanımlar ve teoremler yardımıyla açıklamaktır.

Eğrisel bağlantılı bir X kümesinin temel grubu, homotopi denklik bağıntısı altında p tabanlı ilmek kümelerinin denklik sınıflarının kümelerinden oluşan gruptur.

p tabanlı ilmek; p noktasını başlangıç ve bitim noktası kabul eden yoldur. Yol; $x_0, x_1 \in X$ için $[0,1]$ kapalı aralığının 0 noktasını x_0 noktasına, 1 noktasını x_1 noktasına götüren tasvirdir; bu tasvir x_0 'dan x_1 'e bir yoldur.

p noktasını içeren dejenere yola homotopik olan tüm yolların kümesi, bu grubun birim elemanıdır. Homeomorfik uzayların temel grupları izomorfiktir. Aslında temel grup, sadece X 'in homotopi tipine bağlıdır.

a ilmeği ve b ilmeğinin grup çarpımı $a*b$, art arda gelen a ve b yolları şeklinde gösterilir. Birim eleman, sabit yol; a 'nın tersi onun ters yönündeki yoldur.

Her ilmeği sabit ilmeğe homotopik olan temel gruba aşık temel grup adı verilir. Aşık temel gruba sahip bir uzaya basit bağlantılı uzay denir.

Bu ve benzeri tanımlardan yola çıkarak temel grubun özellikleri ispatlanabilir ve bu ispatlar birçok homeomorfizm problemlerinin çözümünde kullanılır.

Anahtar Kelimeler: Eğrisel bağlantılı, homotopi, ilmek, denklik sınıfı, yol, homotopik.

JÜRİ:

1. Prof. Dr. Semin Akdoğan
2. Doç. Dr. Ayşe Kara (Danışman)
3. Doç. Dr. Ömer Gök

Kabul tarihi: 07.07.2006
Sayfa Sayısı: 55

ABSTRACT

FUNDAMENTAL GROUPS

Seçil ERGENE
Mathematics, M.S. Thesis

This research work the fundamental groups which take an important part of the algebraic topology.

The fundamental group of an arcwise-connected set X is the group formed by the sets of equivalence classes of the set of all loops, under the equivalence relation of homotopy.

A path that begins and ends at p is called a loop at p . Given points x_0 and x_1 of the space X , a path in X from x_0 to x_1 is a continuous map $f: [0,1] \rightarrow X$, such that $f(0) = x_0$ and $f(1) = x_1$.

The identity element of this group is the set of all paths homotopic to the degenerate path consisting of the point p . The fundamental groups of homeomorphic spaces are isomorphic. In fact, the fundamental group only depends on the homotopy type of X .

The group product $a*b$, of loop a and loop b is given by the path of a followed by the path of b . The identity element is represented by the constant path, and the inverse of a is given by traversing a in the opposite direction. The fundamental group is independent of the choice

The fundamental group whose every loop is homotopic to constant loop called trivial fundamental group. A space with a trivial fundamental group is called simply connected.

The properties of the fundamental groups can be proved by those explanations and those properties are used in the solution of the homomorphism problems.

Keywords: Arcwise connected, homotopy, loop, equivalence relation, path, homotopic.

JURY:

1. Prof. Dr. Semin Akdoğan
2. Doç. Dr. Ayşe Kara (Supervisor)
3. Doç. Dr. Ömer Gök

Date: 07.07.2006

Page: 55

1. HOMOTOPİLER VE HOMOTOPİK TASVİRLER

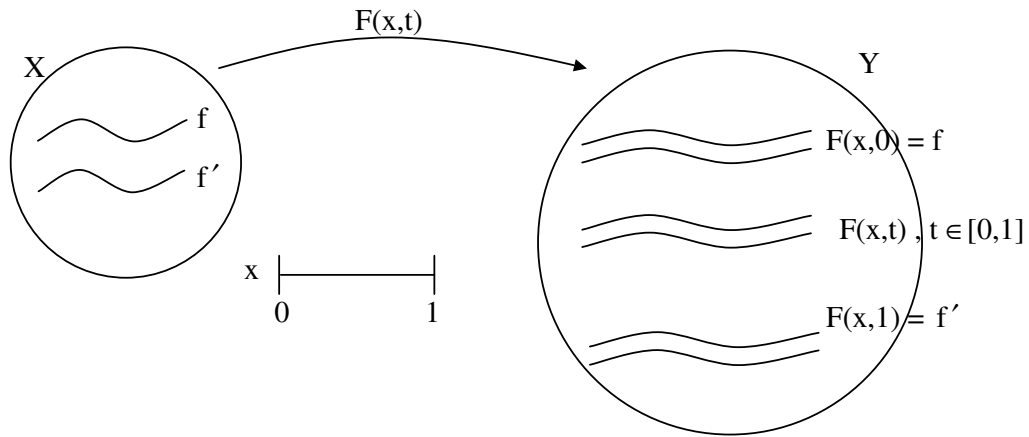
1.1 Tanım:

X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere f ve f' , X 'den Y 'e içine iki sürekli tasvir olsun. Eğer $\forall x \in X$ için ,

$$F(x,0) = f(x) \text{ ve } F(x,1) = f'(x) \quad (1.1)$$

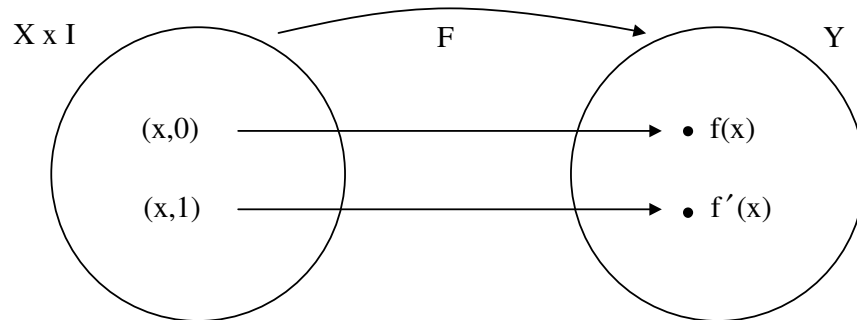
olacak şekilde $F : X \times [0,1] \rightarrow Y$ tasviri varsa f ve f' tasvirlerine **homotopiktir** denir ve F 'ye de f ve f' arasında **homotopi** denir.

f ve f' homotopik ise $f \cong f'$ ile gösterilir.



Şekil 1.1a

veya;



Şekil 1.1b

O halde bir homotopi X 'den Y 'e sürekli tek parametrelili tasvirler ailesidir.

$t \in [0,1]$ ' i zaman parametresi olarak kabul edersek, o zaman F homotopisi f tasvirinden f' tasvirine bir sürekli defarmasyonu temsil eder.

1.2 Tanım:

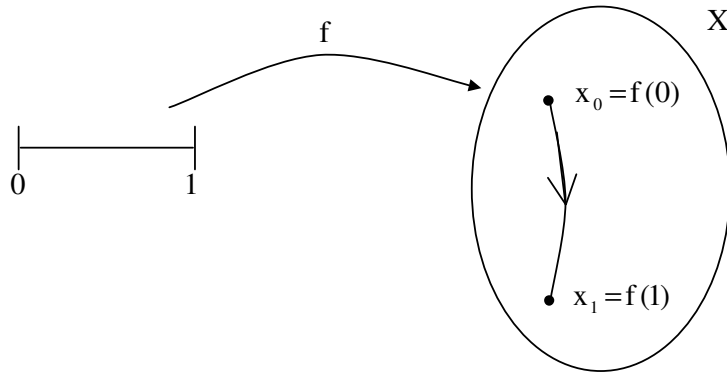
$f: [0,1] \rightarrow X$ tasviri $x_0, x_1 \in X$ için,

$$f(0) = x_0 \text{ ve } f(1) = x_1 \quad (1.2)$$

olacak şekilde sürekli bir tasvir ise f 'ye X topolojik uzayında x_0 'dan x_1 'e bir yol denir.

$x_0 \rightarrow$ tasvirin başlangıç noktası

$x_1 \rightarrow$ tasvirin bitiş noktası denir.



Şekil 1.2

1.3 Tanım:

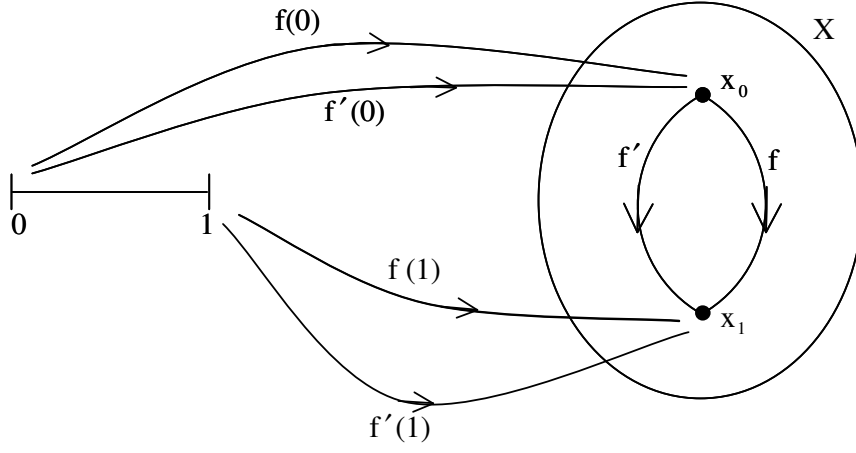
f ve $f' : [0,1] \rightarrow X$ olacak şekilde iki yol göz önüne alalım. Eğer bu yollar aynı başlangıç ve bitim noktalarına sahip ise yani her ikisi için x_0 başlangıç noktası ve x_1 bitim noktası ise ve $\forall s \in [0,1]$ ve $t \in I$ için,

$$F(s,0) = f(s) \text{ ve } F(0,t) = x_0 \quad (1.3)$$

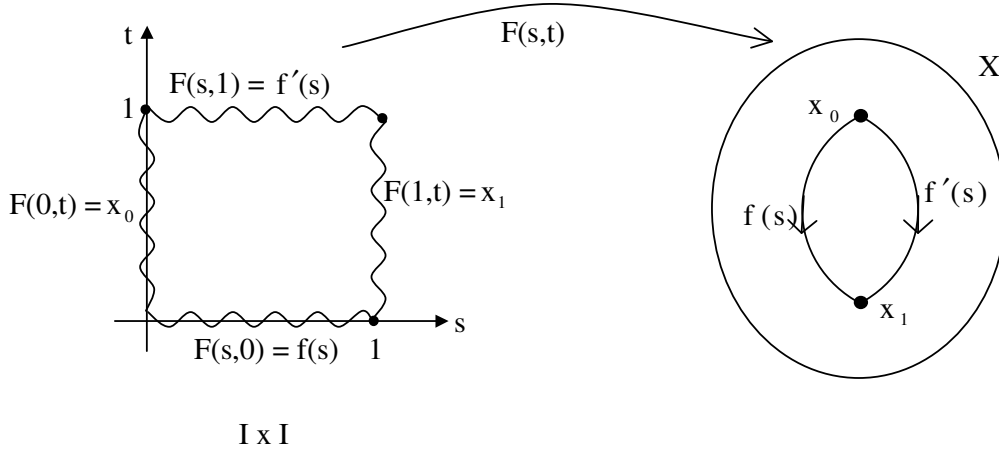
$$F(s,1) = f'(s) \text{ ve } F(1,t) = x_1 \quad (1.4)$$

olacak şekilde sürekli bir $F: [0,1] \times I \rightarrow X$ tasviri varsa f ve f' tasvirlerine **yol homotopiktir** ve F 'e de f ve f' arasında **yol homotopisidir** denir.

f ve f' homotopik ise $f \cong_p f'$ ile gösterilir.



