

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ ve  
UYGULAMALARI**

Matematikçi, Nurcan ÇAMCI

**FBE Matematik Anabilim Dalında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı:** Yrd. Doç. Dr. Salih KARANFİL

**İSTANBUL, 2006**

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                                   | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ .....                                                                               | iii   |
| KISALTMA LİSTESİ .....                                                                            | iv    |
| ÇİZELGE LİSTESİ .....                                                                             | v     |
| ÖNSÖZ .....                                                                                       | vi    |
| ÖZET .....                                                                                        | vii   |
| ABSTRACT .....                                                                                    | viii  |
| 1. İNTEGRAL DENKLEMLERİN TARİHSEL GELİŞİMİ .....                                                  | 1     |
| 2. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ.....                                                             | 2     |
| 2.1. Volterra İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme<br>Dönüştürülerek Çözümü.....              | 2     |
| 2.1.1. Volterra İntegral Denklemlerinde Resolvant.....                                            | 2     |
| 2.1.2. Resolvantın Diferansiyel Denklem Yardımıyla Bulunması.....                                 | 4     |
| 2.2. Ardışık Yaklaştırma Yöntemi.....                                                             | 4     |
| 2.3. I. Cins Volterra İntegral Denklemleri.....                                                   | 5     |
| 2.3.1. I. Cins Volterra İntegral Denklemlerinde Fark Çekirdeği<br>Laplace Dönüşüm Yöntemi.....    | 5     |
| 2.3.2. I. Cins Volterra Denkleminin Gama ve Beta Fonksiyonlarından<br>Yararlanarak Çözülmesi..... | 6     |
| 2.4. II. Cins Volterra İntegral Denklemleri.....                                                  | 7     |
| 2.4.1. II. Cins Volterra İntegral Denkleminde Runge-Kutta<br>Yöntemiyle Yaklaşım.....             | 7     |
| 2.4.2. II. Cins Volterra İntegral Denkleminde Neumann Serisi ile Yaklaşım.....                    | 8     |
| 3. UYGULAMALAR .....                                                                              | 9     |
| 4. BİRİM UZUNLUKLU HOMOJEN KİRİŞİN ESNEKLİK PROBLEMİ.....                                         | 16    |
| 4.1. Volterra-Fredholm ve Fredholm İntegral<br>Denkleminin Genel Çözümü .....                     | 16    |
| 4.2. Adi Ardışık Yakınsama Yöntemiyle Çözüm.....                                                  | 18    |
| 4.3. Genelleştirilmiş Ardışık Yakınsama Yöntemiyle Çözüm.....                                     | 21    |
| 5. ....                                                                                           |       |
| SONUÇLAR.....                                                                                     | 25    |
| KAYNAKLAR .....                                                                                   | 26    |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                    | 27    |

## SİMGE LİSTESİ

|                         |                    |
|-------------------------|--------------------|
| $K(x, t)$               | Çekirdek fonksiyon |
| $F_1 X$                 | Fredholm operatörü |
| $F_2 X$                 | Fredholm operatör  |
| $L$                     | Laplace dönüşümü   |
| $\Gamma(x, t, \lambda)$ | Resolvant          |
| $\sum$                  | Toplam sembolü     |
| $V_x$                   | Volterra operatörü |

## ÇİZELGE LİSTESİ

|                                                                                                                            | Sayfa |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Çizelge 2.1 Genel çözüm, adi ardışık yakınsama ve genelleştirilmiş ardışık yakınsama yöntemi ile elde edilen değerler..... | 24    |

## **ÖNSÖZ**

Bu çalışma konusunu bana veren, başlangıcından sonuna kadar çalışmalarımın her aşamasında düşünce ve önerilerinden yararlandığım değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih Karanfil'e teşekkür ederim.

Ayrıca bu süreçte bilgi ve birikimlerinden yararlandığım değerli hocam Doç. Dr. Mustafa Bayram'a teşekkürü bir borç bilirim.

## ÖZET

Bu çalışmada Volterra integral denklemlerinin çözüm yöntemleri üzerinde çalışılmıştır.

Giriş bölümünden sonra II.bölümde Volterra integral denklemleri hakkında genel bilgi verilmiştir. Bunlar integral denklemlerinde resolvent, resolventin diferansiyel denklem yardımıyla bulunması ve ardışık yaklaştırma yöntemi şeklinde sıralanmıştır. Ayrıca Volterra integral denklemlerinin çözümünde Leibnitz kuralı bir başka yöntem olarak kullanılmıştır. Diferansiyel denkleme dönüştürülen integral denklemin çözümü bu kural ile de elde edilmiştir. I. cins Volterra integral denklemlerinde Laplace dönüşüm yöntemi, Gama-Beta fonksiyonları ile çözüm yöntemleri incelenmiştir. Burada I. cins Volterra integral denklemi II. cinsteki denkleme indirgmeden fark çekirdeği ile çözülmüştür. II. cins Volterra integral denkleminde ise Runge-Kutta ve Neumann serisi ile yaklaşım yöntemleri kullanılmıştır. Burada integral denklem  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu üzerinde herhangi bir kısaltma yapmaksızın itere çekirdeklerden yararlanarak bir denklem elde edildiği ve bu denklemin de integral denklemin çözümü için bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

III. bölümde bu yöntemlerle ilgili örnekler çözülmüştür.

IV. bölüme geçildiğinde ise Volterra integral denklemlerinin sayısal çözümleri, birim uzunluklu homojen kirişin esneklik problemini esas alınarak incelenmiştir. Önce Volterra-Fredholm ve Fredholm integral denkleminde homojen olmayan diferansiyel denklemin başlangıç şartları ele alınarak genel çözüm hesaplanmıştır. Bundan yararlanarak adi ardışık yakınsama ve genelleştirilmiş ardışık yakınsama yöntemiyle çözüm bulunmuştur. Elde edilen çözümler  $t$ 'nin 0, 0.1, 0.2, .....1 değerleri için belirlenmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Fredholm operatörü, Volterra operatörü.

## ABSTRACT

In this study, the solution methods of Volterra equations were analysed.

After the introduction part, in the second section the general information about Volterra equations were presented. This information consist of resolution in Volterra equation, solving the resolution by means of differantial equation and the basic successive substitute approximations method. Also, in the solution of Volterra equations the rules of Leibnitz was used as another method. The solution of integral equtaion, which was turned into differantial equations, was acquired through this rule. In the first type of Volterra equations Laplace transformation method, Gamma-Beta functions and their solution methods were analysed. Here, first type of Volterra equation was solved by not reducing to the equation into the second type. However, in the type of volterra equations the approximations methods of Runge-Kutta and Neumann were used. In this part it was indicated that an equation is acquired by not condensing upon the function of  $K(x,t)$ . This equation is a method for the solution of an integral equation.

In the third section, the examples about these methods were solved.

When we come to the fourth section, it was analysed the numerical solutions of Volterra equations by taking into consideration the flexibility problem of homogenous chord. Firslly, the general solution was calculated by analysing the starting conditions of differantial equation which is not homogenous in Volterra-Fredholm and Fredholm integral equation. By using these findings the solution was acquired by the basic successive substitute approximations method and modified successive approximations method. These solutions were determined for the values of  $t=0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ .

**Key words:** The operator of Fredholm, the operator of Volterra.

# 1. İNTEGRAL DENKLEMLERİN TARİHSEL GELİŞİMİ

İntegral denklemler bu yüzyılın başlarında incelenmeye ve üzerinde araştırmalar yapılmaya başlanılmış bir konudur. 1823 yılında, ABEL tarafından bir integral denkleme rastlanması ve ilk defa integral denklem deyiminin 1888 yılında De Bais REYMOND tarafından kullanılması, konunun başlangıç yılları hakkında bir fikir vermektedir. (Bocher M, 1913) Önceleri dağınık ve rastgele yapılan çalışmalar, gittikçe düzenli ve daha bilimsel yöntemler uygulanarak yapılmaya başlanılmış ve zaman içerisinde konu, bugünkü aşamasına ulaşmıştır.

Genelde, tekniğin gelişmesine paralel olarak matematik gelişmelerin sağlanması, matematik gelişmelerin ise teknikte yeni ufuklar açması, bu yüzyılın simgesi gibidir. Pek çok konunun, çeşitli gereksinimler sonucu ortaya konularak ve zamanın problemlerine cevap verecek şekilde geliştirilerek olgunlaştırılması, bu konular hakkında birçok çalışmanın ve eserin ortaya çıkmasına neden olmuştur. İntegral Denklemler de böyle bir konudur. İntegral Denklemlerin, Diferansiyel Denklemlerle olan ilişkisi ve Diferansiyel Denklemlerin teknikte çok kullanılır olması nedenleriyle, İntegral Denklemler tekniğin problemlerine gitgide daha çok girmeye başlamıştır. Bu nedenle de önemi gittikçe artmaktadır.

İntegral Denklemlere olan ilgi her geçen gün artmaktadır. Bu konular giderek güncelleşmiş ve de teknolojiye ve özellikle de birçok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaya başlanmış olmasından ötürü, ilgi alanı o oranda genişlemiştir. (Aksoy Y, 1988)

Son zamanlarda Volterra-Fredholm integral denkleminin yararlanarak yeni çözüm teknikleri üzerinde çalışılmıştır. Adi ardışık yakınsama yöntemiyle sınır değer problemleri çözülmüştür. Buradan elde edilen çözümler değişken katsayılı homojen kirşin esneklik probleminin sayısal çözümlerinin bulunmasında kullanılmıştır. (Çelik E., Bayram M. 2003) Ayrıca geciken argümentli bir diferansiyel denklemin sınır değer problemlerinin çözümü için yeni bir yaklaşım önerilmiştir. (Çelik E., Bayram M., Aykut A. 2003) Buna bağlı olarak geciken argümentli bir diferansiyel denklemin sınır değer problemlerinin çözümü için etkili sayısal yöntemler sunulmuştur. (Çelik E., Bayram M., Aykut A. 2002)

## 2. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

$u(x)$  bilinmeyen fonksiyon ve  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$  şeklindeki bir ifadeye 2. cins lineer volterra integral denklemi

denir.  $f(x) = 0$  ise  $u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$  dir. Bu tür denklemlere de 2. cins lineer homojen

volterra integral denklemi denir.  $\int_a^x K(x,t)u(t)dt = \emptyset(x)$  şeklindeki ifadeye de I. Cins volterra

integral denklemi adı verilir.

### 2.1. Volterra İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme Dönüştürülerek Çözümü

Bir integral denklem diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Genellikle Volterra tipindeki integral denklemlerin analitik çözümünde kullanılır. Bir integral denklem “Leibnitz formülü” olarak bilinen kural yardımıyla integral denklemde eşitliğin sağ tarafındaki integralden kurtuluncaya kadar türev alınır. Leibnitz formülü;

$$\frac{d}{dx} \int_{A(x)}^{B(x)} F(x,t)dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dt + F\{x, B(x)\} \frac{dB}{dx} - F\{x, A(x)\} \frac{dA}{dx} \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

#### 2.1.1. Volterra İntegral Denklemlerinde Resolvent

$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$  şeklinde ifade edilen 2 cins volterra integral denkleminde  $K(x,t)$

fonksiyonu  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq t \leq x$  ve  $f(x)$ ,  $0 \leq x \leq a$  aralıklarında tanımlı ve süreklidirler.

Buradan,  $u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots$   $\lambda$  parametresine bağlı

kuvvet serisi elde edilir. Bu ifade genel denklemde yerine yazılırsa,

$$u_0(x) + \lambda u_1(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots$$

$$f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) [u_0(t) + \lambda u_1(t) + \dots + \lambda^n u_n(t) + \dots] dt$$

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt$$

$$u_2(x) = \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt$$

.

.

.

$$u_n(x) = \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt \text{ olur.}$$

$$u_0(x) = f(x) \text{ olduğuna göre } u_1(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt \text{ elde edilir.}$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_0^x K(x,t) \left[ \int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1 \right] dt \\ &= \int_0^x f(t_1)dt_1 \int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt = \int_0^x K_{(2)}(x,t_1)f(t_1)dt_1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$K_{(2)}(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt \text{ ve } K_{(1)}(x,t)=K(x,t)$$

$$K_{(n+1)}(x,t) = \int_t^x K(x,y)K_{(n)}(y,t)dy \text{ ve}$$

$$u_{(n)}(x) = \int_0^x K_{(n)}(x,t)f(t)dt \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_0^x K_{(i)}(x,t)f(t)dt$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t) \text{ serisine resolvent denir ve } \Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t) \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Resolvent hesaplanabildiği takdirde volterra integral denkleminin çözümü;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x,t;\lambda)f(t)dt \text{ olur. (Aksoy Y, 1988)}$$

### 2.1.2. Resolvanın Diferansiyel Denklem Yardımıyla Bulunması

$K(x, t) = a_0(x) + a_1(x)(x - t) + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1}$  şeklindeki fonksiyon için volterra

integral denkleminin resolvanı diferansiyel denklem yoluyla bulunacaktır.

$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x, t; \lambda) f(t) dt$  yardımıyla integral denklemin çözümü bulunur.

$K(x, t)$  ifadesinde  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$  fonksiyonları  $(0, a)$  aralığında sürekli ve tanımlı fonksiyonlardır.

$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda \left[ a_0(x) \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{d^{n-2} g}{dx^{n-2}} + \dots + a_{(n-1)}(x) g \right] = 0$  diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} g|_{x=t} = \frac{dg}{dx} \Big|_{x=t} = \frac{d^2 g}{dx^2} \Big|_{x=t} = \dots = \frac{d^{n-2} g}{dx^{n-2}} \Big|_{x=t} = 0, \\ \Rightarrow \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} \Big|_{x=t} = 1 \end{aligned}$$

Buna göre resolvan,

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, t; \lambda)}{dx^n} \text{ olur. (Aksoy Y, 1988)}$$

### 2.2. Ardışık Yaklaştırma Yöntemi

Bu yöntemle  $u_0(x)$  sıfırıncı yaklaştırma olarak düşünülüp  $\lambda = 1$  için

$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \varepsilon) u(\varepsilon) d\varepsilon$  ifadesinde yerine konursa  $u_1(x)$  birinci yaklaştırma elde edilir.

$$u_1(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) u_0(t) dt$$

$$u_2(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) u_1(t) dt$$

.

.