Şekil 1.3a



Şekil 1.3b

1.4 Örnek:

f ve g , X 'den $\mathbb{R}^2$ 'e sürekli iki tasvir olsun.

$\forall x \in X$ için

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + t.g(x)$$

(1.5)

şeklinde tanımlanan bir F , f ve g arasında bir homotopidir.

İnceleyelim;

$$F(x,0) = (1-0).f(x) + 0.g(x) = f(x) \quad (1.6)$$

$$F(x,1) = (1-1).f(x) + 1.g(x) = g(x) \quad (1.7)$$

Dolayısıyla F, f ve g arasında bir homotopi, f ve g homotopik tasvirler olurlar.

Bu homotopiye özel olarak **doğru homotopisi** denir.

Acaba F, f ve g tasvirleri arasında bir yol homotopisi midir?

f ve g tasvirleri x_0 'dan x_1 'e iki yol olsun. Yani

$$f(0) = x_0, \quad g(0) = x_0 \quad (1.8)$$

$$f(1) = x_1, \quad g(1) = x_1 \quad (1.9)$$

F'nin yol homotopikliğini inceleyelim;

$$F(s,0) = (1-0).f(s) + 0.g(s) = f(s) \quad (1.10)$$

$$F(s,1) = (1-1).f(s) + 1.g(s) = g(s) \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} F(0,t) &= (1-t).f(0) + t.g(0) \\ &= f(0) - t.f(0) + t.g(0) \quad (f(0) = g(0) = x_0) \end{aligned}$$

$$F(0,t) = f(0) = x_0 \quad (1.12)$$

$$F(1,t) = (1-t).f(1) + t.g(1) \quad (1.13)$$

$$= f(1) - t.f(1) + t.g(1) \quad (f(1) = g(1) = x_1) \quad (1.14)$$

$$F(1,t) = f(1) = x_1 \quad (1.15)$$

Dolayısıyla F, f ve g arasında bir yol homotopisi f ve g yol homotopik tasvirler olurlar.

1.5 Teorem:

“ $\cong$ ” ve “ $\cong_P$ ” bağıntıları denklik bağıntılarıdır.

1.6 Tanım:

Bir f tasviriyle yol homotopik olan tüm tasvirlerin kümesine **yol homotopi sınıfı** denir ve $[f]$ ile gösterilir “ $\equiv$ ” ve “ $\equiv_p$ ” bağıntıları denklik bağıntıları olduklarına göre $[f]$, f yolunun “ $\equiv_p$ ” bağıntısına göre denklik sınıfıdır.

1.7 Tanım:

X topolojik uzayında f , x_0 noktasından x_1 'e bir yol ve g de x_1 'den x_2 'e bir yol olsun. f ve g 'nin $h = f * g$ çarpımı da X topolojik uzayında bir yoldur.

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & , \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & , \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (1.16)$$

$h(s)$, X topolojik uzayında x_0 ve x_2 arasında bir yoldur. h yolunun ilk yarısı f yolu, ikinci yarısı g yolu gibi düşünülebilir.

- Eğer f ve g yollarının $f * g$ şeklindeki çarpım tanımlı ise yol homotopi sınıflarının bir çarpımını;

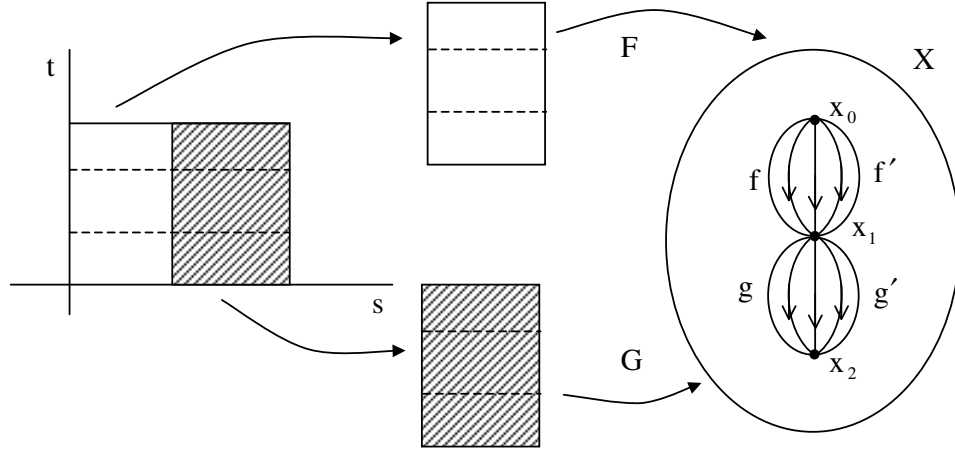
$$[f] * [g] = [f * g] \quad (1.17)$$

şeklinde tanımlayacağız.

Yol çarpım işlemi homotopi sınıfları arasında iyi tanımlıdır. Bunu gösterebilmek için f ile f' arasında F yol homotopisini ve g ile g' arasında G yol homotopisini alalım.

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & , \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1, t) & , \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (1.18)$$

$\forall t$ için $F(1, t) = G(0, t) = x_1$ olduğundan H iyi tanımlıdır. H 'nin $f * g$ ve $f' * g'$ arasında aranan yol homotopisi olduğu kolaylıkla gösterilebilir.



Şekil 1.4

1.8 Teorem:

“ $*$ ” işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.

Birleşme özelliği:

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h] \quad (1.19)$$

Sağ –sol birim eleman: $x \in X$ için $e_x : I \rightarrow X$ olacak şekilde I ’nın bütün elemanlarını X ’in sabit bir elemanı olan “ x ” e götüren tasvir olsun.

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad (1.20)$$

$$[e_{x_0}] * [f] = [f] \quad (1.21)$$

Ters eleman: f , X topolojik uzayında x_0 noktasından x_1 ’e bir yol olsun. $\bar{f}$ ifadesi de x_1 noktasından x_0 ’a $\bar{f}(s) = f(1-s)$ yolu olsun.

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad (1.22)$$

$$[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}] \quad (1.23)$$

1.9 Örnek:

h ve $h' : X \rightarrow Y$ homotopik iki tasvir

k ve $k' : Y \rightarrow Z$ homotopik iki tasvir olsun.

$k \circ h$ ve $k' \circ h'$ tasvirlerinin homotopik olduklarını gösterelim.

h ve h' arasındaki homotopi H , k ve k' arasındaki homotopi K olsun.

$$H: X \times [0,1] \rightarrow Y$$

$$K: Y \times [0,1] \rightarrow Z$$

$$\forall x \in X \quad H(x,0) = h(x) \in Y \quad H(x,1) = h'(x) \in Y \quad (1.24)$$

$$\forall y \in Y \quad K(y,0) = k(y) \in Z \quad K(y,1) = k'(y) \in Z \quad (1.25)$$

yazılabilir.

H ve K tasvirleri arasında $K \circ H : X \rightarrow Z$ tasvirini tanımlayalım.

$K(y,t) \circ H(x,t) : X \rightarrow Z$ tasviri $k \circ h$ ve $k' \circ h'$ tasvirleri arasında bir homotopidir.

Çünkü,

$$t=0 \text{ için } K(y,0) \circ H(x,0) = k \circ h \quad (1.26)$$

$$t=1 \text{ için } K(y,1) \circ H(x,1) = k' \circ h' \quad (1.27)$$

olduğundan $k \circ h$ ve $k' \circ h'$ tasvirleri homotopikdir.

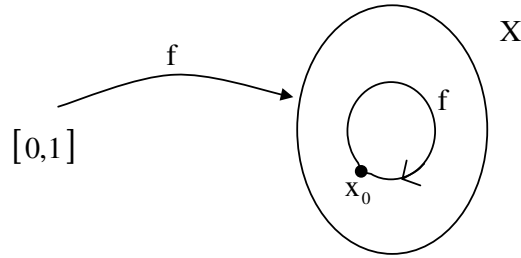
2. TEMEL GRUPLAR

2.1 Tanım:

X bir topolojik uzay olsun. $f: [0,1] \rightarrow X$

$$f(0) = x_0 \text{ ve } f(1) = x_1 \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var ise başlangıç ve bitimi x_0 'da olan bu yola **ilmek** denir.



Şekil 2.1

2.2 Tanım:

“*” işlemiyle x_0 'daki ilmeklerin yol homotopi sınıflarının kümesi X 'in temel grubudur ve $\pi_1(X, x_0)$ şeklinde gösterilir. $\pi_1(X, x_0)$ bir gruptur.

2.3 Örnekler:

1- $\mathbb{R}^n$, n boyutlu Öklit uzayıdır. $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ aşıkâr gruptur yani $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ grubu $\mathbb{R}$ 'nin birim elemanı ile oluşturulan gruptur. f , $\mathbb{R}^n$ 'nin x_0 'da bir ilmeği ise ,

$$F(s,t) = t x_0 + (1-t) f(s) \quad (2.2)$$

doğru yol homotopisi f ve sabit e_{x_0} ilmeği arasında yol homotopisidir.

2- $\mathbb{R}^n$ 'nin her konveks alt kümesi bir aşıkâr gruptur. Özellikle $B^n \subset \mathbb{R}^n$

$$B^n = \left\{ x : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \right\}. \quad (2.3)$$

KONVEKSLİK: $x, y \in X$ için x ile y arasında $\left\{ tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$ düz doğru parçası yine X 'tedir.

2.4 Tanım:

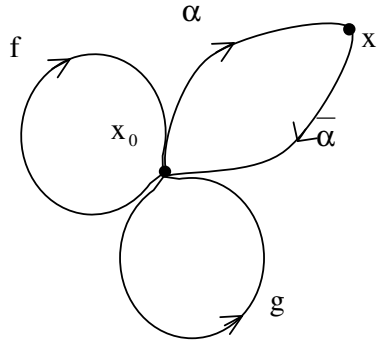
α , X uzayında x_0 noktasından x_1 'e bir yol olsun.

$\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ tasviri

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlansın.

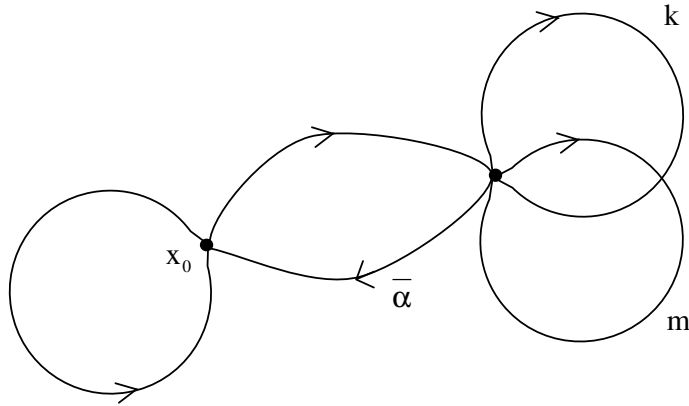
$\hat{\alpha}$, x_0 tabanlı bir temel gruptan x_1 tabanlı bir temel gruba tanımlıdır.



Şekil 2.2

$\hat{\alpha}$ tasviri iyi tanımlıdır. Çünkü “*” işlemi iyi tanımlıdır.

f , x_0 tabanlı bir ilmek ise $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$, x_1 tabanlı bir ilmeğe dönüşür.



Şekil 2.3

2.5 Teorem:

$\hat{\alpha}$ tasviri grup izomorfizmasıdır.

İspat:

$\hat{\alpha}$ 'nın homomorfizma olduğunu gösterelim.

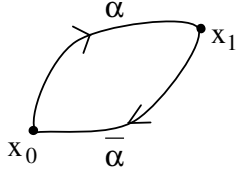
f ve g , X 'te tanımlı yollar olmak üzere

$$\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) = \hat{\alpha}([f] * [g]) \text{ mıdır?} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= ([\bar{\alpha}] * [f]) * ([\alpha] * [\bar{\alpha}]) * ([g] * [\alpha]) \\ &= ([\bar{\alpha}] * [f]) * e_{x_0} * ([g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]) \\ &= \hat{\alpha}([f * g]) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\hat{\alpha}$ 'nın izomorfizma olduğunu gösterelim.

$$\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$



Şekil 2.4

$\bar{\alpha} = \beta$ olsun. $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ 'nın tersidir.

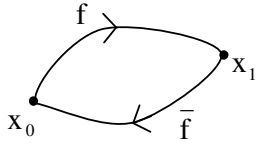
$$\hat{\beta}: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$[h] \in \pi_1(X, x_1)$ seçelim.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}([h]) &= [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] \\ &= [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} (\hat{\beta} [h]) &= [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] \setminus \\
&= [e_{x_1}] * [h] * [e_{x_1}] \\
&= [h] * [e_{x_1}] \\
&= [h]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Not:



Şekil 2.5

$$[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}] \tag{2.9}$$

Benzer şekilde

$$\hat{\beta} (\hat{\alpha} [f]) = [f] \text{ midir ?} \tag{2.10}$$

$[f] \in \pi_1(X, x_0)$ için,

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} [f] &= [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] \\
&= [\beta] * [f] * [\bar{\beta}]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} (\hat{\alpha} [f]) &= [\bar{\beta}] * [\beta] * [f] * [\bar{\beta}] * [\beta] \\
&= [e_{x_0}] * [f] * [e_{x_0}] \\
&= [f]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

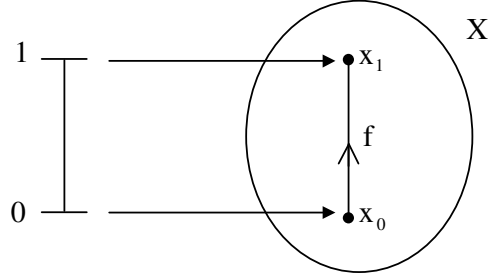
Demek ki, $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ 'nın ters homomorfizmasıdır.

2.6 Tanım:

Bir X topolojik uzayında,

$$f(0) = x_0 \text{ ve } f(1) = x_1 \quad (2.13)$$

olacak şekilde $f : [0,1] \rightarrow X$ sürekli bir f fonksiyonu varsa X **yol bağlantılıdır** denir.



Şekil 2.6

SONUÇ:

$x_0, x_1 \in X$ olmak üzere X yol bağlantılı olsun. Bu takdirde $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_1(X, x_1)$ izomorfiktirler. Yani bu iki temel grubu özdeşleştirebiliriz. Elemanları arasında bire bir eşleme vardır ve örtenlik söz konusudur.

2.7 Tanım:

X uzayı yol bağlantılı ise $\forall x_0 \in X$ için

$$\pi_1(X, x_0) = 0 \quad (2.14)$$

ise (yani $\pi_1(X, x_0)$ aşıkâr grup ise) X **basit bağlantılıdır**.

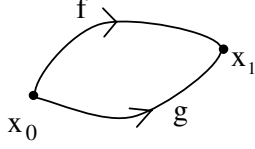
2.8 Örnek:

$\mathbb{R}^n$ uzayı basit bağlantılıdır. Yani

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = 0 \text{ (sadece birim elmandan oluşur.)} \quad (2.15)$$

2.9 Lemma:

Eğer X basit bağlantılı ise aynı başlangıç ve bitim noktalarına sahip olan herhangi iki yol homotopiktir.

İspat:

Şekil 2.7

f ve g , x_0 'dan x_1 'e iki yol olsun.

$f * \bar{g}$, x_0 'da bir ilmeaktır.

$[f * \bar{g}] * [g] = [e_{x_0}] * [g]$ Çünkü $(f * \bar{g})$, e_{x_0} ile yol homotopiktir.

$$= [e_{x_0} * g]$$

$$= [g]$$

(2.16)

$$[f * \bar{g}] * [g] = [(f * \bar{g}) * g]$$

$$= [f * (\bar{g} * g)]$$

$$= [f * e_{x_1}]$$

$$= [f]$$

(2.17)

(2.16) ve (2.17)' den

$$[f] = [g]$$

(2.18)

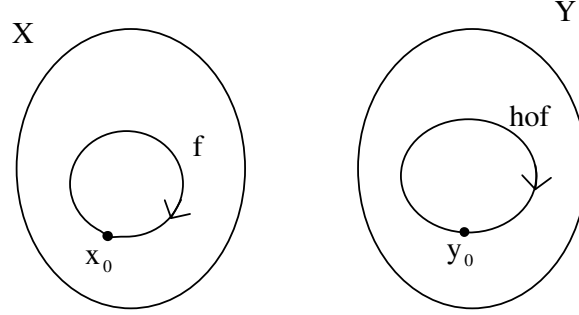
olur. Dolayısıyla f ve g yol homotopiktir.

2.10 Tanım:

$h : X \rightarrow Y$ sürekli bir tasvir ve $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ olsun. $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, yani

$$h(x_0) = y_0 \quad (2.19)$$

f , X 'te x_0 tabanlı bir ilmek ise ; $hof : [0,1] \rightarrow Y$, y_0 tabanlı bir ilmektir.



Şekil 2.8

2.11 Tanım:

$h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sürekli bir tasvir olsun.

$$h(x_0) = y_0 \quad (2.20)$$

$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ tasviri

$$h_*([f]) = [hof] \quad (2.21)$$

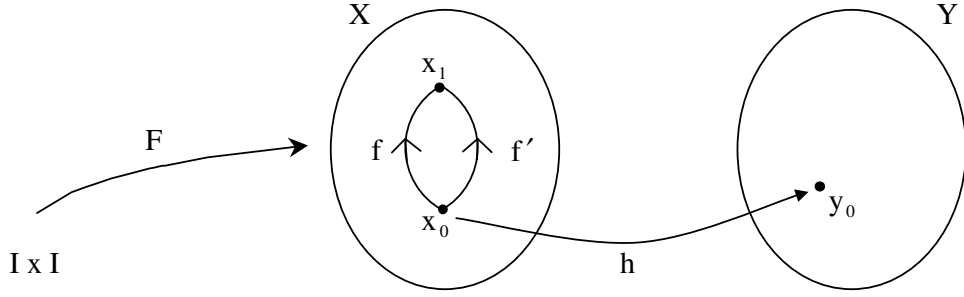
şeklinde tanımlanır.

h_* tasvirine **h vasıtasıyla üretilmiş homomorfizma** denir.

1- h_* iyi tanımlıdır.

F , f ve f^* arasında yol homotopisi olsun.

$$F : I \times I \rightarrow X$$



Şekil 2.9

hoF de , hof ve hof' arasında bir yol homotopisi olur.

$$(hof) * (hof') = ho(f * f') \text{ dir.}$$

$$= [hof] * [hof'] \quad (2.22)$$

İç çarpım iyi tanımlı olduğu için h_* da iyi tanımlıdır.

2- h_* ' ın homomorfizma olduğunu gösterelim.

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s) & , \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & , \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (2.23)$$

varsa;

$$h((f * g)(s)) = \begin{cases} h(f(2s)) & , \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ h(g(2s-1)) & , \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \text{ 'dır.} \quad (2.24)$$

Dolayısıyla ;

$$(hof) \text{ ve } (hog) = ho(f * g) \text{ oldu.} \quad (2.25)$$

3- Homomorfizma olması :

$$\begin{aligned} h_*([f] * [g]) &= h_*([f]) * h_*([g]) \text{ midir?} \\ &= h_*([f * g]) \\ &= [ho(f * g)] \\ &= [(hof) * (hog)] \\ &= [hof] * [hog] \\ &= h_*([f]) * h_*([g]) \end{aligned} \quad (2.26)$$

h_* , h tasviri ve x_0 ' a bağlı olduğu için $(h_{x_0})_*$ şeklinde göstermek uygundur.(taban x_0)

$$(h_{x_0})_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

2.12 Özellik :

$$1) f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$$

$$(gof)_* = g_* \circ f_* \quad (2.27)$$

$$2) f(x_0) = y_0, g(y_0) = z_0 \quad (2.28)$$

$$(id)_* = id \pi_1(X, x_0) \quad (\text{özdeşlik (birim) tasvir}) \quad (2.29)$$

2.13 Teorem:

$$h : (x, x_0) \rightarrow (y, y_0) \quad (h(x_0) = y_0)$$

$$k : (y, y_0) \rightarrow (z, z_0) \quad (k(y_0) = z_0) \quad \text{sürekli iseler}$$

$$(koh)_* = k_* \circ h_* \text{ ve} \quad (2.30)$$

$$i : (X, x_0) \rightarrow (y, y_0) \text{ birim tasvir ise} \quad (2.31)$$

$i_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ tasviri $\pi_1(X, x_0)$ grubunda birim homomorfizmadır.