.

$$u_n(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) u_{n-1}(t) dt \text{ olur.}$$

### 2.3. I. Cins Volterra İntegral Denklemleri

I. cins volterra integral denkleminin özel hali,

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, K(x,x) \neq 0 \text{ ve } x'e \text{ bağılı olarak türetilmek üzere 2. cins volterra}$$

integral denklemine indirgenebilir. Denklemden her 2 tarafa  $x'e$  bağılı olmak üzere Leibnitz kuralı uygulanacak olursa;

$$\frac{df}{dx} = \lambda \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} u(t)dt + \lambda K(x,x)u(x)$$

$$u(x) = \frac{1}{\lambda K(x,x)} \frac{df}{dx} - \int_0^x \frac{1}{K(x,x)} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} u(t)dt, K(x,x) \neq 0$$

$$g(x) = \frac{1}{\lambda K(x,x)} \cdot \frac{df}{dx}$$

$$H(x,t) = -\frac{1}{K(x,x)} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$$

$$u(x) = g(x) + \int_0^x H(x,t)u(t)dt \quad \text{elde edilir.}$$

#### 2.3.1. I. Cins Volterra İntegral Denklemlerinde Fark Çekirdeği Laplace Dönüşüm

##### Yöntemi:

I. cins volterra integral denkleminin fark çekirdeği içerdiğinde

$$K(x,t) = K(x-t)$$

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x-t)u(t)dt$$

$$F(s) = \lambda K(s)u(s)$$

$$u(s) = \frac{F(s)}{\lambda K(s)}, \text{ ters Laplace ile}$$

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} L^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{K(s)} \right\} \quad \text{elde edilir.}$$

### 2.3.2. I. Cins Volterra Denkleminin Gama ve Beta Fonksiyonlarından Yararlanarak Çözülmesi

$\int_0^x (x-t)^n u(t) dt = x^m$  şeklindeki Volterra integral denklemini göz önüne alalım.

$m \geq 0$ ,  $n > -1$  olup  $m$  ve  $n$  gerçel sayılardır. Denklemin her iki tarafı  $r > -1$  ve  $r \in \mathbb{R}$  o.ü.  $(z-x)^r$  ile çarpılır ve  $x$ 'e göre 0 ve  $z$  arasında integre edilirse;

$$\int_0^z (z-x)^r \left[ \int_0^x (x-t)^n u(t) dt \right] dx = \int_0^z x^m (z-x)^r dx \text{ olur.}$$

$x = vz$  alınsın.

$$\int_0^z x^m (z-x)^r dx = z^{m+r+1} \int_0^1 v^m (1-v)^r dv$$

$$= z^{m+r+1} \beta(m+1, r+1) = z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

$(m+r+1 > m \geq 0)$  olur. Sol taraf ise,

$$\int_0^z (z-x)^r \left[ \int_0^x (x-t)^n u(t) dt \right] dx = \int_0^z \left[ \int_0^x (z-x)^r (x-t)^n u(t) dt \right] dx$$

$$= \int_0^z \left[ \int_t^z (z-x)^r (x-t)^n dx \right] u(t) dt, \quad x = t + v(z-t) \text{ alalım}$$

$$\int_t^z (z-x)^r (x-t)^n dx = (z-t)^{n+r+1} \int_0^1 v^n (1-v)^r dv$$

$$= (z-t)^{n+r+1} \cdot \beta(n+1, r+1) = (z-t)^{n+r+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)}$$

$$\int_0^z \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)} (z-t)^{n+r+1} u(t) dt = z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1) \cdot \Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

$h \geq 0$  ve  $n+r+1 = h$

$\Gamma(n+r+2) = \Gamma(h+1)$   $\Gamma = h-n-1$  ise  $m+r+2 = m+h-n-1+2$  olup

$\Gamma(m+r+2) = \Gamma(m+h-n+1)$  olur.

$$\int_0^z (z-t)^h u(t) dt = z^{m+h-n} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(h+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)}$$

$\Gamma(h+1) = h!$  old.dan,

$$\int_0^z \frac{(z-t)^h}{h!} u(t) dt = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)} \cdot z^{m+h-n}$$

$z$ 'ye göre her iki tarafın  $h+1$  kez türevi alınırsa,

$$u(z) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n)} \cdot z^{m-n-1} \quad \text{bu sonucu} \quad \int_0^x (x-t)^n u(t) dt = x^m \quad \text{denkleminin çözümüdür.}$$

(Aksoy Y, 1988)

## 2.4. II. Cins Volterra İntegral Denklemleri

### 2.4.1. II. Cins Volterra İntegral Denkleminin Runge-Kutta Yöntemiyle Yaklaşım

$$f(x) = g(x) + \sum_{s=0}^x W(x,s,f(s))ds \quad \text{denkleminde } f(x_0), g(x) \text{ ve } x_0 \leq x \leq b \text{ dir.}$$

R- derecede bir Runge-Kutta metodu denklem integrali bazı sabit  $x$ 'ler için yaklaştırmada kullanılabilir. R-derecede Runge-Kutta metodu,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} Z(x, y(x)) dx \quad \text{olarak tanımlanmıştır.}$$

Burada,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} Z(x, y(x)) dx = h \cdot \sum_{r=1}^R C_r k_r$$

$$k_1 = Z(x_n, y_n) \quad , \quad k_r = Z(x_n + ha_r, y(x_n + ha_r)) \quad r = 2, 3, \dots, R$$

$$y(x_n + ha_r) = y(x_n) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s \rightarrow 0 = a_1 \leq a_2 \leq \dots, a_r = 1$$

$$a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

Aşağıdaki eşitliklerden faydalanarak

$$y(x_n + 1) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} z(x, y(x)) dx, \quad \int_{x_n}^{x_{n+1}} z(x, y(x)) dx \cdot h \cdot \sum_{r=1}^R C_r k_r$$

$$\int_{x_n}^{x_n + a_r h} z(x, y(x)) dx = h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} z(x_n + ha_s, y(x_n + ha_s))$$

Volterra denkleminde,

$$f(x_0 + a_r h) = g(x_0 + a_r h) + \int_{x_0}^{x_0 + a_r h} W(x_0 + a_r h, s, f(s)) ds$$

$$\int_{x_n}^{x_n + a_r h} Z(x, y(x)) dx = h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} Z(x_n + ha_s, y(x_n + ha_s))$$

Bu yaklaşım kullanılarak,

$$f(x) = g(x) + \sum_{x_0}^x W(x, s, f(s)) ds \quad \text{denklemini}$$

$$f(x_0 + a_r h)g(x_0 + a_r h) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} W(x_0 + a_r, x_0 + a_s, f(x_0 + a_s)) \quad (r=2,3,\dots,R)$$

Genelleştirilirse,

$$f(x) = g(x) + \int_{x_0}^x W(x,s,f(s))ds \quad \text{aşağıdaki biçimde çözülmür.}$$

$$f(x_0 + a_r h) = g(x_0 + a_r h) + \sum_{s=1}^{r-1} W(x_0 + a_r h, x_0 a_s h, f(x_0 + a_r h)) \quad (r = 2, 3, \dots, R)$$

Burada,  $0 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r = 1$ ,  $f(x_1 + a_1 h) = f(x_0 + a_r h)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}\mathbf{h} \text{ , } \mathbf{P} \geq \mathbf{I}$$

$$f(x_p + a_r h) = F_p(x_p + a_r h) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} W(x_p + a_r h, x_p + a_s h, f(x_p + a_r h))$$

$$F_p(x_p + a_r h) = g(x_p + a_r h) + h \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=1}^{r-1} b_{RK} W(x_p + a_r h, x_j + a_k h, f(x_j + a_k h))$$

$$f(x_p + a_i h) = f(x_{p-1} + a_R h) \quad \text{dir.}$$

### 2.4.2. II. Cins Volterra İntegral Denklemin Neumann Serisi ile Yaklaşım

$$u(x) = \lambda \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(i-1)} \int_a^x K_i(x, y) f(y) dy \right\} + f(x)$$

Bu denklemde ilk amaç  $x < y$  iken  $a \leq x \leq b$  ve  $K(x,y) = 0$  koşullarında bir itere çekirdek fonksiyonları oluşturmaktır.