İspat:

$$\begin{aligned}
 (\text{koh})_* [f] &= [(\text{koh})\text{of}] \\
 &= [\text{ko}(\text{hof})] \\
 &= k_* ([\text{hof}]) \\
 &= k_* (h_* [f])
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

$$i_* [f] = [\text{iof}] = [f] \tag{2.33}$$

3. ÖRTÜ UZAYLARI

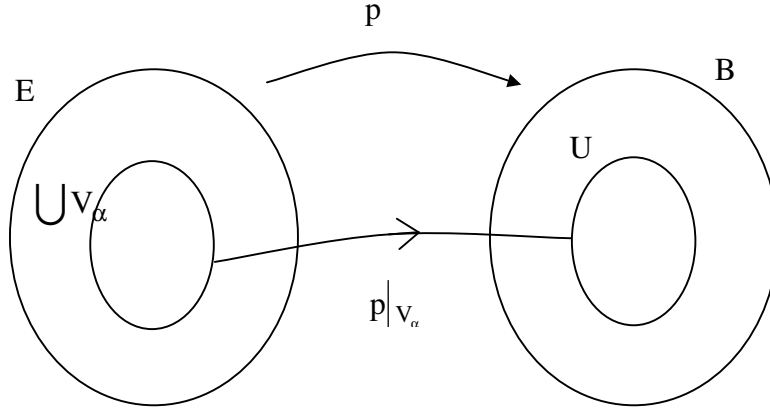
3.1 Tanım:

$p: E \rightarrow B$ sürekli örten tasvir olsun. $U \subset B$ alalım. (U açık küme)

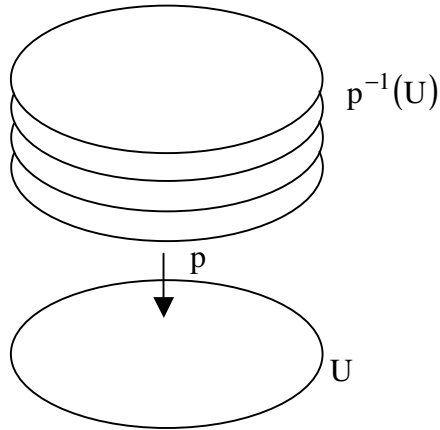
$V_\alpha \subset E$ nin ayrık açık alt kümeleri olsun. Eğer

$$p^{-1}(U) = \cup V_\alpha \quad (3.1)$$

ve $\forall \alpha$ için $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ bir homeomorfizma ise U 'a **p vasıtasıyla muntazam örtülüyor** denir.



Şekil 3.1



Şekil 3.2

$\{ V_\alpha \}$ topluluğuna dilimlere ayrılmış $p^{-1}(U)$ 'nin bir **ayrışımı**, her bir V_α 'a da **dilim** denir.

3.2 Tanım:

$p: E \rightarrow B$ sürekli örten tasvir.

$\forall b \in B$ 'nin U – komşuluğu p vasıtasıyla muntazam örtülüyorsa o zaman p tasvirine **örtü tasviri** denir.

E 'e , B 'nin **örtü uzayı** B 'e **taban uzayı** denir.

Not: $p: E \rightarrow B$ üzerine ve sürekli tasvir olmak üzere $\forall b \in B$ için E 'nin $p^{-1}(b)$ alt uzayı ayırtık topolojiye sahiptir.

$\forall V_\alpha$ E 'de açıktır ve $p^{-1}(b)$ 'lerin kesişimi tek noktadır.

Bu nedenle bu nokta $p^{-1}(b)$ kümesinde açıktır.

Not: $p: E \rightarrow B$ örtü tasviri ve A , E 'nin açık alt kümesi olsun.

$x \in p(a) \subset B$ alalım . x 'in U komşuluğu p tarafından tamamen örtülmüştür.

3.3 Örnek:

X uzayı için $i: X \rightarrow X$ birim tasvir olmak üzere $U \subset X$ (U açık küme) alalım.

$$i^{-1}(U) = U \subset X \text{ idi.} \quad (3.2)$$

$$i^{-1}(U) = V_\alpha \quad (3.3)$$

olduğundan i örtü tasviridir.

3.4 Teorem:

$$p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \text{ örtü tasviridir.} \quad (3.4)$$

Burada p, R reel doğrusunu S^1 çemberinin etrafını çeviren tasvirdir ve bu işlemde her bir $[n, n+1]$ aralığı S^1 üzerinden tasvir edilir.

İspat:

S^1 'in birinci bileşeni pozitif olan noktaların kümesine U diyelim.

$p^{-1}(U)$, $\cos 2\pi x$ ' in pozitif olduğu noktaları içerir.

$$p^{-1}(U), V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right) \text{ olmak üzere} \quad (3.5)$$

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \quad (3.6)$$

şeklinde ikişerli ayrık ve açık V_n 'lerin birleşimi olarak yazabiliriz.

3.5 Aykırı Örnek:

$p : \mathbb{R}^+ \rightarrow S^1$, $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ üzerinedir ve yerel homeomorfizmadır. Fakat örtü tasviri değildir.

$(0,1) \in S^1$ noktasının $\mathbb{R}^+$ tarafından örtülen bir açık komşuluğu yoktur.

3.6 Teorem:

Eğer $p : E \rightarrow B$ ve $p' : E' \rightarrow B'$ örtü tasvirleri ise $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ de örtü tasviridir.

İspat:

p, p' sürekli ve örten tasvirler ise $p \times p'$ de sürekli ve örtendir.

$U \times U' \subset B \times B'$ açık küme olsun.

Burada $U \subset B$

$U' \subset B'$ açık kümelerdir.

$p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$

$$(e, e') \rightarrow (p(e), p'(e'))$$

$$\left(p \times p' \right)^{-1} \left(U \times U' \right) = p^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') \quad (\text{tanımından}) \quad (3.7)$$

p ve p' örtü tasviri olduğundan,

$$p^{-1}(U) = \bigcup V_{\alpha} \quad (3.8)$$

$$(p')^{-1}(U') = \bigcup W_{\beta} \quad \text{olsun.} \quad (3.9)$$

$$p^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') = \bigcup V_{\alpha} \times W_{\beta} \quad (\text{açık kümelerin birleşimi açıktır}) \quad (3.10)$$

Tanımın ikinci kısmına geçelim.

$$\left. \begin{array}{l} p|_{V_{\alpha}}: V_{\alpha} \rightarrow U \\ p'|_{W_{\beta}}: W_{\beta} \rightarrow U' \end{array} \right\} \text{homeomorfizmadır.}$$

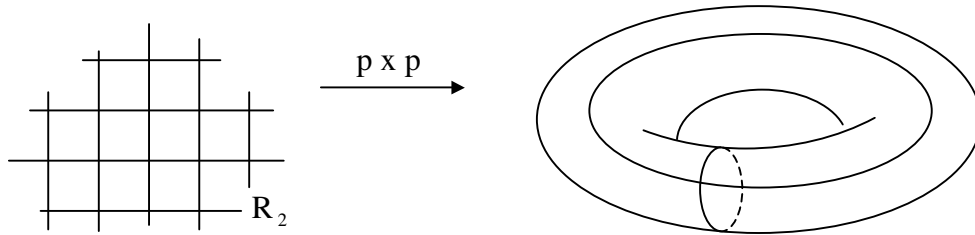
$$p|_{V_{\alpha}} \times p'|_{W_{\beta}}: V_{\alpha} \times W_{\beta} \rightarrow U \times U' \text{ homeomorfizmadır.}$$

3.7 Örnek:

$T = S^1 \times S^1$ uzayını alalım.(torus)

$$p \times p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$$

çarpım tasviri T 'nin örtü tasviridir. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 'nin $\forall [n, n+1] \times [m, m+1]$ birim karesi $p \times p$ çarpım tasviri ile T 'yi tamamen örter.



Şekil 3.3

3.8 Örnek:

$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ ve i birim tasvir ise

$p \times i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^+$ olmak üzere, eğer $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ile $S^1 \times \mathbb{R}^+$ arasında $x \times t \rightarrow tx$ şeklinde tanımlı standart homeomorfizma alırsak bu çarpım tasviri bize üst yarı düzlemi delikli düzleme götüren tasviri verir.

4. ÇEMBERİN TEMEL GRUBU

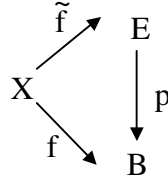
4.1 Tanım:

$p: E \rightarrow B$ şeklinde bir tasvir olsun. Eğer f herhangi bir X uzayından B 'ye sürekli bir tasvir ise

$\tilde{f}: X \rightarrow E$ olmak üzere

$$p \circ \tilde{f} = f \quad (4.1)$$

şeklinde $\tilde{f}$ tasvirine ; **f 'nin kaldırması** denir.



Şekil 4.1

Not: Örtü uzayları ve temel grubu incelerken p tasvirinin örtü tasviri olduğu durumlarda, kaldırmasının varlığı daha önemli bir rol oynar.

4.2 Örnek:

$p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ olmak üzere

$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ şeklindeki örtü tasvirini göz önüne alalım.

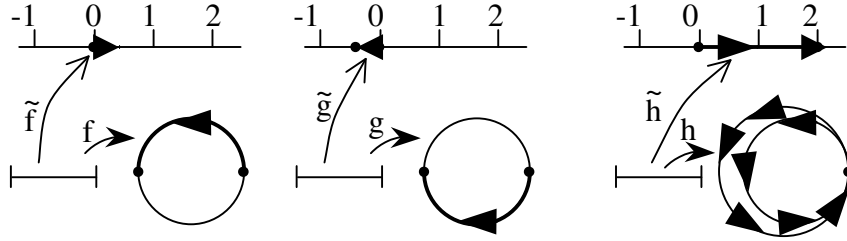
i) $f: [0,1] \rightarrow S^1$ olmak üzere $b_0=(1,0)$ noktasından başlayan $f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$ şeklindeki

f yolu için , 0 'da başlayıp $\frac{1}{2}$ ' de biten $\tilde{f}(s) = \frac{s}{2}$ yolu f 'nin bir kaldırmasıdır.

ii) $g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$ şeklindeki g yolu için, 0 'da başlayıp $-\frac{1}{2}$ 'de biten $\tilde{g}(s) = -\frac{s}{2}$ yolu

icin g 'nin kaldırmasıdır. ($g, \tilde{g}$ ile taşınabilir)

iii) $h(s) = (\cos 4\pi s, \sin 4\pi s)$ şeklindeki h yolu için 0 'da başlayıp 2 'de biten $\tilde{h}(s) = 2s$ yolu h 'nin kaldırmasıdır. h tasviri $[0,1]$ aralığını çemberin etrafını iki kez dolar.



Şekil 4.2

4.3 Lemma:

$p: E \rightarrow B$ olmak üzere $p(e_0) = b_0$ şeklinde bir örtü tasviri olsun.

e_0 'da başlayan herhangi bir $f: [0,1] \rightarrow B$ yolunun E 'de, e_0 noktasından başlayan bir tek $\tilde{f}$ kaldırması vardır.

İspat:

B 'nin p tarafından örtülen U açık kümelerini alalım.

$[0,1]$ aralığını $\forall i$ için $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U$ olacak şekilde $s_0, s_1, \dots, s_n$ aralıklarına bölelim.

$\tilde{f}(0) = e_0$ şeklinde ve $\tilde{f}(s), 0 \leq s \leq s_i$ için tanımlı olsun.

$[s_i, s_{i+1}]$ 'de tanımlı $\tilde{f}$ tasvirini şöyle tanımlayalım;

$f([s_i, s_{i+1}])$ kümesi, p tarafından tamamen örtülen açık herhangi bir U kümesindedir. $\{V_\alpha\}$, $p^{-1}(U)$ 'nin dilimlere ayrılmış hali ve her bir V_α , p tarafından U kümesine homeomorfik olarak tanımlansın. $\tilde{f}(s_i)$ bu kümelerden birindedir. Bu kümeye V_0 diyelim. $\tilde{f}(s)$, $s \in [s_i, s_{i+1}]$ için

$$\tilde{f}(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s)) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlayalım. $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$ bir homeomorfizma olduğu için $\tilde{f}$, $[s_i, s_{i+1}]$ üzerinde sürekli olacaktır.

Bu şekilde $\tilde{f}$ tasvirini $[0,1]$ aralığında tanımlayabiliriz. $\tilde{f}$, tanımından $p \circ \tilde{f} = f$ bulunur.

$\tilde{f}$ tasvirinin tekliğini gösterelim.

$\tilde{f}, e_0$ 'da başlayan f 'nin başka bir kaldırması olsun.

$$\tilde{f}(0) = e_0 = \tilde{f}(0) \text{ 'dır.} \quad (4.3)$$

$0 \leq s \leq s_i$ olacak şekilde

$$\tilde{f}(s) = \tilde{f}(s) \text{ olduğu varsayalım.} \quad (4.4)$$

V_0 'ı yukarıdaki gibi tanımladığımızda her $s \in [s_i, s_{i+1}]$ için $\tilde{f}(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$ idi.

$\tilde{f}, f$ nin bir kaldırması olduğu için $[s_i, s_{i+1}]$ aralığında $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ kümesine içine tasvirdir.

V_α dilimleri açık ve ayrık turlar. $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}])$ bağlantılı olduğu için V_α 'ların birindedir.

V_0 'da $\tilde{f}(s_i) = \tilde{f}(s_i)$ olduğundan $\tilde{f}; [s_i, s_{i+1}]$ 'in tümünü V_0 kümesine taşır.

$[s_i, s_{i+1}]$ için $\tilde{f}(s) \in V_0 \subset p^{-1}(f(s))$ 'dir.

Fakat bu şekilde sadece bir $y \in (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$ vardır.

Dolayısıyla $s \in [s_i, s_{i+1}]$ için $\tilde{f}(s) = \tilde{f}(s)$ 'tir.

4.4 Lemma:

$p(e_0) = b_0$ olacak şekilde $p: E \rightarrow B$ bir örtü tasviri olsun .

$F: I \times I \rightarrow B$, $F(0,0) = b_0$ olacak şekilde sürekli bir tasvir olsun. F 'nin, $\tilde{F}(0,0) = e_0$ olacak şekilde sürekli ve $\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$ şeklinde tanımlı bir kaldırması vardır .

Eğer F bir yol homotopisi ise $\tilde{F}$ de bir yol homotopisidir ve $\tilde{F}$ t,ektir.

İspat:

I_1 , $s_0 < s_1 < \dots < s_m$

$t_0 < t_1 < \dots < t_n$ şeklinde iki farklı alt parçaya bölelim.

F tasviri, $I_1 \times J_1 = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ dikdörtgenini, B 'nin p tarafından örtülen açık bir kümesine götürür.

$\tilde{F}$ kaldırmasını $I_1 \times J_1$ dikdörtgeninden başlayarak alt sıradaki diğer $I_1 \times J_1, I_1 \times J_2$ ve devamı dikdörtgenleriyle tanımlarız.

Genel olarak i_0 ve j_0 için , $\tilde{F}$ 'nin ; $0 \times I$, $I \times 0$ ve $I_{i_0} \times J_{j_0}$ dikdörtgenlerinden önce olan tüm

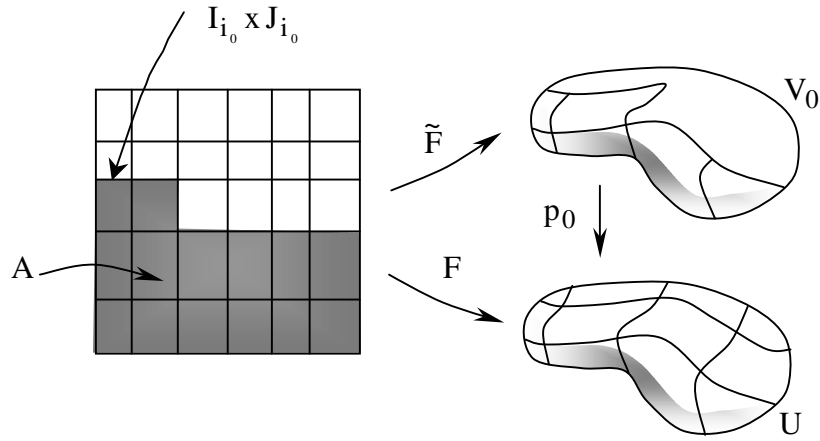
dikdörtgenlerin A kümesi üzerinde tanımlandığını farz edelim. Ayrıca $\tilde{F}$ 'nin $f|_A$ 'nin sürekli bir

kaldırması olduğunu farz edelim . $\tilde{F}$ 'i $I_{i_0} \times J_{j_0}$ üzerinde tanımlıyoruz. p tarafından tamamen

örtülen ve $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$ kümesini kapsayan B 'nin bir açık U kümesini seçelim . Her bir V_α , p

vasıtasıyla homeomorfik olarak U üzerine tasvir edildiğinden $\{V_\alpha\}$, $p^{-1}(U)$ 'nun dilimlere ayrılmış parçalanışı olur.

Simdi $\tilde{F}, C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$ kümesinde tanımlanmış oldu. Bu küme $I_{i_0} \times J_{j_0}$ dikdörtgeninin sol ve alt kenarlarının birleşimi olduğu için bağlantılıdır. Böylece $\tilde{F}(C)$ bağlantılıdır ve V_α kümelerinin birinde tam olarak yer almak zorundadır. V_0 'da yer alsın.



Şekil 4.3

$p_0: V_0 \rightarrow U$ p 'nin V_0 'a kısıtlanışını belirtsin. $\tilde{F}, F|_A$ 'nin bir kaldırması olduğu için $x \in C$ için;

$$p_0(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{F}(x)) = F(x) \text{ olduğunu biliyoruz.} \quad (4.5)$$

$$\text{Böylece } \tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x)) \text{ 'dir.} \quad (4.6)$$

Buradan $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$ için F 'i $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$ şeklinde genişletebiliriz. Bir önceki lemmadan genişletilmiş tasvir sürekli olacaktır. Böyle devam ederek tüm I^2 üzerindeki $\tilde{F}$ 'i tanımlarız.

F 'nin yol homotopisi olduğunu varsayalım. $\tilde{F}$ 'in bir yol homotopisi olduğunu göstermek istiyoruz.

F, I^2 'nin tüm $0 \times I$ sol kenarını B 'nin basit bir b_0 noktasına taşır. $\tilde{F}$, F 'nin bir kaldırması olduğu için bu kenarı $p^{-1}(b_0)$ kümesine taşır. Fakat bu küme E 'nin alt uzayı olmasından dolayı ayırtık topolojiye sahiptir. $0 \times I$ bağlantılı ve $\tilde{F}$ sürekli olduğu için $\tilde{F}(0 \times I)$ bağlantılıdır ve bu bir nokta kümesine eşit olmalıdır. Aynı şekilde $\tilde{F}(1 \times I)$ da bir nokta kümesi olmalıdır. Yani $\tilde{F}$ bir yol homotopisidir.

4.5 Teorem:

$p: E \rightarrow B$, $p(e_0)$ olacak şekilde bir örtü tasviri olsun. f ve g , B 'de b_0 'dan b_1 'e birer yol olsun ve $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ sırasıyla bu yolların E 'nin e_0 noktasında başlayan kaldırmaları olsun. Eğer f ve g yol homotopik ise o zaman $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$, E 'nin aynı noktasında sonlanırlar ve yol homotopiklerdir.

İspat :

$F: I \times I \rightarrow B$, f ve g arasında bir yol homotopisi olsun. O halde $F(0,0) = b_0$ 'dir.

$\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$ tasviri de $\tilde{F}(0,0) = e_0$ olacak şekilde F 'nin E 'ye bir kaldırması olsun. Bir önceki lemmadan $\tilde{F}$ bir yol homotopisidir ve $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ ve $\tilde{F}(1 \times I) = \{e_1\}$ tek nokta kümelerine eşittirler. $\tilde{F}$ 'nin, $I \times I$ 'nin alt kenarına kısıtlanması olan $\tilde{F}|_{I \times 0}$, E 'nin e_0 noktasında başlayan bir yoldur. Yol kaldırmaların tekliğinden $\tilde{F}(s,0) = \tilde{f}(s)$ elde etmeliyiz.

Benzer şekilde $\tilde{F}|_{I \times 1}$, E 'de bir yol ve $\tilde{F}|_{I \times 1}$ 'nin bir kaldırmasıdır. $F(0 \times 1) = \{e_0\}$ olduğundan e_0 noktasında başlar. Yol kaldırmaların tekliğinden $\tilde{F}(s,1) = \tilde{g}(s)$ 'dir. Sonuç olarak $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ e_1 'de sonlanır ve $\tilde{F}$ de $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ arasında bir yol homotopisidir.

4.6 Teorem :

Çemberin temel grubu sonsuz devirseldir.

İspat :

b_0, S^1 'in $(1,0)$ noktası olsun.

$\pi_1(S^1, b_0)$ grubunun tamsayıların $(\mathbb{Z}, +)$ grubuyla bir izomorfizmasını oluşturacağız.

Bunun için, $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ şeklinde ifade edilen $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ tasvirini ele alalım. Eğer

f, S^1 'in b_0 noktasında bir ilmek ise $\tilde{f}$, f nin $\mathbb{R}$ 'nin 0 noktasından başlayan bir yola

kaldırmasıdır. $\tilde{f}(1), p^{-1}(b_0)$ kümesinin bir noktası olmalıdır, yani $\tilde{f}(1)$ n gibi bir tam sayıya eşit olmalıdır. Bir önceki teoremden bu tam sayının f 'nin yol homotopi sınıfına bağlı olduğu biliniyor. Sonuç olarak $\phi([f])$ tam sayı olacak şekilde

$\phi: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ tasvirini tanımlayabiliriz.

ϕ tasviri örtendir: $n, p^{-1}(b_0)$ 'in bir noktası olsun. $\mathbb{R}$ yol bağıntılı olduğu için $\mathbb{R}$ 'de $\tilde{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde 0'dan n ' e bir $\tilde{f}$ yolunu seçebiliriz. $f = p \circ \tilde{f}$ şeklinde tanımlayalım.