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$K_2 = \int_b^a K(x, t) K_1(t, y) dt \quad , \quad K_2 = \int_x^y K(x, t) K_1(t, y) dt$$

.

.

$$K_n = \int_x^y K(x,t)K_{n-1}(t,y)dt$$

çözücü çekirdeği hesaplanmış bir Volterra integral denkleminin

çözümü,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) f(t) dt \quad \text{olacaktır.}$$

### 3. UYGULAMALAR

**3.1. Leibnitz Kuralı İçin Test Problemi:**  $x^3 - 3x = \int_0^x [4 - 3(x-t)]u(t)dt$  integral denklemini

alalım.

$$3x^2 - 3 = 3 \int_0^x u(t)dt + 4u(x)$$

$$6x = -3[0 + u(x)] + 4u'(x)$$

$$6x = 4u'(x) - 3u(x)$$

$$4u' - 3u = 6x$$

$$4r - 3 = 0 \Rightarrow r = 3/4$$

$$u_1 = c_1 e^{3/4 x}$$

$$u_2 = Ax + B \text{ için}$$

$$u_2' = A \Rightarrow 4A - 3Ax - 3B = 6x$$

$$A = -2, B = -\frac{8}{3} \text{ bulunur.}$$

$$u(x) = c_1 e^{\frac{3}{4}x} - 2x - \frac{8}{3}$$

$$u(0) = -\frac{3}{4} = C_1 - \frac{8}{3} \Rightarrow C_1 = \frac{23}{12}$$

$$u(x) = \frac{23}{12} e^{\frac{3}{4}x} - 2x - \frac{8}{3}$$

**3.2. Resolvent Kuralı İçin Test Problemi:**  $u(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \cdot u(t)dt$  integral denklemini için

$$K(x,t) = e^{x-t}, \lambda = -1 \text{ 'dır.}$$

$$K_{(1)}(x,t) = K(x,t) = e^{x-t}$$

$$K_{(2)}(x,t) = \int_t^x K(x,y)K_{(1)}(y,t)dy = \int_t^x e^{x-y} \cdot e^{y-t}dy = e^{x-t}(x-t)$$

$$K_{(3)}(x,t) = \int_t^x K(x,y)K_{(2)}(y,t)dy$$

$$= \int_t^x e^{x-y} \cdot (y-t)e^{y-t}dy = e^{x-t} \int_t^x (y-t)dy$$

$$= e^{x-t} \left( \frac{y^2}{2} - yt \right) \Big|_t^x = e^{x-t} \frac{(x-t)^2}{2!} \quad K_{(n+1)}(x, t) = e^{x-t} \frac{(x-t)^2}{n!} \quad \text{olduğu görülür.}$$

$$\Gamma(x, t; -1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{x-t} \frac{(x-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{x-t}$$

$$\Gamma(x, t; -1) = e^{t-x} \cdot e^{x-t} = 1$$

$$u(x) = x - \int_0^x t dt = x - \frac{x^2}{2}$$

### 3.3. Resolvanın Diferansiyel Denklem Çözümü İçin Test Problemi:

$$u(x) = x + \int_0^x (6x - 6t + 5)u(t) dt \quad \text{integral denklemini alalım.}$$

Buna göre,

$$K(x, t) = 6(x-t) + 5$$

$$a_0(x) = 5, a_1(x) = 6, \quad \lambda = 1 \quad \text{ve} \quad n = 2 \quad \text{şeklindedir.}$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - 5 \frac{dg}{dx} - 6g = 0, \quad r^2 - 5r - 6 = 0, \quad r_1 = 6, \quad r_2 = -1 \quad \text{olup}$$

$$g(x, t; 1) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x} \quad \text{bulunur.}$$

$$g(x, t; 1) = C_1(t) e^{6x} + C_2(t) e^{-x} \Rightarrow \frac{dg(x, t; 1)}{dx} = 6C_1(t) e^{6x} - C_2(t) e^{-x}$$

$$\left. \begin{aligned} C_1(t) e^{6t} + C_2(t) e^{-t} &= 0 \\ 6C_1(t) e^{6t} - C_2(t) e^{-t} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{7} e^{-6t} \\ C_2(t) &= -\frac{1}{7} e^t \end{aligned}$$

$$g(x, t; 1) = \frac{1}{7} e^{6(x-t)} - \frac{1}{7} e^{-(x-t)} \quad \text{olur. Bu ifade iki kez türetildiğinde,}$$

$$\Gamma(x, t; 1) = \frac{36}{7} e^{6(x-t)} - \frac{1}{7} e^{-(x-t)}$$

$$u(x) = x + \int_0^x \left[ \frac{36}{7} e^{6(x-t)} - \frac{1}{7} e^{-(x-t)} \right] t dt$$

$$u(x) = x + \frac{36}{7} e^{6x} \int_0^x t \cdot e^{-6t} dt - \frac{1}{7} e^{-x} \int_0^x t \cdot e^t dt$$

$$u(x) = x + \frac{36}{7} e^{6x} \left( -\frac{t}{6} e^{-6t} - \frac{1}{36} e^{-6t} \right) \Big|_0^x - \frac{1}{7} e^{-x} (t \cdot e^t - e^t) \Big|_0^x$$

$$u(x) = x + \frac{36}{7} e^{6x} \left( -\frac{x}{6} e^{-6x} - \frac{1}{36} e^{-6x} + \frac{1}{36} \right) - \frac{1}{7} e^{-x} (x e^x - e^x + 1)$$

$$u(x) = x - \frac{6}{7} x - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} e^{6x} - \frac{1}{7} x + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} e^{-x}$$

$$u(x) = \frac{1}{7} e^{6x} - \frac{1}{7} e^{-x}$$

**3.4. Ardışık Yaklaştırma Yöntemi İçin Test Problemi:**  $u(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt$  integral

denkleminde  $u_0(t) = 0$  kabul edilip  $u_1(x)$ 'i bulalım.

$$u_1(x) = x - 0 = x$$

$$u_2(x) = x - \int_0^x (x-t)t dt = x - \left( \frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$u_3(x) = x - \int_0^x (x-t) \left( t - \frac{t^3}{3!} \right) dt = x - x \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4!} \right) \Big|_0^x + \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{30} \right) \Big|_0^x$$

$$= x - x \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} \right) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

.

.