Bu durumda f, S^1 'in b_0 noktasında bir ilmek ve $\tilde{f}$ de f 'nin $\mathbb{R}$ deki 0 noktasından başlayan bir yola kaldırmasıdır. Tanımdan $\phi([f]) = n$ 'dir.

ϕ tasviri 1-1'dir:

$\phi([f]) = n = \phi([g])$ olsun. (4.7)

Buradan $[f] = [g]$ olduğunu göstereceğiz. $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ sırasıyla f ve g 'nin $\mathbb{R}$ 'nin 0 noktasında başlayan yollarına birer kaldırmaları olsun. Hipotezden $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ de n 'de biter. $\mathbb{R}$ basit bağlantılı olduğundan $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ yol homotopiktirler. $\tilde{F}, \tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ arasında bir yol homotopisi olsun. $F = p \circ \tilde{F}$ tasviri de f ve g arasında bir yol homotopisi olur.

ϕ **tasviri homomorfizmadır:** f ve g , S^1 'in h_0 noktasındaki iki ilmek olsun. $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ de sırasıyla f ve g 'nin R 'nin 0 noktasında başlayan yollarına birer kaldırmaları olsun.

$$\tilde{f}(1) = n \text{ ve } \tilde{g}(1) = m \text{ alalım.} \quad (4.8)$$

$$h(s) = \begin{cases} \tilde{f}(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ n + \tilde{g}(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (4.9)$$

şeklinde R 'de bir yol ele alalım. Yani, h R 'nin 0 noktasında başlayan bir yoludur.

h 'nin $f * g$ 'nin bir kaldırması olduğunu iddia ediyoruz.

$\forall x$ için $p(n+x) = p(x)$ 'tir. Çünkü sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının periyodu 2π 'dir. O zaman;

$$p(h(s)) = \begin{cases} p(\tilde{f}(2s)) = f(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ p(n + \tilde{g}(2s-1)) = p(\tilde{g}(2s-1)) = g(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (4.10)$$

Buradan $poh = f * g$ olduğu için h , $f * g$ 'nin 0'da başlayan bir kaldırmasıdır.

Tanımdan

$$\phi([f * g]) = h(1) = n+m \text{ 'dir. Böylece ;} \quad (4.11)$$

$$\phi([f * g]) = \phi([f]) + \phi([g]) \text{ elde edilir.} \quad (4.12)$$

4.7 Teorem:

$p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ örtü tasviri olsun.

Eğer E yol bağlantılı ise $\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ örtendir.

Eğer E basit bağlantılı ise $\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ 1-1 'dir.

4.8 Tanım:

Eğer E basit bağlantılı bir uzay ve $p:E \rightarrow B$ örtü tasviri ise E, B 'nin evrensel örtü uzayıdır.

5. DELİKLİ DÜZLEMİN TEMEL GRUBU

5.1 Teorem:

$x_0 \in S^1$ olsun.

$j: (S^1, x_0) \rightarrow (R^2 - 0, x_0)$ tasviri temel grupların bir homeomorfizmasıdır.

İspat:

$\|x\|$; x ile orijin arasındaki mesafeyi belirtmek üzere ;

$r: R^2 - 0 \rightarrow S^1$ sürekli tasviri

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlansın.

r tasviri $R - 0$ 'daki her bir radial ışını, ışının S^1 ile kesiştiği noktaya bükür. Yani her $x \in S^1$ noktasını kendisiyle eşler.

r_* 'ın j_* 'in tersi olarak ele alalım.

$$(S^1, x_0) \xrightarrow{j} (R^2 - 0, x_0) \xrightarrow{r} (S^1, x_0)$$

Bu tasvir S^1 'in birim tasvirine eşittir.

Kısıtlı homeomorfizmanın fonksiyonel özelliklerinden dolayı $r \circ j_*$ 'in $\pi_1(R^2 - 0, x_0)$ 'in birim izoformasi olduğunu göstermek için , $R^2 - 0$ 'da x_0 tabanlı bir f ilmeği alalım . $j_*(r_*[f])$;

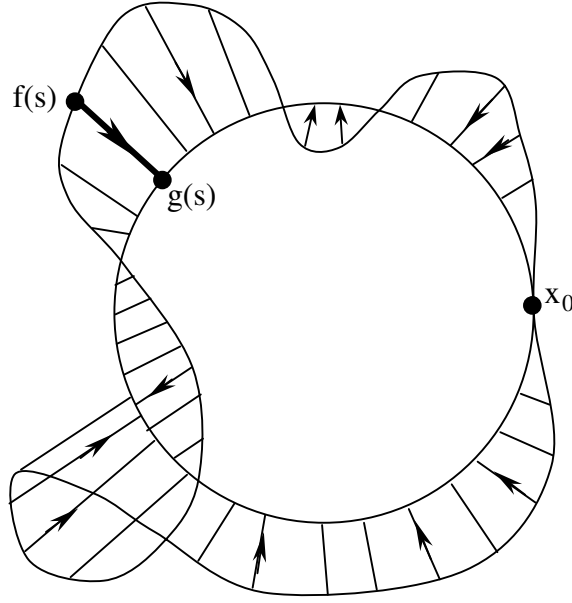
$$g(s) = \frac{f(s)}{\|f(s)\|} \quad (5.2)$$

eşitliğiyle verilen

$$g = j \circ r \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0 \quad (5.3)$$

ilmeğinin homotopi sınıfıdır.

$g \cong_P f$ i göstermek kolaydır. Şekilde görüldüğü gibi $f(s)$ noktasını $g(s)$ noktasına gelinceye dek yavaş yavaş radial ışını boyunca hareket ettiririz.



Şekil 5.1

Daha genel olarak;

$$f(s,t) = t \cdot \frac{f(s)}{\|f(s)\|} + (1-t) f(s) \text{ olacak şekilde} \quad (5.4)$$

$F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ tasvirini tanımlayalım.

$\frac{t}{\|f(s)\|} + (1-t) \neq 0$ ve $f(s) \neq 0$ için $F(s, t)$ 'nin hiçbir zaman sıfıra eşit olmadığı açıktır.

Ayrıca $\forall t$ için

$$f(0,t) = f(1,t) = x_0 \text{ 'dır.} \quad (5.5)$$

5.2 Teorem :

Eğer $x_0 \in S^{n-1}$ ise;

$j: (S^{n-1}, x_0) \rightarrow (R^2 - 0, x_0)$ tasviri temel grupların bir izomorfizmasıdır.

Hatırlatma :

A , X 'in bir alt uzayı olsun.

$\forall a \in A$ için $r(a) = a$ olacak şekilde bir $r: X \rightarrow A$ sürekli tasviri varsa , A 'ya X 'in **retraktı** denir.

r tasvirine de X 'in A üzerindeki **retraksiyonu** denir.

5.3 Tanım :

A , X 'in bir alt uzayı olsun .

$$\forall x \in X \text{ için } H(x, 0) = x \quad (5.6)$$

$$\forall x \in X \text{ için } H(x, 1) \in A$$

$$\forall a \in A \text{ ve } t \in I \text{ için } H(a, t) = a \quad (5.7)$$

olacak şekilde $H: X \times I \rightarrow X$ sürekli tasviri mevcutsa A 'ya X 'in güçlü deformasyon retraktı denir.

H tasviri de güçlü deformasyon retraksiyonu şeklinde adlandırılır.

Veya; X yavaş yavaş A 'ya deforme edilirken , A nın her bir noktası sabit kalıyorsa , A uzayına X 'in güçlü deformasyon retraktı denir. Deformasyonun sonunda X 'i $H(x,1)$ ile eşleşme yaparak X 'i A 'ya kısıtlamış oluruz.

5.4 Örnek:

$$H(x,t) = t \frac{x}{\|x\|} + (1-t)x \quad (5.8)$$

$H: (R^n - 0) \times I \rightarrow (R^n - 0)$ şeklinde tanımlı tasviri $R^n - 0$ 'in S^{n-1} üzerine güçlü deformasyon retraktıdır.

$H(x,t)$ tasviri her bir ışını S^{n-1} ile kesiştiği noktaya bükür .

5.5 Teorem:

A, X 'in güçlü deformasyon retraktı olsun.

$a_0 \in A$ için;

$j: (A, a_0) \rightarrow (X, a_0)$ tasviri temel grupların bir izomorfizmasıdır.

5.5 Örnek:

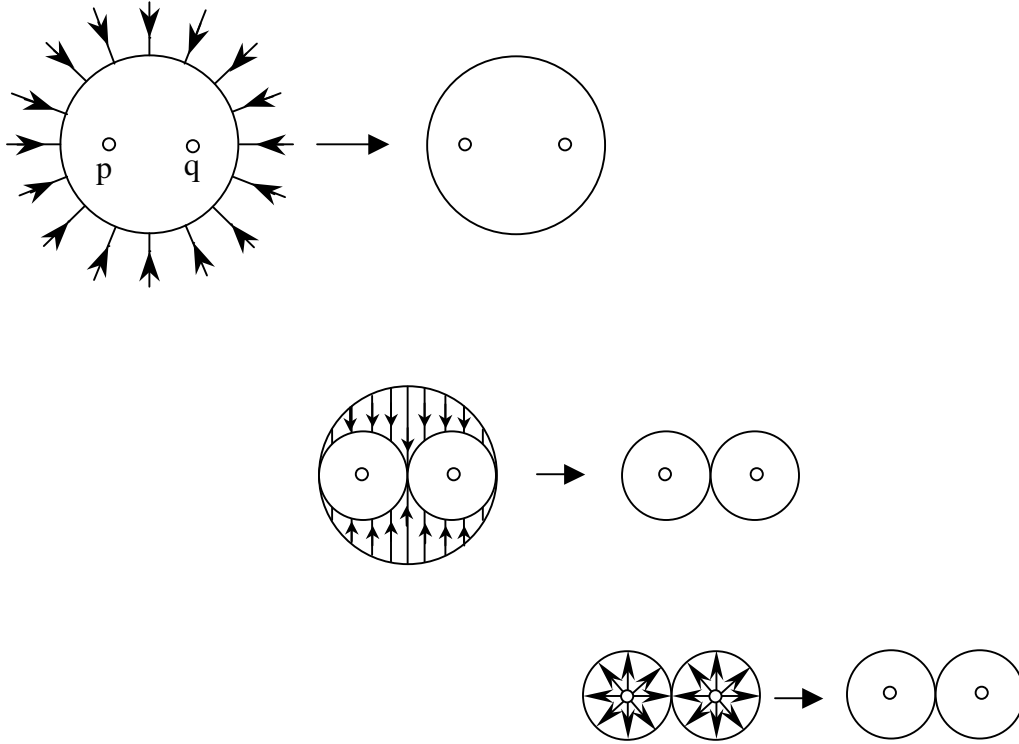
B, R^3 'de z ekseninde olsun. $R^3 - B$ uzayını alalım. Bu uzayın delikli xy düzlemi; $(R^2 - 0) \times 0$ bir güçlü deformasyon retraksiyonudur.

$$H(x,y,z,t) = (x,y,(1-t)z) \quad (5.9)$$

şeklinde tanımlı tasviri z eksenine paralel doğruları, xy düzlemiyle kesiştikleri noktaya bükür. Dolayısıyla H tasviri bir güçlü deformasyon retraksiyonudur.