.

$$u_{n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{ve} \quad u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = \sin x$$

**3.5. I. Cins Volterra İntegral Denklemini 2. Cins İndirgeme Yöntemi İçin Test**

**Problemi:**  $\sin x = \int_0^x e^{x-t} u(t) dt$  1. cins volterra integral denklemini 2. cins indirgemek için

$$t = x, K(x, x) = e^{x-x} = e^0 = 1 \neq 0$$

$$f(x) = \sin x, \lambda = 1$$

$g(x) = \frac{1}{\lambda K(x, x)} \frac{df}{dx} = \cos x$  ve  $H(x, t) = -e^{x-t}$  ifadeleri bulunur.

$$u(x) = g(x) + \int_0^x H(x, t)u(t)dt$$

$$u(x) = \cos x - \int_0^x e^{x-t}u(t)dt \quad \text{Bu denklem Laplace dönüşüm yöntemi ile çözülebilir.}$$

$$u(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}u(s)$$

$$\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)u(s) = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow u(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$$

Ters Laplace uygulanırsa;

$$u(x) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}\right\} \Rightarrow u(x) = \cos x - \sin x$$

$$\frac{df}{dx} = \lambda \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} u(t)dt + \lambda K(x, x)u(x)$$

$K(x, x) \equiv 0$  olması durumunda da denklem 1. cins volterra integral denklemdir.  $\frac{\partial K}{\partial x}(x, x) \neq 0$

ise tekrar türetme yöntemi ile denklemi 2. cinse çevirmek mümkündür.

### 3.6. I. Cins Volterra İntegral Denkleminin Fark Çekirdeği Yöntemi İçin Test Problemi:

$$\sin x = \int_0^x e^{x-t}u(t)dt \quad \text{integral denklemini alalım.}$$

I. cins Volterra denkleminin fark çekirdeği olan  $K(x, t) = e^{x-t}$ 'ye sahiptir.

$$L\{K(x)\} = L\{e^x\} = \frac{1}{s-1}, \quad L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{s^2+1} = \lambda \frac{1}{s-1}u(s)$$

$$u(s) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \right)$$

Ters Laplace ile,

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} (\cos x - \sin x) \text{ olur.}$$

**3.7. Gama Fonksiyonu İçin Test Problemi:**  $\int_0^x (x-t)u(t)dt = x^2$  integral denkleminde

$n = 1$  ,  $m = 2$  olduğuna göre

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(2) = 1 \text{ bulunur.}$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(1) = 1$$

$m-n-1 = 0$  yerine yazılırsa,

$$u(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} x^0 = 2 \text{ , } \underline{u(x) = 2} \text{ çözümü bulunur.}$$

**3.8. Gama Fonksiyonu İçin Test Problemi:**  $\int_0^x (x-t)^{1/4} u(t)dt = x + x^2$  integral denklemini

çözelim.

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x)$$

$$u_1(x) \text{ için, } n = \frac{1}{4} \text{ ve } m = 1$$

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(n+1) = \Gamma(5/4)$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \text{ ve } m-n-1 = -\frac{1}{4} \text{ olup}$$

$$u_1(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} x^{-1/4} \text{ olur.}$$

$$u_2(x) \text{ için, } n = \frac{1}{4}, \quad m = 2$$

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma(n+1) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \text{ ve } m-n-1 = \frac{3}{4} \text{ olup}$$

$$u_2(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} x^{3/4} \text{ olur.}$$

$$u(x) = \frac{x^{-1/4}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{2 \cdot x^{3/4}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{x^{-1/4}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{2x}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \right]$$

**3.9. Runge-Kutta Yöntemi İçin Test Problemi:**  $f(x) = e^{-x^2} (1 + x^2) + x - 1 - \int_0^x x^2 e^{-xs} f(s) ds$

integral denklemini  $0 \leq x \leq 2$  için katsayıları ile birlikte 4. dereceden Runge-Kutta yöntemini kullanarak çözelim.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & a_2 &= \frac{1}{2} & a_3 &= \frac{1}{2} & a_4 &= 1 \\ c_1 &= \frac{1}{6} & c_2 &= \frac{2}{6} & c_3 &= \frac{2}{6} & c_4 &= \frac{1}{6} \\ b_{21} &= \frac{1}{2} & b_{32} &= \frac{1}{2} & b_{43} &= 1 \end{aligned}$$

Adım uzunluğu  $h=0,1$  olarak alınsın. Bu integral denklemin kesin çözümü  $f(x) = x$  tir.

$$g(x) = e^{-x^2} (1 + x^2) + x - 1, \quad x_0 = 0$$

$$f(x_0 + a_1 h) = g(x_0) \text{ den } f(0 + 0,1) g(x_0) \rightarrow f(0) = g(0) = e^0 (1 + 0) + 0 - 1 = 0$$

$$f(x_p + a_r h) = g(x_0 + a_r h) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} W(x_p + a_r h, x_p + a_s h, f(x_0 + a_s h))$$

$$f(x_0 + a_2 h) = g(x_0 + a_2 h) + h \sum_{s=1}^1 b_{2s} W(x_0 + a_2 h, x_0 + a_s h, f(x_0 + a_s h))$$

$$f(x_0 + a_2 h) = g(x_0 + a_2 h) + h b_{21} (x_0 + a_2 h) e^{-(x_0 + a_2 h)(x_0 + a_1 h)} \cdot f(x_0 + a_1 h)$$

$$f(0,05) = g(0,05) + 0,1 \cdot 1/2 \cdot (0,05)^2 \cdot e^{-(0,05)(0)} f(0) \cdot f(0,05) = g(0,05)$$

$$f(0,05) = e^{-(0,05)(0,05)} (1 + (0,05)^2) + 0,05 - 1$$

$$f(0,05) \cong 0,05$$

**3.10. Çözücü Çekirdek Yöntemi İçin Test Problemi:**  $u(x) = x + \int_0^x e^{x^2 - t^2} u(t) dt$  integral

denklemini çözelim.

$$K(x, t) = e^{x^2 - t^2} \quad \text{ve} \quad \lambda = 1 \quad \text{dir.}$$

$$K_{(1)}(x, t) = K(x, t) = e^{x^2 - t^2}$$

$$\begin{aligned} K_{(2)}(x, t) &= \int_t^x K(x, z) K_{(1)}(z, t) dz = \int_t^x e^{x^2 - z^2} \cdot e^{z^2 - t^2} dz = \int_t^x e^{x^2 - t^2} dz \\ &= e^{x^2 - t^2} \int_t^x dz = (x - t) \cdot e^{x^2 - t^2} \end{aligned}$$

$$K_{(3)}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_{(2)}(z, t) dz = \int_t^x e^{x^2-z} \cdot e^{z^2-t} (z-t) dz$$

$$= e^{x^2-t^2} \int_t^x (z-t) dz = \frac{(x-t)^2}{2} \cdot e^{x^2-t^2}$$

$$K_{(n+1)}(x-t) = \frac{(x-t)^2}{n!} \cdot e^{x^2-t^2}$$

$$\Gamma(x, t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot e^{x^2-t^2}$$

$$\Gamma(x, t, 1) = e^{x^2-t^2} \cdot e^{x-t}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) f(t) dt$$

$$u(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t} \cdot e^{x^2-t^2} \cdot e^{t^2} dt$$

$$u(x) = e^{x^2} + e^{x^2} + x \int_0^x e^{-t} dt = e^{x^2} + e^{x^2} + x \int_0^x e^{-t} dt$$

#### 4. BİRİM UZUNLUKLU HOMOJEN KİRİŞİN ESNEKLİK PROBLEMİ

Değişken katsayılı yarı yumuşak zemine oturan kirişin esneklik problemi,

$$\frac{d^4x}{dt^4} + a(t)x = f(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$\frac{d^2x(0)}{dt^2} = A_1 \quad \frac{d^3x(0)}{dt^3} = B_1 ,$$

$$x(T) = A_2 \quad \frac{dx(T)}{dt} = B_2$$

Şeklindeki bir sınır değer problemi ile ifade edilebilir. (Bayram M., Çelik E. 2003)