5.6 Örnek:

$R^2 - p - q$, çift delikli düzlemi ele alalım . Figür sekiz uzayı $R^2 - p - q$ 'nin güçlü deformasyon retraksiyonudur.



Şekil 5.2

5.7 Örnek:

$\theta = S^1 \cup (0 \times [-1, 1])$ (theta uzayı) $\mathbb{R}^2 - p - q$ 'nun strong deformasyon retraktıdır.

6. S^n 'NİN TEMEL GRUBU

6.1 Van Kampen Teoremi:

U ve V , X 'te açık kümeler olmak üzere $X = U \cup V$ ve $U \cap V$ yol bağlantılı olsun.

$x_0 \in U \cap V$ olsun.

$i: (U, x_0) \rightarrow (X, x_0)$

$j: (V, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ kapsamları temel grupların sıfır homomorfizması ise;

$\pi_1(X, x_0) = 0$ 'dir.

Sıfır Homomorfizma:

$h: (A, a_0) \rightarrow (Y, y_0)$ için,

$h_*: \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ tüm elemanları birim elemana götüren (aşıkâr) homomorfizmadır.

U ve V basit bağlantılı ise i_* ve j_* sıfır homomorfizma olmalıdır.

İspat:

$f: I \rightarrow X$ x_0 'da bir ilmek olsun. f 'nin sabit bir ilmeğe yol homotopik olduğunu göstermek istiyoruz. Çünkü $\pi_1(X, x_0) = 0$ olsun istiyoruz.

1. Adım :

Lebesgue numara yardımcı teoreminden her bir i için $f([a_{i-1}, a_i])$ kümesi U veya V açık kümelerinin birinde yer almak üzere $[0, 1]$ aralığının;

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1 \quad (6.1)$$

şeklinde bir alt bölüntüsü vardır.

Tüm bu alt bölüntülerin arasına da öyle birini seçelim ki; alt aralıkların n .incisi minimal olsun. Bunun ardından her bir i için $f(a_i)$, $U \cap V$ 'de yer alır.

Örneğin , $f(a_i) \notin U$ olsun. O zaman ne $f([a_{i-1}, a_i])$, ne de $f([a_i, a_{i+1}])$ kümesi U 'da yer alır . Her ikisi de V 'de yer almalıdır.

a_i 'i oluşturduğumuz alt bölüntüden attığımızda , her bir alt aralığın görüntüsü U 'da veya V 'de yer alan, $[0,1]$ aralığının alt bölüntüleri mevcuttur.

Burada çelişki elde ederiz. Dolayısıyla , $f(a_i) \in U$ olmalıdır.

2. Adım:

f 'nin $[a_{i-1}, a_i]$ aralığına kısıtlamasını ele alalım.

$s \in [0,1]$ olmak üzere

$$f_i(s) = f((1-s)a_{i-1} + sa_i) \quad (6.2)$$

olacak şekilde f 'i tekrar parametrelendirelim. f_i 'nin U 'daki bir yola yol homotopik olduğunu gösterelim .

Eğer f_i U 'daysa

$$F_i(s, t) = f_i(s) \quad (6.3)$$

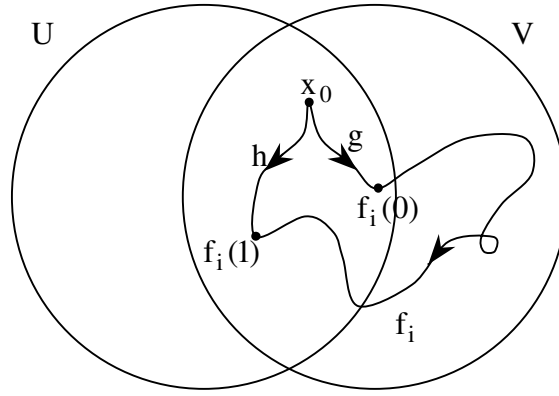
olacak şekilde f ve f_i arasında bir yol homotopisi tanımlarız.

Eğer f_i U 'da değilse , o zaman f_i V 'de olmalıdır .

$U \cap V$ yol bağlantılı olduğundan , $U \cap V$ 'de yer almalıdır.

g , $U \cap V$ 'nin x_0 noktasından $f_i(0)$ 'a

h , $U \cap V$ 'nin x_0 noktasından $f_i(1)$ 'e iki yol seçelim.



Şekil 6.1

$(g * f_i) \bar{h}$ bileşkesi V kümesinin x_0 noktasında bir ilmeaktır.

$$j : (V, x_0) \rightarrow (X, x_0)$$

$j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ için $(g * f_i) \bar{h}$ ilmeği j vasıtasıyla X 'in x_0 noktasındaki bir ilmeğe gider.

j_* sıfır homomorfizma olduğunda bu ilmek X 'te e_{x_0} sabit ilmeğine yol homotopiktir. Bu yüzden f_i , X 'te $\bar{g} * h$ yoluna yol homotopiktir.

F_i , f_i ve $\bar{g} * h$ arasında yol homotopisi olsun. Yani F_i , X 'te f_i ve $U \cap V$ 'deki bir yol arasında yol homotopisidir.

$\forall F_i : [a_{i-1}, a_i] \times I \rightarrow X$ bir tasvir olacak şekilde parametrelendirelim. Parçaları bir araya getirdiğimizde;

$F : I \times I \rightarrow X_i \quad s \in ([a_{i-1}, a_i])$ için,

$$F(s, t) = F_i \left(\frac{s - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}, t \right) \quad (6.4)$$

olacak şekilde f ve U 'nun bir yolu arasında bir yol homotopisi olur. Çünkü her F_i yol homotopisinin bitiş noktası sabittir. F iyi tanımlı olduğundan önceki lemmadan F sürekli bir tasvirdir.

$$f'(s) = f(s, 1) \text{ olsun.} \quad (6.5)$$

3. Adım:

f 'nin (X kümesinde) U 'nun f' ilmeğiyle yol homotopik olduğunu göstermiştik .

$i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 'nın sıfır homomorfizma olmasında dolayı f' ilmeği X 'te e_{x_0} sabit ilmeğine yol homotopik olmalıdır.

$$f \cong_P f' \cong_P e_{x_0} \quad (6.6)$$

Bunu göstermek için f 'nin U 'nun bir yoluyla homotopik olmasından yararlandık.

7. YÜZEYLERİN TEMEL GRUPLARI

7.1 Teorem:

$\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ temel grubu $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ile izomorfiktir.

İspat:

Hatırlatma: A ve B “•” İşlemine göre grup iseler, o halde $A \times B$ kartezyen çarpımı

$$(a \times b) \bullet (a' \times b') = (a \bullet a') \times (b \bullet b') \quad (7.1)$$

işlemine göre grup özelliği gösterir.

Eğer $h: C \rightarrow A$ ve $k: C \rightarrow B$ grup homomorfizmalar ise

$$\Phi(c) = h(c) \times k(c) \quad (7.2)$$

şeklinde Φ tasviri grup homomorfizmasıdır.

$p: X \times Y \rightarrow X$ ve $q: X \times Y \rightarrow Y$ tasvirleri izdüşüm tasvirleri olsun. Eğer teoremin ifadesinde belirtilen temel noktaları kullanırsak ;

$$p_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$q_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{homomorfizmalarını elde ederiz.}$$

$$\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \text{ olmak üzere ;}$$

$$\Phi([f]) = p_*([f]) \times q_*([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] \quad (7.3)$$

şeklinde bir homomorfizma tanımlayalım.

Φ ’nin bir izomorfizma olduğunu gösterelim.

Örtenlik: $g: I \rightarrow X$ x_0 ’da, $h: I \rightarrow Y$ y_0 ’da birer ilmek olsunlar.

$[g] \times [h]$ elemanının Φ ’nin görüntü kümesinde yer aldığını göstermek istiyoruz.

$f : I \rightarrow X \times Y$ olacak şekilde

$$f(s) = g(s) \times h(s) \quad (7.4)$$

tasvirini tanımlayalım. O zaman f , $X \times Y$ 'nin

$x_0 \times y_0$ noktasında bir ilmek ve;

$$\Phi([f]) = [pof] \times [qof] = [g] \times [h] \text{ olur.} \quad (7.5)$$

Φ 'nin içi yok olur.

$f : I \rightarrow X \times Y$, $X \times Y$ 'nin $x_0 \times y_0$ noktasında bir ilmek ve $\Phi([f]) = [pof] \times [qof]$ birim eleman olsun.

$$\text{Yani } pof \cong_p e_{x_0} \text{ ve } qof \cong_p e_{y_0} \text{ 'dır.} \quad (7.6)$$

G ve H yol homotopiler olsun . O halde $F : I \times I \rightarrow Y$ olacak şekilde ;

$$F(s,t) = G(s,t) \times H(s,t) \quad (7.7)$$

tasviri f ve $x_0 \times y_0$ noktasındaki ilmek arasında yol homotopisidir.

Sonuç:

$T = S^1 \times S^1$ torusun temel grubu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubuna izomorfiktir.

7.2 Tanım:

P^2 düzlemi (projektif düzlem), S^2 'nin her x noktası, onun kutupsal $-x$ noktasıyla bağdaştırılarak S^2 'den elde edilen bir uzaydır.

S^2 'de $x \sim x$ ve $x \sim (-x)$ olacak şekilde bir denklik bağıntısı tanımlayalım. O halde P^2 denklik sınıflarının kümesidir.

Eğer $p: S^2 \rightarrow P^2$ tasviri her bir x noktasını onun denklik bağıntısına götürüyorsa $P^{-1}(V)$, S^2 'de açık olduğu sürece; V 'nin S^2 'de açık olması tanımlanarak P^2 topolojikleştirilir.

7.3 Teorem:

P^2 düzlemi bir yüzey ve $p: S^2 \rightarrow P^2$ tasviri bir örtü tasvirdir.

İspat:

Öncelikle p 'nin açık olduğunu gösterelim. U , S^2 'de açık bir küme olsun .

$a: S^2 \rightarrow S^2$ olmak üzere $a(x) = -x$ kutupsal tasviri bir homomorfizmadır. Buradan , $a(U)$ S^2 de açıktır.

$$p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U) \quad (7.8)$$

olduğu için , bu küme S^2 'de açıktır. Böylece tanımdan $p(U)$, P^2 'de açıktır.

p 'nin örtü tasviri olduğunu gösterelim .