##### 4.1. Birim Uzunluklu Homojen Kirişin Esneklik Probleminin Volterra-Fredholm İntegral Denklemi İle Çözümü

$$\frac{d^4x}{dt^4} + x = t$$

$$x''(0) = 0 , \quad x'''(0) = 0 , \quad x(1) = 0 , \quad x'(1) = 1$$

Problemine denk olan Volterra-Fredholm ve Fredholm integral denkleminin genel çözümünü bulalım.

$$r^4 + 1 = 0 \Rightarrow r^4 = -1 = e^{i\pi} \quad \text{ve} \quad r_k = e^{ik\pi/4 + 2k\pi/4}$$

$$k = 0 \Rightarrow r_1 = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow r_2 = e^{i3\pi/4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow r_3 = e^{i5\pi/4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 3 \Rightarrow r_4 = e^{i7\pi/4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O halde homojen denklemi sağlayan çözüm:

$$x_1(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) \quad \text{şeklindedir.}$$

Homojen olmayan  $x^{(4)} + x = t$  denkleminin özel çözümü  $x_2(t) = t$ 'dir.

$$X(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2(t) = At + B \quad \text{ise } x_2' = A, \quad x_2'' = 0, \quad x_3''' = 0, \quad x_4'''' = 0$$

$$x^{(4)} + x = t \quad \text{için } 0 + At + B = t \quad \text{olup } A = 1 \quad \text{ve } B = 0 \quad \text{bulunur.}$$

ve özel çözüm  $\boxed{x_2 = t}$  olarak hesaplanır. Genel çözüm ise

$$x(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + t \quad \text{şeklindedir.}$$

$$x'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) \left( -c_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + c_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \right) + \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t - \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) \left( c_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + c_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \right) \right] + 1$$

$$x''(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left[ \left( -c_1 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( c_3 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t - c_4 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) \right]$$

$$x'''(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left[ \left( (c_2 - c_1) \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t - (c_1 + c_2) \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) \right] \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left[ (c_3 + c_4) \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + (c_4 - c_3) \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right]$$

elde edilir.

$x''(0) = 0$  ve  $x'''(0) = 0$  ise  $c_2 = c_4$  ve  $c_3 = c_1 - 2c_2$  dir.  $x(t)$  denkleminde yerine yazıldığında;

$$\sin \frac{\sqrt{2}}{2} \left( e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) c_2 + \cos \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} c_1 + \cos \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} c_3 = -1$$

$$\left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \right] c_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \right) c_1 \\ - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \right) c_3 = 0 \quad \text{bulunur.}$$

$$c_2 = \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( -\cos \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}} + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\sqrt{2}} + \cos \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{-e^{2\sqrt{2}} + 4 \sin \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot e^{\sqrt{2}} - 6e^{\sqrt{2}} - 1} = -0,05431813239$$

$$c_3 = -\frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \sin \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}} + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}} - \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{-e^{2\sqrt{2}} + 4 \sin \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot e^{\sqrt{2}} - 6e^{\sqrt{2}} - 1} = -0,3879199827$$

$$c_1 = \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}} + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}} + 3 \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{-e^{2\sqrt{2}} + 4 \sin \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot e^{\sqrt{2}} - 6e^{\sqrt{2}} - 1} = -0,4965562472$$

Bulunan değerler genel denklemde yerine yazılırsa,

$$x(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( -0,05431813239 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t - 0,4965562472 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( -0,05431813239 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t - 0,3879199827 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + t \text{ bulunur.}$$

$t = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  değerlerinin genel çözümdeki sonuçları aşağıdaki gibidir.

$$x_3(0) = -0,8844762299$$

$$x_3(0.1) = -0,7998360194$$

$$x_3(0.2) = -0,7151438309$$

$$x_3(0.3) = -0,6302650732$$

$$x_3(0.4) = -0,5449736444$$

$$x_3(0.5) = -0,4589504231$$

$$x_3(0.6) = -0,3717818028$$

$$x_3(0.7) = -0,2829583009$$

$$x_3(0.8) = -0,1918732832$$

$$x_3(0.9) = -0,0978218593$$

$$x_3(1) = 0.3 \cdot 10^{-9}$$

#### 4.2. Adi Ardışık Yakınsama Yöntemiyle Çözüm

$$\frac{d^4x}{dt^4} + x = t \text{ denklemini}$$

$x''(0) = 0$  ,  $x'''(0) = 0$  ,  $x(1) = 0$  ,  $x'(1) = 1$  başlangıç koşullarını ele alarak çözelim.

$F(t) = t - x$  için  $F(s) = s - x$  alalım.

$$\frac{d^4x}{dt^4} = F(s) \text{ ise } F(s) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^3x}{dt^3} \right) \Rightarrow \int_0^t d \left( \frac{d^3x}{dt^3} \right) = F(s)ds \text{ olur. } x(t) \text{ elde edilene kadar denklem}$$

integre edilirse,

$$x'''(t) - x'''(0) = \int_0^t F(s)ds$$

$$x''(t) = \int_0^t \int_0^t F(s) ds ds = \int_0^t (t-s) ds$$

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t \int_0^t \int_0^t F(s) (ds)^3$$

$$x(t) - x(0) = x'(0)t + \int_0^t \int_0^t \int_0^t F(s) (ds)^4$$

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \int_0^t \frac{(t-s)^3}{3!} F(s) ds \quad \text{bulunur.}$$

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} F(s) ds \quad \text{olup } x(t) \text{ ve } x'(t) \text{nin } t=1 \text{deki değerleri}$$

$$x_0(1) = x(0) + x'(0) + \int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} F(s) ds$$

$$x'_0(1) = x'(0) + \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} F(s) ds \quad \text{şeklindedir.}$$

$$x'(0) = 1 - \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} F(s) ds \quad \text{ve}$$

$$x(0) = -1 + \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} F(s) ds - \int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} F(s) ds \quad \text{için}$$

$$x(t) = -1 + \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} F(s) ds - \int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} F(s) ds + t - t \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} F(s) ds + \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 F(s) ds$$

$$x(t) = t - 1 + \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} (s-x) ds - \int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} (s-x) ds - t \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} (s-x) ds + \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 (s-x) ds$$

$$x(t) = t - 1 + \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} s ds - \int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} s ds - t \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} s ds + \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 s ds \\ - \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} x ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} x ds + t \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} x ds - \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 x ds \quad \text{bulunur.}$$

$$x_0(t) = t - 1 + \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} s ds - \int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} s ds - t \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} s ds + \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 s ds$$

$$x_0(t) = 0,0083t^5 + 0,9583t - 0,9666 \quad \text{olmak üzere } x_n(t) \text{ yaklaşımları,}$$

$$x_n(t) = x_0(t) - \frac{1}{6} \int_0^1 (1-s)^2 (2+s) x_{n-1}(s) ds + \frac{t}{2} \int_0^1 (1-s)^2 x_{n-1}(s) ds - \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 x_{n-1}(s) ds \text{ ile}$$

hesaplanır. (Dağ A, 1995)

$$x_1(t) = x_0(t) - \frac{1}{6} \int_0^1 (1-s)^2 (2+s) x_0(s) ds + \frac{t}{2} \int_0^1 (1-s)^2 x_0(s) ds - \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 x_0(s) ds$$

$x_0(t)$  ve  $t=s$  için  $x_0(s)$  değerleri denklemde yerine yazıldığında,

$$x_1(t) = 0,000347222220t^5 + 0,8371775793t - 0,8777998237 - 0,2755731922.10^{-5}t^9 + 0,04027777779t^4 \text{ bulunur.}$$

$$x_2(t) = x_0(t) - \frac{1}{6} \int_0^1 (1-s)^2 (2+s) x_1(s) ds + \frac{t}{2} \int_0^1 (1-s)^2 x_1(s) ds - \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 x_1(s) ds$$

$x_0(t)$  ve  $t=s$  için  $x_1(s)$  değerleri denklemde yerine yazıldığında,

$$x_2(t) = 0,001356853503t^5 + 0,8471085920t - 0,8850163488 + 0,1605904384.10^{-9}t^{13} - 0,1148221627.10^{-6}t^9 - 0,00002397486774t^8 + 0,03657499266t^4 \text{ elde edilir.}$$

$$x_3(t) = x_0(t) - \frac{1}{6} \int_0^1 (1-s)^2 (2+s) x_2(s) ds + \frac{t}{2} \int_0^1 (1-s)^2 x_2(s) ds - \frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 x_2(s) ds$$

$x_0(t)$  ve  $t=s$  için  $x_2(s)$  değerleri denklemde yerine yazıldığında,

$$x_3(t) = 0,001274095065t^5 + 0,8463049804t - 0,8844325392 + 0,0368756812t^4 - 0,00002177082897t^8 - 0,4486949416.10^{-6}t^9 + 0,2018086510.10^{-8}t^{12} - 0,2811457256.10^{-14}.t^{17} + 0,6691268225.10^{-11}t^{13} \text{ elde edilir.}$$

$t = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  değerlerinin  $x_3(t)$ 'deki değerleri aşağıdaki gibidir.

$$x_3(0) = -0,8844325392$$

$$x_3(0.1) = -0,7997983408$$

$$x_3(0.2) = -0,7151121344$$

$$x_3(0.3) = -0,6302392574$$

$$x_3(0.4) = -0,5449534973$$

$$x_3(0.5) = -0,4589355893$$

$$x_3(0.6) = -0,3717717593$$

$$x_3(0.7) = -0,2829523377$$

$$x_3(0.8) = -0,1918704930$$

$$x_3(0.9) = -0,09782112685$$

$$x_3(1) = 0,1086336677.10^{-10}$$

### 4.3. Genelleştirilmiş Ardışık Yakınsama Yöntemiyle Çözüm

$x_0(t)$  keyfi ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere  $x(t) = h(t) + V_x + F_1x + tF_2x$  Volterra-Fredholm integral denklemi için yakınsamaları,

$$x_n(t) = h(t) + V_{x_{n-1}} + F_1x_{n-1} + tF_2x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{Dağ A, 1995})$$

formülleri ile kuralım. Bu denklemlerden  $x_n(t)$  'ler

$$y(t) = \tilde{h}(t) + F_1y + tF_2y \quad (2.3.1)$$

bozulmuş çekirdekli lineer Fredholm integral denkleminin çözülmesi ile bulunur. Bu denklemin,

$$y(t) = \tilde{h}(t) + C_1 + tC_2 \quad (2.3.2)$$

şeklinde bir çözümünün olduğunu kabul ederim.

$$[1 - F_1]C_1 - (F_1t)C_2 = F_1\tilde{h}$$

$$-(F_2t)C_1 + (1 - F_2t)C_2 = F_2\tilde{h}$$

lineer denklem sistemini çözerek  $c_1$  ve  $c_2$  değerlerini buluruz.

$$V_x \equiv -\int_0^t \frac{(t-s)^3}{6} x(s) ds$$

$$F_1x \equiv -\int_0^t \frac{(1-s)^2(2+s)}{6} x(s) ds$$

$$F_2x \equiv \int_0^t \frac{(1-s)^2}{2} x(s) ds$$

şeklinde idi.

Buradan;

$$F_11 = -\int_0^1 \frac{(1-s)^2(2+s)}{6} ds = -\frac{1}{8}, \quad F_1t = -\int_0^1 \frac{(1-s)^2(2+s)}{6} s ds = -\frac{1}{30}$$

$$F_21 = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} ds = \frac{1}{6}, \quad F_2t = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} s ds = \frac{1}{24}$$

elde edilir.

Bu sistemin katsayıları matrisinin determinantının sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim.

$$\Delta = (1 - F_11)(1 - F_2t) - (F_1t)(F_21) = 1,08368 \neq 0$$

Buna göre,

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left[ (F_1 \tilde{h})(1 - F_2 t) + (F_1 t)(F_2 \tilde{h}) \right]$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \left[ (1 - F_1) F_2 \tilde{h} + F_1 \tilde{h} F_2 \right]$$

yazılır.  $C_1$  ve  $C_2$  değerleri (2.3.2) denkleminde kullanılırsa (2.3.1) in çözümü elde edilir.

$$y(t) = \tilde{h} + \frac{1}{\Delta} [1 - F_2 t - t F_2] F_1 \tilde{h} + \frac{1}{\Delta} [(1 - F_1) t + F_1] F_2 \tilde{h}$$

olur.  $\tilde{h}(t) = h(t) + Vx_{n-1}$  olduğundan,

$$x_n(t) = h^*(t) + \frac{1 - F_2 t + t F_2}{\Delta} F_1 Vx_{n-1} + \frac{t(1 - F_1) + F_1 t}{\Delta} F_2 Vx_{n-1} + Vx_{n-1}$$

yazılır. Buradan;

$$h^*(t) = h(t) + \frac{1 - F_2 t + t F_2}{\Delta} F_1 h + \frac{t(1 - F_1) + F_1 t}{\Delta} F_2 h \quad \text{dır.} \quad \frac{d^4 x}{dt^4} + x = t \quad \text{problemini bu yöntemle}$$

çözecek olursak,

$$x_0(s) = -\frac{29}{30} + \frac{23}{24}s + \frac{1}{120}s^5 \quad \text{olmak üzere,}$$

$$F_1 h = -\int_0^1 \frac{(1-s)^2(2+s)}{6} \left( -\frac{29}{30} + \frac{23}{24}s + \frac{1}{120}s^5 \right) ds = 0,0888668$$

$$F_2 h = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{6} \left( -\frac{29}{30} + \frac{23}{24}s + \frac{1}{120}s^5 \right) ds = -0,121156 \quad \text{elde edilir.}$$

Buna göre,

$$h^*(t) = -\frac{29}{30} + \frac{16124 \left( \frac{23}{24} + \frac{t}{6} \right)}{196623} + \frac{23}{24}t + \frac{t^5}{120} - \frac{4885 \left( -\frac{1}{30} + \frac{9}{8}t \right)}{43694}$$

$$h^*(t) = -\frac{41732156 + 39932975t + 393246t^5}{47189520} \quad \text{bulunur.}$$

$$Vx_0(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^3}{6} x_0(s) ds = -\frac{t^4(-14616 + 2898t + t^5)}{362880}$$

$$F_1 Vx_0 = -\int_0^1 \frac{(1-s)^2(2+s)}{6} Vx_0(s) ds = -0,000146695$$

$$F_2 Vx_0 = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{6} Vx_0(s) ds = 0,0000560096$$

$x_n(t)$  denklemi  $n=1$  için düzenlenirse,

$$x_1(t) = h^*(t) + \frac{1-F_2t+tF_2l}{\Delta} F_1 V_{x_0} + \frac{t(1-F_1l)+F_1t}{\Delta} F_2 V_{x_0} + V_{x_0} \text{ için}$$

$$x_1(t) = -0,884483653 + 0,84626108t + 0,040277777t^4 + 0,000347222t^5 - 0,000002755t^9$$

$$V_{x_1}(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^3}{6} x_1(s) ds = 0,000000535t^8 - 0,079916225t^3 - 0,705217566t - 0,368152114t^4$$

$$F_2 V_{x_1} = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} V_{x_1}(s) ds = 0,00015448$$

$$F_1 V_{x_1} = -\int_0^1 \frac{(1-s)^2(2+s)}{6} V_{x_1}(s) ds = -0,000134877$$

değerleri için  $x_n(t)$  denklemi  $n=2$  olmak üzere,

$$x_2(t) = h^*(t) + \frac{1-F_2t+tF_2l}{\Delta} F_1 V_{x_1} + \frac{t(1-F_1l)+F_1t}{\Delta} F_2 V_{x_1} + V_{x_1} \text{ dir.}$$

$$x_2(t) = 1,788571015 - 0,161348771t + 0,000001605t^{13} + 0,368534855t^4 - 0,001148221t^9 \\ - 0,239748677t^8 - 0,696884234t^5$$

$$V_{x_2}(t) = -\int_0^t \frac{(t-x)^3}{6} x_2(s) ds$$

$$F_2 V_{x_2} = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} V_{x_2}(s) ds = 0,000154478$$

$$F_1 V_{x_2} = -\int_0^1 \frac{(1-s)^2(2+s)}{6} V_{x_2}(s) ds = -0,000134875$$

Değerleri  $n=3$  için  $x_n(t)$  denkleminde yerine yazıldığında,

$$x_3(t) = h^*(t) + \frac{1-F_2t+tF_2l}{\Delta} F_1 V_{x_2} + \frac{t(1-F_1l)+F_1t}{\Delta} F_2 V_{x_2} + V_{x_2}$$

$$x_3(t) = -0,884476209 + 1,280290642 t^5 + 0,846365121 t - 2,193659855 t^8 + 0,368531763 t^4 \\ - 0,423663247 t^9 - 6,6912 \cdot 10^{-10} t^{13} - 2,811457 \cdot 10^{-10} \cdot t^{17} \text{ elde edilir.}$$

$t = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  değerleri  $x_3(t)$ 'de yerine yazılırsa aşağıdaki değerler elde edilir.

$$x_3(0) = -0,8844762299$$

$$x_3(0.1) = -0,7998360197$$

$$x_3(0.2) = -0,7151438310$$

$$\begin{aligned}
x_3(0.3) &= -0,6302650732 \\
x_3(0.4) &= -0,5449736445 \\
x_3(0.5) &= -0,4589504233 \\
x_3(0.6) &= -0,3717818030 \\
x_3(0.7) &= -0,2829583008 \\
x_3(0.8) &= -0,1918732835 \\
x_3(0.9) &= -0,0978218598 \\
x_3(1) &= -2,60745715322 \cdot 10^{-10}
\end{aligned}$$

Çizelge 2.1’de genel çözüm, adi ardışık yakınsama ve genel ardışık yakınsama yöntemi ile elde edilen değerler verilmiştir.

| $t_i$ | <b>GÇ</b>           | <b>AA</b>                      | <b>GA</b>                      |
|-------|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0     | -0,8844762299       | -0,8844325392                  | -0,8844762299                  |
| 0,1   | -0,7998360194       | -0,7997983408                  | -0,7998360197                  |
| 0,2   | -0,7151438309       | -0,7151121344                  | -0,7151438310                  |
| 0,3   | -0,6302650732       | -0,6302392574                  | -0,6302650732                  |
| 0,4   | -0,5449736444       | -0,5449534973                  | -0,5449736445                  |
| 0,5   | -0,4589504231       | -0,4589355893                  | -0,4589504233                  |
| 0,6   | -0,3717818028       | -0,3717717593                  | -0,3717818030                  |
| 0,7   | -0,2829583009       | -0,2829523377                  | -0,2829583008                  |
| 0,8   | -0,1918732832       | -0,1918704930                  | -0,1918732835                  |
| 0,9   | -0,0978218593       | -0,09782112685                 | -0,0978218598                  |
| 0,10  | $0,3 \cdot 10^{-9}$ | $-0,1086336677 \cdot 10^{-10}$ | $2,60745715322 \cdot 10^{-10}$ |

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, birim uzunluklu homojen kirişin esneklik problemi genel çözüm, adi ardışık yakınsama ve genelleştirilmiş ardışık yakınsama yöntemleriyle hesaplanmıştır. Bu değerleri hesaplamadan önce Volterra integral denkleminin sayısal çözümleri hakkında genel bilgi verilmiştir. İntegral denklemlerin çözümü I. cins ve II. cins Volterra integral denklemleri olarak incelenmiştir. Bu yöntemler üzerinde gerekli açıklamalar yapıldıktan sonra örnekler çözülmüştür. Genel çözüm, adi ardışık yakınsama ve genelleştirilmiş ardışık yakınsama yöntemleri  $t$ 'nin 0, 0.1,.....1 değerleri için incelenmiş ve ardışık yakınsama yöntemiyle üçüncü adımda elde edilen çözüm değerlerinin genel çözüme daha yakın değerler olduğu saptanmıştır.

## KAYNAKLAR

Aksoy Y. (1988), İntegral Denklemler, Y.T.Ü. Yayınları.

Bocher M. (1913), An Introduction to the Study of Integral Equations.

Çelik E., Bayram M. (2003), ‘The Basic Successive Substitute Approximations Method and Pade Approximations to Solve the Elasticity Problem of Settled of the Wronkler Ground with Variable Coefficients’, Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., 25240 Erzurum.

Bayram M., Çelik E., Aykut A. (2002), ‘The Modified Two Sided Approximations Method and Pade Approximations for Solving the Differential Equation with Variant Retarded Argument’, Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., 25240 Erzurum.

Çelik E., Aykut A., Bayram M. (2003), ‘The Modified Successive Approximations Method and Pade Approximations for Solving the Differential Equation with Variant Retarded Argument’, Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., 25240 Erzurum.

Bayram M., Çelik E., Aykut A., (2002), The Ordinary Successive Approximations Method and Pade Approximations for Solving a Differential Equation with Variant Retarded Argument’, Appl. Math. Comput., AMC 7566.

Bayram M., Çelik E., Aykut A., (2002), The Modified Two Sided Approximations Method and Pade Approximations for Solving a Differential Equation with Variant Retarded Argument’, Appl. Math. Comput., AMC 7566.

Dağ A. (1995), ‘2. Mertebeden Geciken Değişkenli Lineer Adi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Metodlarla Çözümü’, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

## ÖZGEÇMİŞ

|               |            |                                                                  |
|---------------|------------|------------------------------------------------------------------|
| Doğum tarihi  | 05.12.1979 |                                                                  |
| Doğum yeri    | İstanbul   |                                                                  |
| Lise          | 1993-1996  | Nişantaşı Kız Lisesi                                             |
| Lisans        | 1996-2000  | Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.<br>Matematik Bölümü |
| Yüksek Lisans | 2002-2006  | Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.<br>Matematik Bölümü |

## Çalıştığı kurumlar

|                   |                                   |
|-------------------|-----------------------------------|
| 2000-2002         | TC. MEB Vize Lisesi/Kırklareli    |
| 2002-Devam ediyor | TC. MEB Kağıthane Lisesi/İstanbul |