$y \in P^2$ için bir $x \in p^{-1}(y)$ seçelim. R^3 'ün öklidyen metriğini kullanarak $\varepsilon < 1$ için x 'in S^2 'de bir U - ε komşuluğunu seçelim.

$$d(z, a(z)) = 2 \quad (7.9)$$

olduğu için U , S^2 'nin kutupsal noktalarının hiçbir $\{z, a(z)\}$ parçasını içermez.

Sonuç olarak $p: U \rightarrow p(U)$ tasviri 1-1'dir. Sürekli ve açık olduğu için de bir homomorfizmadır. Benzer şekilde ;

$$p: a(U) \rightarrow p(a(U)) = p(U) \text{ da bir homomorfizmadır.} \quad (7.10)$$

Buradan $p^{-1}(p(U))$ kümesi, her biri p tarafında homomorfik olarak $p(U)$ 'a tasvir edilen U ve $a(U)$ ayrık açık kümelerinin birleşimidir. O halde $p(U)$, p tarafından tamamen örtülen $p(x) = y$ 'nin komşuluğudur. Böylece p bir örtü tasviridir .

S^2 'nin $\{U_n\}$ şeklinde sayılabilir bir tabanı varsa , P^2 uzayının da $\{p(U_n)\}$ şeklinde sayılabilir bir tabanı vardır.

P^2 'nin Hausdorff olduğunu gösterelim.

$y_1, y_2 \in P^2$ için $p^{-1}(y_1) \cup p^{-1}(y_2)$ kümesi dört nokta içerir. 2ε , bu noktaların aralarındaki en kısa mesafe olsun. $U_1, p^{-1}(y_1)$ 'in ; U_2 de $p^{-1}(y_2)$ 'nin ε komşulukları ise $U_1 \cup a(U_1)$ ve $U_2 \cup a(U_2)$ ayrıktır. $p(U_1)$ ve $p(U_2)$ sırasıyla y_1 ve y_2 'nin P^2 'de ayrık komşuluklarıdır.

S^2 bir yüzey ve P^2 'nin her bir noktası S^2 'nin açık bir alt kümesi ile homoemorfik olarak komşuluğa sahipse , P^2 uzayı de yüzeydir.

Sonuç:

$\pi_1(P^2, y)$ sıra 2'nin grubudur.

İspat:

$p: S^2 \rightarrow S^2$ tasviri örtü tasviridir. S^2 basit bağlantılı olduğundan , $p^{-1}(y)$ ve $\pi_1(P^2, y)$ arasında birebir eşleme vardır. Bu küme iki elemanlı olduğundan $\pi_1(P^2, y)$ sıra2'nin grubudur.

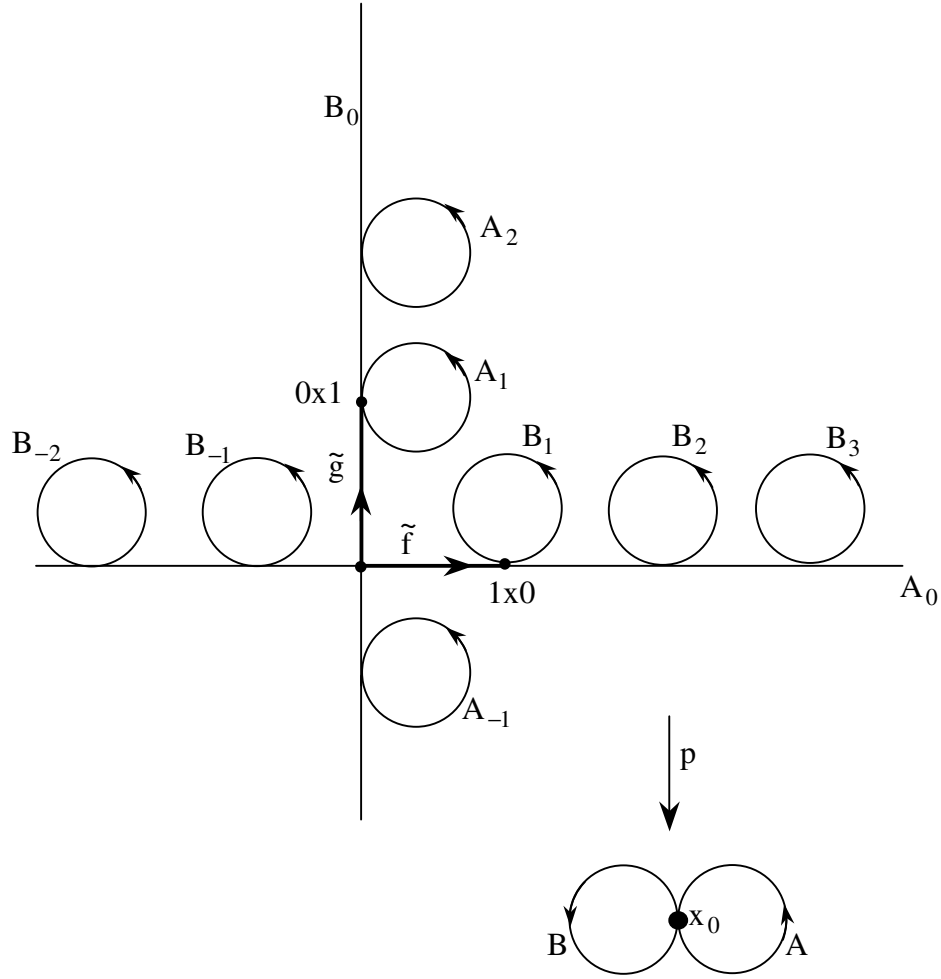
7.4 Lemma:

Figür sekizin temel grubu değişmeli grup değildir.

İspat:

Figür sekiz , x_0 ortak noktalı A ve B gibi iki dairenin birleşimidir .Figür sekiz için E gibi bir örtü uzayı tanımlayalım.

E uzayı x ve y eksenlerini içeren düzlemin alt uzayıdır. x ve y eksenleri boyunca küçük çemberler birbirine teğettir. Bir çember , her bir 0 sayı noktasında y eksenine teğettir.



Şekil 7.1

p tasviri, x eksenini A çemberi etrafına, y eksenini diğer B çemberi etrafına dolar. Her bir durumda tamsayı noktaları p vasıtasıyla x_0 temel noktasıyla eşlenirler.

x ekseninin bir tamsayı noktasına teğet olan her bir çember p etrafında B 'ye homomorfik olarak tasvir edilir.

$$\tilde{f} : I \rightarrow E, \tilde{f}(s) = sx_0 \quad (7.11)$$

tasviri x eksenini boyunca orijinden 1×0 noktasına giden bir yol olsun.

$$\tilde{g} : I \rightarrow E, \tilde{g}(s) = 0xs \quad (7.12)$$

tasviri y eksenini boyunca orijinden 0×1 noktasına giden bir yol olsun.

$$f = p \circ \tilde{f} \text{ ve } g = p \circ \tilde{g} \text{ olsun.} \quad (7.13)$$

Böylece f ve g sırasıyla A ve B çemberleri etrafında ilerleyen, figür sekiz'de x_0 tabanlı ilmeklerdir. $f * g$ ve $g * f$ 'nin yol homotopik olmadığını yani figür sekizin temel grubunun değişmeli olmadığını iddia ediyoruz. Bunu göstermek için, bunların her birini orijinden başlayan E 'nin bir yoluna kaldıralım.

x eksenini boyunca orijinden 1×0 'a giden yol $f * g$ 'nin kaldırmasıdır ve bu kaldırma bir kez daha 1×0 noktasında x eksenine teğet olan çemberin etrafında gider. Bunun yanı sıra y eksenini boyunca orijinden 0×1 'e giden E 'nin bir yolu $g * f$ 'nin bir kaldırmasıdır ve bu kaldırma bir kez daha 0×1 noktasında y eksenine teğet olan çemberlerin etrafında gider. $f * g$ ve $g * f$ yol homotopik olamazlar.

7.5 Teorem:

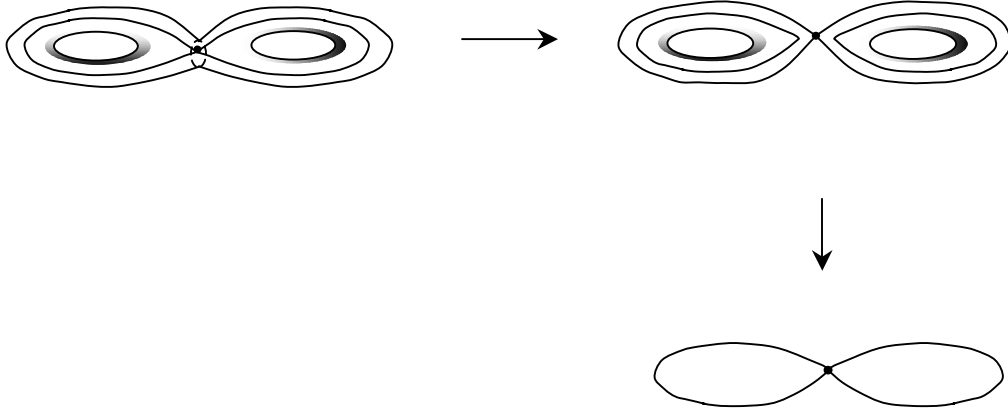
Çift torusun (T_2) temel grubu değişmeli değildir.

İspat:

Torusun iki kopyası alınıp her birinden küçük açık bir disk silinir, geriye kalan parçalar kenarlarından birleştirilir ve çift torus elde edilir. T_2 'nin kısıtlanması figür sekizdir.

j 'nin varlığı;

$j_* : \pi_1(8, x_0) \rightarrow \pi_1(T_2, x_0)$ 'a bir 1-1 homomorfizma oluşturur. Böylece $\pi_1(T_2, x_0)$ değişmeli değildir.



Şekil 7.2

Sonuç : S^2 , P^2 , T ve T_2 yüzeyleri topolojik olarak farklıdır.

8. SONUÇLAR:

Aşağıdaki tabloda bazı uzayların temel grupları verilmiştir.

UZAY (S)	SEMBOL	$\pi_1(S)$ (TEMEL GRUP)
Çember	S^1	$\mathbb{Z}$
Kompleks Projektif Uzay	CP^n	0
Figür Sekiz		$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
n-torus	T^n	$\mathbb{Z}^n$
Reel Projektif Uzay	RP^2	$\mathbb{Z}_2$
Küre	S^2	0
Torus	T	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

KAYNAKLAR

Avci, Hamit, Topoloji Ders Notları, 2003.

Munkres, James R, Topology, A First Course, Prentice-Hall,Inc., New Jersey, June 1974

Munkres, James R, Topology, Second Edition, Prentice-Hall,Inc., New Jersey,December 1999

[[http:// mathworld.wolfram.com/FundamentalGroup.html](http://mathworld.wolfram.com/FundamentalGroup.html)]

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	18.09.1980	
Doğum yeri	Edirne	
Lise	1995-1998	F.M.V Özel Nişantaşı Işık Lisesi
Lisans	1998-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü