

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YEREL EĞRİLİKLİ TEK LİF VE SARILI TEK LİF
İÇEREN SONSUZ ORTAMLARIN GERİLME
DURUMUNA AİT NONLİNEER SINIR DEĞER
PROBLEMLERİ

Yüksek Matematikçi Kadriye ŞİMŞEK

FBE Matematik Anabilim dalında Matematik Programında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 13 Ekim 2006

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Surkay AKBAROV (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER (İTİCÜ)

: Prof. Dr. Abdullah YILDIZ (SAÜ)

: Prof. Dr. Adnan MAZMANOĞLU (MÜ)

: Doç. Dr. Kamil ORUÇOĞLU (İTÜ)

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iii
ÇİZELGE LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Tek Yönlü Eğrisel Yapıya sahip Lifli Kompozitlerin Gerilme Durumuna Ait Çalışmaların Kısa Özeti	1
1.2 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği	3
1.3 Yapılan Araştırmaların Amaçları	4
2. YEREL EĞRİLİKLİ TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GEOMETRİK NONLINEERİTENİN GERİLME YAYILIMINA ETKİSİ.....	5
2.1 Problemin Formülasyonu	5
2.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi	8
2.3 Araştırma Yönteminin Gerektirdiği Sınır Değer Probleminin Çözümü.....	12
2.4 Sayısal Sonuçlar	20
3. YEREL EĞRİLİKLİ SARILI TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GERİLME YAYILIMI.....	44
3.1 Problemin Formülasyonu	44
3.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi	46
3.3 Uygun Sınır-Değer Problemlerinin Çözümlerinin Elde Edilmesi	49
3.4 Sayısal Sonuçlar	51
4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	62
KAYNAKLAR.....	64
EKLER	69
Ek 1 Lamé Katsayıları ve Tansör Vektörlerinin Fiziksel Bileşenleri ile Kovaryant ve Kontravaryant Bileşenler Arasındaki İlişkiler	70
Ek 2 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki fonksiyonların Açık İfadeleri.....	71
Ek 3 Bölüm 3’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri.....	88
ÖZGEÇMİŞ.....	99

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Tek lif içeren sonsuz elastik cismin geometrisi ve seçilen koordinat takımları.....	5
Şekil 2.2	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta=0$)	24
Şekil 2.4	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta=0$).....	26
Şekil 2.5	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ee}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta=0$).....	27
Şekil 2.6	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{te}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta=\frac{\pi}{2}$)	28
Şekil 2.7	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(1)}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta=0$).....	29
Şekil 2.8	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile κ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0, \varepsilon = 0.07, \theta=0$).....	30
Şekil 2.9	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{n\tau}/ p $ ile κ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.7, \varepsilon = 0.07, \theta=\pi/2$).....	31
Şekil 2.10	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile κ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.0, \varepsilon = 0.07, \theta=0$).....	32
Şekil 2.11	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ee}/ p $ ile κ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.9, \varepsilon = 0.07, m=1, \theta=0$)	33
Şekil 2.12	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{te}/ p $ ile κ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.9, \varepsilon = 0.07, m=1, \theta=\pi/2$)	33
Şekil 2.13	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(1)}/ p $ ile κ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 1.0, \varepsilon = 0.07, m=1, \theta=0$)	33
Şekil 2.14	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/ p $ ile κ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, 14, x_3/L = 1.0, \varepsilon = 0.07, m=1, \theta=\pi/2$)	34
Şekil 2.15	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25,$	

$x_3/L = 0, \varepsilon = 0.07, m=1)$	34
Şekil 2.16 Çeşitli σ 'lar için $\sigma_{nr}/ p $ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25,$ $x_3/L = 0.7, \varepsilon = 0.07, m=1)$	34
Şekil 2.17 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25,$ $x_3/L = 0, \varepsilon = 0.07, m=1)$	35
Şekil 2.18 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(1)}/ p $ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.3,$ $x_3/L = 0.9, \varepsilon = 0.07, m=1)$	35
Şekil 2.19 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/ p $ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.2,$ $x_3/L = 0.9, \varepsilon = 0.07, m=1)$	35
Şekil 3.1 Yerel eğrilikli sarılı tek lif içeren sonsuz elastik cismin geometrisi ve seçilen koordinat takımları.....	44
Şekil 3.1 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile h/L arasındaki bağımlılık ($m=1, E^{(2)}/E^{(3)}=50,$ $E^{(1)}/E^{(3)}=1/40, x_3/L=0, \varepsilon=0.07, \theta=0)$	54
Şekil 3.2 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nr}/ p $ ile h/L arasındaki bağımlılık ($m=1, E^{(2)}/E^{(3)}=50,$ $E^{(1)}/E^{(3)}=1/40, x_3/L=0.9, \varepsilon=0.07, \theta=\pi/2)$	54
Şekil 3.4 $\sigma_{nn}/ p $ ile h/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50, \frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=40, \varepsilon=0.07, \theta=0, (a)m=0, (b)$ $m=1, (c) m=3)$	55
Şekil 3.5 $\sigma_{nr}/ p $ ile h/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50, \frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=40, \varepsilon=0.07, \theta=\pi/2, (a) m=0,$ $(b) m=1, (c) m=3)$	56
Şekil 3.6 $\sigma_{ne}/ p $ ile h/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50, \frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=40, \varepsilon=0.07, \theta=0, (a) m=0, (b)$ $m=1, (c) m=3)$	57
Şekil 3.7 Çeşitli α değerlerinde $\sigma_{nn}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50, \frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=30,$ $\varepsilon=0.07, \theta=0, (a) m=0, (b) m=1, (c) m=3)$	58
Şekil 3.8 Çeşitli α değerlerinde $\sigma_{nr}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50, \frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=30,$ $\varepsilon=0.07, \theta=\pi/2, (a) m=0, (b) m=1, (c) m=3)$	59

Şekil 3.9 Çeşitli α değerlerinde $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=30$,
 $\varepsilon=0.07$, $\theta=0$, (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$) 60

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 0$, $\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$)	36
Çizelge 2.2 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{nr}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 0.7$, $\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$)	37
Çizelge 2.3 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 0$, $\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$)	38
Çizelge 2.4 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{ee}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 0.5$, $\kappa = 0.5$, $\varepsilon = 0.07$)	39
Çizelge 2.5 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{te}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 0.5$, $\kappa = 0.5$, $\varepsilon = 0.07$)	40
Çizelge 2.6 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{tr}^{(1)}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 1.0$, $\kappa = 0.3$, $\varepsilon = 0.07$)	41
Çizelge 2.7 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{tr}^{(2)}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 1.0$, $\kappa = 0.3$, $\varepsilon = 0.07$)	42
Çizelge 2.8 Gerilme değerlerinin integral sınır değerleri ile yansıması ($\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $N=1000$)	43
Çizelge 3.1 Çeşitli m , $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}$ ve κ 'lar için $\sigma_{nn}/ p $, $\sigma_{nr}/ p $, $\sigma_{ne}/ p $ 'nın değerleri	61

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı yöneten ve bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü desteğini benden esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a gösterdiği yakın ilgi, alaka ve anlayış için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmada bana yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Reşat Köşker'e çok teşekkür ederim.

Benden hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Kadriye ŞİMŞEK

Ekim 2006

ÖZET

Tek yönlü lifli kompozit malzemelerdeki liflerin eğriliği ya dizayn gereksiniminden yada teknolojik işlemler esnasında ortaya çıkmaktadır. Genellikle dizayn gereksiniminden ortaya çıkan eğrisellikler periyodik eğrilikler, teknolojik işlemler sırasında ortaya çıkanlar ise yerel eğrilikler olarak modellenirler. Bu çalışmada, sonsuz ortamda düşük yoğunluklu sonsuz uzunluklu yerel eğrilikli tek lif olması durumu ele alınmış ve gerilme dağılımı incelenmiştir. Ortamdaki liflerin düşük yoğunluğu lifler arasındaki etkileşimin ihmal edilebildiği mertebededir. Bu incelemeler parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca cisme sonsuzda lif yönünde düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiği ve lif yüzeyine dik kesitlerin yarıçapı lif boyunca değişmeyen daireler olduğu kabul edilmiştir.

Uygun sınır-değer problemlerinin çözümü için sınır formu pertürbasyon yönteminden yararlanılarak yaklaşık analitik bir metod geliştirilmiştir.

Bunlara ek olarak sözü edilen lif ile matris arasında geçiş malzemesi (lif örtüsü) problemi de ele alınmış ve arayüzlerdeki gerilmeler çalışılmıştır. Lif örtüsü kalınlığının lif boyunca değişmediği varsayılmıştır.

Ele alınan ortamlardaki gerilme yayılımına ve bu yayılıma geometrik nonlinearitenin etkisi ile ilgili çok sayıda sayısal sonuç elde edilmiş ve yorumlanmıştır. Ayrıca lif ile matris arasındaki lif örtüsünün kalınlığının gerilme değerlerine etkisi de incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lifli kompozit, gerilme yayılımı, geometrik nonlinearite, yerel eğrilik, örtük malzeme

ABSTRACT

The curvature of the fibers in the structure of the unidirectional fibrous composite materials is due to design requirements or to technological processes. Usually the curvature caused by design features is modeled as a periodical, whereas the curvature caused by the technological process is modeled as a local one. In the study the case is considered where a single locally curved fiber with an infinite length is contained by an infinite body with low concentration of fibers and stress distribution in that is investigated. Taking the low concentration of fibers into account the interaction between them is neglected. The investigations are carried out within the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional geometrical nonlinear exact equations of the theory of elasticity. Moreover it is assumed that the body is loaded at infinity by uniformly distributed normal forces which act along the fibers and the crosssection of the fibers, normal to its axial line, is a circle of constant radius along the entire fiber length.

For the solution of considered boundary value problem an approximate analytical method is developed by using the boundary form perturbation method.

In addition to these, the problem related to the case where there exists the bond hollow covering cylinder between above mentioned fiber and matrix materials are also considered and stresses on interfaces are studied.

The numerous numerical results related to the stress distribution in considered body and the influence of geometrical nonlinearity to this distribution are obtained and interpreted. Moreover, the influence of the geometrical and mechanical problem parameters to these distributions are also analyzed.

Keywords: Fibrous composite, stress distribution, geometrical nonlinearity, local curving, covering material.

1. GİRİŞ

1.1 Tek Yönlü Eğrisel Yapıya sahip Lifli Kompozitlerin Gerilme Durumuna Ait Çalışmaların Kısa Özeti

Günümüzde teknolojinin hızla ilerlemesiyle birlikte daha dayanıklı ve daha sağlam malzemeye ihtiyaç duyulması, kompozit malzemelerin üretiminin artmasına neden olmuştur. Bu durum ve kompozit malzemelerin uygulamada etkin bir şekilde kullanılması bu malzemelerin farklı dış etkiler altındaki mekanik davranışlarının matematiksel modellenmesini ve teoriksel açıdan incelenmesini gerektirmektedir. Bilindiği üzere, kompozit malzemelerin geniş bir alanını oluşturan tek yönlü lifli kompozitlerin mukavemeti, önemli ölçüde bu malzemelerin yapısal özelliklerine bağlıdır. Tek yönlü lifli kompozitlerin en önemli yapısal özelliklerinden biri ise liflerin eğrilidir.

Başlangıç eğrilige sahip lifler ve levhalarla güçlendirilmiş kompozitler eğrisel yapıya sahip kompozitler olarak adlandırılır. Bu eğrilikler malzemenin bu şekilde dizayn edilmesinden kaynaklanabileceği gibi (Bolotin ve Novichkov (1980), Akbarov ve Guz (2004)) üretim aşamasında çeşitli faktörlerin etkisiyle (Bolotin ve Novichkov (1980), Akbarov ve Guz (2004)) ortaya çıkabilmektedirler. Genellikle, eğrilikli olarak dizayn edilen kompozit malzemeler periyodik eğrilikli, teknolojik işlemler sırasında oluşan eğrilikler ise yerel eğrilikli kompozitler olarak modellenir. Üretilen kompozit malzemelerin uygulamada başarıyla kullanılması, sözü edilen bu eğriligi hesaba katarak bu malzemedeki gerilme-şekil değiştirme durumunun belirlenmesine de bağlıdır. Akbarov (1981a, 1981b, 1998), Akbarov ve Guz (1985a, 1985b, 1985c, 2000, 2002, 2004), Akbarov ve Kocatürk (1997), Akbarov ve Kosker (2001, 2003a, 2003b, 2003c, 2004), Akbarov ve Novruzov (1987), Akbarov vd. (1982, 1997, 1999, 2001, 2004, 20005) kaynaklarından görüldüğü gibi bu eğrilikler kendi kendini dengeleyen gerilme durumlarının oluşmasına neden olmaktadır. Bu gerilmeler eğrilik ve mekanik parametrelere bağlı olarak çok büyük boyutlara ulaşarak kompozitin adhezyon (yapışma) mukavemet sınırını aşabilmektedir. Bundan başka güçlendirici lif veya levhaların başlangıçtaki çok küçük eğriligi tek yönlü kompozit malzemelerin stabilite kaybı ve kırılma problemlerinin araştırılması için bir model olarak kabul edilir. Bu ve diğer nedenlerden dolayı uygun mekanik problemlerin matematik modellerinin yapılıp ve teoriksel açıdan incelenmesi hem teorik ve hemde kompozitlerin uygulaması açısından çok önemlidir. Tezdeki araştırmaların önemini ve yerini belirtebilmemiz için bu alanda yapılan çalışmaların kısa özetini ele alalım.

Eğrilikli kompozit malzemeler mekaniği çalışmalarında iki temel yaklaşım vardır. Bunlardan, ilki (Bolotin ve Novichkov (1980), Akbarov ve Guz (2004)), boyut olarak eğrilikten daha büyük düşünülebilen bölgelerde gerilme-şekil değiştirme bileşenlerinin hesaplanması için kullanılan süreklilik yaklaşımıdır. Burada yapıdaki eğriliğin etkisi, malzemenin normalize edilmiş mekanik özelliklerindeki değişim olarak ele alınır. Yerel yaklaşım olarak adlandırılan ikinci yaklaşımda ise, eğrilik bölgesinden küçük veya ona yakın alanlarda elemanın eğriliğinin etkisinin de dikkate alınmasıyla gerilme-şekil değiştirme bileşenlerinin hesabı yapılır. Bu yaklaşım hem parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde ve hem de süreklilik teorileri kullanılarak geliştirilmiştir. Böylece, eğriliğin yerel kırılma parametrelerinin sınırlarını belirleyebilen gerilme-şekil değiştirme durumu üzerindeki etkisi kestirilebilir. Tez kapsamında yapılan araştırmalar parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde olduğundan yukarıda adı geçen ikinci yaklaşıma ait olan çalışmaların üzerinde duralım.

Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılan araştırmalarda kompozit malzemelerin her bir bileşeni ile ilgili denklem ve ifadeler yazılır ve bu bileşenler arasındaki ortak sınırdaki temas koşulları yazılarak sınır-değer problemi elde edilir. Tek yönlü lifli kompozit malzemelerde yapılan çalışmalar malzeme yapısındaki liflerin yerleşim yapısı açısından ele alınmıştır. Bu çalışmalara kısaca değinelim.

Akbarov ve Guz (1985a, 1985b, 1986b) makalelerinde kompozitteki lif yoğunluğunun düşük olduğu ve lifler arasındaki etkileşimin ihmal edildiği durum ele alınmış, lif boyunca sonsuzda düzgün dağılmış normal kuvvetlerin etkisindeki periyodik eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisimde gerilme dağılımı araştırılmıştır. Bu araştırmalarda matris ve lif malzemelerinin homojen, izotrop ve lineer elastik olduğu kabul edilmiştir. Bu problem, Akbarov (1986b)' de matris malzemesinin lineer viskoelastik olması durumunda incelenmiştir. Bütün bu araştırmalar lineer elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde uygulanmıştır. Bu kabuller dahilinde, Akbarov ve Guz (1985a)'da verilen metod kompozit malzemenin lif yoğunluğunun çok olması ve dolayısıyla lifler arasındaki etkileşimin dikkate alındığı durumlara genişletilmesine Akbarov ve Guz (2000)'de değinilmiş olsa da bunlarla ilgili sayısal sonuçlar Akbarov ve Kosker (2001, 2003a, 2003c), Kosker ve Akbarov (2003b), Akbarov vd. (2004) makalelerinde verilmiştir. Akbarov ve Kosker (2001, 2003a) makalelerinde periyodik eğrilikli iki komşu lif içeren sonsuz ortamda gerilme dağılımı, elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak incelenmişken, Kosker ve Akbarov (2003b), Akbarov ve Kosker (2003c) makalelerinde ise yine iki komşu lif içeren sonsuz elastik ortamda gerilme dağılımı elastisite

teorisinin üç boyutlu geometrik lineer denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde incelenmiştir. Sözü edilen çalışmalar sonsuz ortam içindeki komşu liflerin birbirine göre farklı yerleşim şekillerinde ve sonsuzda lifler yönünde düzgün dağılmış yük etkisi altında incelenmiştir. Buradaki yaklaşım, Akbarov vd. (2004) çalışmasında tek yönde periyodik dizilmiş periyodik eğrilikli lifler içeren elastik ortamda gerilme dağılımı incelenmesine geliştirilmiştir

Yukarıdaki çalışmalardan da görüldüğü gibi güçlendirici elemanın tek yönlü lif olduğu kompozit malzemeler, genellikle liflerin periyodik eğrilikli olduğu düşünülerek çalışılmıştır. Lifdeki eğriliğin yerel olması durumuna ait çok az çalışma vardır. Bu çalışmalar Djfavarova (1992,1994,1995) ile sınırlıdır. Kaldı ki, sözü edilen çalışmalarda elastisite teorisinin geometrik lineer denklemleri kullanılarak ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir. Halbuki lineer durumdaki parametrelerin geçerlilik sınırlarının belirlenmesi geometrik nonlinearitenin malzemedeki gerilme dağılımına etkisinin belirlenmesiyle mümkündür. Bunu içeren çalışma ilk defa tezde tarafımızdan yapılmış ve elde edilen sayısal sonuçların bir kısmı Akbarov vd. (2005)'de verilmiştir. Bu sonuçlar yerel eğrilikli tek lif içeren ve dolayısıyla liflerin arasındaki etkileşimin ihmal edildiği sonsuz elastik ortamdaki gerilme dağılımının parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak araştırılmasını içermektedir. Böylece bu tez, yerel eğrilikli tek lif içeren kompozit malzemedeki lineer duruma karşılık gelen parametrelerin geçerlilik sınırlarının belirlenmesine de katkıda bulunmaktadır. Ayrıca lif ve matris arasında geçiş malzemesi bulunması durumunda gerilme durumu hem lineer ve hem de nonlinearitenin buna etkisi açısından da incelenmiştir.

1.2 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği

Kompozit malzemeler, günümüzde çok çeşitli mühendislik alanlarında kullanılmaktadır. Bunların geniş bir alanı da tek yönlü lifli kompozit malzemelerdir. Böyle malzemelerde liflerin yerel eğriliğe sahip olması durumunda çok az sayıda çalışma vardır. Var olanlar da çok yetersizdir. Bu tezde, yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisimde geometrik nonlinearitenin gerilme dağılımına etkisi parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak ilk defa tarafımızdan incelenmiş ve sayısal sonuçlar ortaya konmuştur. Ancak bu sayede aynı problemin geometrik lineer durumdaki parametre sınırlarının belirlenmesi mümkündür. Ayrıca lif ve matris arasında geçiş malzemesi olması durumunda geometrik lineer ve geometrik nonlinearlik ayrı

ayrı ele alınarak problem incelenmiş ve ilk defa sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar elde edilirken sonsuz elastik ortamda yerel eğrilikli tek lif olduğu ve lif yönünde düzgün dağılmış normal kuvvetler etkidiği kabul edilmiştir.

Tez kapsamında yapılan çalışmalar bu yöndeki ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır, böylece sözü edilen her bir problem ilk kez tarafımızdan çözülmüştür.

Yukarıda söylenenler tezin güncelliğinin ve gerekliliğini kanıtlamaktadır.

1.3 Yapılan Araştırmaların Amaçları

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları aşağıda özetlenmiştir.

1. Yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz ortamların gerilme dağılımının parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak incelenmesi için gerekli yöntemin geliştirilmesi ve bu incelemenin sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşıma kadar yapılması, ayrıca lif ve matris arasında geçiş malzemesi bulunması durumunda gerilme dağılımının hem lineer ve hem de nonlinearitenin buna etkisi açısından incelenmesi;
2. Formülasyonu yapılmış sınır-değer problemlerinin incelenmesi için gerekli metodların geliştirilmesi;
3. Ele alınan sınır-değer problemlerinin incelenmesinde uygulanan yöntemlerin esaslandırılması ve sayısal sonuçların elde edilmesi için gereken algoritmaların ve programların yapılması;
4. Elde edilen sayısal sonuçların bazı mekaniksel yorumlarının yapılması.

$$x_1 = F(x_3) = \varepsilon \delta(x_3), \quad x_2 = 0, \quad |x_3| \rightarrow \infty \text{ iken } |d\delta(x_3)/dx_3| \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilen orta çizgisinin denklemiyle verelim. Burada ε , ($0 \leq \varepsilon < 1$) anlamı yukarıdaki fonksiyon açık olarak verildiğinde açıklanacak olan küçük bir parametredir. $\delta(x_3)$ ise lifin yüklemmeden önceki eğilmesinin formunu göstermektedir. (2.1) denkleminde görüldüğü gibi başlangıç yerel eğrilığe sahip lifin orta çizgisi $x_2=0$ düzlemi üzerindedir. Yüklemeden sonra da lifin orta çizgisinin bu düzlem üzerinde kaldığını varsayalım. (2.1) ile verilen denklemden ve lif-en kesitinin sağladığı koşuldan, Akbarov ve Guz (2000) kaynağında olduğu gibi lif ve matris arayüzeyi olan S'nin denklemini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$r(\theta, t_3) = \frac{\varepsilon \delta(t_3) (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \cos \theta}{1 + (\delta'(t_3))^2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta} + \left\{ \frac{\varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \cos \theta}{(1 + (\delta'(t_3))^2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta)^2} + R^2 - (\delta(t_3))^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \right\}^{1/2},$$

$$x_3(\theta, t_3) = t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) (r(\theta, t_3) - \varepsilon \delta(t_3)) \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \quad (2.2)$$

Burada t_3 ($t_3 \in (-\infty, +\infty)$) bir parametredir. (2.2) denklemlerinden yararlanarak S yüzeyinin birim dış normalinin bileşenleri

$$n_r = r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1}, \quad n_\theta = \left[\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right] [A(\theta, t_3)]^{-1}$$

$$n_z = -r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1} \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$A(\theta, t_3) = \left[\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

şeklindedir. Bundan sonra matris malzemesi ile ilgili büyüklükleri (1), lif ile ilgili büyüklükleri ise (2) üst indisleriyle göstereceğiz. Ayrıca gerilme, şekil değiştirme tansörleri

ve yer değiştirme vektörünün kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini ve bu tansörler ve vektörün fiziksel bileşenlerini kullanacağız. Ayrıca tekrarlanan indislere göre Einstein toplam uylaşımı sağlanacak ve altı çizili tekrarlanan indisler ise bundan muaf tutulacaktır.

Lif ve matris malzemelerinin herbirinde ayrı ayrı sağlanmak üzere denge denklemleri, şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri ve bünye denklemlerini aşağıdaki gibi verelim.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] = 0, \quad k=1,2 \quad (2.5)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k)} = (\lambda^{(k)} e^{(k)}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k)}), \quad e^{(k)} = \varepsilon_{(11)}^{(k)} + \varepsilon_{(22)}^{(k)} + \varepsilon_{(33)}^{(k)} \quad (2.7)$$

Burada $\sigma_{(in)}^{(k)}$ 'lar ve $\varepsilon_{(in)}^{(k)}$ 'lar sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleridir. Aynı zamanda lif ve matris arayüzeyi olan S yüzeyinde ideal temas koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu koşullar aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\sigma^{(1)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1)j} \right) \Big|_S n_j = \sigma^{(2)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2)j} \right) \Big|_S n_j, \quad u^{(1)j} \Big|_S = u^{(2)j} \Big|_S \quad (2.8)$$

Bu denklemlerde n_j 'ler arayüzeyin birim normal vektörü $\mathbf{n}$ 'nin kovaryant bileşenleridir.

Bundan başka aşağıdaki sınır koşullarının sağlandığını varsayacağız.

$$\sigma_{zz}^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (2.9)$$

Gerilme ve şekil değiştirmenin fiziksel bileşenleri için

$$\sigma_{(ij)} = \sigma^{ij} H_i H_j = \sigma_{ij} \frac{1}{H_i H_j}, \quad \varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij} \frac{1}{H_i H_j} = \varepsilon^{ij} H_i H_j, \quad u_{(i)} = u^i H_i = u_i \frac{1}{H_i} \quad (2.10)$$

formüllerlerinden faydalanılmaktadır. Burada $(ij) = rr, \theta\theta, zz, r\theta, rz, z\theta$, $(i) = r, \theta, z$ dir. σ^{ij} , ε^{ij} ve σ_{ij} , ε_{ij} gerilme (σ) ve şekil değiştirme (ε) tansörlerinin ele alınan silindirik koordinat takımıdaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini, u^i , u_i 'ler ise yer değiştirme ($\mathbf{u}$) vektörünün bu koordinat takımıdaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini göstermektedir. (2.10) formülleri tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri arasındaki ilişkileri göstermektedir. Bu formüllerdeki H_i 'ler ise Lamé katsayılarıdır. Silindirik koordinatlardaki Lamé katsayıları ve bunlar aracılığıyla üretilen şekil değiştirme vektörü ve gerilme tansörünün silindirik koordinatlardaki fiziksel bileşenlerinin bu vektör ve tansörlerin

kovaryant ve kontravaryant bileşenlerine bağlı ifadeleri Ek 1’de sırası ile E1.1, E1.2, E1.3 ifadeleriyle verilmiştir. Kısalık amacıyla bundan sonra fiziksel bileşenler için parantezler kullanılmayacaktır.

Böylece ele alınan problemin matematik formülasyonu, sonsuz elastik bir ortamda başlangıç küçük yerel eğrilikli sonsuz uzun tek lifin olması ve sonsuzda lif yönünde etki gösteren düzgün dağılmış normal kuvvetler olması durumunda gerilmenin araştırılması (2.5)-(2.7) denklemler takımının (2.8) temas koşulları çerçevesinde incelenmesine getirilmek suretiyle tamamlanmıştır.

2.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi

Formülasyonu yukarıda verilen problem, nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı için verilmiş bir sınır-değer problemidir. Bu problemin incelenmesinde Akbarov ve Guz (1985c, 2000)’ de verilmiş sınır formu pertürbasyon yöntemini kullanalım. Buna göre aranan büyüklükler lifin orta çizgisinin denklemi yazılırken kullanılan ε parametresi cinsinden seriye açılmış olarak aşağıdaki gibi ele alınır.

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q u_r^{(k),q} \quad (2.11)$$

Ayrıca lif-matris arayüzeyi olan S’nin (2.2) ile verilen denklemler ve bu yüzeyin birim normalinin bileşenlerini gösteren (2.3) ifadeleri de ε cinsinden seri halde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r=R+\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{rk}(\theta, t_3), \quad z=t_3+\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{zk}(\theta, t_3),$$

$$n_r=1+\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{rk}(\theta, t_3), \quad n_{\theta}=\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{\theta k}(\theta, t_3), \quad n_z=\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{zk}(\theta, t_3) \quad (2.12)$$

(2.12)’deki ifadelerde yer alan ve kolayca elde edilebilecek olan $a_{rk}(\theta, t_3), \dots, b_{zk}(\theta, t_3)$ fonksiyonlarının açık hali kısalık amacıyla verilmemektedir. Böylece (2.12) ifadeleri (2.5) denkleminde yerine yazılarak (2.11)’deki her bir yaklaşım için denklemler takımı elde edilir. (2.7)’deki bünye denklemleri lineer olduğundan (2.11)’deki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan bünye denklemleri elde edilir. Birinci ve daha sonraki yaklaşımlar için elde edilen denklemler önceki yaklaşımların büyüklüklerini de içerirler. Bundan başka (2.8) temas

koşullarında (2.11) ifadelerini yerine yazar ve (2.12)'den yararlanarak (2.11)'deki ε^k 'nın katsayılarını (R, θ, t_3) civarında seriye açar ve daha sonra ε 'nın aynı derecelerine göre gruplandırırız, herbir yaklaşım için $r=R$ 'de sağlanan uygun temas koşullarını elde ederiz. Bu işlemler ayrıntılı olarak Akbarov ve Guz (2000) kaynağında verilmektedir. Şimdi sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadelerini ele alalım.

Sıfıncı Yaklaşım

Bu yaklaşım için (2.5)-(2.7) denklemleri ile $n_r=1$, $n_\theta=0$, $n_z=0$ olduğundan (2.8) temas koşulları $r=R$ 'de aynen sağlanacaktır. Ayrıca (2.9) koşulları bu yaklaşım için

$$\sigma_{zz}^{(1),0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{ij}^{(1),0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (2.13)$$

şeklinde yazılırlar. Buradan sıfıncı yaklaşım için elde edilen denklem ve temas koşulları nonlinear olur. Sıfıncı yaklaşım, modelimizdeki lifin eğriliksiz düz olması durumuna karşılık gelen problemde, ortaya çıkan gerilme ve şekil değiştirmelerin incelenmesi için gereken sınır değer problemine karşılık gelir. İlgili mekaniksel görüşler bu durumda sıfıncı yaklaşım için elde edilen denklemlerdeki nonlinear terimlerin önemsiz etkiler vereceğini ifade etmektedir. Dolayısıyla $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ koşulunun sağlandığını varsayarak $g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0}$ terimlerinin Kronecer sembolleri olan δ_n^j 'lerle yer değiştireceğiz. Böylece sıfıncı yaklaşımın belirlenmesi için

$$\begin{aligned} \nabla_i \sigma^{(k),ij,0} &= 0, \quad 2\varepsilon_{jm}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_m u_j^{(k),0} \\ \sigma_{(ij)}^{(k)} &= (\lambda^{(k)} e^{(k),0}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(ij)}^{(k),0}), \quad e^{(k),0} = \varepsilon_{(rr)}^{(k),0} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),0} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

denklemler takımını ve

$$\sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R}, \quad u_{(i)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R}; \quad (ij)=rr, r\theta, rz, (i)=r, \theta, z \quad (2.15)$$

temas koşullarını elde ederiz.

$$\nabla_i [\sigma^{(k)in,q} (g_n^j + \nabla_n u^{(k)j,0})] + \nabla_i (\sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,q}) = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i (\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m}) \quad (2.16)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k),q} = \nabla_j u_m^{(k),q} + \nabla_m u_j^{(k),q} + \nabla_j u^{(k)n,0} \nabla_m u_n^{(k),q} + \nabla_j u^{(k)n,q} \nabla_m u_n^{(k),0} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_m u_n^{(k),s} \quad (2.17)$$

Burada da sıfırcı yaklaşımda olduğu gibi, $\nabla_n u^{(k)j,0} \ll 1$ olduğunu varsayarak $g_n^j + \nabla_n u^{(k)j,0}$ 'ları δ_n^j 'lerle yer değiştirirsek (2.16), (2.17) denklemleri aşağıdaki hale gelir.

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,q} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,q}] = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i (\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m}) \quad (2.18)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \nabla_j u_i^{(k),q} + \nabla_i u_j^{(k),q} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_i u_n^{(k),s} \quad (2.19)$$

Böylece, bu denklemler birinci yaklaşım için

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,1}] = 0 \quad (2.20)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1} \quad (2.21)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = (\lambda^{(k)} e^{(k),1}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),1}), \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{(11)}^{(k),1} + \varepsilon_{(22)}^{(k),1} + \varepsilon_{(33)}^{(k),1} \quad (2.22)$$

denklemleri elde edilir. Yukarıda sözü edilen işlemleri (2.8) ile verilen temas koşullarına $\nabla_n u^{(k)j,0} \ll 1$ olduğu da dikkate alınarak uygulanırsa birinci yaklaşım için temas koşullarını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_r \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_z \left[\sigma_{(iz)} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \\ & \left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Böylece birinci yaklaşımın elde edilmesi için gerekli olan denklemler takımı ve temas koşulları verilmiş olmaktadır. (2.23)'de kullanılan kısaltmalar ileride açıklanacaktır.

İkinci Yaklaşım

(2.18) ve (2.19) denklemlerinden ikinci yaklaşım için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,2} + \sigma^{(k)ij,0} \nabla_n u^{(k)j,2}] = \nabla_i (\sigma^{(k)in,1} \nabla_n u^{(k)j,1}) \quad (2.24)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k),2} = \nabla_j u_m^{(k),2} + \nabla_m u_j^{(k),2} + \nabla_j u^{(k)n,1} \nabla_m u_n^{(k)j,1} \quad (2.25)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),2} = (\lambda^{(k)} e^{(k),2}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),2}), \quad e^{(k),2} = \varepsilon_{(rr)}^{(k),2} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),2} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),2} \quad (2.26)$$

Bu yaklaşım için temas koşulları ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,2}^{2,2} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} + f_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial r^2} \right]_{1,0}^{2,0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial r \partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial z^2} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & \gamma_r \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i\theta)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i\theta)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & \gamma_z \left[\sigma_{(iz)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \gamma_z \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \beta_r \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,0}^{2,0} + \beta_\theta \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{1,0}^{2,0} + \beta_z \left[\sigma_{(iz)} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \\ & \left[u_{(ir)} \right]_{1,2}^{2,2} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} + f_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r^2} \right]_{1,0}^{2,0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r \partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial z^2} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

(2.23) ve (2.27)'de (i)=r,θ,z indis değiştirmelerini yaparsak temas koşullarının fiziksel bileşenlerindeki açık ifadeler elde edilir. (2.23) ve (2.27)'de kullanılan fonksiyon ve

kısaltmalar aşağıda verilmiştir. 76c -0.0011 Tw1 T2289Tc 0 .766 3401 86 3 0 30 T826.7 343.31 0 T3 Tq10

$$\beta_r = - \left[2\delta(t_3) \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2} + \left(\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \right)^2 \right] \cos^2\theta - \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \sin^2\theta + \left(\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos\theta \right)^2 \right],$$

$$\beta_\theta = -\frac{1}{2} \sin 2\theta \left[\delta(t_3) \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2} - \frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \right], \quad \beta_z = -\frac{1}{R} \delta(t_3) \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \sin^2\theta \quad (2.28)$$

Böylece ikinci yaklaşımın elde edilmesi için gerekli olan denklemler takımı ve temas koşulları elde edilmiş olmaktadır.

2.3 Araştırma Yönteminin Gerektirdiği Sınır Değer Probleminin Çözümü

Bu kısımda, yukarıda formülasyonu verilen sıfırcı, birinci ve ikinci yaklaşımlara ait sınır değer problemlerinin çözümlerini vereceğiz. Bunu yaparken çözümdeki işlemleri basitleştirmek amacıyla $v^{(1)}$ matris malzemesinin, $v^{(2)}$ lif malzemesinin Poisson oranları olmak üzere $v^{(1)} = v^{(2)}$ olduğunu varsayacağız. Nitekim, Akbarov ve Guz (2000)'e göre Poisson oranlarının eşit alınması sayısal sonuçları önemli ölçüde etkilememektedir. Bu durumda sıfırcı yaklaşım için (2.13)-(2.15) probleminin çözümünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\varepsilon_{zz}^{(1),0} = \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \frac{p}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad u_z^{(1),0} = u_z^{(2),0} = \frac{p}{E^{(1)}} z, \quad u_r^{(1),0} = -v^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0} r,$$

$$u_r^{(2),0} = -v^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_\theta^{(1),0} = u_\theta^{(2),0} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1),0} = \sigma_{rr}^{(2),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(1),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(2),0} = 0,$$

$$\sigma_{zz}^{(2),0} = p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{\theta z}^{(1),0} = \sigma_{\theta z}^{(2),0} = \sigma_{rz}^{(1),0} = \sigma_{rz}^{(2),0} = \sigma_{r\theta}^{(1),0} = \sigma_{r\theta}^{(2),0} = 0 \quad (2.29)$$

Şimdi (2.20)-(2.23) denklemleriyle verilen birinci yaklaşımla ilgili problemin çözümünü ele alalım. Yukarıda ele alınan kabuller ve (2.29) denklemlerinin dikkate alınmasıyla (2.20) denklemleri ilgili büyüklüklerin silindirik koordinatlardaki fiziksel bileşenleri cinsinden yazılırsa

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} = 0 \quad (2.30)$$

elde edilir. Direkt sağlamayla bu denklemlerin (Guz, 1999) üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakıştığı görülür. (2.21) denklemleri ise

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r}, & \varepsilon_{zz}^{(k),1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{rz}^{(k),1} &= \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}, & \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),1}}{r} \right), & \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

haline gelir. Modelimizdeki lifin (2.1) ile verdiğimiz orta çizgisinin denklemi

$$x_1 = A \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right) = \varepsilon L \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right) = \varepsilon \delta(x_3); \quad \varepsilon = \frac{A}{L} \quad (2.32)$$

denklemi ile tanımlayalım. Burdaki ε , $L > A$ kabulü ile $\varepsilon = \frac{A}{L}$ olarak seçilmiştir. (2.29)

ifadeleri dikkate alınır ve (2.28) kullanılırsa birinci yaklaşım için (2.23) temas koşulları

$$\begin{aligned} [\sigma_{rr}]_{1,1}^{2,1} &= 0, \quad [\sigma_{r\theta}]_{1,1}^{2,1} = 0, \quad [\sigma_{rz}]_{1,1}^{2,1} = \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta, \\ [u_r]_{1,1}^{2,1} &= 0, \quad [u_\theta]_{1,1}^{2,1} = 0, \quad [u_z]_{1,1}^{2,1} = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

haline gelir. Bu denklemlerin çözümü için (2.30) denklemlerini de dikkate alarak aşağıdaki gösterilimi (Guz, 1999) kullanalım.

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)}, \quad u_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k)} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)}, \\ u_z^{(k)} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

(2.34) denklemlerindeki $\psi^{(k)}$, $\chi^{(k)}$ fonksiyonları aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)} = 0, \quad \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_3^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0 \quad (2.35)$$

burada $\xi_i^{(k)}$ ($k=1,2$; $i=1,2,3$) aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}} \quad (2.36)$$

Birinci yaklaşımla ilgili sınır değer problemini çözmek için bu yaklaşımla ilgili yukarıda verilen denklemlere

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz \quad (2.37)$$

ile verilen üstel Fourier dönüşümünü uygulayacağız ($z = \frac{x_3}{L}$ 'ye göre). Bu durumda, (2.30)

denge denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{is}{L} \bar{\sigma}_{rz}^{(k),1} + \frac{1}{r} (\bar{\sigma}_{rr}^{(k),1} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(k),1}) - \frac{s^2}{L^2} \bar{\sigma}_{zz}^{(k),0} \bar{u}_r^{(k),1} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{is}{L} \bar{\sigma}_{\theta z}^{(k),1} + \frac{2}{r} \bar{\sigma}_{r\theta}^{(k),1} - \frac{s^2}{L^2} \bar{\sigma}_{zz}^{(k),0} \bar{u}_\theta^{(k),1} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{is}{L} \bar{\sigma}_{zz}^{(k),1} + \frac{1}{r} \bar{\sigma}_{rz}^{(k),1} - \frac{s^2}{L^2} \bar{\sigma}_{zz}^{(k),0} \bar{u}_z^{(k),1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

(2.31) şekil değiştirmeleri

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial \bar{u}_r^{(k),1}}{\partial r}, \quad \bar{\epsilon}_{\theta\theta}^{(k),1} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_r^{(k),1}}{r}, \quad \bar{\epsilon}_{zr}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{is}{L} \bar{u}_r^{(k),1} \right) \\ \bar{\epsilon}_{zz}^{(k),1} &= \frac{is}{L} \bar{u}_z^{(k),1}, \quad \bar{\epsilon}_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta^{(k),1}}{r} \right), \quad \bar{\epsilon}_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{is}{L} \bar{u}_\theta^{(k),1} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

(2.22) bünye denklemleri

$$\bar{\sigma}_{(in)}^{(k),1} = (\lambda^{(k)} \bar{\epsilon}^{(k),1}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \bar{\epsilon}_{(in)}^{(k),1}), \quad \bar{\epsilon}^{(k),1} = \bar{\epsilon}_{(11)}^{(k),1} + \bar{\epsilon}_{(22)}^{(k),1} + \bar{\epsilon}_{(33)}^{(k),1} \quad (2.40)$$

(2.33) temas koşulları

$$[\bar{\sigma}_{rr}]_{1,1}^{2,1} = 0, \quad [\bar{\sigma}_{r\theta}]_{1,1}^{2,1} = 0, \quad [\bar{\sigma}_{rz}]_{1,1}^{2,1} = (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \frac{is}{L} \bar{\delta}(t_3) \cos \theta,$$

$$[\bar{u}_r]_{1,1}^{2,1} = 0, [\bar{u}_\theta]_{1,1}^{2,1} = 0, [\bar{u}_z]_{1,1}^{2,1} = 0, \bar{\delta}(t_3) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (e^{-\frac{(s+m)^2}{4}} + e^{-\frac{(s-m)^2}{4}}) \quad (2.41)$$

(2.34) ifadeleri

$$\bar{u}_r^{(k)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\psi}^{(k)} - \frac{is}{L} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\chi}^{(k)}, \quad \bar{u}_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \bar{\psi}^{(k)} - \frac{is}{rL} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\chi}^{(k)},$$

$$\bar{u}_z^{(k)} = (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 - \frac{s^2}{L^2} (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \right) \bar{\chi}^{(k)}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.42)$$

(2.34) gösterimleri ile (2.30) denklemlerini sağlayan (2.35) denklemleri

$$\left(\Delta_1^{(k)} - \frac{s^2}{L^2} (\xi_1^{(k)})^2 \right) \bar{\psi}^{(k)} = 0, \quad \left(\Delta_1^{(k)} - \frac{s^2}{L^2} (\xi_2^{(k)})^2 \right) \left(\Delta_1^{(k)} - \frac{s^2}{L^2} (\xi_3^{(k)})^2 \right) \bar{\chi}^{(k)} = 0 \quad (2.43)$$

halini alır. (2.43) diferansiyel denklemleri (2.38) ifadeleri ve (2.41) temas koşulları dikkate alınarak çözümlerse

$$\bar{\psi}^{(1),1} = \bar{A}_1^{(1)}(s) K_1(\xi_1^{(1)} s \frac{r}{L}) \sin \theta,$$

$$\bar{\chi}^{(1),1} = i \left[\bar{A}_2^{(1)}(s) K_1(\xi_2^{(1)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_3^{(1)}(s) K_1(\xi_3^{(1)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta \quad (2.44)$$

$$\bar{\psi}^{(2),1} = \bar{A}_1^{(2)}(s) I_1(\xi_1^{(2)} s \frac{r}{L}) \sin \theta,$$

$$\bar{\chi}^{(2),1} = i \left[\bar{A}_2^{(2)}(s) I_1(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_3^{(2)}(s) I_1(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta \quad (2.45)$$

elde edilir. Burada $I_n(x)$ Bessel fonksiyonu ve $K_n(x)$ Macdonald fonksiyonudur. (2.44), (2.45) fonksiyonları (2.42)'de (2.39)'da ve (2.40)'da kullanılarak (2.41) temas koşullarında elde edilen ifadeler yazılırsa

$$\bar{A}_i^{(11)} F_{ji}^{(1)} + \bar{A}_i^{(21)} F_{ji}^{(2)} = (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \delta_3^j s \frac{\sqrt{\pi}}{2} (e^{-\frac{(s+m)^2}{4}} + e^{-\frac{(s-m)^2}{4}}), \quad i=1,2,3, j=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\bar{A}_1^{(k1)} = \frac{\bar{A}_1^{(k)}}{L}, \dots, \bar{A}_i^{(k1)} = \frac{\bar{A}_i^{(k)}}{L^2}, \quad k=1,2, i=2,3 \quad (2.46)$$

elde edilir. Burada δ_3^j Kronocer sembolü, $F_{ji}^{(q)}$ ise açık şekli Ek 2'de E2.1 denklemi ile verilen

ifadelerdir. Böylece 6x6'lık lineer denklemler sistemi elde edilmiş olur. Bu sistem çözülerek $\bar{A}_1^{(11)}(s)$, $\bar{A}_2^{(11)}(s)$, $\bar{A}_3^{(11)}(s)$, $\bar{A}_1^{(21)}(s)$, $\bar{A}_2^{(21)}(s)$, $\bar{A}_3^{(21)}(s)$, bilinmeyenleri belirlenmiş olur. Bunlar kullanılarak (2.40)'daki $\bar{\sigma}_{rr}^{(1),1}, \dots, \bar{\sigma}_{zz}^{(2),1}$ değerleri hesaplanır. Bu gerilmelerin gerçek değerlerini elde etmek için, örneğin $\sigma_{rr}^{(1),1}$ 'i elde etmek için

$$\sigma_{rr}^{(1),1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_{rr}^{(1),1} e^{isz} ds \quad (2.47)$$

Ters Fourier dönüşümü uygulanır. Böylece birinci yaklaşımla ilgili sınır değer problemi çözülmüş olmaktadır.

Şimdi önceki kısımda formülasyonu verilen ikinci yaklaşımla ilgili sınır değer problemini inceleyelim. Yukarıda yapılan kabulleri ve sıfırıncı yaklaşım için elde edilen sonuçları dikkate alarak (2.24) denklemlerinin tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri ile ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),2} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z^2} = F_1(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, \\ & u_{\theta}^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots) \\ & \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),2}}{\partial z^2} = F_2(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, \\ & u_{\theta}^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots) \\ & \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} = F_3(\sigma_{rr}^{(k),1}, \sigma_{r\theta}^{(k),1}, \dots, u_r^{(k),1}, \\ & u_{\theta}^{(k),1}, \dots, \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}, \dots) \end{aligned} \quad (2.48)$$

(2.48) denklemlerinin sağ tarafındaki fonksiyonların açık ifadelerinin çok küçük değerler ürettikleri direkt sağlamayla görülebileceğinden bunu ihmal edeceğiz. Dolayısıyla bu denklemler

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),2} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),2}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),2}}{\partial z^2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),2} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),2}}{\partial z^2} &= 0
\end{aligned} \tag{2.49}$$

haline gelir. (2.29) dikkate alınır ve yer değiştirmelerin çok küçük olduğuda hesaba katılırsa (2.25) ilişkileri ve (2.27) temas koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^{(k),2} &= \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),2}}{r} \right), \quad \varepsilon_{zr}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),2}}{\partial z} \right) \\
\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),2}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),2}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k),2}}{r \partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),2} = \frac{\partial u_z^{(k),2}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_{rr}]_{1,2}^{2,2} &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} + \gamma_z [\sigma_{rz}]_{1,1}^{2,1} \\
[\sigma_{\theta r}]_{1,2}^{2,2} &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} - \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} - \gamma_\theta [\sigma_{\theta\theta}]_{1,1}^{2,1} \\
[\sigma_{zr}]_{1,2}^{2,2} &= -f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} - \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} - \gamma_r [\sigma_{zr}]_{1,1}^{2,1} - \gamma_\theta [\sigma_{z\theta}]_{1,1}^{2,1} - \gamma_z [\sigma_{zz}]_{1,0}^{2,0} - \beta_z [\sigma_{zz}]_{1,0}^{2,0} \\
[u_r]_{1,2}^{2,2} &= -f_1 \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} - \varphi_1 \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} \\
[u_\theta]_{1,2}^{2,2} &= -f_1 \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} - \varphi_1 \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

(2.51) temas koşullarının her iki tarafının (2.37) ile verilen Fourier dönüşümü alınır ve birinci yaklaşımla ilgili ifadeler yerine yazılırsa buradaki Fourier dönüşüm parametresi s_1 olmak üzere aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$[\bar{\sigma}_{rr}]_{2,2}^{1,2} = (1 + \cos 2\theta) \left\{ \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty L \delta_1(z) F_{rr}(s) \cos(sz) \cos(s_1 z) ds dz + (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \int_0^\infty (\delta_1'(z))^2 \cos(s_1 z) dz \right\}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{\sigma}_{r\theta}]_{2,2}^{1,2} &= \frac{-\sin 2\theta}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty (L\delta_1(z)F_{rr}(s)\cos(sz) + \delta_1'(z)F_{stz}(s)\sin(sz))\cos(s_1z)dsdz \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(R/L)} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z)F_{stt}(s)\cos(sz)\cos(s_1z)dsdz \right\} \\
[\bar{\sigma}_{rz}]_{2,2}^{1,2} &= i \left\{ (1 + \cos 2\theta) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty L\delta_1(z)F_{rzt}(s)\sin(sz)\sin(s_1z)dsdz - (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0})(R/L)x \right. \right. \\
&\quad \left. \int_0^\infty \delta_1'(z)\delta_1''(z)\sin(sz)dz + (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \int_0^\infty \left(\frac{\delta_1(z)}{(R/L)} - (R/L)\delta_1''(z) \right) \delta_1'(z)\sin(s_1z)dz \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1'(z)F_{szz}(s)\sin(s_1z)\cos(sz)dsdz \right] + (1 - \cos 2\theta) \left[-\frac{1}{(R/L)\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z)F_{stz}(s)\sin(sz)x \right. \\
&\quad \left. \sin(s_1z)dsdz - \frac{(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0})}{(R/L)} \int_0^\infty \delta_1(z)\delta_1'(z)\sin szdz \right] \Big\} \\
[\bar{u}_r]_{2,2}^{1,2} &= -(1 + \cos 2\theta) \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty L\delta_1(z)F_{rr}(s)\cos(sz)ds\cos(s_1z)dsdz \right] \\
[\bar{u}_\theta]_{2,2}^{1,2} &= -\sin 2\theta \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty L\delta_1(z)F_{tr}\cos(sz)ds\cos(s_1z)dsdz \right] \\
[\bar{u}_z]_{2,2}^{1,2} &= -(1 + \cos 2\theta) \frac{i}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty L\delta_1(z)F_{zt}\sin(sz)\sin(s_1z)dsdz \right], \quad \delta(z)=Le^{-z^2}\cos mz=L\delta_1(z) \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Burada kullanılan $F_{rr}(s)$, $F_{tr}(s)$, $F_{stz}(s)$, $F_{stt}(s)$, $F_{rzt}(s)$, $F_{stz}(s)$, $F_{szz}(s)$, $F_{rr}(s)$, $F_{tr}(s)$, $F_{zt}(s)$ fonksiyonlarının açık hali Ek 2'de E2.2 denklemi ile verilmiştir.(2.52) temas koşullarının çözümü için (2.35)'i sağlayan fonksiyonlar yardımı ile (2.34) gösterilimi ve dolayısıyla bunların Fourier dönüşümleri ele alındığında bu yaklaşım için (2.43)'ü sağlaması gereken fonksiyonları aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^{(1),2} &= \bar{A}_{12}^{(1)}(s_1)K_2\left(\frac{r}{L}\xi_1^{(1)}s_1\right)\sin 2\theta \\
\bar{\chi}^{(1),2} &= i \left\{ \bar{A}_{20}^{(1)}(s_1)K_0\left(\frac{r}{L}\xi_2^{(1)}s_1\right) + \bar{A}_{30}^{(1)}(s_1)K_0\left(\frac{r}{L}\xi_3^{(1)}s_1\right) + \left[\bar{A}_{22}^{(1)}(s_1)K_2\left(\frac{r}{L}\xi_2^{(1)}s_1\right) + \bar{A}_{32}^{(1)}(s_1)K_2\left(\frac{r}{L}\xi_3^{(1)}s_1\right) \right] \cos 2\theta \right\} \\
\bar{\psi}^{(2),2} &= \bar{A}_{12}^{(1)}(s)I_2\left(\frac{r}{L}\xi_1^{(2)}s\right)\sin 2\theta \\
\bar{\chi}^{(2),2} &= i \left\{ \bar{A}_{20}^{(2)}(s_1)I_0\left(\frac{r}{L}\xi_2^{(2)}s_1\right) + \bar{A}_{30}^{(1)}(s_1)I_0\left(\frac{r}{L}\xi_3^{(2)}s_1\right) + \left[\bar{A}_{22}^{(1)}(s_1)I_2\left(\frac{r}{L}\xi_2^{(2)}s_1\right) + \bar{A}_{32}^{(1)}(s_1)I_2\left(\frac{r}{L}\xi_3^{(2)}s_1\right) \right] \cos 2\theta \right\} \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Bu durumda (2.26), (2.42) ve (2.50) ilişkilerinden faydalanırsak (2.52) temas koşullarından oluşan denklem sistemini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1)G_{1(k)}^{(1)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1)G_{2(n)}^{(1)} = \left\{ \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{rr}(s) \cos(sz) \cos(s_1 z) ds dz + \right. \\ \left. (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \int_0^\infty (\delta_1'(z))^2 \cos(s_1 z) dz \right.$$

$$\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1)G_{1(k)}^{(2)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1)G_{2(n)}^{(2)} = \left\{ \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{rr}(s) \cos(sz) \cos(s_1 z) ds dz + \right. \\ \left. (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \int_0^\infty (\delta_1'(z))^2 \cos(s_1 z) dz \right.$$

$$\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1)G_{1(k)}^{(3)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1)G_{2(n)}^{(3)} = \frac{-1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty (\delta_1(z) F_{rr}(s) \cos(sz) + \delta_1'(z) F_{stz}(s) \sin(sz)) \cos(s_1 z) ds dz \right. \\ \left. + \frac{1}{(R/L)} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{stt}(s) \cos(sz) \cos(s_1 z) ds dz \right\}$$

$$\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1)G_{1(k)}^{(4)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1)G_{2(n)}^{(4)} = i \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{rr}(s) \sin(sz) \sin(s_1 z) ds dz - (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0})(R/L)x \right. \\ \int_0^\infty \delta_1'(z) \delta_1''(z) \sin(sz) dz + (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \int_0^\infty \left(\frac{\delta_1(z)}{(R/L)} - (R/L) \delta_1''(z) \right) \delta_1'(z) \sin(s_1 z) dz \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1'(z) F_{szz}(s) \sin(s_1 z) \cos(sz) ds dz - \frac{1}{(R/L)\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{stz}(s) \sin(sz) \sin(s_1 z) ds dz \\ \left. - \frac{(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0})}{(R/L)} \int_0^\infty \delta_1(z) \delta_1'(z) \sin sz dz \right\}$$

$$\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1)G_{1(k)}^{(5)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1)G_{2(n)}^{(5)} = i \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{rr}(s) \sin(sz) \sin(s_1 z) ds dz - (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0})(R/L)x \right. \\ \int_0^\infty \delta_1'(z) \delta_1''(z) \sin(sz) dz + (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \int_0^\infty \left(\frac{\delta_1(z)}{(R/L)} - (R/L) \delta_1''(z) \right) \delta_1'(z) \sin(s_1 z) dz$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1'(z) F_{szz}(s) \sin(s_1 z) \cos(sz) ds dz + \frac{1}{(R/L)\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{stz}(s) \sin(sz) \sin(s_1 z) ds dz \\
& + \frac{(\sigma_{zz}^{(1,0)} - \sigma_{zz}^{(2,0)})}{(R/L)} \int_0^\infty \delta_1(z) \delta_1'(z) \sin sz dz \Bigg\} \\
\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1) G_{1(k)}^{(6)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1) G_{2(n)}^{(6)} &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{rr}(s) \cos(sz) ds \cos(s_1 z) ds dz \right] \\
\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1) G_{1(k)}^{(7)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1) G_{2(n)}^{(7)} &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{rr}(s) \cos(sz) ds \cos(s_1 z) ds dz \right] \\
\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1) G_{1(k)}^{(8)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1) G_{2(n)}^{(8)} &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{rr} \cos(sz) ds \cos(s_1 z) ds dz \right] \\
\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1) G_{1(k)}^{(9)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1) G_{2(n)}^{(9)} &= -\frac{i}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{zz} \sin(sz) \sin(s_1 z) ds dz \right] \\
\bar{A}_{(k)}^{(1),2}(s_1) G_{1(k)}^{(10)} + \bar{A}_{(n)}^{(2),2}(s_1) G_{2(n)}^{(10)} &= -\frac{i}{\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \delta_1(z) F_{zz} \sin(sz) \sin(s_1 z) ds dz \right] \\
\bar{A}_1^{(1),2}(s) &= \frac{\bar{A}_{20}^{(1)}(s_1)}{L^3}, \quad \bar{A}_2^{(1),2}(s_1) = \frac{\bar{A}_{30}^{(1)}(s_1)}{L^3}, \quad \bar{A}_3^{(1),2}(s_1) = \frac{\bar{A}_{12}^{(1)}(s_1)}{L^2}, \quad \bar{A}_4^{(1),2}(s_1) = \frac{\bar{A}_{22}^{(1)}(s_1)}{L^3}, \\
\bar{A}_5^{(1),2}(s_1) &= \frac{\bar{A}_{23}^{(1)}(s_1)}{L^3}, \quad \bar{A}_6^{(2),2}(s_1) = \frac{\bar{A}_{20}^{(2)}(s_1)}{L^3}, \quad \bar{A}_7^{(2),2}(s_1) = \frac{\bar{A}_{30}^{(2)}(s_1)}{L^3}, \quad \bar{A}_8^{(2),2}(s_1) = \frac{\bar{A}_{12}^{(2)}(s_1)}{L^2}, \\
\bar{A}_9^{(2),2}(s_1) &= \frac{\bar{A}_{22}^{(1)}(s_1)}{L^3}, \quad \bar{A}_{10}^{(2),2}(s_1) = \frac{\bar{A}_{23}^{(1)}(s_1)}{L^3}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Yukarıda $k=1, 2, 3, 4, 5, n=6, 7, 8, 9, 10$ olur. (2.54)'de verilen lineer denklemler takımının sağ tarafı birinci yaklaşımdan bellidir. Sol tarafındaki $G_{1(k)}^{(i)}(s_1)$, $G_{2(n)}^{(j)}(s_1)$ ($i=1,2,3,4,5$ ve $j=6,7,8,9,10$) fonksiyonlarının açık hali Ek2'de E2.3 numaralı denklemlerle verilmiştir. Böylece ikinci yaklaşımla ilgili olan sınır değer probleminin Fourier dönüşümü çözülmüş olur. Ters Fourier dönüşümü uygulanarak orijinal çözüme ulaşılır.

2.4 Sayısal Sonuçlar

Birinci yaklaşımla ilgili olan (2.46) lineer denklemler sistemi çözüldüğünde elde etmek

istediğimiz gerilme büyüklüklerinin s Fourier parametresine bağlı Fourier dönüşümlü değerleri bulunmuş olur. Gerçek değerlere ulaşmamız için kullanmamız gereken Ters Fourier dönüşümündeki $\int_{-\infty}^{+\infty} (.)ds$ integral, büyüklüklerin tek veya çift olmalarından dolayı söz konusu

integral $\int_0^{+\infty} (.)ds$ haline gelmiş olur. Bu integral

$$\int_0^{+\infty} (.)ds \cong \int_0^{S_*} (.)ds \cong \sum_{i=0}^N \int_{S_i}^{S_{i+1}} (.)ds \quad (2.55)$$

yaklaşımıyla çözülmüştür. N ve S_* değerleri yakınsaklık kriteri ile belirlenmiş parametreler

olmak üzere $S_0 = 0$, $S_N = S_*$ olarak kullanılmıştır. Ayrıca $\int_{S_i}^{S_{i+1}} (.)ds$ integralinin sayısal hesabı

için 10 noktalı Gaus-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

İkinci yaklaşım ile ilgili sınır koşullarında birinci yaklaşımla ilgili büyüklükler mevcuttur. Bu büyüklükleri elde etmek için (2.47) ile verilen Ters Fourier Dönüşümü kullanılır, bu temas koşullarına önceki kısımda verilen Fourier Dönüşümü uygulanır ve fonksiyonların tek veya çift olma özellikleri de dikkate alınırsa (2.52) ile verilen ve sağ tarafında bir ve iki katlı integrallerin olduğu lineer denklemler sistemine ulaşılır. Bu denklemler sistemi çözüldüğünde elde etmek istediğimiz değerlerin Fourier Dönüşümlü hesaplarında kullanacağımız bilinmeyenler elde edilmiş olacaktır. Elde etmek istediğimiz büyüklüklerin ikinci yaklaşımdaki gerçek değerlerine ulaşmak için Ters Fourier Dönüşümüne ihtiyacımız vardır. Dolayısıyla burada da bir integrasyon hesabına başvurmak gerekir. Sonuçta üç katlı integralin hesabı ile karşılaşılır. Bu hesap

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (.)dsdzds_1 = \int_0^{S_*^{(1)}} \int_0^{Z_*} \int_0^{S_*^{(2)}} (.)dsdzds_1 = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} \int_{S_i^{(1)}}^{S_{i+1}^{(1)}} \int_{Z_j}^{Z_{j+1}} \int_{S_k^{(1)}}^{S_{k+1}^{(2)}} (.)dsdzds_1 \quad (2.56)$$

yaklaşımıyla yapılır. Burada $S_0^{(1)}=Z_0=S_0^{(2)}=0$, ve N_1 , N_2 , N_3 , $S_*^{(1)}$, Z_* , $S_*^{(2)}$ değerleri yakınsaklık kriteri ile belirlenmiş olmak üzere $S_{N_1}^{(1)}=S_*^{(1)}$, $Z_{N_2}=Z_*$, $S_{N_3}^{(2)}=S_*^{(2)}$ dir. Sözü edilen üç katlı integral 10 noktalı Gauss- Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Sayısal hesaplar için gerekli algoritmalar ve bunların FTN 77 programlama diliyle kodlaması tarafımızdan geliştirilmiş ve uygulanmıştır.

Gerilme yayılımına ait incelemeler σ_{nt} , σ_{ne} , σ_{te} kayma gerilmeleri ve σ_{nn} , σ_{tt} , σ_{ee} normal gerilmelere ait sayısal sonuçlar elde etmek ve bunları yorumlama kapsamında yapılmıştır. Bu gerilmeler, matris ve lif arakesit yüzeyi olan S yüzeyi üzerinde $\mathbf{n}$ normal vektörü ve $\mathbf{\tau}$, $\mathbf{e}$ teğet vektörleri doğrultusundaki gerilmelerdir. Yerel eğriliğin ihmal edilmesi durumuna karşılık gelen $\varepsilon=0$ halinde σ_{nn} , σ_{tt} , σ_{ee} , σ_{nt} , σ_{ne} , σ_{te} gerilmeleri sırasıyla σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rz} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ ile çakışır. $v^{(1)}=v^{(2)}$ durumunda $\varepsilon=0$ koşulu altında $\sigma_{nn} \equiv \sigma_{rr} \equiv \sigma_{nt} \equiv \sigma_{rz} \equiv \sigma_{ne} \equiv \sigma_{r\theta} \equiv \sigma_{ee} \equiv \sigma_{\theta\theta} \equiv \sigma_{te} \equiv \sigma_{\theta z} \equiv 0$ elde edilmesi aşağıda verilecek gerilmelerin ele alınan lifin yerel eğriliğinden kaynaklandığını göstermektedir. Kompozit malzemenin adhezyon mukavemeti doğrudan bu gerilmelere bağlı olduğundan bunların belirlenmesi önemlidir. Ayrıca gerilmelerin hesabında geometrik lineerliğin parametrelerin geçerlilik sınırlarının belirlenmesi, geometrik nonlineeritenin etkisinin dikkate alınması ile mümkün olduğundan bu etkinin incelenmesi ayrı bir öneme sahiptir.

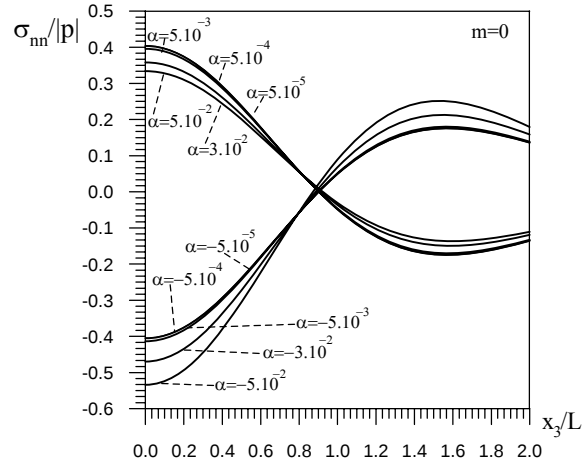
Sayısal sonuçlar için $\kappa=R/L$ parametresi tanımlayalım ve $v^{(1)}=v^{(2)}=0.3$, $\varepsilon=0.07$ ve aksi belirtilmedikçe $E^{(2)}/E^{(1)}=50$ değerlerinin kullanıldığını belirtelim. Geometrik nonlineeritenin gerilme yayılımına etkisini göstermek için $\alpha=p/E^{(1)}$ parametresini kullanalım.

Gerilmelerin κ ve x_3/L parametrelerine göre değişimini gösteren şekillerde ve tablolarda σ_{nn} , σ_{ne} , σ_{ee} , σ_{tt} için $\theta=0$; σ_{nt} , σ_{te} için $\theta=\pi/2$ değeri kullanılmıştır. Şekil 2.2-2.7 grafikleri $\kappa=0.25$ değerinde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$, $\sigma_{ee}/|p|$, $\sigma_{te}/|p|$, $\sigma_{tt}^{(1)}/|p|$ ile x_3/L parametresi arasındaki ilişkiye geometrik nonlineeriteyi ifade eden α 'nın etkisi görülmektedir. $\alpha=\mp 5.10^{-5}$ durumunda verilen sonuçların geometrik lineer durumda elde edilenlerle (Djhafarova, 1994;1995) çakıştığı görülmektedir. Bu grafiklerden, geometrik nonlineeritenin etkisi olarak $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$, $\sigma_{te}/|p|$, $\sigma_{tt}^{(1)}/|p|$ gerilmelerinin mutlak değeri, basınçta (çekmede) $|\alpha|$ ile monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır). α değerlerinin, ilgili stabilite kaybı değerlerinden (Guz, 1990) küçük alındığını belirtelim.

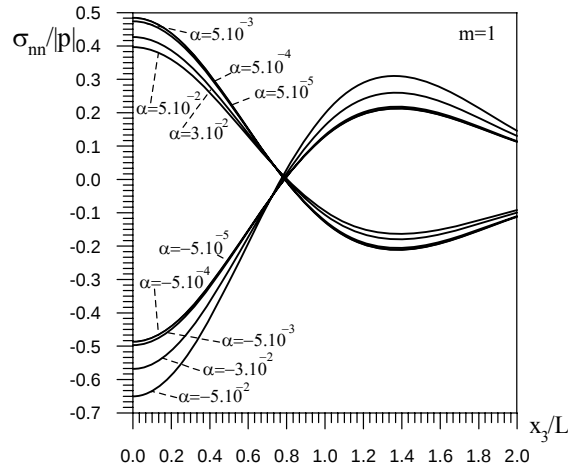
Şekil 2.8-2.15 grafikleri sırasıyla $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$, $\sigma_{ee}/|p|$, $\sigma_{te}/|p|$, $\sigma_{tt}^{(1)}/|p|$, $\sigma_{tt}^{(2)}/|p|$ gerilmeleri ile κ parametresi arasındaki ilişkiye geometrik nonlineeritenin etkisi görülmektedir. Burada sırasıyla $x_3/L=0, 0.7, 0, 0.9, 0.9, 1.0, 1.14, 0.7$ değerleri kullanılmıştır. Sözü edilen grafiklerde m parametresine göre değişim de izlenmiş bu parametrelerin gerilme değerlerini arttırdığı görülmüştür.

Çizelge 2.1-2.7’lerde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$, $\sigma_{ee}/|p|$, $\sigma_{te}/|p|$, $\sigma_{tt}^{(1)}/|p|$, $\sigma_{tt}^{(2)}/|p|$ değerleri çeşitli m , $E^{(1)}/E^{(2)}$, α parametrelerinde verilmiştir. Bu çizelgelerde gerilme değerlerinin sıfırcı, birinci ve ikinci yaklaşım sonucunda elde edilen sayısal sonuçları görülmektedir. Sıfırcı ve birinci yaklaşım çerçevesinde elde edilen sonuçlar gerilmelerin nonlinearitenin etkisiyle davranışını vermesine rağmen ikinci yaklaşım sonucunda elde edilen sayısal değerler nicel olarak daha kalitelidir. Bu tablolardan $E^{(2)}/E^{(1)}$ büyüdükçe değerlerin de mutlak olarak büyüdüğü gözlenmektedir. Ayrıca $|\alpha|$ büyüdükçe gerilmelerin değerlerinin çekme durumunda mutlak olarak azaldığı, basınç durumunda mutlak olarak arttığı izlenmektedir.

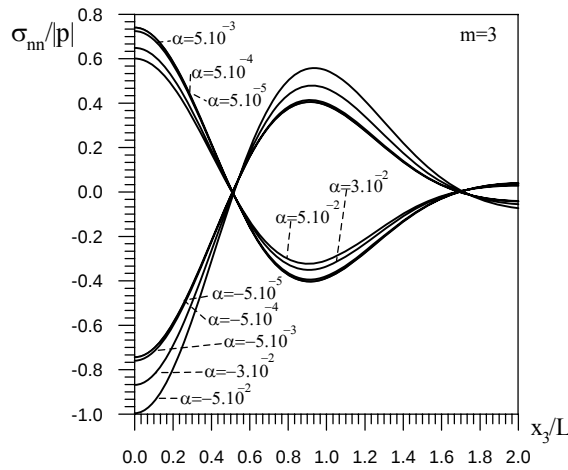
Çizelge 2.8’de, integral sınır değerleri ile gerilme değerlerinin yakınsaması görülmektedir. İntegral sınır değerleri (2.55) ifadesinde S^* parameteresiyle gösterilmiştir. Bu tablolardan görüldüğü gibi integral aralığının $[0, 40]$, alınmasıyla elde edilen sonuçlar oldukça hassastır. Bu tablolar sıfırcı ve birinci yaklaşım sonucunda elde edilen değerleri içermektedir. İkinci yaklaşımda da benzer yakınsaklık kriteri kullanılmıştır.



(a)



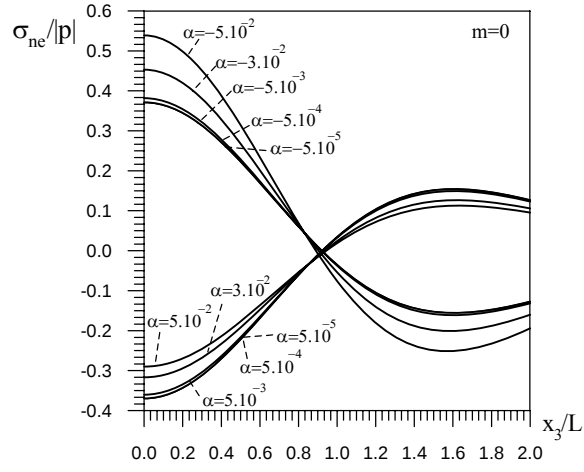
(b)



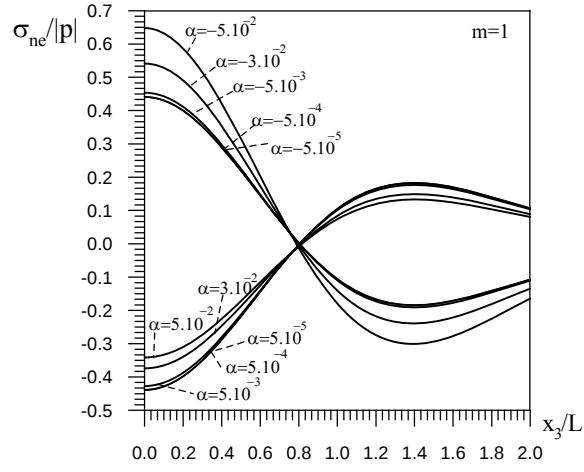
(c)

Şekil 2.2 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

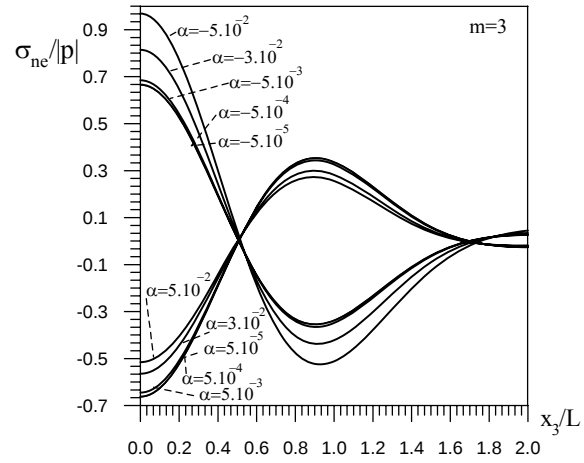
$m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$)



(a)



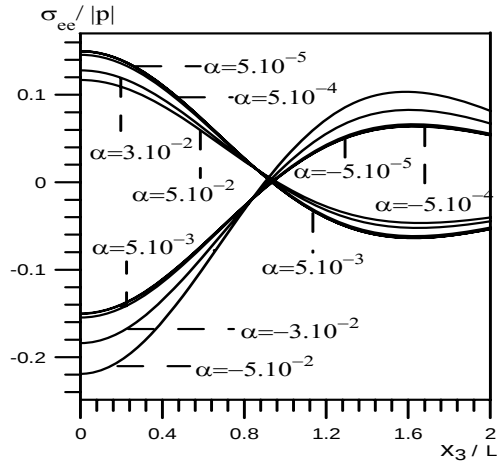
(b)



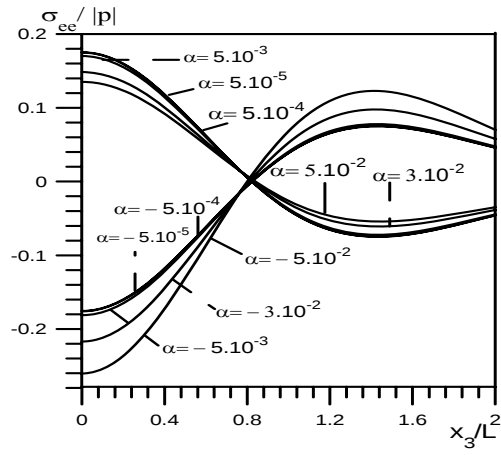
(c)

Şekil 2.4 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

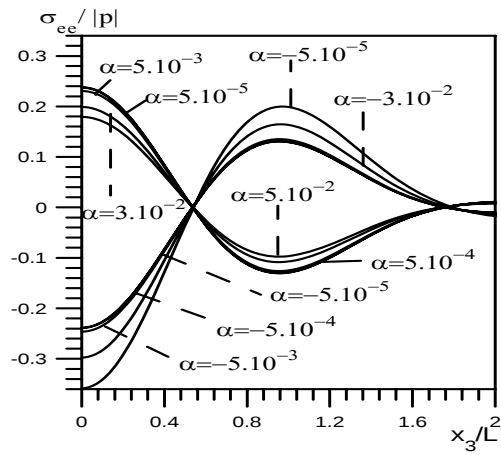
$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta = 0)$$



(a)



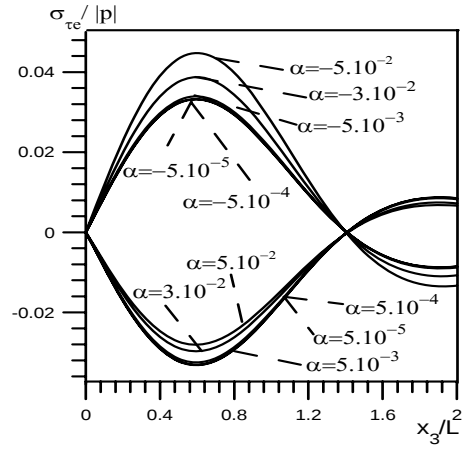
(b)



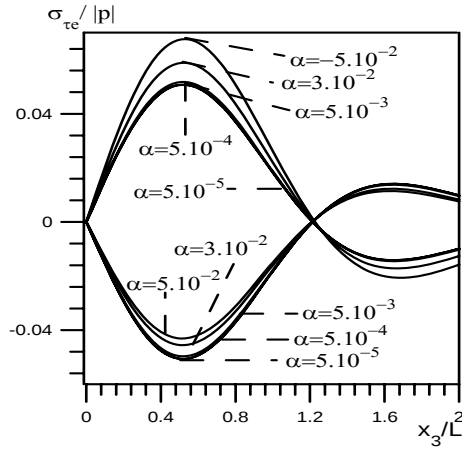
(c)

Şekil 2.5 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ee}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

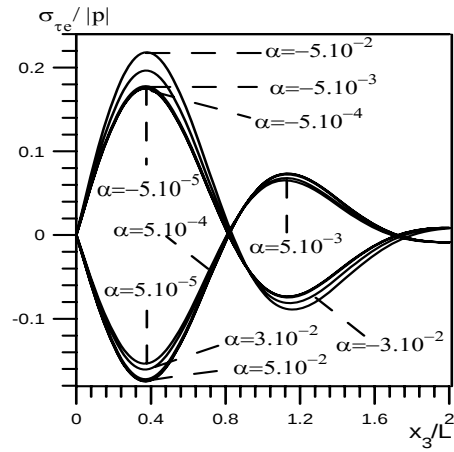
($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$)



(a)



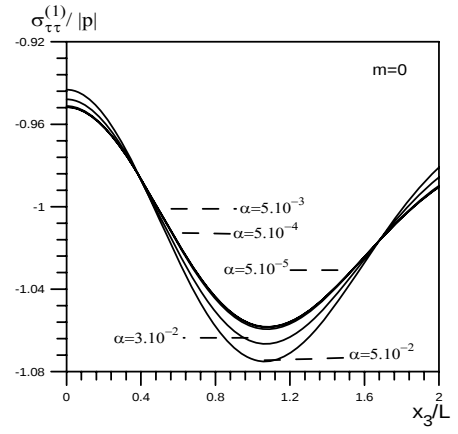
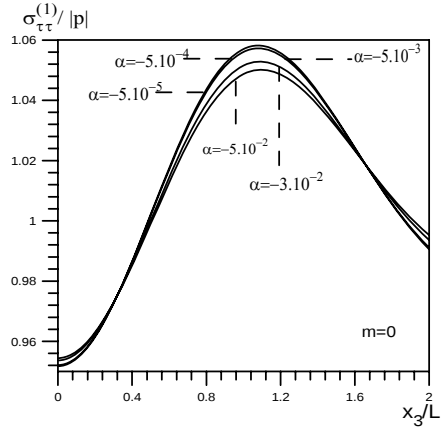
(b)



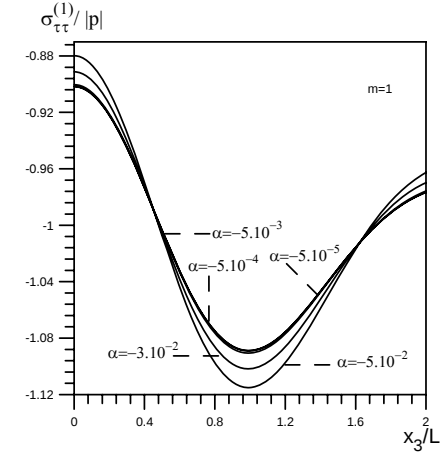
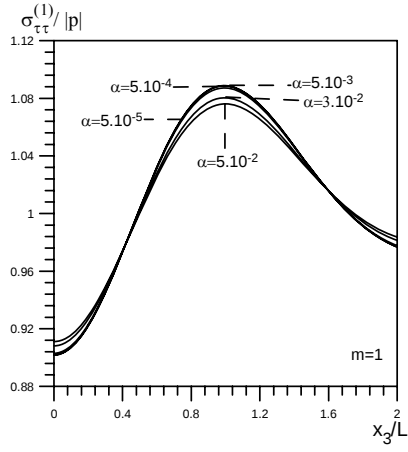
(c)

Şekil 2.6 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\epsilon}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

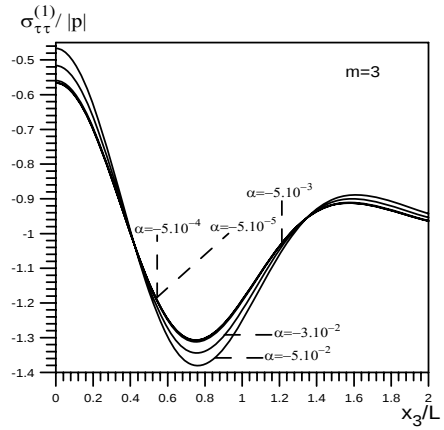
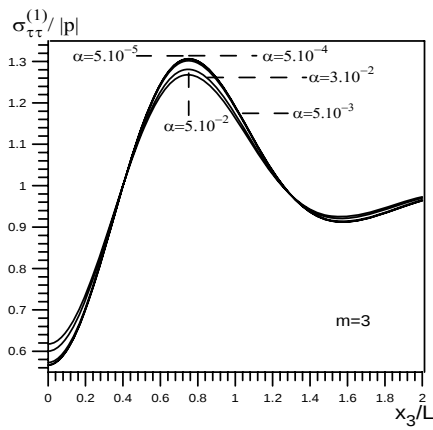
$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta = \frac{\pi}{2})$$



(a)



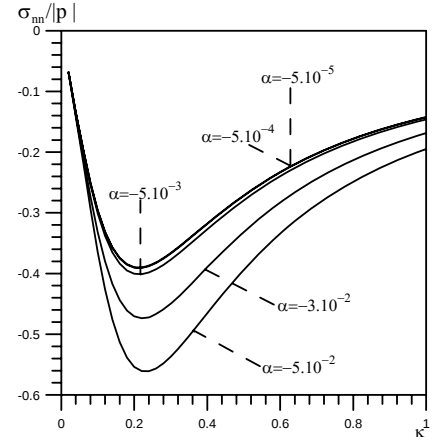
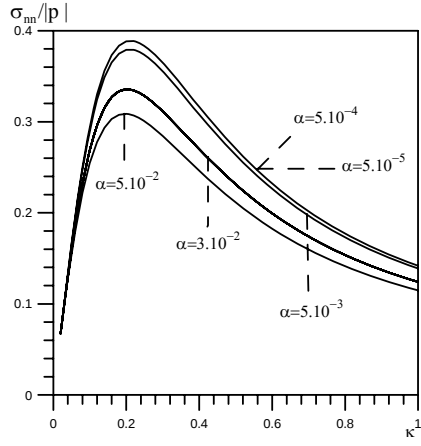
(b)



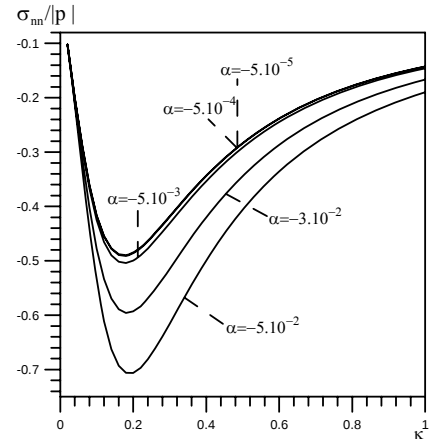
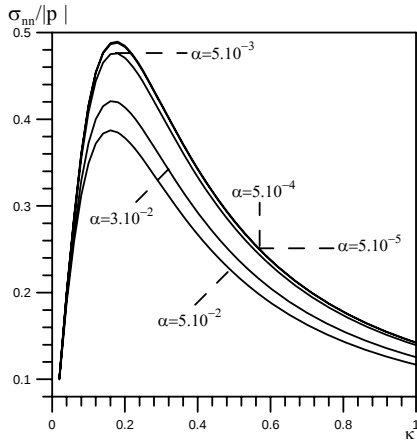
(c)

Şekil 2.7 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(1)}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

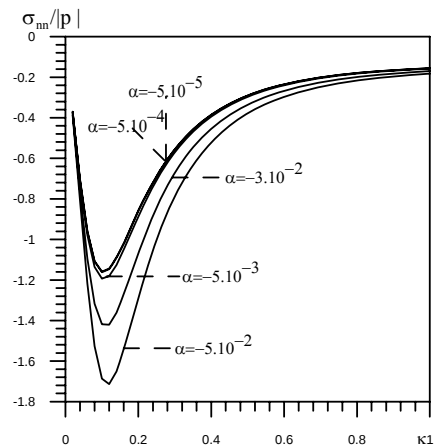
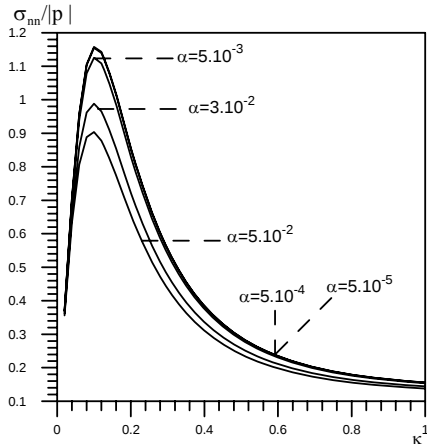
($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$)



(a)



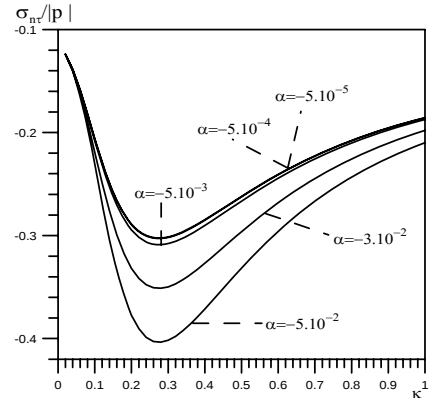
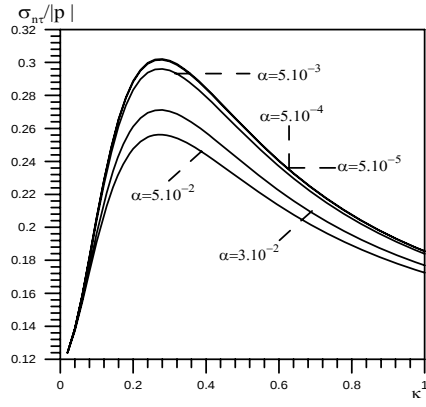
(b)



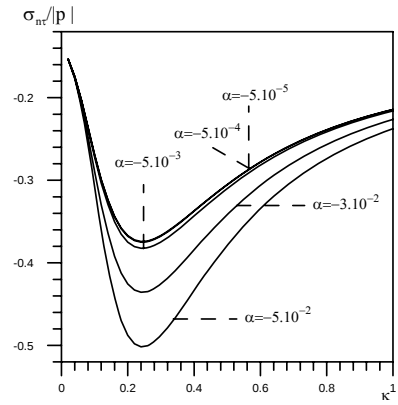
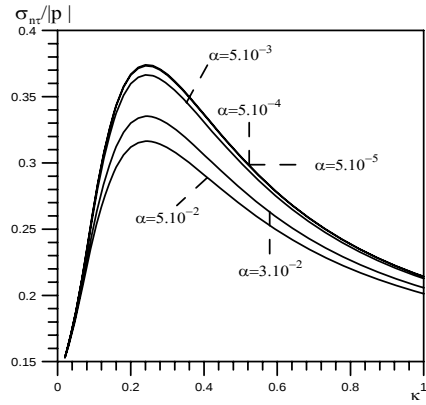
(c)

Şekil 2.8 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile κ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

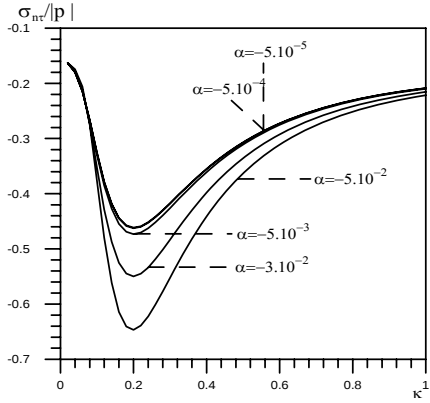
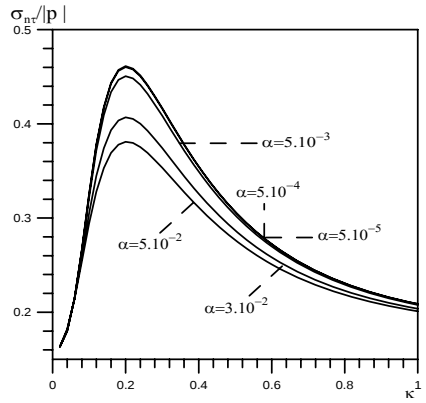
$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0, \varepsilon = 0.07, \theta=0)$$



(a)



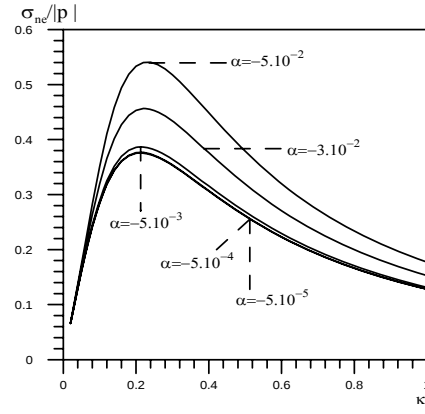
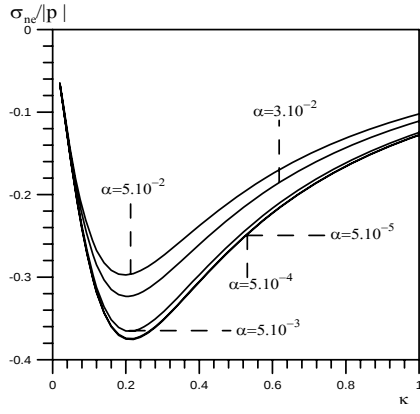
(b)



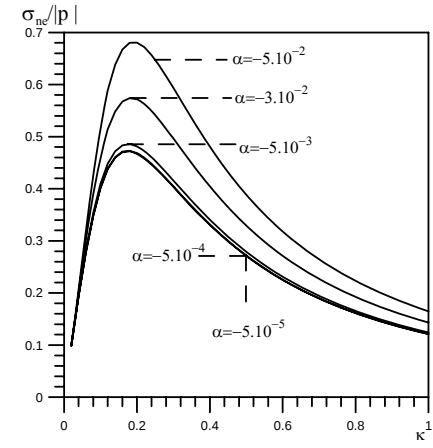
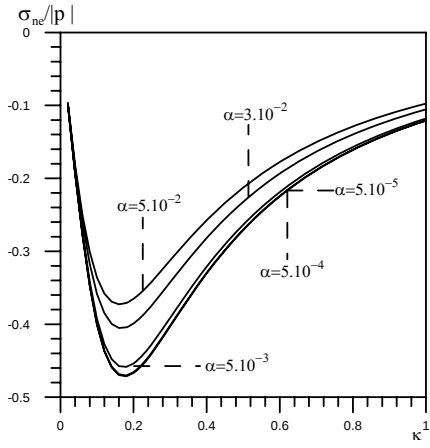
(c)

Şekil 2.9 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nr}/|p|$ ile κ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

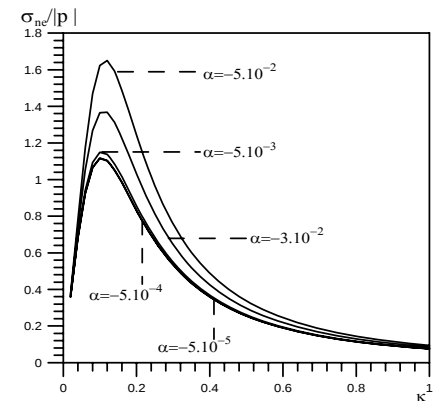
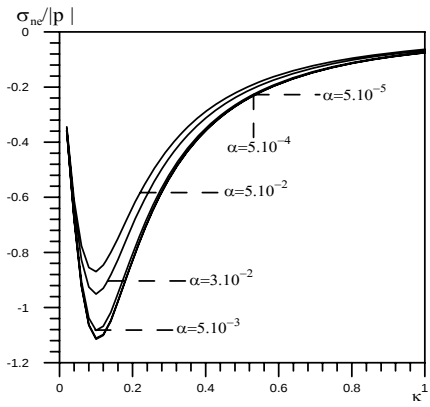
$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.7, \varepsilon = 0.07, \theta = \pi/2)$$



(a)



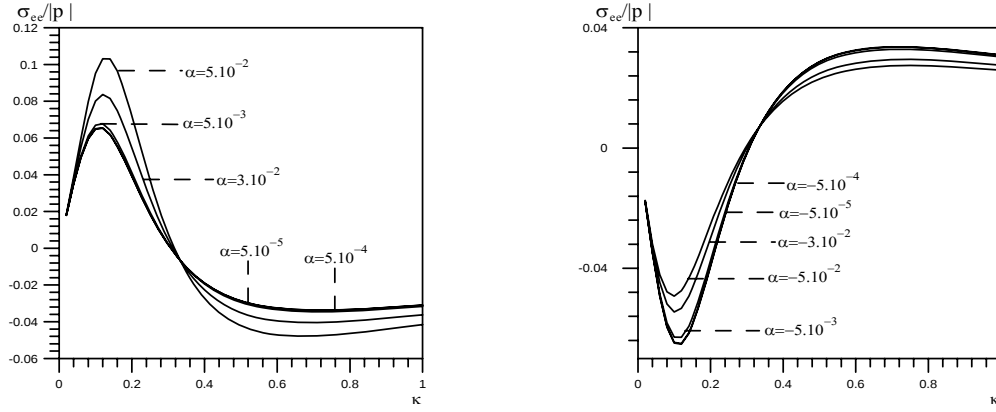
(b)



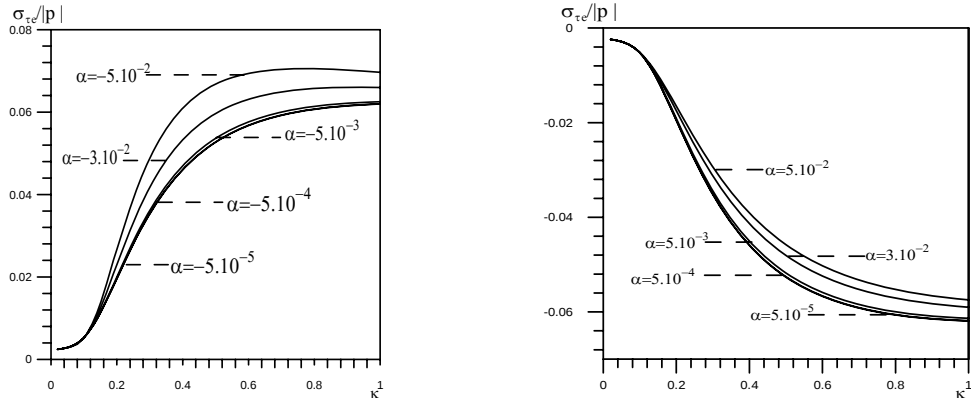
(c)

Şekil 2.10 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nc}/|p|$ ile κ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

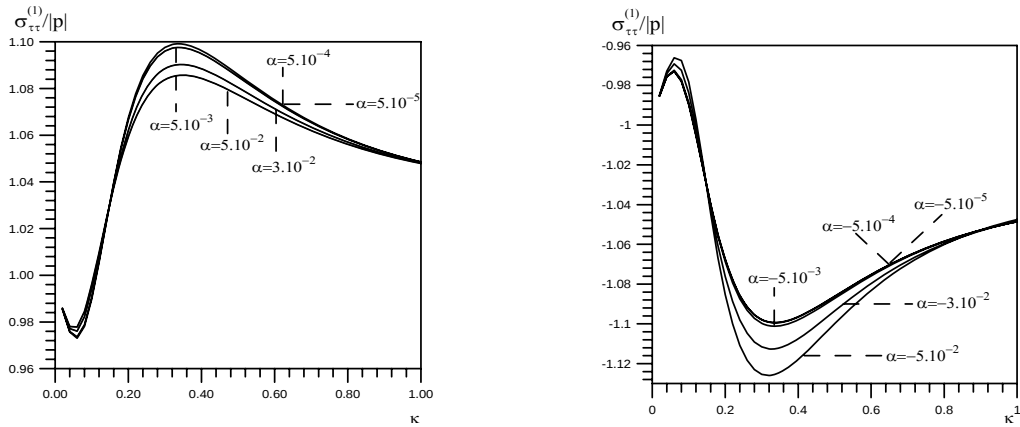
$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.0, \varepsilon = 0.07, \theta = 0)$$



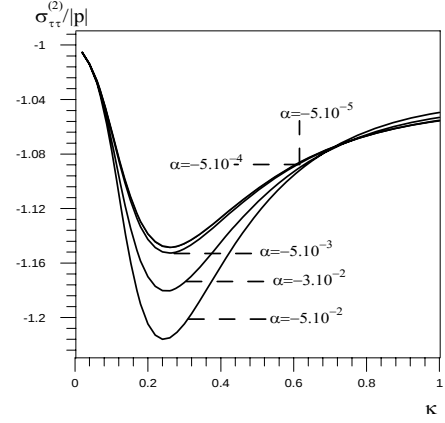
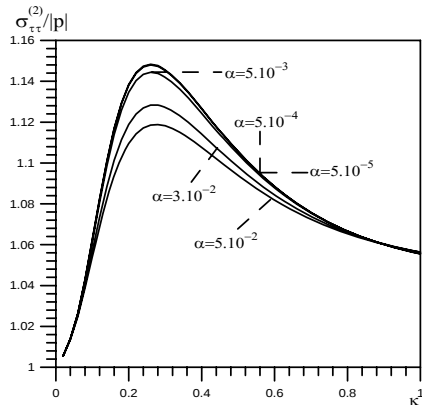
Şekil 2.11 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ee}/|p|$ ile κ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0.9$, $\varepsilon = 0.07$, $m=1$, $\theta=0$)



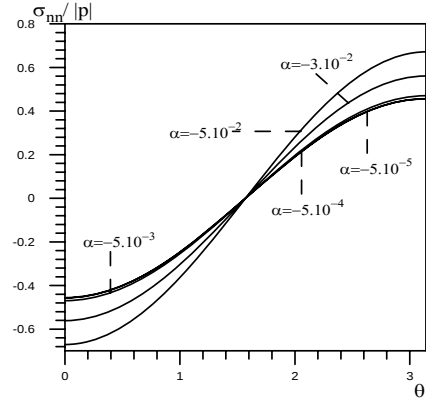
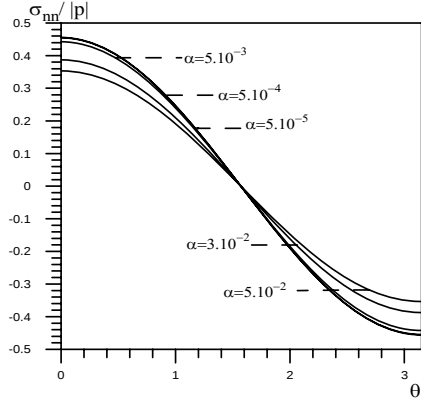
Şekil 2.12 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau e}/|p|$ ile κ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0.9$, $\varepsilon = 0.07$, $m=1$, $\theta=\pi/2$)



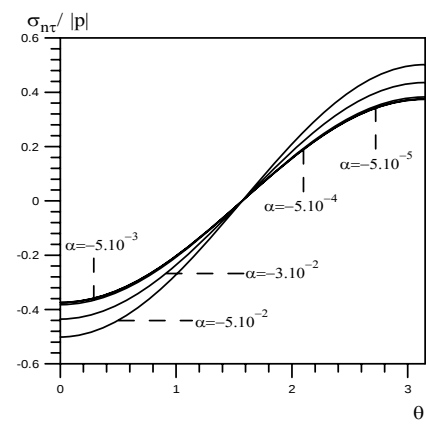
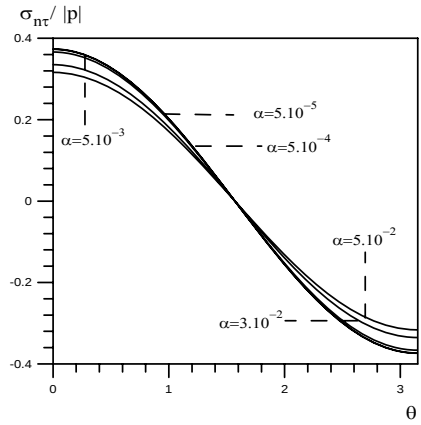
Şekil 2.13 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(1)}/|p|$ ile κ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 1.0$, $\varepsilon = 0.07$, $m=1$, $\theta=0$)



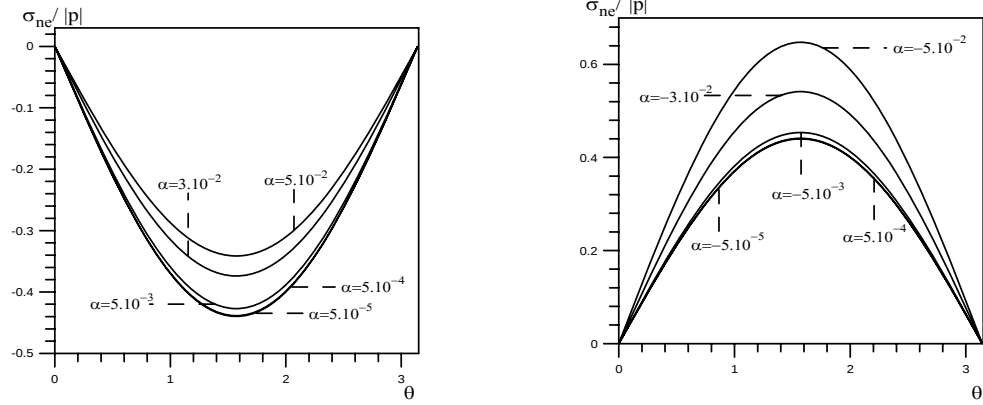
Şekil 2.14 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ ile κ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, 14$, $x_3/L = 1.0, \varepsilon = 0.07, m=1, \theta=\pi/2$)



Şekil 2.15 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25$, $x_3/L = 0, \varepsilon = 0.07, m=1$)

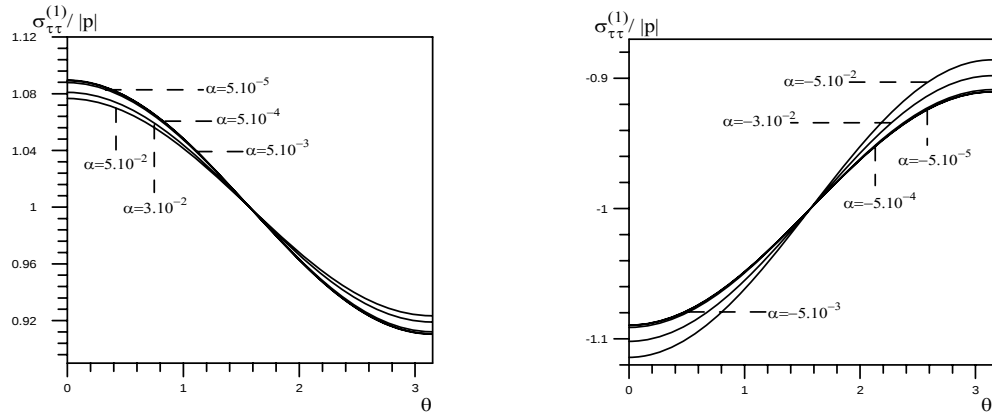


Şekil 2.16 Çeşitli σ 'lar için $\sigma_{n\tau}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \kappa = 0.25$, $x_3/L = 0.7, \varepsilon = 0.07, m=1$)



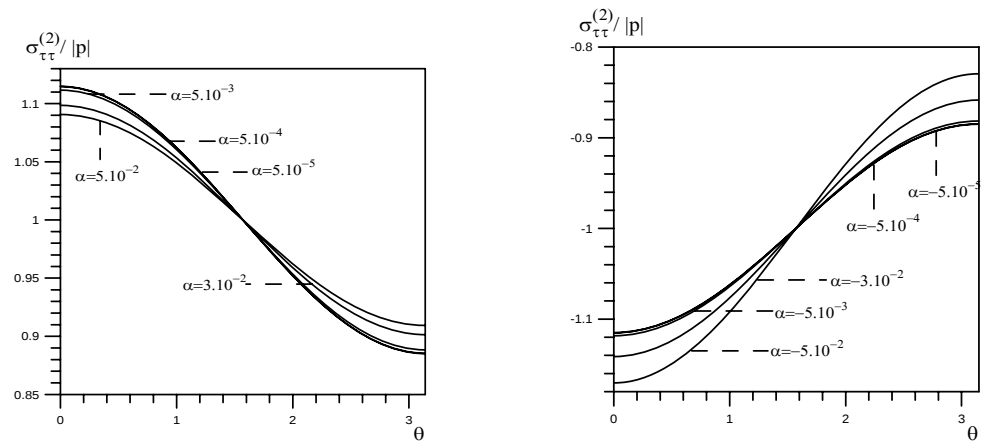
Şekil 2.17 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.25$,

$x_3/L = 0$, $\varepsilon = 0.07$, $m=1$)



Şekil 2.18 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(1)}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.3$,

$x_3/L = 0.9$, $\varepsilon = 0.07$, $m=1$)



Şekil 2.19 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.2$,

$x_3/L = 0.9$, $\varepsilon = 0.07$, $m=1$)

Çizelge 2.1 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{mn}/|p|$ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri
($x_3/L = 0$, $\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$)

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak. No	α							
			çekme				basınç			
			5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1	0.0945	0.0936	0.0995	0.0865	-0.0945	-0.0954	-0.1005	-0.1051
		2	0.1348	0.1345	0.1319	0.1296	-0.1348	-0.1368	-0.1466	-0.1548
	20	1	0.1833	0.1805	0.1678	0.1591	-0.1834	-0.1863	-0.2034	-0.2204
		2	0.2331	0.2308	0.2198	0.2119	-0.2331	-0.2374	-0.2605	-0.2820
	50	1	0.6186	0.5927	0.4919	0.0435	-0.6191	-0.6479	-0.8574	-1.1916
		2	0.4430	0.4329	0.3893	0.3620	-0.4433	-0.4566	-0.5385	-0.6341
	100	1	0.6186	0.5927	0.4919	0.4353	-0.6191	-0.6479	-0.8574	-1.1916
		2	0.6833	0.6579	0.5581	0.5017	-0.6839	-0.7147	-0.9348	-1.2797
1	10	1	0.1227	0.1215	0.1155	0.1112	-0.1228	-0.1241	-0.1315	-0.1383
		2	0.1541	0.1533	0.1485	0.1447	-0.1542	-0.1564	-0.1676	-0.1774
	20	1	0.2301	0.2262	0.2090	0.1974	-0.2302	-0.2342	-0.2575	-0.2810
		2	0.2702	0.2669	0.2509	0.2397	-0.2703	-0.2755	-0.3039	-0.3313
	50	1	0.4557	0.4425	0.3873	0.3534	-0.4560	-0.4702	-0.5614	-0.6716
		2	0.5055	0.4927	0.4382	0.4045	-0.5058	-0.5215	-0.6200	-0.7365
	100	1	0.7002	0.6708	0.5562	0.4918	-0.7008	-0.7334	-0.9708	-1.3473
		2	0.7568	0.7275	0.6128	0.5480	-0.7574	-0.7920	-1.0397	-1.4278
3	10	1	0.2609	0.2574	0.2413	0.2300	-0.2610	-0.2646	-0.2848	-0.3039
		2	0.2633	0.2598	0.2438	0.2325	-0.2634	-0.2672	-0.2885	-0.3086
	20	1	0.4281	0.4199	0.3834	0.3590	-0.4283	-0.4369	-0.4872	-0.5385
		2	0.4400	0.4317	0.3948	0.3700	-0.4401	-0.4672	-0.5285	-0.5886
	50	1	0.6867	0.6669	0.5837	0.5322	-0.6871	-0.7083	-0.8433	-1.0036
		2	0.7119	0.6917	0.6066	0.5539	-0.7124	-0.7345	-0.8751	-1.0414
	100	1	0.8873	0.8540	0.7214	0.6444	-0.8880	-0.9245	-1.1799	-1.5553
		2	0.9221	0.8879	0.7516	0.6725	-0.9228	-0.9608	-1.2259	-1.6140

Çizelge 2.2 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{nr}/|p|$ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri
 $(x_3/L = 0.7, \kappa = 0.25, \varepsilon = 0.07)$

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak. No.	α							
			Çekme				Basınç			
			5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1	0.1575	0.1570	0.1545	0.1528	-0.1575	-0.1581	-0.1612	-0.1641
		2	0.1665	0.1689	0.1762	0.1793	-0.1665	-0.1701	-0.1838	-0.1924
	20	1	0.2061	0.2044	0.1969	0.1099	-0.2062	-0.2079	-0.2184	-0.2290
		2	0.2223	0.2241	0.2285	0.2297	-0.2224	-0.2280	-0.2529	-0.2723
	50	1	0.3010	0.2950	0.2704	0.2555	-0.3011	-0.3075	-0.3494	-0.4011
		2	0.3292	0.3268	0.3148	0.3067	0.3293	-0.3408	-0.4043	-0.4726
	100	1	0.3976	0.3846	0.3345	0.3069	-0.3979	-0.4124	-0.5198	-0.6952
		2	0.4356	0.4258	0.3873	0.3662	-0.4359	-0.4567	-0.5947	-0.8024
1	10	1	0.1978	0.1970	0.1935	0.1911	-0.1978	-0.1986	-0.2030	-0.2072
		2	0.2061	0.2079	0.2127	0.2145	-0.2061	-0.2096	-0.2233	-0.2327
	20	1	0.2595	0.2572	0.2470	0.2403	-0.2595	-0.2620	-0.2762	-0.2909
		2	0.2747	0.2753	0.2754	0.2740	-0.2747	-0.2805	-0.3078	-0.3307
	50	1	0.3740	0.3664	0.3352	0.3743	-0.3741	-0.3823	-0.4356	-0.5015
		2	0.3994	0.3949	0.3747	0.3617	-0.3996	-0.4122	-0.4851	-0.5664
	100	1	0.4833	0.4677	0.4076	0.3743	-0.4836	-0.5010	-0.6288	-0.8355
		2	0.5159	0.5032	0.4534	0.4259	-0.5162	-0.5390	-0.6933	-0.9269
3	10	1	0.2354	0.2342	0.2288	0.2251	-0.2354	-0.2366	-0.2435	-0.2501
		2	0.2215	0.2215	0.2204	0.2187	-0.2216	-0.2241	-0.2363	-0.2461
	20	1	0.3155	0.3120	0.2970	0.2871	-0.3155	-0.3192	-0.3407	-0.3632
		2	0.2871	0.2855	0.2774	0.2712	-0.2872	-0.2921	-0.3186	-0.3433
	50	1	0.4466	0.4369	0.3966	0.3724	-0.4469	-0.4574	-0.5265	-0.6121
		2	0.3934	0.3866	0.3584	0.3409	-0.3935	-0.4044	-0.4712	-0.5489
	100	1	0.5498	0.5325	0.4652	0.4275	-0.5501	-0.5692	-0.7069	-0.9185
		2	0.4763	0.4634	0.4131	0.3848	-0.4766	-0.4945	-0.6167	-0.7956

Çizelge 2.3 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri
($x_3/L = 0$, $\kappa = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$)

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak. No.	α							
			Çekme				Basınç			
			5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1	-0.0828	-0.0820	-0.0785	-0.0759	0.08287	0.0836	0.0880	0.0920
		2	-0.0828	-0.0820	-0.0785	-0.0759	0.08287	0.0836	0.0880	0.0920
	20	1	-0.1700	-0.1674	-0.1557	0.1477	0.1701	0.1728	0.1885	0.2042
		2	-0.1700	-0.1674	-0.1557	0.1477	0.1701	0.1728	0.1885	0.2042
	50	1	-0.3704	-0.3600	-0.3166	-0.2898	0.3706	0.3817	0.4530	0.5388
		2	-0.3704	-0.3600	-0.3166	-0.2898	0.3706	0.3817	0.4530	0.5388
	100	1	-0.6046	-0.5793	-0.4809	-0.4256	0.6051	0.6332	0.8379	1.1643
		2	-0.6046	-0.5793	-0.4809	-0.4256	0.6051	0.6332	0.8379	1.1643
1	10	1	-0.1077	-0.1066	-0.1014	-0.0978	0.1077	0.1089	0.1152	0.1211
		2	-0.1077	-0.1066	-0.1014	-0.0978	0.1077	0.1089	0.1152	0.1211
	20	1	-0.2136	-0.2101	-0.1943	-0.1836	0.2137	0.2174	0.2389	0.2606
		2	-0.2136	-0.2101	-0.1943	-0.1836	0.2137	0.2174	0.2389	0.2606
	50	1	-0.4397	-0.4270	-0.3739	-0.3412	0.4400	0.4536	0.5414	0.6476
		2	-0.4397	-0.4270	-0.3739	-0.3412	0.4400	0.4536	0.5414	0.6476
	100	1	-0.6848	-0.6560	-0.5442	-0.4812	0.6854	0.7173	0.9491	1.3169
		2	-0.6848	-0.6560	-0.5442	-0.4812	0.6854	0.7173	0.9491	1.3169
3	10	1	-0.2293	-0.2263	-0.2125	-0.2029	0.2293	0.2324	0.2498	0.2662
		2	-0.2293	-0.2263	-0.2125	-0.2029	0.2293	0.2324	0.2498	0.2662
	20	1	-0.3980	-0.3905	-0.3570	-0.3347	0.3982	0.4061	0.4523	0.4994
		2	-0.3980	-0.3905	-0.3570	-0.3347	0.3982	0.4061	0.4523	0.4994
	50	1	-0.6635	-0.6445	-0.5647	-0.5152	0.6639	0.6843	0.8140	0.9680
		2	-0.6635	-0.6445	-0.5647	-0.5152	0.6639	0.6843	0.8140	0.9680
	100	1	-0.8690	-0.8366	-0.7073	-0.6323	0.8697	0.9053	1.1546	1.5211
		2	-0.8690	-0.8366	-0.7073	-0.6323	0.8697	0.9053	1.1546	1.5211

Çizelge 2.4 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{ee}/|p|$ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri
($x_3/L = 0.5$, $\kappa = 0.5$, $\varepsilon = 0.07$)

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak. No.	α							
			Çekme				Basınç			
			5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1	0.0228	0.0226	0.0219	0.0214	-0.0228	-0.0229	-0.0237	-0.0244
		2	0.0315	0.0307	0.0260	0.0224	-0.0315	-0.0314	-0.0301	-0.0295
	20	1	0.0557	0.0551	0.0522	0.0502	0.0557	0.0564	0.0600	0.0635
		2	0.0676	0.0664	0.0594	0.0542	-0.0677	-0.0681	-0.0699	-0.0722
	50	1	0.1459	0.1425	0.1281	0.1189	-0.1459	-0.1495	-0.1719	-0.1976
		2	0.1607	0.1567	0.1383	0.1260	-0.1608	-0.1642	-0.1854	-0.2105
	100	1	0.2714	0.2612	0.2208	0.1976	-0.2717	-0.2830	-0.3638	-0.4886
		2	0.2883	0.2775	0.2331	0.2067	-0.2885	-0.2999	-0.3805	-0.5060
1	10	1	0.0315	0.0313	0.0302	0.0293	-0.0315	-0.0318	-0.0331	-0.0343
		2	0.0375	0.0367	0.0324	0.0291	-0.0375	-0.0375	-0.0372	-0.0374
	20	1	0.0760	0.0750	0.0705	0.0673	-0.0760	-0.0770	-0.0829	-0.0886
		2	0.0846	0.0831	0.0752	0.0695	-0.0847	-0.0855	-0.0900	-0.0948
	50	1	0.1918	0.1868	0.1659	0.1529	-0.1919	-0.1971	-0.2306	-0.2700
		2	0.2033	0.1978	0.1736	0.1579	-0.2034	-0.2086	-0.2413	-0.2804
	100	1	0.3433	0.3294	0.2749	0.2442	-0.3436	-0.3591	-0.4713	-0.6494
		2	0.3573	0.3428	0.2848	0.2513	-0.3576	-0.3731	-0.4858	-0.6655
3	10	1	0.0824	0.0815	0.0762	0.0736	-0.0825	-0.0835	-0.0891	-0.0942
		2	0.0759	0.0747	0.0693	0.0653	-0.0760	-0.0769	-0.0821	-0.0872
	20	1	0.1864	0.1830	0.3406	0.1573	-0.1865	-0.1901	-0.2110	-0.2321
		2	0.1812	0.1776	0.1611	0.1499	-0.1813	-0.1848	-0.0821	-0.0872
	50	1	0.4070	0.3941	0.3406	0.3080	-0.4073	-0.4212	-0.5113	-0.6220
		2	0.4053	0.3922	0.3371	0.3033	-0.4056	-0.4196	-0.5104	-0.6225
	100	1	0.6299	0.6015	0.4919	0.4308	-0.6305	-0.6621	-0.8945	-1.2709
		2	0.6327	0.6038	0.4918	0.4290	-0.6333	-0.6653	-0.9010	-1.2836

Çizelge 2.5 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{te}/|p|$ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri
($x_3/L = 0.5$, $\kappa = 0.5$, $\varepsilon = 0.07$)

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak. No	α							
			Çekme				Basınç			
			5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1	-0.0414	-0.0413	-0.0405	-0.0399	0.0415	0.0416	0.0427	0.0438
		2	-0.0414	-0.0413	-0.0405	-0.0399	0.0415	0.0416	0.0427	0.0438
	20	1	-0.0449	-0.0445	-0.0429	-0.0418	-0.0449	-0.0453	-0.0476	0.0500
		2	-0.0449	-0.0445	-0.0429	-0.0418	-0.0449	-0.0453	-0.0476	0.0500
	50	1	-0.0509	-0.0501	-0.0471	-0.0452	0.0509	0.0517	0.0565	0.0622
		2	-0.0509	-0.0501	-0.0471	-0.0452	0.0509	0.0517	0.0565	0.0622
	100	1	-0.0550	-0.0539	-0.0498	-0.0473	0.0550	0.0561	0.0635	0.0735
		2	-0.0550	-0.0539	-0.0498	-0.0473	0.0550	0.0561	0.0635	0.0735
1	10	1	-0.0605	-0.0602	-0.0591	-0.0583	0.0605	0.0608	0.0624	0.0639
		2	-0.0605	-0.0602	-0.0591	-0.0583	0.0605	0.0608	0.0624	0.0639
	20	1	-0.0653	-0.0648	-0.0625	-0.0611	0.0653	0.0658	0.0690	0.0722
		2	-0.0653	-0.0648	-0.0625	-0.0611	0.0653	0.0658	0.0690	0.0722
	50	1	-0.0726	-0.0717	-0.0678	-0.0653	0.0726	0.0736	0.0796	0.0864
		2	-0.0726	-0.0717	-0.0678	-0.0653	0.0726	0.0736	0.0796	0.0864
	100	1	-0.0772	-0.0759	-0.0709	-0.0678	0.0772	0.0785	0.0872	0.0984
		2	-0.0772	-0.0759	-0.0709	-0.0678	0.0772	0.0785	0.0872	0.0984
3	10	1	-0.1574	-0.1568	-0.1540	-0.1521	0.1575	0.1581	0.1618	0.1653
		2	-0.1574	-0.1568	-0.1540	-0.1521	0.1575	0.1581	0.1618	0.1653
	20	1	-0.1667	-0.1657	-0.1612	-0.1582	-0.1667	0.1678	0.1740	0.1801
		2	-0.1667	-0.1657	-0.1612	-0.1582	-0.1667	0.1678	0.1740	0.1801
	50	1	-0.1771	-0.1756	-0.1691	-0.1648	0.1772	0.1787	0.1881	0.1980
		2	-0.1771	-0.1756	-0.1691	-0.1648	0.1772	0.1787	0.1881	0.1980
	100	1	-0.1823	-0.1805	-0.1729	-0.1680	0.1823	0.1842	0.1955	0.2082
		2	-0.1823	-0.1805	-0.1729	-0.1680	0.1823	0.1842	0.1955	0.2082

Çizelge 2.6 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{\tau}^{(1)}/|p|$ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri
 $(x_3/L = 1.0, \kappa = 0.3, \varepsilon = 0.07)$

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak No	α							
			Çekme				Basınç			
			5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1	1.0292	1.0290	1.0280	1.0273	-1.0292	-1.0295	-1.0307	-1.0320
		2	1.0278	1.0260	1.0221	1.0206	-1.0278	-1.0265	-1.0247	-1.0251
	20	1	1.0413	1.0408	1.0386	1.0372	-1.0413	-1.0418	-1.0449	-1.0480
		2	1.0427	1.0401	1.0331	1.0298	-1.0427	-1.0413	-1.0400	-1.0417
	50	1	1.0626	1.0614	1.0562	1.0530	-1.0626	-1.0639	-1.0720	-1.0813
		2	1.0680	1.0638	1.0508	1.0441	-1.0681	-1.0669	-1.0695	-1.0774
	100	1	1.0856	1.0833	1.0738	1.0681	-1.0857	-1.0882	-1.1055	-1.1291
		2	1.0934	1.0873	1.0676	1.0573	-1.0934	-1.0913	-1.1043	-1.1270
1	10	1	1.0537	1.0533	1.0515	1.0503	-1.0537	-1.0541	-1.0563	-1.0584
		2	1.0541	1.0526	1.0489	1.0473	-1.0541	-1.0534	-1.0538	-1.0556
	20	1	1.0715	1.0706	1.0670	1.0647	-1.0715	-1.0723	-1.0773	-1.0825
		2	1.0751	1.0727	1.0657	1.0621	-1.0751	-1.0746	-1.0770	-1.0817
	50	1	1.0977	1.0960	1.0884	1.0837	-1.0978	-1.0997	-1.0773	-1.0825
		2	1.1058	1.1017	1.0883	1.0810	-1.1059	-1.1061	-1.1150	-1.1289
	100	1	1.1215	1.1185	1.1063	1.0990	-1.1215	-1.1248	-1.1467	-1.1759
		2	1.1323	1.1264	1.1062	1.0953	-1.1324	-1.1337	-1.1527	-1.1836
3	10	1	1.1310	1.1301	1.1258	1.1228	-1.1311	-1.1320	-1.1376	-1.1428
		2	1.1294	1.1287	1.1250	1.1224	-1.1294	-1.1305	-1.1361	-1.1415
	20	1	1.1679	1.1660	1.1575	1.1519	-1.1680	-1.1700	-1.1820	-1.1943
		2	1.1614	1.1597	1.1519	1.1469	-1.1615	-1.1633	-1.1739	-1.1851
	50	1	1.2095	1.2058	1.1904	1.1808	-1.2096	-1.2134	-1.2378	-1.2658
		2	1.1955	1.1922	1.1783	1.1696	-1.1955	-1.1987	-1.2188	-1.2426
	100	1	1.2331	1.2281	1.2077	1.1954	-1.2332	-1.2385	-1.2733	-1.3171
		2	1.2141	1.2097	1.1917	1.1807	-1.2142	-1.2183	-1.2465	-1.2824

Çizelge 2.7 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{\tau}^{(2)}/|p|$ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri
($x_3/L=1.0$, $\kappa=0.3$, $\varepsilon=0.07$)

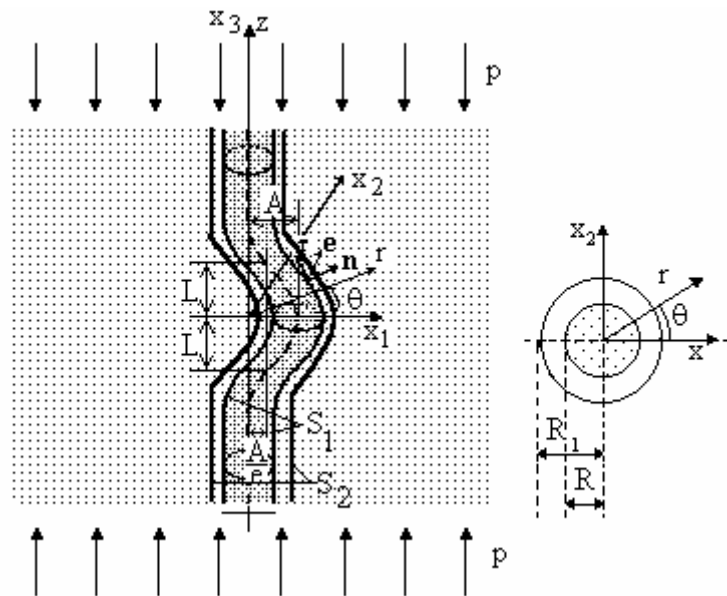
m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Yak No	α							
			Çekme				Basınç			
			$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-3}$	$-3 \cdot 10^{-2}$	$-5 \cdot 10^{-2}$
0	10	1	1.0360	1.0356	1.0339	1.0327	-1.0360	-1.0363	-1.0358	-1.0405
		2	1.0322	1.0302	1.0255	1.0235	-1.0322	-1.0309	-1.0298	-1.0308
	20	1	1.0504	1.0496	1.0459	1.0435	-1.0504	-1.0513	-1.0564	-1.0618
		2	1.0493	1.0463	1.0376	1.0333	-1.0493	-1.0481	-1.0486	-1.0523
	50	1	1.0652	1.0636	1.0569	1.0527	-1.0653	-1.0670	-1.0783	-1.0920
		2	1.0682	1.0634	1.0486	1.0409	-1.0682	-1.0673	-1.0725	-1.0843
	100	1	1.0671	1.0654	1.0582	1.0538	-1.0672	-1.0690	-1.0813	-1.0960
		2	1.0724	1.0667	1.0492	1.0400	-1.0724	-1.0712	-1.0763	-1.0892
1	10	1	1.0692	1.0685	1.0656	1.0635	-1.0692	-1.0698	-1.0736	-1.0772
		2	1.0676	1.658	1.0609	1.0584	-1.0676	-1.0671	-1.0689	-1.0721
	20	1	1.0958	1.0944	1.0880	1.0839	-1.0958	-1.0973	-1.1063	-1.1155
		2	1.0974	1.0944	1.0845	1.0790	-1.0975	-1.0975	-1.1036	-1.1121
	50	1	1.1259	1.1230	1.1110	1.1036	-1.1259	-1.1290	-1.1487	-1.1720
		2	1.1322	1.1269	1.1087	1.0986	-1.1322	-1.1335	-1.1496	-1.1727
	100	1	1.1372	1.1336	1.1191	1.1103	-1.1373	-1.1411	-1.1662	-1.1977
		2	1.1464	1.1398	1.1171	1.1046	-1.1465	-1.1482	-1.1698	-1.2022
3	10	1	1.1755	1.1739	1.1666	1.1615	-1.1756	-1.1772	-1.1866	-1.1955
		2	1.1745	1.1731	1.1663	1.1616	-1.1745	-1.1763	-1.1857	-1.1948
	20	1	1.2424	1.2389	1.2235	1.2133	-1.2425	-1.2461	-1.2677	-1.2900
		2	1.2370	1.2337	1.2188	1.2092	-1.2370	-1.2405	-1.2607	-1.2819
	50	1	1.3206	1.3137	1.2848	1.2667	-1.3207	-1.3280	-1.3739	-1.4270
		2	1.3082	1.1731	1.1663	1.2568	-1.3084	-1.3149	-1.3568	-1.4059
	100	1	1.3614	1.3523	1.3146	1.2917	-1.3616	-1.3715	-1.4359	-1.5165
		2	1.3447	1.3360	1.3003	1.2786	-1.3449	-1.3536	-1.4119	-1.4856

3. YEREL EĞRİLİKLİ SARILI TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GERİLME YAYILIMI

Bu bölümde yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz ortamdaki gerilme yayılımı problemi, lif ile matris malzemeleri arasında kalınlığı sabit bir başka malzeme olması durumunda incelenecektir. Bu malzeme lif boyunca lif ile matris malzemesi arasında bir geçiş malzemesi olabileceği gibi malzeme dizaynı gereği de yerleştirilmiş bir malzeme olabilir. Lif, lifi saran malzeme olarak isimlendireceğimiz geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin temas yüzeylerinde oluşan gerilmeler ve bu gerilmelere geometrik nonlineeritenin etkisi bu bölümün kapsamını oluşturmaktadır.

3.1 Problemin Formülasyonu

Bir önceki bölümde ele alınan düşük yoğunluklu lifler içeren elastik ortam lif boyunca kalınlığı değişmeyen geçiş malzemesi olması durumuna genişletilecektir. Şekil 3.1’de böyle bir malzeme şematik olarak gösterilmiştir. Burada da lifin yüzeyine dik kesitlerinin lif boyunca değişmeyen R yarıçaplı daire olduğu, geçiş malzemesinin de şekilde gösterilen R_1 - $R=h$ kalınlığının lif boyunca sabit olduğunu varsayacağız.



Şekil 3.1 Yerel eğrilikli sarı lif içeren sonsuz elastik cismin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

Şekil 3.1’ de gösterilen $Ox_1x_2x_3$ kartezyen, $Or\theta z$ silindirik koordinat takımı olduklarını ve

bu koordinatların Lagrange koordinatları olduklarını bir kez daha söyleyelim. Cismin sonsuzda lif yönünde p yoğunluklu düzgün dağılmış normal kuvvetler etkisinde olduğunu kabul edeceğiz.

İncelemelerimizi lif, geçiş malzemesi ve matrisin farklı lineer elastik malzemelerden oluştuğunu varsayıp, sürekli ortamlar mekaniğinin kesin üç boyutlu geometrik nonlineer denklemlerini kullanarak yapalım. Lifin başlangıç küçük eğriliğini

$$x_1 = A \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right) = \varepsilon L \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right) = \varepsilon \delta(x_3) ; \varepsilon = \frac{A}{L} \quad (3.1)$$

şeklinde verelim. Burdaki ε parametresi, $L > A$ kabulü ile $\varepsilon = \frac{A}{L}$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) dir.

Lif ile lifi saran malzeme arayüzeyini S_1 , lifi saran malzeme ile matris malzemesi arayüzeyi S_2 ile gösterirsek, bu yüzeylerin denklemlerini lif-en kesitinin sağladığı koşuldan yararlanarak

$$r_k = (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2 \sin^2 \theta)^{-1} \left\{ (\varepsilon \delta(t_3) + \varepsilon^3 \delta(t_3)) (\delta'(t_3))^2 \sin \theta + \left[R^2 - \varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 - \varepsilon^4 (\delta'(t_3))^2 (\delta'(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} \right] \right\} \quad (3.2)$$

$$z_k = t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) r(t_3) \sin \theta + \varepsilon^2 \delta(t_3) \delta'(t_3), \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3}$$

Şeklinde elde ederiz. Burada $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ bir parametredir. (3.2)'denkleminden yararlanarak ve bazı bilinen işlemleri yaparak S_k ($k=1,2$) yüzeylerinin birim dış normallerinin bileşenleri için aşağıdaki ifadeleri elde ediyoruz.

$$n_r = r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1},$$

$$n_\theta = \left[\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right] [A(\theta, t_3)]^{-1}$$

$$n_z = -r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1} \quad (3.3)$$

Burada

$$A(\theta, t_3) = \left[\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \right)^2 \right] +$$

$$\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \Bigg]^{1/2} \quad (3.4)$$

şeklindedir. İleride sırası ile lif ve geçiş malzemesine ait olan büyüklükleri (2), (3) ve matris (sonsuz elastik ortama) ait olan büyüklükleri ise (1) üst indis ile göstereceğiz. Lif, geçiş malzemesi ve sonsuz elastik ortamda aşağıdaki alan denklemleri sağlanır.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] = 0, \quad 2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)},$$

$$\sigma_{(in)}^{(k)} = \lambda^{(k)} e^{(k)} \delta_i^n + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k)}, \quad e^{(k)} = \varepsilon_{(rr)}^{(k)} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k)} + \varepsilon_{(zz)}^{(k)} \quad (3.5)$$

Sq yüzeyleri üzerinde ideal temas koşullarının sağlandığını kabul edelim ve bu koşulları

$$\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \Big|_{S_q} n_j = \sigma^{(3)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(3)j} \right) \Big|_{S_q} n_j, \quad u_j^{(k)} \Big|_{S_q} = u_j^{(3)} \Big|_{S_q} \quad k=1,2 \quad (3.6)$$

biçiminde yazalım. Ele alınan durumda aşağıdaki sınır koşullarının sağlandığını varsayacağız.

$$\sigma_{zz}^{(1)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (3.7)$$

İleride yapılacak araştırmalarda gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleri kullanılacaktır. Bu durumda (2.10) formüllerinden yararlanılacaktır. Yukarıda verilen formüllerde tansör notasyonu kullanılmıştır. Bu notasyon ileride de kullanılacaktır. Bunun yanında altı çizili indislere göre toplam yapılmayacaktır.

Böylece ele alınan problemin formülasyonu tamamlanmış olmaktadır. Problem, (3.5) denklemlerinin (3.7) sınır koşulları çerçevesinde çözümüne getirilmiştir.

3.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi

Sonsuz elastik matrisin yerel eğrilikli tek lif içermesi durumunda olduğu gibi, bu problemin incelenmesi için de Akbarov ve Guz (1985a, 2000)'de verilmiş olan sınır-formu pertürbasyon yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemle göre, aranan büyüklükler, yukarıda tanımlanan ε parametresine göre seri halde aranır.

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q u_r^{(k),q} \quad (3.8)$$

Ayrıca S_k arayüzeylerinin denklemlerini oluşturan (3.4) ve bu yüzeylerin birim normallerinin

bileşenlerini gösteren (3.3) ifadeleri de ε 'nun serisi halinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} r &= R + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_k(\theta, t_3), \quad z = t_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_k(\theta, t_3), \\ n_r &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(\theta, t_3), \quad n_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k d_k(\theta, t_3), \quad n_z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k(\theta, t_3) \end{aligned} \quad (3.9)$$

bu ifadelerde yer alan ve ε^k ların katsayıları olan $a_k(\theta, t_3), \dots, g_k(\theta, t_3)$ 'ler (3.2) ve (3.3)'den kolaylıkla elde edilebilir. (3.5)'den (3.8)'deki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan alan denklemleri elde edilir. (3.9)'u kullanırsak (3.8)'deki her bir yaklaşım ($r=R, \theta, t_3$) civarında seriye açarız. Bu son ifadeleri (3.6)' da yerine koyar ve n_r, n_θ, n_z 'lerin (3.9)' daki ifadeleri kullanılırsa, bazı uzun ama bilinen işlemler sonucunda, (3.8)'deki her bir yaklaşım için $r=R$ 'de sağlanan temas koşulları elde edilir. Bu durumda k. temas koşuluna önceki k-1. yaklaşımların tümüne ait büyüklükler dahil olmaktadır. Şimdi sıfıncı ve birinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadelerini ele alalım.

Sıfıncı Yaklaşım

Sıfıncı yaklaşım için (3.5) denklemleri sağlandığı açıktır. (3.6) koşulları $r=R$ 'de sağlanan aynıları ile yer değiştirirler. Tek lif durumunda olduğu gibi $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ olduğunu kabul edeceğiz. Böylece $g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0}$ terimleri δ_n^j ile yer değiştirirler. Burada δ_n^j Kronecker sembolleridir. Bu kabule göre sıfıncı yaklaşıma ait denklemler takımı

$$\begin{aligned} \nabla_i \sigma^{(k),ij,0} &= 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_i u_j^{(k),0} \\ \sigma_{(in)}^{(k),0} &= (\lambda^{(k)} e^{(k),0}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),0}), \quad e^{(k),0} = \varepsilon_{(rr)}^{(k),0} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),0} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve temas koşulları

$$\sigma_{(ij)}^{(k),0} \Big|_{r=R} = \sigma_{(ij)}^{(3),0} \Big|_{r=R}, \quad u_{(i)}^{(k),0} \Big|_{r=R} = u_{(i)}^{(3),0} \Big|_{r=R}; \quad k=1,2, (ij)=rr, r\theta, rz, (i)=r, \theta, z, q=1,2 \quad (3.11)$$

olarak elde ederiz. Böylece sıfıncı yaklaşım için (3.10) denklemlerinin (3.11) temas koşulları çerçevesinde çözümlenmesine indirgenmiş olur.

Birinci Yaklaşım

Bu varsayımlar dikkate alınırse birinci yaklaşım için aşağıdaki denklemler sistemi elde edilir.

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,q} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,0}] = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i (\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m}) \quad (3.12)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \nabla_j u_i^{(k),q} + \nabla_i u_j^{(k),q} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_i u_n^{(k),s} \quad (3.13)$$

Birinci yaklaşım için (3.12), (3.13)'deki altı çizili terimler sıfır olacağından, söz konusu yaklaşım için alan denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,0}] = 0 \quad (3.14)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = (\lambda^{(k)} e^{(k)}_{(in)}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),1}), \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{(rr)}^{(k),1} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),1} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),1} \quad (3.16)$$

(3.14)-(3.16) denklemlerindeki büyüklüklerin hepsi, ilgili fiziksel bileşenleri ile verilmektedir. Yukarıdaki işlemleri (3.6) içinde tekrarlar ve yaptığımız kabulleri dikkate alırsak birinci yaklaşım için aşağıdaki temas koşullarını elde ederiz.

$$\begin{aligned} & [\sigma_{(ir)}]_{3,1}^{k,1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{3,0}^{k,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{3,0}^{k,0} + \gamma_r [\sigma_{(ir)}]_{3,0}^{k,0} + \gamma_\theta [\sigma_{(i\theta)}]_{3,0}^{k,0} + \gamma_z [\sigma_{(iz)}]_{3,0}^{k,0} = 0 \\ & [u_{(i)}]_{3,1}^{k,1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{3,0}^{k,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{3,0}^{k,0} = 0, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Böylece birinci yaklaşıma ait denklemler ve temas koşulları çıkarılmış olmaktadır. (3.17) denkleminde kullanılan fonksiyonların açık ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} & [\varphi]_{3,s}^{k,s} = \varphi^{(k),s} - \varphi^{(3),s}, \quad k=1,2 \\ & f_1 = \delta(t_3) \cos \theta, \quad \varphi_1 = -R \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta, \\ & \gamma_r = \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \frac{d^2 \delta(t_3)}{dt_3^2} R \right) \cos \theta, \quad \gamma_\theta = -\frac{\delta(t_3)}{R} \sin \theta, \quad \gamma_z = -\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta \end{aligned} \quad (3.18)$$

Yapacağımız araştırmalar sıfıncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde olacağından alan denklemleri ve temas koşullarının ifadelerini sözünü ettiğimiz yaklaşımlar çerçevesinde

yazmış olmakla yetineceğiz. Benzer işlemlerle diğer yaklaşımlar da elde edilebilir.

3.3 Uygun Sınır-Değer Problemlerinin Çözümlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda yukarıda formülasyonu verilen sıfırcı ve birinci yaklaşımlara ait sınır-değer problemlerinin çözümlerini elde edeceğiz. Sadelik için sırasıyla lif, geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin $\nu^{(2)}$, $\nu^{(3)}$ ve $\nu^{(1)}$ Poisson oranlarının eşit olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda sıfırcı yaklaşım için aşağıdaki çözümü elde ederiz

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1),0} &= p, \quad \sigma_{zz}^{(2),0} = \sigma_{zz}^{(3),0} = p \frac{E^{(3)}}{E^{(1)}} = p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \epsilon_{zz}^{(2),0} = \epsilon_{zz}^{(3),0} = \epsilon_{zz}^{(1),0} = \frac{p}{E^{(1)}}, \quad u_r^{(1),0} = -\nu^{(1)} \epsilon_{zz}^{(1),0} r, \\ u_r^{(2),0} &= -\nu^{(2)} \epsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_r^{(3),0} = -\nu^{(3)} \epsilon_{zz}^{(3),0} r, \quad u_z^{(2),0} = u_z^{(3),0} = u_z^{(1),0} = \frac{p}{E^{(1)}} z; \quad \sigma_{ij}^{(3),0} = \sigma_{ij}^{(1),0} = 0 \quad (ij) = rr, r\theta, \theta z, rz \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.18)'deki $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$ sırası ile matris, lif ve geçiş malzemelerinin elastisite modülleridir.

Şimdi birinci yaklaşıma ait olan (3.14)-(3.17) probleminin çözümünü ele alalım. Yukarıda yapılan kabuller ve sıfırcı yaklaşımın (3.19) çözümünün dikkate alınması ile (3.14) denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

haline gelir. Bu denklemler üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakışmaktadır. Benzer şekilde (3.15) denklemleri

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \quad \epsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),1}}{r} \right), \quad \epsilon_{rz}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right), \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r}, \quad \epsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \right), \quad \epsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.21)$$

olur. Sıfırcı yaklaşım için elde edilen çözüm dikkate alınırsa birinci yaklaşıma ait (3.17) temas koşulları aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\begin{aligned}
[\sigma_{rr}]_{3,1}^{k,1} &= 0, [\sigma_{r\theta}]_{3,1}^{k,1} = 0, [\sigma_{rz}]_{3,1}^{k,1} = -(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \Big|_{(R,0,t_3)} \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos\theta, \\
[u_r]_{3,1}^{k,1} &= 0, [u_\theta]_{3,1}^{k,1} = 0, [u_z]_{3,1}^{k,1} = 0, k=1,2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

(3.22) denklemlerinin çözümü için (3.20)'u dikkate alarak aşağıdaki gösterilimi (Guz, 1999) kullanalım.

$$\begin{aligned}
u_r^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)}, \quad u_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k)} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)}, \\
u_z^{(k)} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)}, \quad \Delta_1^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Buradaki $\psi^{(k)}$ ve $\chi^{(k)}$ fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)} = 0, \quad \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_3^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0 \tag{3.24}$$

burada $\xi_i^{(k)}$ ($k=1,2,3$; $i=1,2,3$)'ler sabitler ve aşağıdaki şekilde belirlenirler.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}} \tag{3.25}$$

Birinci yaklaşımla ilgili sınır-değer problemini çözmek için (2.37) ile verilen Fourier dönüşümü uygulayarak (2.38), (2.39), (2.40) denklemlerini elde ederiz. (3.22) temas koşulları ise

$$\begin{aligned}
[\bar{\sigma}_{rr}]_{3,1}^{k,1} &= 0, [\bar{\sigma}_{r\theta}]_{3,1}^{k,1} = 0, [\bar{\sigma}_{rz}]_{3,1}^{k,1} = (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \frac{i s}{L} \bar{\delta}(t_3) \cos\theta, \\
[\bar{u}_r]_{3,1}^{k,1} &= 0, [\bar{u}_\theta]_{3,1}^{k,1} = 0, [\bar{u}_z]_{3,1}^{k,1} = 0, k=1,2, \quad \bar{\delta}(t_3) = s \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(e^{-\frac{(s+m)^2}{4}} + e^{-\frac{(s-m)^2}{4}} \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

haline gelir. Bu denklemleri çözmek için kullanılacak gösterilim $\bar{\Psi}^{(k)}$, $\bar{\chi}^{(k)}$ 'nin sağlaması gereken diferansiyel denklemler sırasıyla (2.42), (2.43) şeklinde elde edilir. (2.43) diferansiyel denklemleri, (2.38) denge denklemleri ve (3.25) temas koşulları dikkate alınarak çözülürse

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}^{(1),1} &= \bar{A}_1^{(1)}(s) K_1\left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s\right) \sin \theta \\
\bar{\chi}^{(1),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(1)} K_1\left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s\right) + \bar{A}_3^{(1)} K_1\left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s\right) \right] \cos \theta \\
\bar{\Psi}^{(2),1} &= \bar{A}_1^{(2)} I_1\left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s\right) \sin \theta \\
\bar{\chi}^{(2),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(2)} I_1\left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s\right) + \bar{A}_3^{(2)} I_1\left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s\right) \right] \cos \theta \\
\bar{\Psi}^{(3),1} &= \left[\bar{A}_1^{(3)} I_1\left(\frac{r}{L} \xi_1^{(3)} s\right) + \bar{B}_1^{(3)} K_1\left(\frac{r}{L} \xi_1^{(3)} s\right) \right] \sin \theta \\
\bar{\chi}^{(3),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(3)} I_1\left(\frac{r}{L} \xi_2^{(3)} s\right) + \bar{A}_3^{(3)} I_1\left(\frac{r}{L} \xi_3^{(3)} s\right) + \bar{B}_2^{(3)} K_1\left(\frac{r}{L} \xi_2^{(3)} s\right) + \bar{B}_3^{(3)} K_1\left(\frac{r}{L} \xi_3^{(3)} s\right) \right] \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.27}$$

bulunur. Burada $I_n(x)$ sanal argümanlı Bessel fonksiyonu ve $K_n(x)$ Macdonald fonksiyonlarıdır. (3.27) fonksiyonları (2.42)'de kullanılıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra (3.26)'da ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{A}_i^{(11)} H_{ij}^{(1)} + \bar{A}_i^{(21)} H_{ij}^{(2)} + \bar{B}_i^{(31)} H_{ij}^{(3)} + \bar{A}_i^{(31)} L_{ij}^{(3)} &= (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \delta_3^j s \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(e^{\frac{(s+m)^2}{4}} + e^{\frac{(s-m)^2}{4}} \right), \quad i=1,2,3, \\
j &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
\end{aligned}$$

$$\bar{A}_1^{(k1)} = \frac{\bar{A}_1^{(k)}}{L}, \dots, \bar{A}_i^{(k1)} = \frac{\bar{A}_i^{(k)}}{L^2}, \quad \bar{B}_1^{(31)} = \frac{\bar{B}_1^{(3)}}{L^2}; \quad k=1,2,3, \quad i=2,3 \tag{3.28}$$

elde edilir. $H_{ij}^{(q)}$ ve $L_{ij}^{(3)}$ açık şekli Ek 3'de verilen ifadelerdir. Böylece 12x12'lik lineer denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu sistem çözülerek $\bar{A}_1^{(11)}(s)$, $\bar{A}_2^{(11)}(s)$, $\bar{A}_3^{(11)}(s)$, $\bar{A}_1^{(21)}(s)$, $\bar{A}_2^{(21)}(s)$, $\bar{A}_3^{(21)}(s)$, $\bar{B}_1^{(31)}(s)$, $\bar{B}_2^{(31)}(s)$, $\bar{B}_3^{(31)}(s)$, $\bar{A}_1^{(31)}(s)$, $\bar{A}_2^{(31)}(s)$, $\bar{A}_3^{(31)}(s)$ bilinmeyenleri belirlenmiş olur. Böylece hesaplanmak istenen gerilme değerlerinin Fourier dönüşümlü hali elde edilebilir. Gerçek değerlere ulaşmak için (2.47) ile verilen ters Fourier dönüşümü uygulanır.

3.4 Sayısal Sonuçlar

Yerel eğrilikli sarılı tek lif içeren sonsuz elastik ortamdaki gerilme yayılımına ait olan sayısal

sonuçlar bulunurken, bir önceki bölümde incelenen problem ile benzer yol izlenecektir. Ulaşılmak istenen büyüklüklerin ters Fourier dönüşümleri bir önceki bölümde açıklanan şekli ile 10 noktalı Gauss- Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Gerilme değerleri hem lif ile geçiş malzemesi arasındaki temas yüzeyinde hem de geçiş malzemesi ile matris arayüzeyinde elde edilmiştir.

Sayısal sonuçlar için $\kappa=R/L$ ve h/L parametrelerini tanımlayalım ve $v^{(1)}=v^{(2)}=v^{(3)}=0.3$, $\varepsilon=0.07$ $\kappa=0.1$ olduğunu söyleyelim. Geometrik nonlinearitenin gerilme yayılımına etkisini göstermek için $\alpha=p/E^{(1)}$ parametresini kullanalım. $\sigma_{nn}/|p|$ ve $\sigma_{ne}/|p|$ için $\theta=0$, $\sigma_{nt}/|p|$ için ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ 'dir

Şekil 3.1-3.3 grafikleri sırasıyla $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ gerilmelerinin h/L parametresine göre değişimini göstermektedir. Bu şekillerde $m=1$, $\frac{E^{(1)}}{E^{(3)}}=\frac{1}{40}$, $\frac{E^{(2)}}{E^{(3)}}=50$ dir. Ayrıca $\sigma_{nn}/|p|$ ve $\sigma_{ne}/|p|$ için $x_3/L=0$ 'dır. $\sigma_{nt}/|p|$ için ise $x_3/L=0.9$ 'dur. Bu şekillerde kesikli çizgi ile gösterilen doğrular aynı değerlerde sarılı olmayan tek lif durumundaki gerilme değerlerini göstermektedir. Bu şekillerden açıkça görülmektedir ki h/L değeri büyüdükçe sarılı tek lif durumundaki gerilmelerin değerleri sarılı olmayan tek lif durumundaki değerlere yaklaşmaktadır. Bu beklenen bir durumdur.

Şekil3.4-3.7 grafikleri, $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=40$ değerinde $m=0, 1, 3$ için $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ ile h/L parametresi arasındaki ilişkiye geometrik nonlineariteyi gösteren α 'nın etkisini göstermektedir. $h/L=0$ durumunda elde edilen değerlerin tek lif durumuyla çakıştığı görülmektedir. m 'nin değeri büyüdükçe sınırdaki gerilme değerlerinin de büyüdüğü ayrıca her iki temas yüzeyinde de $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$ ve $\sigma_{ne}/|p|$ gerilmelerinin mutlak değeri, basınçta (çekmede) $|\alpha|$ ile monoton olarak azalmaktadır. (artmaktadır.)

Gerilmelerin x_3/L parametresine göre değişimini gösteren şekil 3.7-3.9 grafikleri de, $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=30$ ve $\frac{h}{L}=2$ değerinde $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ ve $\sigma_{nt}/|p|$ gerilme değerleri ile x_3/L arasındaki bağımlılığa geometrik nonlinearitenin etkisini göstermektedir. Bu grafiklerden görülmektedir ki geçiş malzemesine ait olan temas yüzeyindeki gerilme değerleri $|\alpha|$ monoton

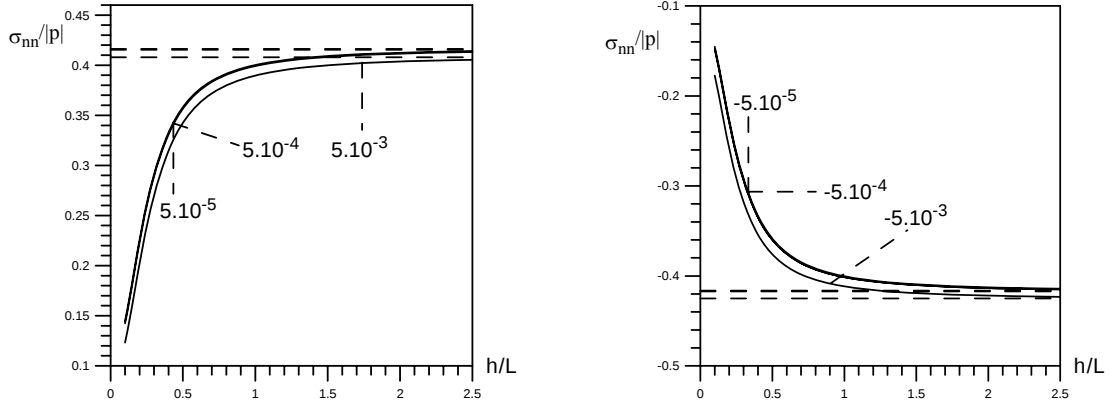
olarak azaldıkça basınçta (çekmede) azalmaktadır (artmaktadır). Yine m 'nin değeri büyüdükçe gerilme değerleri de mutlak olarak büyümektedir.

Çizelge 3.1'de $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nr}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ gerilme değerleri, $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\alpha=5.10^{-5}$, $h/L=0.2$,

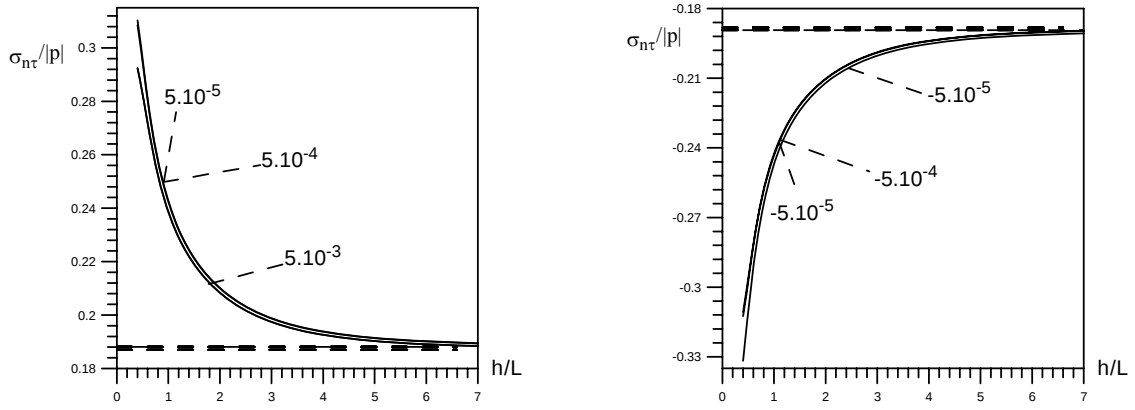
$\varepsilon=0.07$ değerlerinde farklı m , $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}$ ve κ parametrelerine göre verilmiştir. Burada $\sigma_{nn}/|p|$ ve

$\sigma_{ne}/|p|$ için $x_3/L=0$, $\sigma_{nr}/|p|$ için $x_3/L=0.7$ olarak alınmıştır. Bu çizelgeden $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}$

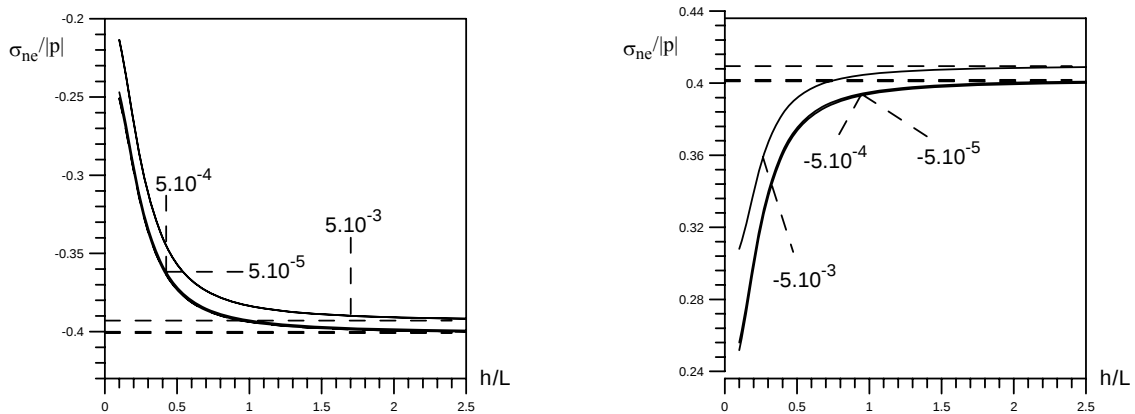
büyüdükçe geçiş malzemesiyle matris yüzeyindeki gerilme değerlerinin de mutlak değerce büyüdüğü, κ değeri büyüdükçe de gerilme değerlerinin mutlak olarak azaldığı görülmektedir. Ayrıca m 'nin değeri arttıkça de gerilme değerlerinin de mutlak olarak arttığı izlenmiştir.



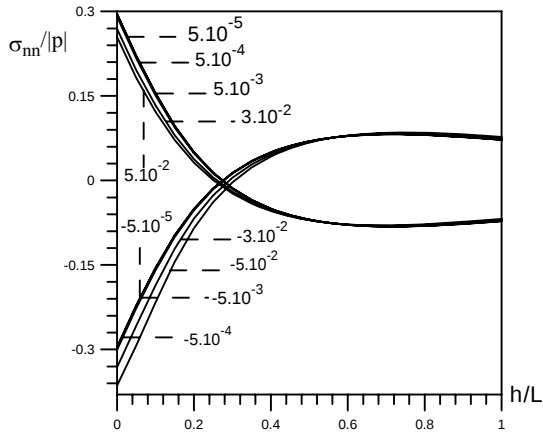
Şekil 3.1 Çeşitli α ' lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık ($m=1$, $E^{(2)}/E^{(3)}=50$, $E^{(1)}/E^{(3)}=1/40$, $x_3/L=0$, $\varepsilon=0.07$, $\theta=0$)



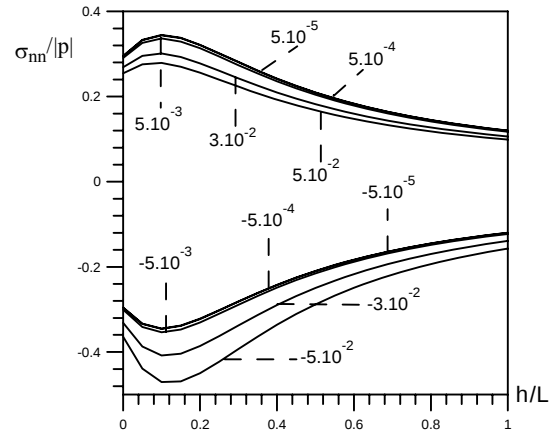
Şekil 3.2 Çeşitli α ' lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık ($m=1$, $E^{(2)}/E^{(3)}=50$, $E^{(1)}/E^{(3)}=1/40$, $x_3/L=0.9$, $\varepsilon=0.07$, $\theta=\pi/2$)



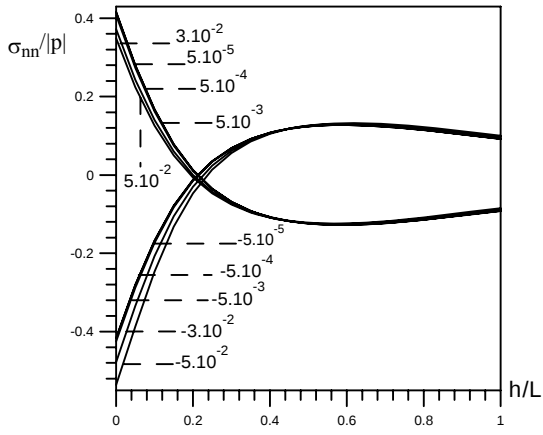
Şekil 3.3 Çeşitli α ' lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık ($m=1$, $E^{(2)}/E^{(3)}=50$, $E^{(1)}/E^{(3)}=1/40$, $x_3/L=0$, $\varepsilon=0.07$, $\theta=0$)



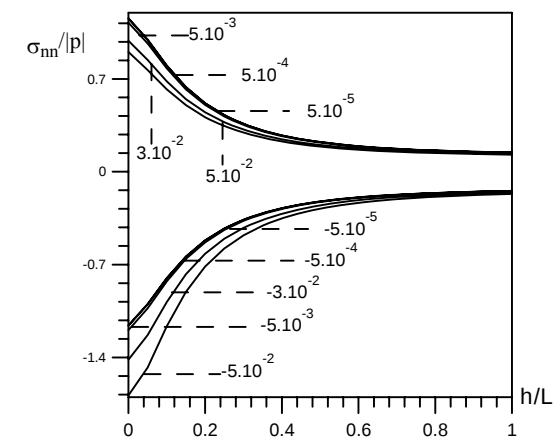
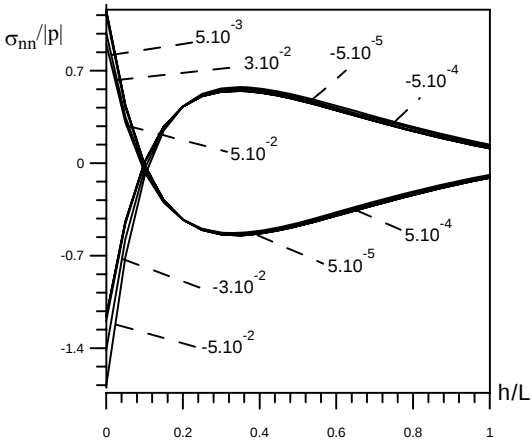
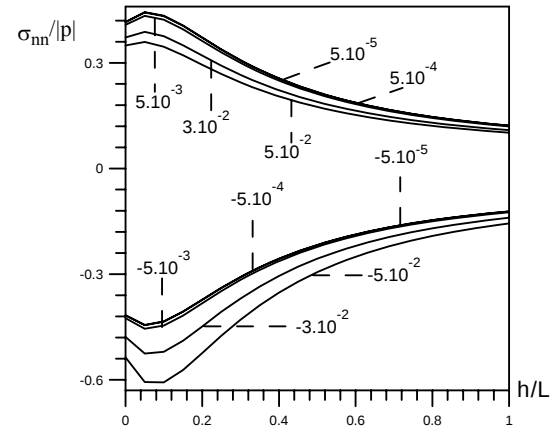
(a)



(b)

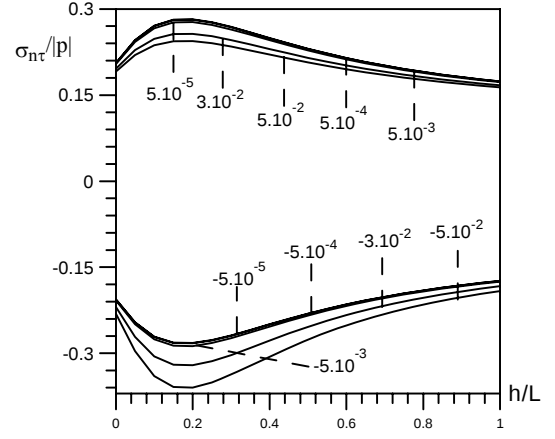
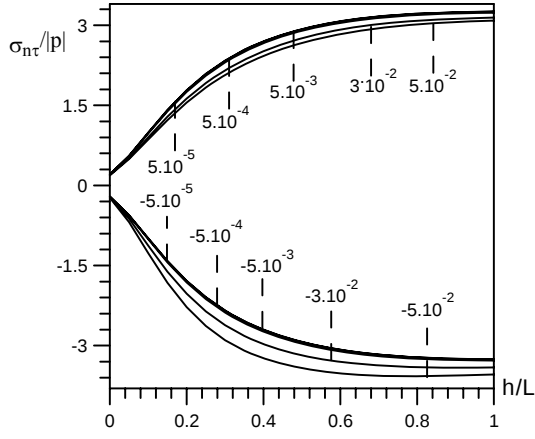


(c)

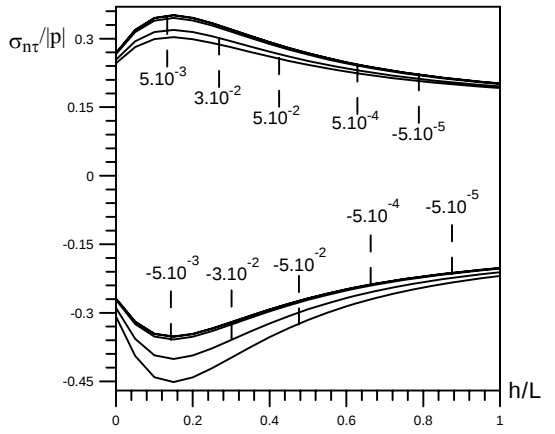
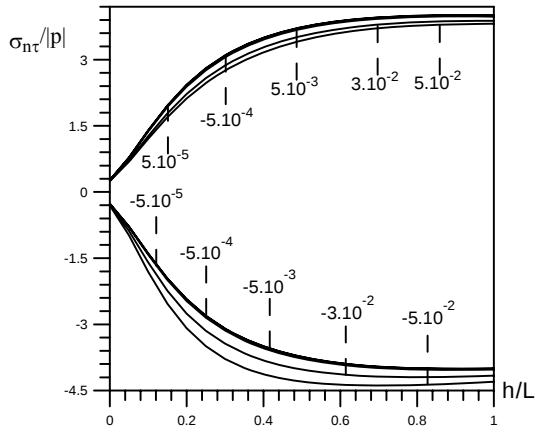


Şekil 3.4 $\sigma_{nn}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=40$, $\varepsilon=0.07$, $\theta=0$, (a) $m=0$, (b)

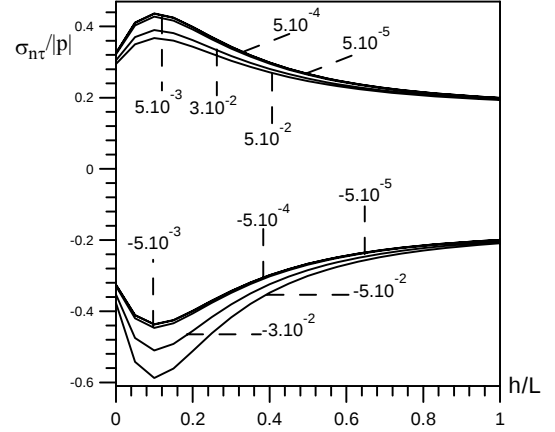
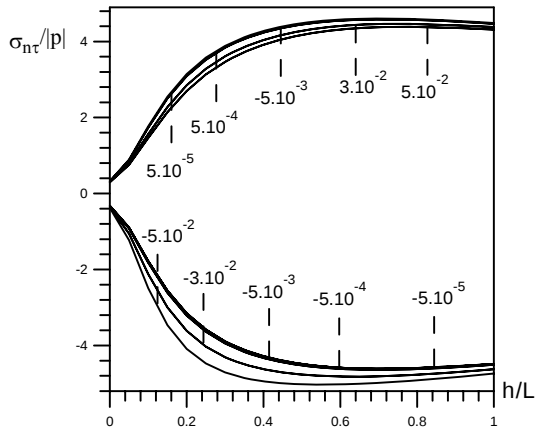
$m=1$, (c) $m=3$)



(a)



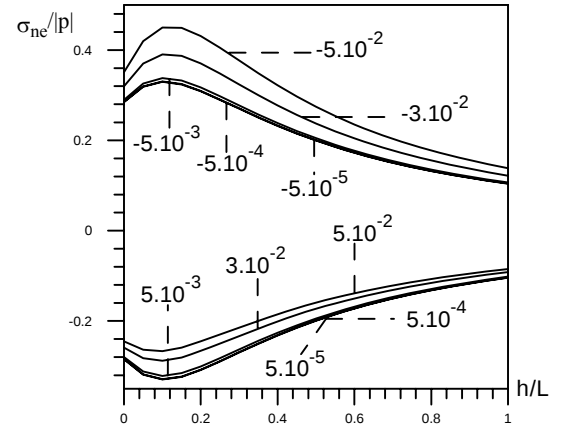
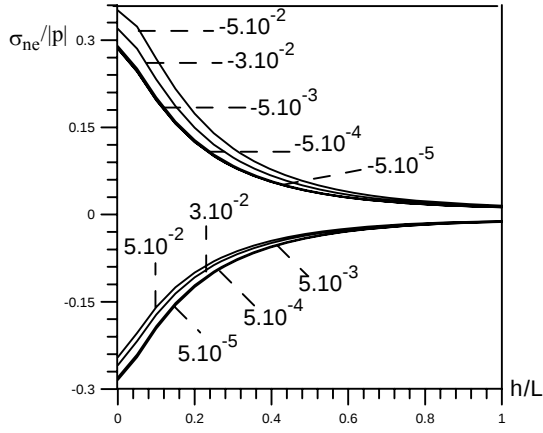
(b)



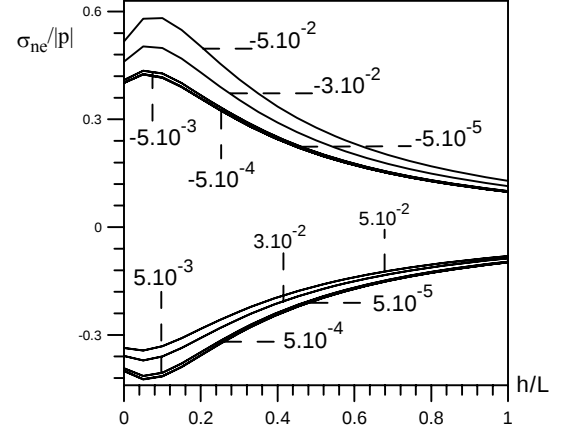
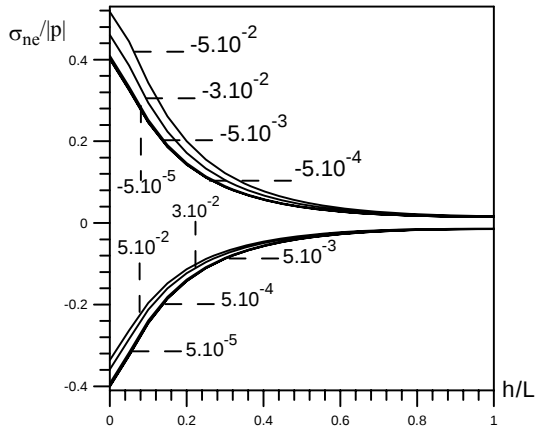
(c)

Şekil 3.5 $\sigma_{nr}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=40$, $\varepsilon=0.07$, $\theta=\pi/2$, (a) $m=0$,

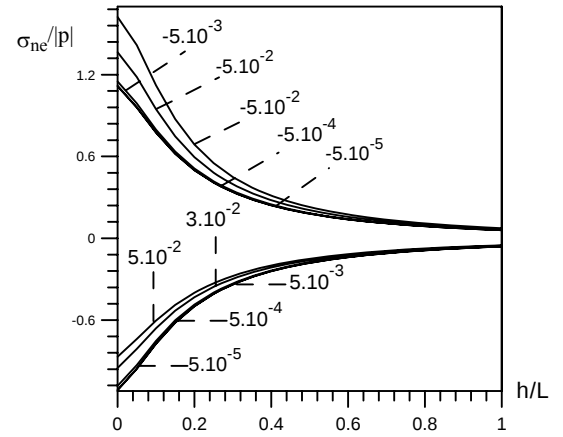
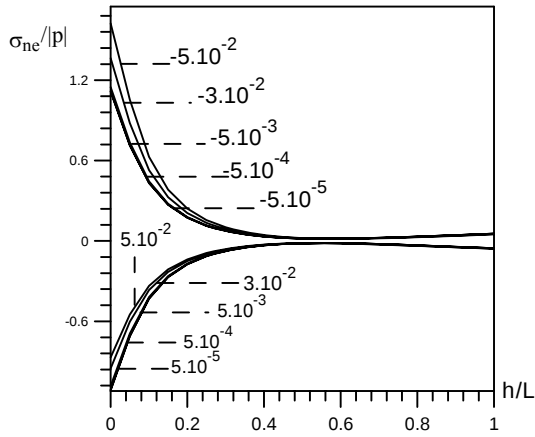
(b) $m=1$, (c) $m=3$)



(a)



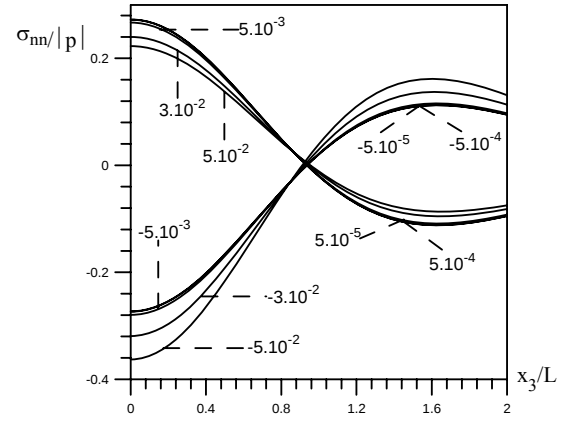
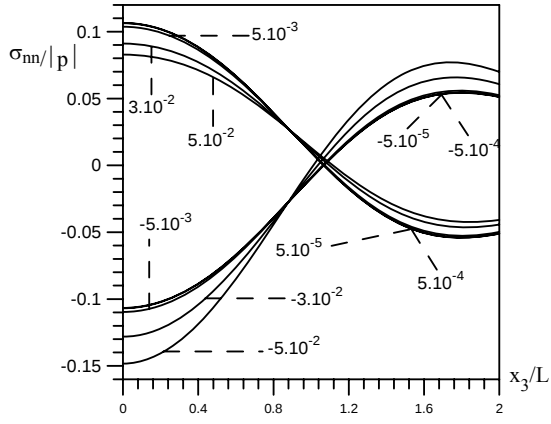
(b)



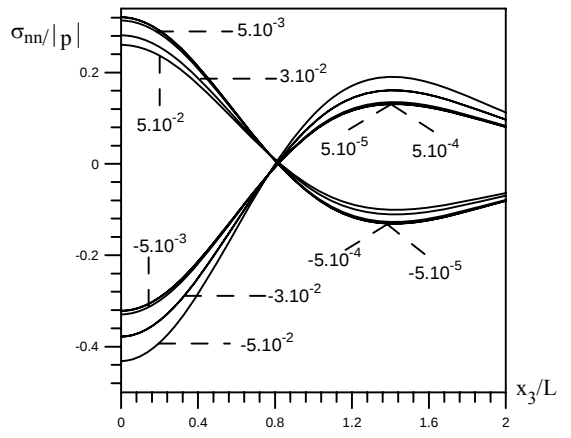
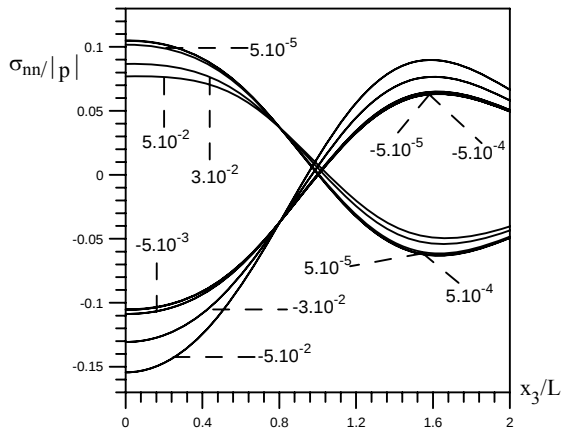
(c)

Şekil 3.6 $\sigma_{ne}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=40$, $\epsilon=0.07$, $\theta=0$, (a) $m=0$, (b)

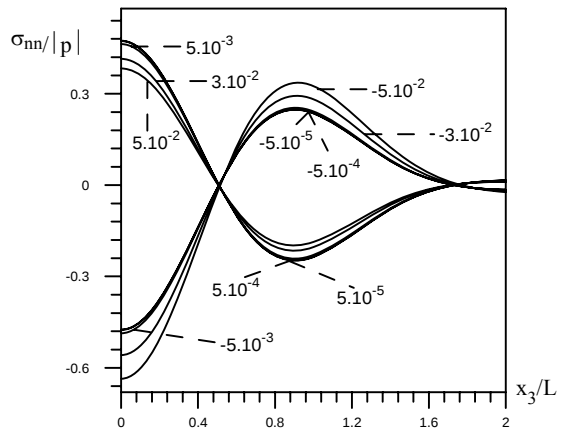
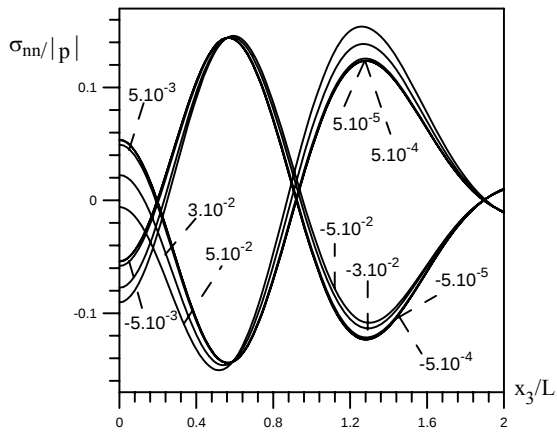
$m=1$, (c) $m=3$)



(a)



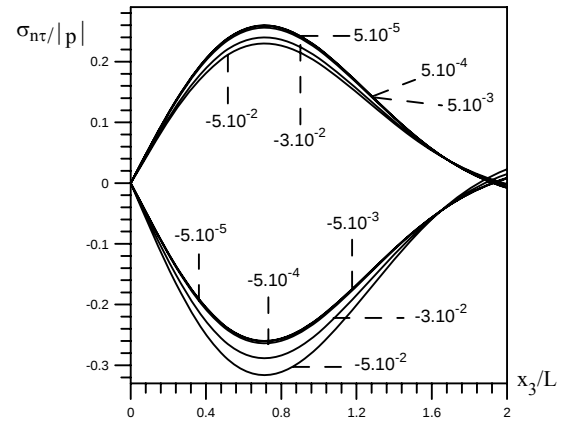
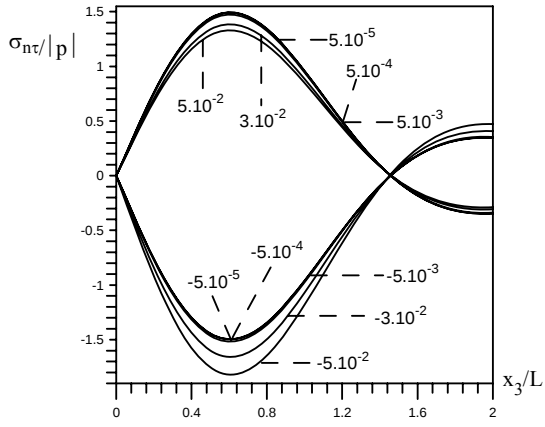
(b)



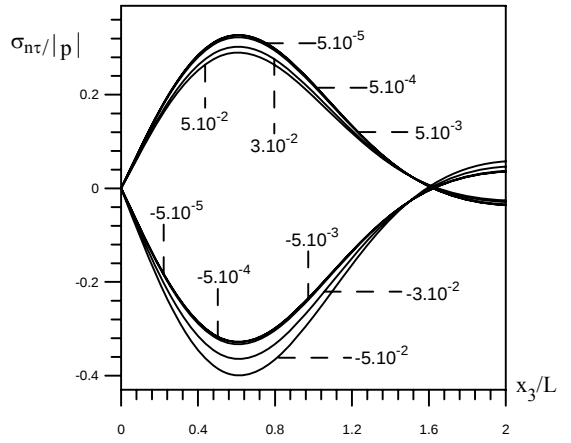
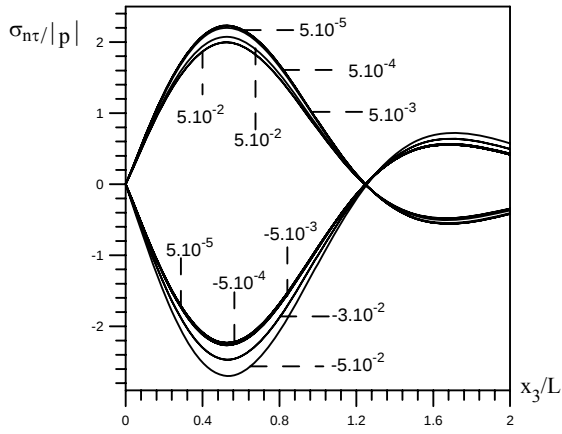
(c)

Şekil 3.7 Çeşitli α değerlerinde $\sigma_{nn}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=30$,

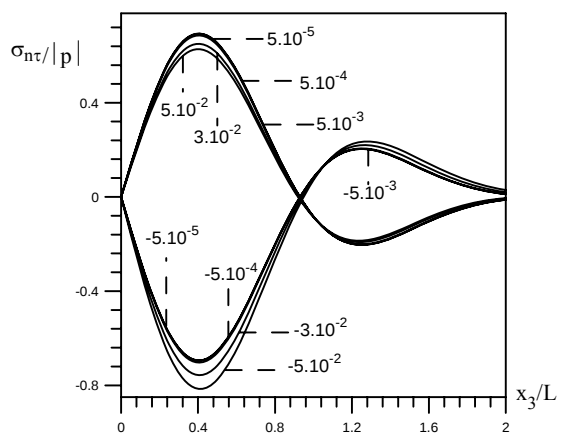
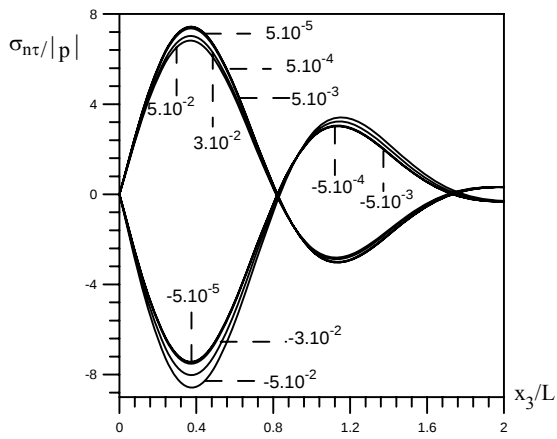
$\varepsilon=0.07$, $\theta=0$, (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$)



(a)



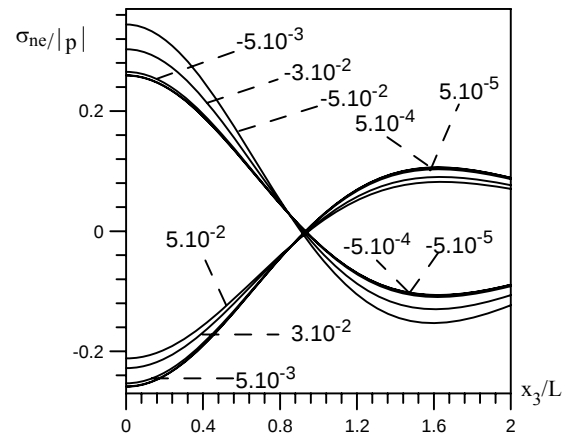
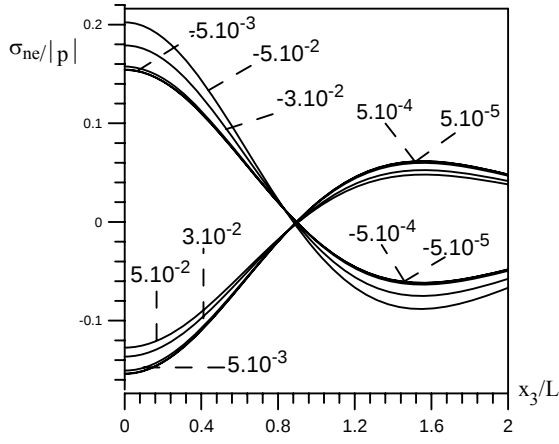
(b)



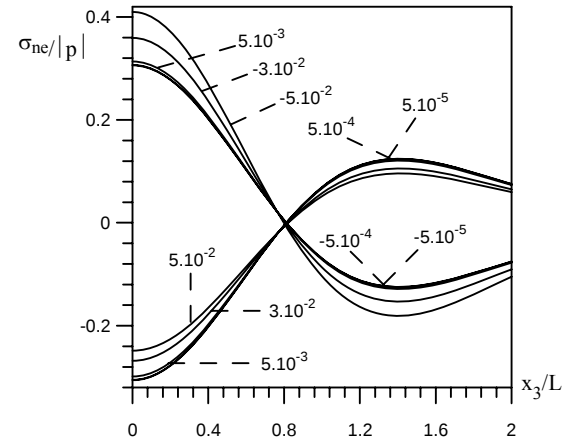
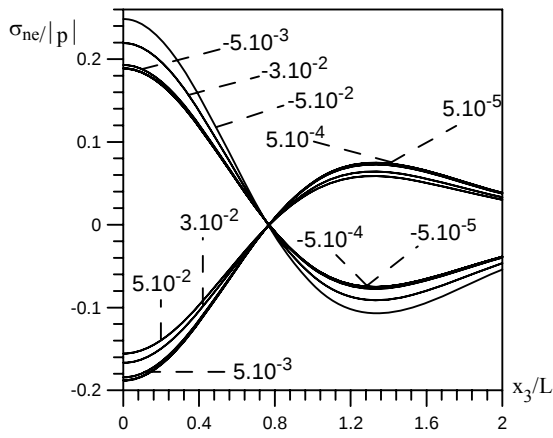
(c)

Şekil 3.8 Çeşitli α değerlerinde $\sigma_{nr}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=30$,

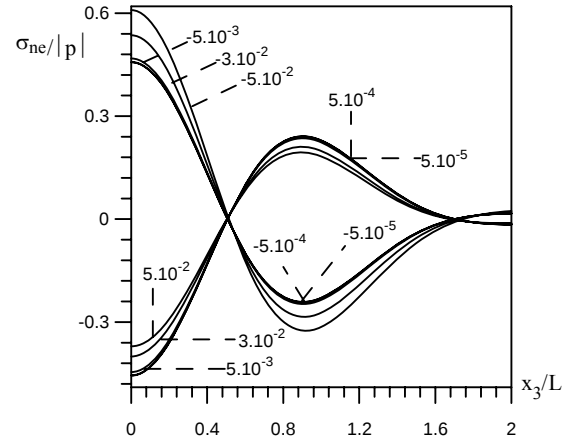
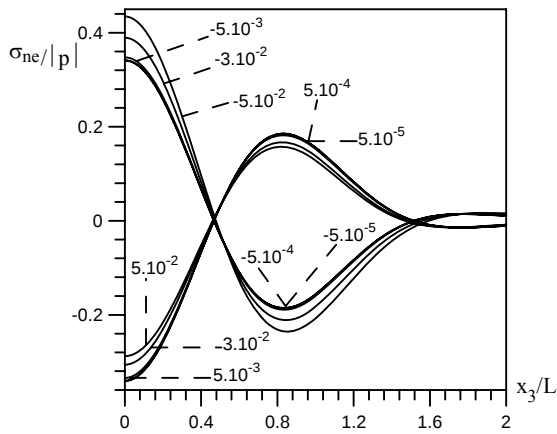
$\varepsilon=0.07$, $\theta=\pi/2$, (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$)



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.9 Çeşitli α değerlerinde $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık ($\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=50$, $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}=30$,

$\varepsilon=0.07$, $\theta=0$, (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$)

Çizelge 3.1 Çeşitli m , $\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}$ ve κ 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ 'nun değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	$\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}$	m	κ	$\sigma_{nn}/ p $		$\sigma_{nt}/ p $		$\sigma_{ne}/ p $	
50	20	0	0.1	0.1662	0.2182	1.0888	0.2323	-0.1925	-0.2016
			0.2	0.1373	0.1630	1.7932	0.2120	-0.2079	-0.1526
			0.3	0.1066	0.1177	2.0379	0.1808	-0.2061	-0.1082
			0.4	0.0909	0.0912	2.1197	0.1607	-0.2010	-0.0795
50	20	1	0.1	0.2055	0.2630	1.4900	0.2892	-0.2497	-0.2442
			0.2	0.1514	0.1735	2.3134	0.2498	-0.2582	-0.1622
			0.3	0.1157	0.1209	2.5596	0.2105	-0.2523	-0.108
			0.4	0.1056	0.0939	2.6235	0.1877	-0.2429	-0.0762
50	20	3	0.1	0.3685	0.4235	1.9105	0.3453	-0.5715	-0.4006
			0.2	0.1994	0.1933	2.8102	0.2576	-0.5419	-0.1673
			0.3	0.1983	0.1351	2.9980	0.2083	-0.5019	-0.0857
			0.4	0.2761	0.1191	2.9973	0.1867	-0.4577	-0.0499
50	30	0	0.1	0.1065	0.2728	1.4563	0.2596	-0.1540	-0.2589
			0.2	-0.0067	0.1892	2.3224	0.224	-0.1289	-0.1805
			0.3	-0.0859	0.1326	2.5957	0.1869	-0.1053	-0.1231
			0.4	-0.1244	0.1013	2.6814	0.1648	-0.0900	-0.0884
50	30	1	0.1	0.1050	0.3210	1.9906	0.3206	-0.1883	-0.3057
			0.2	-0.0594	0.1975	2.9794	0.2616	-0.1456	-0.1873
			0.3	-0.1472	0.1344	3.2481	0.2165	-0.1165	-0.1205
			0.4	-0.1726	0.1035	3.3118	0.1922	-0.1004	-0.0835
50	30	3	0.1	-0.0538	0.4741	2.5747	0.3760	-0.3405	-0.4563
			0.2	-0.0442	0.2075	3.5812	0.2636	-0.2160	-0.1766
			0.3	-0.4438	0.1461	3.7712	0.2120	-0.1756	-0.0884
			0.4	-0.2864	0.1292	3.7593	0.1907	-0.1710	-0.0510
50	40	0	0.1	0.0503	0.3216	1.7836	0.2820	-0.1247	-0.3086
			0.2	-0.1350	0.2123	2.7601	0.2331	-0.0710	-0.2032
			0.3	-0.2567	0.1461	3.0460	0.1916	-0.0302	-0.1350
			0.4	-0.3169	0.1106	3.1287	0.1681	-0.0052	-0.0956
50	40	1	0.1	0.0125	0.3721	2.4304	0.3457	-0.1425	-0.3577
			0.2	-0.2463	0.219	3.5256	0.2705	-0.0630	-0.2076
			0.3	-0.3811	0.147	3.8007	0.2212	-0.0138	-0.1304
			0.4	-0.4234	0.1124	3.8568	0.1957	0.0109	-0.0892
50	40	3	0.1	-0.4280	0.5176	3.1471	0.3987	-0.1736	-0.4988
			0.2	-1.0111	0.2218	4.2069	0.2684	0.0312	-0.1835
			0.3	-1.0301	0.1563	4.3877	0.2152	0.0875	-0.0903
			0.4	-0.8204	0.1374	4.3572	0.1938	0.0730	-0.0517

4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Tezde yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

1. Akbarov ve Guz (2000) yaklaşımı sonsuzda lif yönünde yoğunluğu p olan düzgün yayılmış normal kuvvetler etkisindeki düşük yoğunluklu yerel eğrilikli lifler içeren sonsuz elastik ortamda gerilme dağılımına geometrik nonlineeritenin etkisinin incelenmesine uygun olarak geliştirilmiştir. Malzemede düşük yoğunluklu lif olması, lifler arasındaki etkileşimin ihmal edilebildiği anlamında kullanılmış ve lifin başlangıç yerel eğrilik genliğinin (amplitudun) eğrilik açılımına (eğriliğin olduğu bölgenin lif yönünde uzunluğuna) göre küçük olduğu kabul edilmiştir.
2. Yukarıda sözü edilen problem lif ile matris arasında geçiş (örtük) malzemesi olması durumunda da ele alınmıştır.
3. Uygun sınır-değer problemlerinin matematiksel formülasyonu, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin kesin geometrik nonlineer denklemlerinden yararlanılarak yapılmıştır.
4. Formülasyonu yapılmış sınır-değer problemlerinin çözümü için Akbarov ve Guz (1985c, 2000)'de verilmiş sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Buna göre aranan büyüklükler, yerel eğrilik derecesini ifade eden küçük parametreye göre seri halinde yazılmıştır. Sıfırıncı, birinci ve ikinci yaklaşıma ait kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı ve uygun sınır ve temas koşulları elde edilmiştir. Elde edilen denklemlere önce Fourier dönüşümü uygulanarak aranan büyüklüklerin Fourier dönüşümleri, daha sonra ise ters Fourier dönüşümleri ile ulaşılmak istenen değerler hesaplanmıştır. Fourier ve ters Fourier dönüşümlerinde 10 noktalı Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar üretmek için gerekli olan algoritmalar geliştirilmiş ve Fortran programlama dilinde kodlanmıştır. Bu çözüm prosedürü sonsuz ortamda yerel eğrilikli sarılı tek lif olması durumuna ait problem için de geliştirilmiştir.
5. Yerel eğrilikli tek lif durumu için lif-matris arayüzeyinde, sarılı tek lif durumu için ise lif-örtük malzemesi, örtük malzemesi-matris arayüzeylerinde etki gösteren normal ve kayma gerilmeleri için çok sayıda sayısal sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçların yorumları yapılmıştır. Bu gerilmelere geometrik nonlineeritenin etkisi detaylı bir biçim de incelenmiştir.

Bu sayısal sonuçlardan yararlanarak aşağıdakiler söylenebilir.

- Yerel eğrilikli tek lif ve yerel eğrilikli sarılı tek lif durumunda geometrik nonlinearitenin bir sonucu olarak, temas yüzeylerinde etki gösteren ve kendi kendini dengeleyen normal ve kayma gerilmelerin mutlak değeri lif yönünde basınçta (çekmede) azalmaktadır (artmaktadır).
- İncelenen gerilmelerin mutlak maximum değeri yerel eğriliğin salınım frekansına göre artmaktadır.
- Geometrik nonlinearitenin etkisi basınçta, çekmede olduğundan daha fazladır.
- Beklendiği gibi, sarılı tek lif durumunda geçiş örtüsünün kalınlığı arttıkça tek lif durumundaki uygun değerlere yaklaşmaktadır.

Tezde bulunan sonuçların değerlendirilmesinden aşağıdakileri söyleyebiliriz

I. İlk kez yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz ortamlarda gerilme yayılımına geometrik nonlinearitenin etkisinin incelenmesi için parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak bir yaklaşık analitik yöntem geliştirilmiştir. Geometrik nonlinearitenin gerilme yayılımına etkisini gösteren çok sayıda sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

II. Yukarıda söylenen matematik yöntem yerel eğrilikli sarılı (örtüklü) tek lif içeren sonsuz ortamlara ait uygun problemler için de geliştirilmiştir. Bu duruma ait olan ve geometrik lineer ve geometrik nonlinearitenin, lif örtüsünün (geçiş malzemesinin) kalınlığının söz konusu olan gerilmelere etkisini gösteren çok sayıda sayısal sonuçlar da bulunmuştur.

III. Her iki durum (tek lif ve sarılı (örtüklü) tek lif) için geometrik nonlinearitenin gerilme değerlerine etkisi incelenmek sureti ile geometrik lineer durum için parametrelerin geçerlilik sınırlarının belirlemesine olanak sağlanmıştır.

IV. Elde edilen sayısal sonuçlar, incelenen gerilmelerin değerce düşürülmesine imkan sağlaması açısından örtük malzemesinin seçimine de imkan oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- Akbarov, S.D. (1998), "On the Three –Dimensinal Stability Loss Problems of Elements of Structures of Viscoelastik Composite Materials", *Mechanics of Composite Materials*, 34, 537-544.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985a), "Stress State of a Fiber Composite with Curved Structures with a Low Fiber Concentration", *Soviet Appl. Mech.*, 21(6), 560-565.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985c), "Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites with Curved Structures", *Soviet Appl. Mech.*, 20(9), 777-790.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2000), *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academic Publishers, 464pp.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2002), " Mechanics of Curved Composites (Piecewise Homogeneous Body Modely),", *Int. Appl. Mech.* 38, No: 12, 1415-1439.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2004), " Mechanics of Curved Composites and Some Related Problems for Structral Members," , *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11:445-515.
- Akbarov, S.D. ve Kosker,R. (2001), "Fiber Bucling in a Viscoelastic Matrix", *Mechanics of Composite Materials*, Vol 37, No:4, 299-306.
- Akbarov, S.D. ve Kosker,R. (2003a), "On a Stresss Analysis in the Infinite Elastic Body with Two Neighbouring Curved Fibers", *Composites Part B*: 34 (2003) 143-150.
- Akbarov, S.D. ve Kosker,R. (2003b), "Influence of the Interaction Two Neighbouring Curved Fibers", *Composites Part B*: Vol 34 No:2 143-150.
- Akbarov, S.D. ve Kosker,R. (2003c), "Stress Distribution Caused by Anti-Phase Periodical Curving of Two Neighbouring Fibers in a Composite Materials", *European Journal of Mechanics A/Solids*, No:22 (2003), 243-256.
- Akbarov, S.D. ve Kosker,R. (2004), "Internal Stability Loss of Two Neighboring Fibers in a iscoelastic Matrix ", *Internal Journal of Engineering Science*, No: 42 (2004), 1847-1873.
- Akbarov S.D., Kosker R. ve Uçan Y. (2004) "Stress Distrubition in an Elastic Body with a Periodical Curved Row of Fibers" *Mechanics of Composite Materials* No:40(3) 191-202.
- Akbarov, S.D. ve Yahnioğlu N. (2001), "A Method of Investigation of the General Theory of Stability Problems On Structural Elements Fabricated From The Viscoelastik Materials", *Composites Part B*: 32, 475-482.
- Akbarov, S.D., Cilli, A. ve Guz, A.N. (1999), "The Theoritical Strength Limit in compression of Viscoelastic Layered Composite Materials", *Composites Part B: Engineering*, 30, 465-472.
- Akbarov, S.D., Guz A.N. ve Cherekov, M.A. (1982), "Stability of Two Fibers in the Elastic Matrix at Finite Precritical Deformations ", *Mech Compos Mater.*, 2, 42-51a.
- Akbarov, S.D., Kosker, R. ve Simsek, K. (2005), "Stress Dustribution in an Elastic Body with a Locally Curved Fiber in a Geometrical Nonlinear Statement", *Mechanics of Composite Materials*, Vol 41, No:4, 291-302

- Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioğlu N. (1997), "On the Fracture of The Unidirectional Composites in Compression", *Int. J. Engng. Sci.*, 35(12/13), 1115-1136.
- Akbarov, S.D., Yahnioğlu N. ve Kutug, Z. (2001), "On the Three Dimensional Stability Loss Problem of the Viscoelastic Composite Plate", *Int. J. Engr. Science*, 39, 1443-1457.
- Babaev, M. S., Guz, A.N. ve Cherekov, M.A. (1985), "Stability of the Row of Fibers in the Elastic Matrix at Small Precritical Deformations", *Soviet Appl. Mech.*, 21(5), 27-34.
- Babich, I.Yu. ve Guz, A.N. (1992), "Stability of a Fibrous Composites", *Appl. Mech. Rev.*, 45(2), 60-80.
- Babich, I.Yu., Guz, A.N. ve Chekhov, V.N. (2001), "A Three Dimensional Theory of Stability of a Fibrous", *Int. Appl. Mech. Rev.*, 37(9), 1103-1141.
- Babich, I.Yu., Guz, A.N. ve Shul'ga, N.A. (1982), "Study of the Dynamics and Stability of Composite Materials in a Three Dimensional Formulation", *Soviet Appl. Mech.*, 18(1), 3-27.
- Babich, I.Yu., Garashchuk, I.N ve Guz, A.N. (1983), "Stability of a Fiber in an Elastic Matrix with a Inhomogeneous Prectical State", *Soviet Appl. Mech.*, 19(1), 21-27.
- Biezeno, C.B. ve Hencky, H. (1930), "On the General Theory of Elastic Stability", *K Akad Wet Amsterdam Proc.* 32, 444-56.
- Biot, M.A. (1965), *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, New York, 504 pp.
- Bolotin, V.V. ve Novichkov, Yu.N. (1980), *Mechanics of Multilayer Structures*, Mashinostroenie, Moscow, 376 pp. (Rusça).
- Budianski, B. ve Fleck, N.A. (1993), "Comprossive Failure of Fibre Composites", *J. Mech. Phys. Solids*, 41, 183-21.
- Budianski, B. ve Fleck, N.A. (1994), "Comprossive Kinking of Fibre Composites: A Topical Review", *Appl. Mech. Rev.*, part2, 47(6), 246-270.
- Chamis, C.C. (1974), "Micromechanical Theories of strenght", *Composite Materials*, New York and London, Vol 5 Fracture and Fatigue, 106-165.
- Cherepanov, G.P. (1983), *Fracture Mechanics of Compoite Materials*, Moscow, Nauka 289.
- Christensen, R.M. (1979), *Mechanics of Compoite Materials*, Willey, New York.
- Chung, I ve Weitsman, Y.J. (1994), "Model for Micro-Buckling/Micro-Kinking Compressive Response of Fiber- Reinforced Composites", *Applied Mechanics Review* part 2, 47(6), S256-S 261.
- Dow, N.F. ve Grunfest, I.J. (1960), "Determination of Most Needed Potentially Poossinle Improvements in Materials for Ballistic and Space Vehicles", *General Electric Co. Space Sci Lab.*, TISR 60 SD 389.
- Djhafarova, E.K. (1992) "Solution Method for Stres-Strain State Problems in Fibrous Composite Materials with Local Curved Structures", *Conference, Pt. I, Instute of Mechanics of The Ukranianian Academy of Sciences, Kiev*, pp. 39-44.
- Djhafarova, E.K. (1994) "Distrubition of Self-Equilibrated Stres in Fibrous Composite Materials with Local Curved Structuresdep. In VINITI 07.09.94, No: 2166-B94 (Rusça).

Djhafarova, E.K. (1995), Stress State Problems in Composite Materials with Local Curved Fibers, (Rusyada). Candidate 's Dissertation , Instute of Mathematics and Mechanics of the National Academiyy of Sciences of Azerbaijan, Baku.

Evans, A. G. ve Adler, W. F. (1978), "Kinking as a Mode of structural Degration in Carbon Fiber Composites", *Acta. Metallurgica*, 26, 725-738.

Ekobori, T. (1978), "Pysical Foundation of strength and fracture of materials", K.: Nauk Dumka, 32p (Rusça).

Fleck N.A., Deng L. ve Budiansky B. (1995), " Predication of King with in compresed Fiber Composites", *Journal of Applied Mechanics*, 62, 329-337.

Garaszczuk, I.N. (1983), " On the Stability of the Fiber in the Matrix at Inhomogeneous Precritical Deformations", *Dokl Akad Nauk Ukr SSR, Ser A Phys Math Tech Sci* 8, 24-27 (Rusça).

Gerard, F. ve Gilbert, A.A. (1958), " A Critical Strain Approach to Creep Buckling of Plates And Shells", *J. Aeroanaut Sci*, 25(7), 429-38.

Green, A.E., Rivlin, R.S. ve Shield, R.T. (1952), " General Theory of Small Elastic Deformations Superposed on Finite Elastic Deformations", *Proc Roy Ser A*, 21(1104), 128-54.

Greszczuk, I.B. (1975), " Fracture of Composite Reinforced by Circular Fibers From Loss of Stability of Fibers", *J.AIAA*, 13(10), 67-75.

Greszczuk, L.B. (1973), Failure Mechanics of Composite subjected to Compressive Loading, Air Force Materials Laboratory Report AFML-TR-72-107, August.

Greszczuk, L.B. (1983), "On Types of Fracture of Unidirectional Composites in Compression", *Strength and Fracture of Composite Matreials*, Zinatne Riga, 304-312 (Rusça).

Griffith, A.A. (1920), "The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids", *Phil. Trans. Roy.Soc.Ser.A*. 211, N 2-P, 163-198.

Guz, A.N. (1969a), "Determination of the Theoretical Compressive Strength of reinforced Materials", *Dokl Akad Nauk Ukr SSR, Ser A Phys Math Tech Sci* 3, 236-238 (Rusça).

Guz, A.N. (1969b), "Construction of a Theory of Stability of Unidirectional Fiber Composites ", *Soviet Appl. Mech.*, 4(2), 62-70.

Guz, A.N. (1970), " On the Three Dimensional Theory of Stability of Deformation for Materials with Rhelological Properties ", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Tverdog*, Tela(6), 104-107 (Rusça).

Guz, A.N. (1971a), Stability of the Three Dimensional Bodies, *Naukova Dumka*, Kiev, 276 pp (Rusça).

Guz, A.N. (1971b), "Construction of a Theory of Strength of Unidirectional Reinforced Materials Under Compression ", *Problemi Prochnosti* 3, 37-40 (Rusça).

Guz, A.N. (1973), Stability of Elastics Bodies with Finite Strains, *Naukova Dumka*, Kiev, 272 pp (Rusça).

Guz, A.N. (1990), Mechanics of Fracture of Composite Materials in Compression, *Naukova Dumka*, Kiev, 630 pp (Rusça).

- Guz, A.N. (1990), Failure Mechanics of Composite Materials in Compression, Naukova Dumka, Kiev, (Rusça).
- Guz, A.N. (1990), Mechanics of Compressive Failure of Composite Materials, Naukova Dumka, Kiev, (Rusça).
- Guz, A.N. (1999), Fundamentals of the Three Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies, Berlin:Springer-Verlag, 556 pp.
- Guz, A.N. Dekret, V.A. ve Kokhanenko, Yu.V.(2000), Plane Problems of Stability of Composite Materials with a Finite Size Filler, *Mechan. Comp. Materials*, 36, No1, 77-86.
- Guz, A.N. ve Lapusta Yu.N. (1999), Three-Dimensional Problems of the Near-Surface Instability of Fiber Composites in Compression (Model of a Piecewise- Uniform Medium) (survey), *Inter Appl. Mech.*, 35, No7, 641-671.
- Hermann, L.R., Mason, W.E. ve Chan, S.T.K. (1967), "Response of Reinforcing Wires to Compressive States of Stress", *J. Composite materials*, 212-226.
- Hoff, N.J.(1954) "Buckling and Stability", *J.Roy. Aeron. Soc.* 58,1.
- Irwin, G.R. (1957), "Analysis of stresses and Strains Near and a Crack Traversing a Plate", *J. Appl. Mech.*, 24(3), 361-364.
- Irwin, G.R. (1958), "Fracture", *Handbuch der Physik*, 6, 551-590.
- Jelf, P.M. ve Fleck, N.A. (1992), "Compression Failure Mecanism in Unidirectional Composites", *Journal of Composite Materials*, 26(18), 2706-2726.
- Kantarovich, L.V ve Krilov, V.I, (1962). *Approximate Methods in Advenced Calculus*. Moscow: Fizmatgiz, (Rusça).
- Karpenko, I.F., Terletskii, V.A. ve Lyashenko, B.A. (1972), " A Mechanism of the Failure of Oriented Plastic", *Problemi Prochnosti I*, 50-55 (Rusça).
- Kelly, A.(1998), "Composite Materials: Impediments to Wider Use and Some Suggestions to overcome them",in: *Proceedings of ECCM -8*, 3-6 June, Napoles Italy. Vol. I (1998), pp. 15-18.
- Knott, I.F (1979), *Fundamentals of Fracture Mechanics*, Lodon, Buttersworths, 320p.
- Kosker, R. (2001), "Long-Time Fracture of Uni- Directed Viscoelastic Fibrous Composites in Compression", *Proceedings of 5th International Fracture Conference*, 6-8 September, Elazığ-Turkey, 69-77.
- Kosker, R. and Akbarov, S.D. (2003), "Influence of the Interaction Between Two Neighboring Periodically Curved Fibers on the Stress Distrubition in a Composite Material", *Mech. Compos. Mater.*, 39, No.2, 165-176.
- Kosker, R. and Uçan, Y. (2004), "On the Normal Stresses in the Elastikc Body with Periodical Curved Row Fibres", *Sigma No: 2004/4*, 294-304.
- Krillov, V.I. and Shulgina L.T. (1966) *Handbook on Numerical Integration*, Nauka, Moscow, (Rusça)
- Kyriakides, S., Perry, E.J ve Liechti, K.M. (1994), " Instability and Failure of Fiber Composites in Compression" *Applied Mechanics Reiew part 2*, 47(6), S262-S268.

- Lapusta, Yu.N. (1990a), “ the Stability of Row of Fibers Near the Free Plane Border of the Binder in Axial Compression”, *Mech.Compos. Mat.* 4, 739-742.
- Mileiko, S.T. ve Khvostunkov, A.A. (1971), “Compression Curve for Fibrous Composite”, *J.Prikl Mekh Tekh Fiz*4, 155-160 (Rusça).
- Patron, V.Z. (1992), *Fracture Mechanics, From theory to Practise*, Gordon and Breach Science Publisher.
- Rabotnov, Yu.Y. (1977), *Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies*, Nauka, Moscow.
- Rosen, B.W.(1965), *Fiber Composite Materials*, Amer, Soc. For Metals, Metals Park, Ohio, P:37.
- Rosen, B.W.(1967), “ Mechanics of Strengthenig of Composites in Fibrous Composite Materials”, *Mir, moscow*, 54-96 (Rusça).
- Rosen, B.W. ve Dow, N.F. (1976), “ Mechanics of Fracture of Fibrous Composites”, *Fracture*, vol 7, part 1. *Fracture of Non- Metals and Composite Materials* Mir, Moscow, 300-366 (Rusça).
- Sadovsky, M.A., Pu, S.L. ve Hussian, M.A. (1967) “Bucling of Microfibres”, *Trans ASME, Ser E* 34(4), 295-302.
- Schapery, R.A. (1966), “Approxiamate Methods of Transform Inversion For Viscoelastic Stres Analyses”, *Proc. Us Nat. Cong. Appl. ASME* 4, 1075-1085.
- Schuerch, H. (1966), “Prediction of Compressive Strength in Uniaxial Boron Fibermetal Matrix Composite Materials”, *J. AIAA* 4(1), 102-106.
- Simeononova, K. (1966), *Study of Microbucling of Fiber Reinforced Composite Materials*, *Mech Compos. Mater.*,
- Soutwell R.V. (1913), “On the General Theory of Elastic Stability”, *Philos Trans Soc London Ser A*, 213, 187-244.
- Tarnopol'skii, Yu.M. ve Roze, A.V.(1969), *Design Characteristic of Components Made of Reinforsec Plastics*, *Zinatne, Riga*, 275 pp. (Rusça).
- Tarnopol'skii, Yu.M., Zhigun V.I ve Polyakov V.A. (1987), *Spatially Reinforced Composite Materials ,Handbook*, *Mashinostroenie, Moscow* (Rusça).
- Tkachenko, E.A. ve Chekhov, V.N. (2000a), “ The Stability of Tribotechnical Laminated Polymeric Coatings”, *Int. Appl. Mech.*, 36(9),1198-1204.
- Tkachenko, E.A. ve Chekhov, V.N. (2000b), “ The Stability of Laminated Elastomer Coatings Under Surface Loading”, *Int. Appl. Mech.*, 36(10),1355-1362.
- Watson, G.N., 1944. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Universty Press, Endland 753pp.
- Yahnioğlu, N. ve Akbarov, S.D. (2002), “ Stability Loss Analyses of the Elastic and Viscoelastic Composite Rotating Thick Circular Plate in the Framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Stability”, *Inter.J. Mechanical Sciences*, 44(6), 1225-1244.

EKLER

- Ek 1 Lamé Katsayıları ve Tansör Vektörlerinin Fiziksel Bileşenleri ile Kovaryant ve Kontravaryant Bileşenler Arasındaki İlişkiler
- Ek 2 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri
- Ek 3 Bölüm 3’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri

Ek 1 **Lame Katsayıları ve Tansör Vektörlerinin Fiziksel Bileşenleri ile Kovaryant ve Kontravaryant Bileşenler Arasındaki İlişkiler**

$$H_1=1, H_2=r, H_3=1 \quad (E1.1)$$

$$u_r=u^1=u_1, u_\theta=ru^2=\frac{1}{r}u_2, u_z=u_3=u^3 \quad (E1.2)$$

$$\sigma_{rr}=\sigma_{11}=\sigma^{11}, \sigma_{r\theta}=\frac{1}{r}\sigma_{12}=r\sigma^{12}, \sigma_{rz}=\sigma_{13}=\sigma^{13}, \sigma_{\theta r}=\frac{1}{r}\sigma_{21}=r\sigma^{21}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{1}{r^2}\sigma_{22}=r^2\sigma^{22}, \sigma_{\theta z}=\frac{1}{r}\sigma_{23}=r\sigma^{23}, \sigma_{zr}=\sigma_{31}=\sigma^{31}, \sigma_{z\theta}=\frac{1}{r}\sigma_{32}=r\sigma^{32}$$

$$\sigma_{zz}=\sigma_{33}=\sigma^{33} \quad (E1.3)$$

Ek 2 Bölüm 2’de Yer Alan Denklemlerdeki fonksiyonların Açık İfadeleri

$$\begin{aligned}
 F_{11}^{(1)} &= \left[-\frac{2\mu^{(1)}}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) - \frac{\mu^{(1)}\xi_1^{(1)}s}{(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_1^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right) \right] \\
 F_{21}^{(1)} &= \left[\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) - \frac{\lambda^{(1)}\xi_2^{(1)}s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) - \frac{\lambda^{(1)}s}{(R/L)^2} \left(K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) - \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{33}^0 \right)}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\lambda^{(1)}s^3}{1} K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) \right] \\
 F_{31}^{(1)} &= \left[-\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) - \frac{\lambda^{(1)}\xi_3^{(1)}s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + K_2((R/L)\xi_3^{(1)}s) - \frac{\lambda^{(1)}s}{(R/L)^2} \left(K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) - \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{33}^0 \right)}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} x \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\lambda^{(1)}s^3}{1} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) \right] \\
 F_{11}^{(2)} &= (-1)x \left[-\frac{2\mu^{(2)}}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) - \frac{\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}s}{\kappa} \left(I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right) \right] \\
 F_{21}^{(2)} &= (-1)x \left[\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) + \frac{\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)}s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) - \frac{\lambda^{(2)}s}{(R/L)^2} \left(I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{33}^0 \right)}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\lambda^{(2)}s^3}{1} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) \right] \\
 F_{31}^{(2)} &= \left[\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) - \frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s) - \frac{\lambda^{(2)}s}{(R/L)^2} \left(I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{33}^0 \right)}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} x \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\lambda^{(2)}s^3}{1} K_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{12}^{(1)} &= \left[-\frac{\mu^{(1)}}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) - \frac{\mu^{(1)}(\xi_1^{(1)})^2 s^2}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu^{(1)}\xi_1^{(1)}s}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_1^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right) \right] \\
F_{22}^{(1)} &= \left[\frac{\mu^{(1)}\xi_2^{(1)}s^2}{(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) + \frac{2\mu^{(1)}s}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right] \\
F_{32}^{(1)} &= \left[\frac{\mu^{(1)}\xi_3^{(1)}s^2}{(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) + \frac{2\mu^{(1)}s}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right] \\
F_{12}^{(2)} &= (-1)x \left[-\frac{\mu^{(2)}}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) - \frac{\mu^{(2)}(\xi_1^{(2)})^2 s^2}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}s}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right) \right] \\
F_{22}^{(2)} &= (-1)x \left[-\frac{\mu^{(2)}\xi_2^{(2)}s^2}{(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) + \frac{2\mu^{(2)}s}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right] \\
F_{32}^{(2)} &= (-1)x \left[-\frac{\mu^{(2)}\xi_3^{(2)}s^2}{(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) + \frac{2\mu^{(2)}s}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right] \\
F_{13}^{(1)} &= i \left[\frac{\mu^{(1)}s}{(R/L)} K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right] \\
F_{23}^{(1)} &= -i \left[\mu^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_2^{(1)})^2) \xi_2^{(1)} s^3}{2(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) \right] \\
F_{33}^{(1)} &= -i \left[\mu^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2) \xi_3^{(1)} s^3}{2(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})} \left(K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) \right] \\
F_{13}^{(2)} &= -i \left[\frac{\mu^{(2)}s}{(R/L)} I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right] \\
F_{23}^{(2)} &= -i \left[\mu^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2) \xi_2^{(2)} s^3}{2(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})} \left(I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) \right] \\
F_{33}^{(2)} &= -i \left[\mu^{(2)} \frac{(\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2) \xi_3^{(2)} s^3}{2(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})} \left(I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) \right] \\
F_{14}^{(1)} &= \left[\frac{1}{(R/L)} K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right] \\
F_{24}^{(1)} &= \left[-\frac{\xi_2^{(1)}s^2}{2} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$F_{34}^{(1)} = \left[-\frac{\xi_3^{(1)} s^2}{2} \left(K_0 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right) \right]$$

$$F_{14}^{(2)} = (-1) \times \left[\frac{1}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right]$$

$$F_{24}^{(2)} = (-1) \times \left[-\frac{\xi_2^{(2)} s^2}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$F_{34}^{(2)} = (-1) \times \left[-\frac{\xi_3^{(2)} s^2}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$F_{15}^{(1)} = \left[\frac{\xi_1^{(1)} s}{2} \left(K_0 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s \right) \right) \right]$$

$$F_{25}^{(1)} = \left[-\frac{s}{(R/L)} K_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) \right]$$

$$F_{35}^{(1)} = \left[-\frac{s}{(R/L)} K_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right]$$

$$F_{15}^{(2)} = \left[\frac{\xi_1^{(2)} s}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$F_{25}^{(2)} = \left[\frac{s}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right]$$

$$F_{35}^{(2)} = \left[\frac{s}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right]$$

$$F_{16}^{(1)} = 0$$

$$F_{26}^{(1)} = i \left[\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) \right]$$

$$F_{36}^{(1)} = i \left[\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right]$$

$$F_{16}^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned}
F_{26}^{(2)} &= -i \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right] \\
F_{36}^{(2)} &= -i \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right]
\end{aligned} \tag{E2.1}$$

$$\begin{aligned}
F_{rrr}(s) &= \left\{ \bar{A}_1^{(11)}(s) \left[\frac{4\mu^{(1)}}{(R/L)^3} K_1 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s \right) + \frac{2\mu^{(1)} \xi_1^{(1)} s}{(R/L)^2} \left(K_0 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s \right) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\mu^{(1)} (\xi_1^{(1)})^2 s}{2(R/L)} \left(3K_1 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s \right) + K_3 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s \right) \right) \right] + \right. \\
&\quad \bar{A}_2^{(11)}(s) \left[-\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^3 s^4}{8} \left(3K_0 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) + 4K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) + K_4 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)} s^2}{(R/L)^2} \left(K_0 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) \right) + \frac{\lambda^{(1)} (\xi_2^{(1)})^2 s^3}{4(R/L)} \left(3K_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) + \right. \\
&\quad \left. K_3 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) \right) + \frac{2\lambda^{(1)} s}{(R/L)^3} K_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) + \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) \lambda^{(1)} \xi_2^{(1)} s^4}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \times \\
&\quad \left. \left(K_0 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) \right) \right] + \bar{A}_3^{(11)}(s) \left[-\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^3 s^4}{8} \left(3K_0 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) + K_4 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right) + \frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)} s^2}{(R/L)^2} \left(K_0 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^{(1)} (\xi_3^{(1)})^2 s^3}{4(R/L)} \left(3K_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) + K_3 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right) + \frac{2\lambda^{(1)} s}{(R/L)^3} K_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) \lambda^{(1)} \xi_3^{(1)} s^4}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \left(K_0 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right) \right] \\
&\quad - \bar{A}_1^{(21)}(s) \left[\frac{4\mu^{(2)}}{(R/L)^3} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) - \frac{2\mu^{(2)} \xi_1^{(2)} s}{(R/L)^2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\mu^{(2)} (\xi_1^{(2)})^2 s^2}{2(R/L)} \left(3I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) + I_3 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \bar{A}_2^{(21)}(s) \left[\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^3 s^4}{8} \left(3I_0 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4I_2\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right)+I_4\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right)-\frac{\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)}s^2}{(R/L)^2}\left(I_0\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right)+I_2\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right)\right)+ \\
& \frac{\lambda^{(2)}(\xi_2^{(2)})^2s^3}{4(R/L)}\left(3I_1\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right)+I_3\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right)\right)+\frac{2\lambda^{(2)}s}{(R/L)^3}I_1\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right) \\
& -\frac{\left(\left(\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}\right)(\xi_2^{(2)})^2-\mu^{(2)}-\sigma_{zz}^{(0)}\right)\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)}s^4}{2\left(\lambda^{(2)}+\mu^{(2)}\right)}\left(I_0\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right)+I_2\left((R/L)\xi_2^{(2)}s\right)\right) \Bigg] \\
& -\bar{A}_3^{(21)}(s)\left[\frac{\left(\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}\right)(\xi_3^{(2)})^3s^4}{8}\left(3I_0\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)+4I_2\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)+I_4\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)\right)\right. \\
& -\frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}s^2}{(R/L)^2}\left(I_0\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)+I_2\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)\right)+\frac{\lambda^{(2)}(\xi_3^{(2)})^2s^3}{4(R/L)}\left(3I_1\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)+\right. \\
& \left.I_3\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)\right)+\frac{2\lambda^{(2)}s}{(R/L)^3}I_1\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)-\frac{\left(\left(\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}\right)(\xi_3^{(2)})^2-\mu^{(2)}-\sigma_{zz}^{(0)}\right)\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}s^4}{2\left(\lambda^{(2)}+\mu^{(2)}\right)} \\
& \left.\left(I_0\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)+I_2\left((R/L)\xi_3^{(2)}s\right)\right)\right] \Bigg\} \\
& F_{rr}(s)=\left\{\bar{A}_1^{(11)}(s)\left[\frac{2\mu^{(1)}}{(R/L)^3}K_1\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)+\frac{\mu^{(1)}\xi_1^{(1)}s}{2(R/L)^2}\left(K_0\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)+K_2\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)\right)+\right. \\
& \frac{\mu^{(1)}(\xi_1^{(1)})^3s^3}{8}\left(3K_0\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)+4K_2\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)+K_4\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)\right)+\frac{\mu^{(1)}\xi_1^{(1)}s}{2(R/L)^2} \times \\
& \left.\left(K_0\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)+K_2\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)\right)+\frac{\mu^{(1)}(\xi_1^{(1)})^2s^2}{4(R/L)}\left(3K_1\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)+K_3\left((R/L)\xi_1^{(1)}s\right)\right)\right] \\
& +\bar{A}_2^{(11)}(s)\left[\frac{-2\mu^{(1)}\xi_2^{(1)}s^2}{(R/L)^2}\left(K_0\left((R/L)\xi_2^{(1)}s\right)+K_2\left((R/L)\xi_2^{(1)}s\right)\right)-\frac{\mu^{(1)}(\xi_2^{(1)})^2s^3}{2(R/L)}\left(3K_1\left((R/L)\xi_2^{(1)}s\right)\right.\right. \\
& \left.\left.+K_3\left((R/L)\xi_2^{(1)}s\right)\right)-\frac{4\mu^{(1)}s}{(R/L)^3}K_1\left((R/L)\xi_2^{(1)}s\right)\right]+ \\
& \bar{A}_3^{(11)}(s)\left[\frac{-2\mu^{(1)}\xi_3^{(1)}s^2}{(R/L)^2}\left(K_0\left((R/L)\xi_3^{(1)}s\right)+K_2\left((R/L)\xi_3^{(1)}s\right)\right)-\frac{\mu^{(1)}(\xi_3^{(1)})^2s^3}{2(R/L)}\left(3K_1\left((R/L)\xi_3^{(1)}s\right)\right.\right. \\
& \left.\left.+K_3\left((R/L)\xi_3^{(1)}s\right)\right)-\frac{4\mu^{(1)}s}{(R/L)^3}K_1\left((R/L)\xi_3^{(1)}s\right)\right]+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{A}_1^{(21)}(s) \left[\frac{2\mu^{(2)}}{(R/L)^3} I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) - \frac{\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}s}{2(R/L)^2} (I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s)) - \right. \\
& \frac{\mu^{(2)}(\xi_1^{(2)})^3 s^3}{8} (3I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + 4I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_4((R/L)\xi_1^{(2)}s)) - \frac{\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}s}{2(R/L)^2} (I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) \\
& \left. + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s) + \frac{\mu^{(2)}(\xi_1^{(2)})^2 s^2}{4(R/L)} (3I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_1^{(2)}s)) \right] \\
& -\bar{A}_2^{(21)}(s) \left[\frac{2\mu^{(2)}\xi_2^{(2)}s^2}{(R/L)^2} (I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s)) - \frac{\mu^{(2)}(\xi_2^{(2)})^2 s^3}{2(R/L)} (3I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) + \right. \\
& \left. I_3((R/L)\xi_2^{(2)}s)) - \frac{4\mu^{(2)}s}{(R/L)^3} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right] \\
& -\bar{A}_3^{(21)}(s) \left[\frac{2\mu^{(2)}\xi_3^{(2)}s^2}{(R/L)^2} (I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s)) - \frac{\mu^{(2)}(\xi_3^{(2)})^2 s^3}{2(R/L)} (3I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + \right. \\
& \left. I_3((R/L)\xi_3^{(2)}s)) - \frac{4\mu^{(2)}s}{(R/L)^3} I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right] \Big\} \\
F_{sz}(s) = & i \left\{ \bar{A}_1^{(11)}(s) \left[\frac{\mu^{(1)}\xi_1^{(1)}s^2}{2} (K_0((R/L)\xi_1^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_1^{(1)}s)) \right] + \right. \\
& \bar{A}_2^{(11)}(s) \left[-\frac{\mu^{(1)}s^2}{(R/L)} K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) - \frac{(\mu^{(1)}(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)}(\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)}))s^2}{(R/L)(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \mathbf{x} \right. \\
& \left. K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right] + \\
& \bar{A}_3^{(11)}(s) \left[-\frac{\mu^{(1)}s^2}{(R/L)} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) - \frac{(\mu^{(1)}(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)}(\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)}))s^2}{(R/L)(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right] \\
& -\bar{A}_1^{(21)}(s) \left[-\frac{\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}s^2}{2} (I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s)) \right] \\
& -\bar{A}_2^{(21)}(s) \left[-\frac{\mu^{(2)}s^2}{(R/L)} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) - \frac{(\mu^{(2)}(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)}(\sigma_{zz}^{(0)} - \lambda^{(2)}))s^2}{(R/L)(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \mathbf{x} \right. \\
& \left. I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right] \\
& -\bar{A}_3^{(21)}(s) \left[-\frac{\mu^{(2)}s^2}{(R/L)} I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) - \frac{(\mu^{(2)}(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)}(\sigma_{zz}^{(0)} - \lambda^{(2)}))s^2}{(R/L)(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \mathbf{x} \right. \\
& \left. I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right] \Big\} \\
F_{st}(s) = & \left\{ \bar{A}_1^{(11)}(s) \left[\frac{\mu^{(1)}\xi_1^{(1)}s}{(R/L)} (K_0((R/L)\xi_1^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_1^{(1)}s)) + \frac{2\mu^{(1)}}{(R/L)^{(2)}} K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{A}_2^{(11)}(s) \left[\frac{\lambda^{(1)} (\xi_2^{(1)})^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) - \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})s}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right. \\
& - \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\xi_2^{(1)}s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) - \\
& \left. \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - (\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \lambda^{(1)} s^3}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right] \\
& \bar{A}_3^{(11)}(s) \left[\frac{\lambda^{(1)} (\xi_3^{(1)})^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) - \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})s}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right. \\
& - \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\xi_3^{(1)}s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) - \\
& \left. \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - (\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \lambda^{(1)} s^3}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_1((R/L)s) \right] \\
& - \bar{A}_1^{(21)}(s) \left[-\frac{\mu^{(2)} \xi_1^{(2)} s}{(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right) + \frac{2\mu^{(2)}}{(R/L)^{(2)}} I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right] \\
& - \bar{A}_2^{(21)}(s) \left[\frac{\lambda^{(2)} (\xi_2^{(2)})^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) - \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})s}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right. \\
& + \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\xi_2^{(2)}s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) \\
& \left. - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - (\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \lambda^{(2)} s^3}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right] \\
& - \bar{A}_3^{(21)}(s) \left[\frac{\lambda^{(2)} (\xi_3^{(2)})^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) - \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})s}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right. \\
& + \frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\xi_3^{(2)}s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) \\
& \left. - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - (\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \lambda^{(2)} s^3}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right] \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{szz}(s) = & \left\{ \bar{A}_2^{(11)}(s) \left[\frac{\lambda^{(1)} (\xi_2^{(1)})^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) - \frac{\lambda^{(1)}s}{(R/L)^{(2)}} K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) - \right. \right. \\
& \frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)} s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) - \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - (\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) s^3}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \\
& \left. \times K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right] + \bar{A}_3^{(11)}(s) \left[\frac{\lambda^{(1)} (\xi_3^{(1)})^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) - \right. \\
& \frac{\lambda^{(1)}s}{(R/L)^{(2)}} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) - \frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)} s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) - \\
& \left. \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - (\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) s^3}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right] \\
& - \bar{A}_2^{(21)}(s) \left[\frac{\lambda^{(2)} (\xi_2^{(2)})^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) - \frac{\lambda^{(2)}s}{(R/L)^{(2)}} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) - \right. \\
& \frac{\lambda^{(2)} \xi_2^{(2)} s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - (\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) s^3}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \\
& \left. \times I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right] - \bar{A}_3^{(21)}(s) \left[\frac{\lambda^{(2)} (\xi_3^{(2)})^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) - \frac{\lambda^{(2)}s}{(R/L)^{(2)}} \times \right. \\
& I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + \frac{\lambda^{(2)} \xi_3^{(2)} s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) - \\
& \left. \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - (\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) s^3}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right] \Bigg\} \\
F_{rxr}(s) = & i \left\{ \bar{A}_1^{(11)}(s) \left[\frac{-\mu^{(1)}s}{(R/L)^{(2)}} \left(K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right) - \frac{\mu^{(1)} \xi_1^{(1)} s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_1^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right) \right] + \right. \\
& \bar{A}_2^{(11)}(s) \left[\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 + (\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \mu^{(1)} (\xi_2^{(1)})^2 s^4}{4(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \left(3K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) \right] + \\
& \bar{A}_3^{(11)}(s) \left[\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 + (\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \mu^{(1)} (\xi_3^{(1)})^2 s^4}{4(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \left(3K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) \right] + \\
& - \bar{A}_1^{(21)}(s) \left[\frac{-\mu^{(2)}s}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) + \frac{\mu^{(2)} \xi_1^{(2)} s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right) \right] \\
& - \bar{A}_2^{(21)}(s) \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 + (\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \mu^{(2)} (\xi_2^{(2)})^2 s^4}{4(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \left(3I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) \right] + \\
& \left. \left. \bar{A}_3^{(21)}(s) \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 + (\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \mu^{(2)} (\xi_3^{(2)})^2 s^4}{4(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \left(3I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) \right] \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{A}_3^{(21)}(s) \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 + (\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \mu^{(2)} (\xi_3^{(2)})^2 s^4}{4(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \left(3I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) \right] + \\
& F_{rr}(s) = \bar{A}_1^{(11)}(s) \left[-\frac{1}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) - \frac{\xi_1^{(1)}s}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_1^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right) \right] + \\
& \bar{A}_2^{(11)}(s) \left[\frac{(\xi_2^{(1)})^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) \right] + \\
& \bar{A}_3^{(11)}(s) \left[\frac{(\xi_3^{(1)})^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) \right] \\
& -\bar{A}_1^{(21)}(s) \left[-\frac{1}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) + \frac{\xi_1^{(2)}s}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right) \right] \\
& -\bar{A}_2^{(21)}(s) \left[\frac{(\xi_2^{(2)})^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) \right] \\
& -\bar{A}_3^{(21)}(s) \left[\frac{(\xi_3^{(2)})^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) \right] \Big\} \\
& F_r(s) = \left\{ \bar{A}_1^{(11)}(s) \left[-\frac{(\xi_1^{(1)})^2 s^2}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_1^{(1)}s) + K_3((R/L)\xi_1^{(1)}s) \right) \right] + \right. \\
& \bar{A}_2^{(11)}(s) \left[\frac{s}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s) + \frac{\xi_2^{(1)}s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) \right] + \\
& \bar{A}_3^{(11)}(s) \left[\frac{s}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s) + \frac{\xi_3^{(1)}s^2}{2(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) \right] \\
& -\bar{A}_1^{(21)}(s) \left[-\frac{(\xi_1^{(2)})^2 s^2}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right) \right] \\
& -\bar{A}_2^{(21)}(s) \left[\frac{s}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) - \frac{\xi_2^{(2)}s^2}{2(R/L)} \left(3I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) \right] \\
& \left. -\bar{A}_3^{(21)}(s) \left[\frac{s}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) - \frac{\xi_3^{(2)}s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) \right] \right\} \\
& F_{zr}(s) = i \left\{ \bar{A}_2^{(11)}(s) \left[-\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - (\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \xi_2^{(1)} s^3}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s) \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{A}_3^{(11)}(s) \left[-\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - (\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \xi_3^{(1)} s^3}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} \left(K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s) + K_2((R/L)\xi_3^{(1)}s) \right) \right] \\
& - \bar{A}_2^{(21)}(s) \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - (\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \xi_2^{(2)} s^3}{2(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \left(I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) \right] \\
& - \bar{A}_3^{(21)}(s) \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - (\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(0)}) \right) \xi_3^{(2)} s^3}{2(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} \left(I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) \right] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{E2.2}$$

$$\begin{aligned}
G_{1(1)}^{(1)} &= \left[\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 s_1^3}{2} \left(K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s_1) + K_2((R/L)\xi_2^{(1)}s_1) \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)} s_1^2}{(R/L)} K_1((R/L)\xi_2^{(1)}s_1) - \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)}) - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1)} \right) \lambda^{(1)} s_1^3}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_0((R/L)\xi_2^{(1)}s_1) \right] \\
G_{1(2)}^{(1)} &= \left[\frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 s_1^3}{2} \left(K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s_1) + K_2((R/L)\xi_3^{(1)}s_1) \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)} s_1^2}{(R/L)} K_1((R/L)\xi_3^{(1)}s_1) - \frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^{(2)} - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(1)} \right) \lambda^{(1)} s_1^3}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_0((R/L)\xi_3^{(1)}s_1) \right] +
\end{aligned}$$

$$G_{1(3)}^{(1)} = 0$$

$$G_{1(4)}^{(1)} = 0$$

$$G_{1(5)}^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned}
G_{2(6)}^{(1)} &= (-1)^x \left[\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 s_1^3}{2} \left(I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s_1) + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s_1) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{\lambda^{(2)} \xi_2^{(2)} s_1^2}{(R/L)} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s_1) - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2)} \right) \lambda^{(2)} s_1^3}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s_1) \right]
\end{aligned}$$

$$G_{2(7)}^{(1)} = (-1)x \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 s_1^3}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{\lambda^{(2)} \xi_3^{(2)} s_1^2}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2)} \right) \lambda^{(2)} s_1^3}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_0 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(8)}^{(1)} = 0$$

$$G_{2(9)}^{(1)} = 0$$

$$G_{2(10)}^{(1)} = 0$$

$$G_{1(1)}^{(2)} = 0$$

$$G_{1(2)}^{(2)} = 0$$

$$G_{1(3)}^{(2)} = \left[\frac{-4\mu^{(1)}}{(R/L)^2} K_2 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s_1 \right) - \frac{2\mu^{(1)} \xi_1^{(1)}}{(R/L)} \left(K_1 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{1(4)}^{(2)} = \left[\frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 s_1^3}{4} \left(K_0 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) + 2K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) + K_4 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right) - \right.$$

$$\frac{4\lambda^{(1)} s_1}{(R/L)^2} K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) - \frac{\left(\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 s_1^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) \lambda^{(1)} s_1^3}{\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) -$$

$$\frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)} s_1^2}{2(R/L)} \left(K_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right) \left. \right]$$

$$G_{1(5)}^{(2)} = \left[\frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 s_1^3}{4} \left(K_0 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) + 2K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) + K_4 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right) - \right.$$

$$\frac{4\lambda^{(1)} s_1}{(R/L)^2} K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) - \frac{\left(\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 s_1^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) \lambda^{(1)} s_1^3}{\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) -$$

$$\frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)} s_1^2}{2(R/L)} \left(K_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right) \left. \right]$$

$$G_{2(6)}^{(2)} = 0$$

$$G_{2(7)}^{(2)} = 0$$

$$\begin{aligned}
G_{2(8)}^{(2)} &= (-1) \times \left[\frac{-4\mu^{(2)}}{(R/L)^2} I_2 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s_1 \right) + \frac{2\mu^{(2)} \xi_1^{(2)} s_1}{(R/L)} \left(I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s_1 \right) \right) \right] \\
G_{2(9)}^{(2)} &= (-1) \times \left[\frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 s_1^3}{4} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) + 2I_2 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) + I_4 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) \right) \right. \\
&\quad - \frac{4\lambda^{(2)} s_1}{(R/L)^2} I_2 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) - \frac{\left(\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 s_1^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) \lambda^{(2)} s_1^3}{\left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} I_2 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^{(2)} \xi_2^{(2)} s_1^2}{2(R/L)} \left(I_1 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) \right) \right] \\
G_{2(10)}^{(2)} &= (-1) \times \left[\frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 s_1^3}{4} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) + 2I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) + I_4 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) \right) \right. \\
&\quad - \frac{4\lambda^{(2)} s_1}{(R/L)^2} I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) - \frac{\left(\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) \lambda^{(2)} s_1^3}{\left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right)} I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) + \\
&\quad \left. \frac{\lambda^{(2)} \xi_3^{(2)} s_1^2}{2(R/L)} \left(I_1 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$G_{1(1)}^{(3)} = 0$$

$$G_{1(2)}^{(3)} = 0$$

$$\begin{aligned}
G_{1(3)}^{(3)} &= \left[\frac{-4\mu^{(1)}}{(R/L)^2} K_2 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) - \frac{\mu^{(1)} \left(\xi_1^{(1)} \right)^2 s_1^2}{4} \left(K_0 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) + 2K_2 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) + \right. \\
&\quad \left. K_4 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) \right) - \frac{\mu^{(1)} \xi_1^{(1)} s}{2(R/L)} \left(K_1 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) \right) \right] \\
G_{1(4)}^{(3)} &= \left[\frac{2\mu^{(1)} \xi_2^{(1)} s_1^2}{(R/L)} \left(K_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right) + \frac{4\mu^{(1)} s}{(R/L)^2} K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right] \\
G_{1(5)}^{(3)} &= \left[\frac{2\mu^{(1)} \xi_3^{(1)} s_1^2}{(R/L)} \left(K_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right) + \frac{4\mu^{(1)} s_1}{(R/L)^2} K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$G_{2(6)}^{(3)} = 0$$

$$G_{2(7)}^{(3)} = 0$$

$$G_{2(8)}^{(3)} = (-1)x \left[\frac{-4\mu^{(2)}}{(R/L)^2} I_2 \left((R/L)\xi_1^{(2)} s_1 \right) - \frac{\mu^{(2)} \left(\xi_1^{(2)} \right)^2 s_1^2}{4} \left(I_0 \left((R/L)\xi_1^{(2)} s_1 \right) + 2I_2 \left((R/L)\xi_1^{(2)} s_1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + I_4 \left((R/L)\xi_1^{(2)} s_1 \right) \right) + \frac{\mu^{(2)} \xi_1^{(2)} s_1}{2(R/L)} \left(I_1 \left((R/L)\xi_1^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L)\xi_1^{(2)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{2(9)}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{2\mu^{(2)} \xi_2^{(2)} s_1^2}{(R/L)} \left(I_1 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) \right) + \frac{4\mu^{(2)} s_1}{(R/L)^2} I_2 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(10)}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{2\mu^{(2)} \xi_3^{(2)} s_1^2}{(R/L)} \left(I_1 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s_1 \right) \right) + \frac{4\mu^{(2)} s}{(R/L)^2} I_2 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(1)}^{(4)} = i \left[-\mu^{(1)} \xi_2^{(1)} s_1^3 K_1 \left((R/L)\xi_2^{(1)} s_1 \right) - \frac{\left(\mu^{(1)} \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} \left(\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)} \right) \right) \xi_2^{(1)} s_1^3}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left((R/L)\xi_2^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(2)}^{(4)} = i \left[-\mu^{(1)} \xi_3^{(1)} s_1^3 K_1 \left((R/L)\xi_3^{(1)} s_1 \right) - \frac{\left(\mu^{(1)} \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} \left(\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)} \right) \right) \xi_3^{(1)} s_1^3}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left((R/L)\xi_3^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(3)}^{(4)} = 0$$

$$G_{1(4)}^{(4)} = 0$$

$$G_{1(5)}^{(4)} = 0$$

$$G_{2(6)}^{(4)} = -i \left[\mu^{(2)} \xi_2^{(2)} s_1^3 I_1 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) + \frac{\left(\mu^{(2)} \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} \left(\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(2)} \right) \right) \xi_2^{(2)} s_1^3}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(7)}^{(4)} = -i \left[\mu^{(2)} \xi_3^{(2)} s^3 I_1 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s \right) + \frac{\left(\mu^{(2)} \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} \left(\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(2)} \right) \right) \xi_3^{(2)} s^3}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s \right) \right]$$

$$G_{2(8)}^{(4)} = 0$$

$$G_{2(9)}^{(4)} = 0$$

$$G_{2(10)}^{(4)} = 0$$

$$G_{1(1)}^{(5)} = 0$$

$$G_{1(2)}^{(5)} = 0$$

$$G_{1(3)}^{(5)} = i \left[\frac{2\mu^{(1)}s}{(R/L)} K_2 \left((R/L)\xi_1^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(4)}^{(5)} = i \left[-\frac{\mu^{(1)}\xi_2^{(1)}s_1^3}{2} \left(K_1 \left((R/L)\xi_2^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L)\xi_2^{(1)} s_1 \right) \right) - \frac{\left(\mu^{(1)} \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} \left(\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)} \right) \right) \xi_2^{(1)} s_1^3}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \left(K_1 \left((R/L)\xi_2^{(1)} s \right) + K_3 \left((R/L)\xi_2^{(1)} s \right) \right) \right]$$

$$G_{1(5)}^{(4)} = i \left[-\frac{\mu^{(1)}\xi_3^{(1)}s^3}{2} \left(K_1 \left((R/L)\xi_3^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L)\xi_3^{(1)} s_1 \right) \right) - \frac{\left(\mu^{(1)} \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} \left(\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)} \right) \right) \xi_3^{(1)} s^3}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \left(K_1 \left((R/L)\xi_3^{(1)} s \right) + K_3 \left((R/L)\xi_3^{(1)} s \right) \right) \right]$$

$$G_{2(6)}^{(5)} = 0$$

$$G_{2(7)}^{(5)} = 0$$

$$G_{2(8)}^{(5)} = -i \left[\frac{2\mu^{(2)}s_1}{(R/L)} I_2 \left((R/L)\xi_1^{(2)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(9)}^{(5)} = -i \left[\frac{\mu^{(2)}\xi_2^{(2)}s_1^3}{2} \left(I_1 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) \right) + \frac{\left(\mu^{(2)} \left(\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) - \mu^{(2)} \left(\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(2)} \right) \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \right) \xi_2^{(2)} s_1^3}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(I_1 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L)\xi_2^{(2)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{2(10)}^{(5)} = -i \left[\frac{\mu^{(2)}\xi_3^{(2)}s_1^3}{2} \left(I_1 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s_1 \right) \right) + \frac{\left(\mu^{(2)} \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 - \mu^{(2)} \left(\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(2)} \right) \right) \xi_3^{(2)} s_1^3}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \left(I_1 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L)\xi_3^{(2)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{1(1)}^{(6)} = \left[-\xi_2^{(1)} s_1^2 K_1 \left((R/L)\xi_2^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(2)}^{(6)} = \left[-\xi_3^{(1)} s_1^2 K_1 \left((R/L)\xi_3^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(3)}^{(6)} = 0$$

$$G_{1(4)}^{(6)} = 0$$

$$G_{1(5)}^{(6)} = 0$$

$$G_{2(6)}^{(6)} = \left[-\xi_2^{(1)} s_1^2 I_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(7)}^{(6)} = \left[-\xi_3^{(1)} s_1^2 I_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(8)}^{(6)} = 0$$

$$G_{2(9)}^{(6)} = 0$$

$$G_{2(10)}^{(6)} = 0$$

$$G_{1(1)}^{(7)} = 0$$

$$G_{1(2)}^{(7)} = 0$$

$$G_{1(3)}^{(7)} = \left[\frac{2}{(R/L)} K_2 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(4)}^{(7)} = \left[\frac{-\xi_2^{(1)} s_1^2}{2} \left(K_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{1(5)}^{(7)} = \left[\frac{-\xi_3^{(1)} s_1^2}{2} \left(K_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{2(6)}^{(7)} = 0$$

$$G_{2(7)}^{(7)} = 0$$

$$G_{2(8)}^{(7)} = - \left[\frac{2}{(R/L)} I_2 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(9)}^{(7)} = - \left[\frac{\xi_2^{(1)} s_1^2}{2} \left(I_1 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{2(10)}^{(7)} = - \left[\frac{\xi_3^{(1)} s_1^2}{2} \left(I_1 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) + I_3 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{1(1)}^{(8)} = 0$$

$$G_{1(2)}^{(8)} = 0$$

$$G_{1(3)}^{(8)} = \left[\frac{\xi_1^{(1)} s_1}{2} \left(K_1 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) + K_3 \left((R/L) \xi_1^{(1)} s_1 \right) \right) \right]$$

$$G_{1(4)}^{(8)} = \left[\frac{-2s_1}{(R/L)} K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(5)}^{(8)} = \left[\frac{-2s_1}{(R/L)} K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(6)}^{(7)} = 0$$

$$G_{2(7)}^{(7)} = 0$$

$$G_{2(8)}^{(8)} = - \left[\frac{-\xi_1^{(2)} s}{2} \left(I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) + I_3 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$G_{2(9)}^{(8)} = - \left[\frac{-2s_1}{(R/L)} I_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(10)}^{(8)} = - \left[\frac{-2s_1}{(R/L)} I_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(1)}^{(9)} = i \left[\frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)} s_1^2}{\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} K_0 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(2)}^{(9)} = i \left[\frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)} s_1^2}{\left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right)} K_0 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(3)}^{(9)} = 0$$

$$G_{1(4)}^{(9)} = 0$$

$$G_{1(5)}^{(9)} = 0$$

$$G_{2(6)}^{(9)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) s_1^2}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_0 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(7)}^{(9)} = i \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) s_1^2}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_0 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(8)}^{(9)} = 0$$

$$G_{2(9)}^{(9)} = 0$$

$$G_{2(10)}^{(9)} = 0$$

$$G_{1(1)}^{(10)} = 0$$

$$G_{1(2)}^{(10)} = 0$$

$$G_{1(3)}^{(10)} = 0$$

$$G_{1(4)}^{(10)} = i \left[\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) s_1^2}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_2 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{1(5)}^{(10)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^{(0)} \right) s^2}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})} K_2 \left((R/L) \xi_3^{(1)} s \right) \right]$$

$$G_{2(6)}^{(10)} = 0$$

$$G_{2(7)}^{(10)} = 0$$

$$G_{2(8)}^{(10)} = 0$$

$$G_{2(9)}^{(10)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2)} \right) s_1^2}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_2 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s_1 \right) \right]$$

$$G_{2(10)}^{(10)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^{(2)} \right) s_1^2}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s_1 \right) \right]$$

(E2.3)

Ek 3 Bölüm 3’de Yer Alan Denklemlerdeki Fonksiyonların Açık İfadeleri

$$H_{11}^{(2)} = \left[-\frac{2\mu^{(2)}}{(R/L)^2} I_1((R/L)\xi_1^{(2)}s) + \frac{\mu^{(2)}\xi_1^{(2)}s}{(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_1^{(2)}s) + I_2((R/L)\xi_1^{(2)}s) \right) \right]$$

$$H_{21}^{(2)} = \left[\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\left(\xi_2^{(2)}\right)^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) + \frac{\lambda^{(2)}\xi_2^{(2)}s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right. \right.$$

$$\left. + I_2((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) - \frac{\lambda^{(2)}s}{(R/L)^2} \left(I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right) - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\left(\xi_2^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{33}^{(0)} \right)}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})} x$$

$$\left. - \frac{\lambda^{(2)}s^3}{1} I_1((R/L)\xi_2^{(2)}s) \right]$$

$$H_{31}^{(2)} = \left[\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\left(\xi_3^{(2)}\right)^2 s^3}{4} \left(3I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) + I_3((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) - \frac{\lambda^{(2)}\xi_3^{(2)}s^2}{2(R/L)} \left(I_0((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right. \right.$$

$$\left. + I_2((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) - \frac{\lambda^{(2)}s}{(R/L)^2} \left(I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \right) - \frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\left(\xi_3^{(2)}\right)^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{33}^0 \right)}{(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})}$$

$$x \frac{\lambda^{(2)}s^3}{1} I_1((R/L)\xi_3^{(2)}s) \left. \right]$$

$$H_{11}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{2\mu^{(3)}}{(R/L)^2} K_1((R/L)\xi_1^{(3)}s) - \frac{\mu^{(3)}\xi_1^{(3)}s}{(R/L)} \left(K_0((R/L)\xi_1^{(3)}s) + K_2((R/L)\xi_1^{(3)}s) \right) \right]$$

$$H_{21}^{(3)} = (-1)x \left[\frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})\left(\xi_2^{(3)}\right)^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_2^{(3)}s) + K_3((R/L)\xi_2^{(3)}s) \right) - \frac{\lambda^{(3)}\xi_2^{(3)}s^2}{2(R/L)} x \right.$$

$$\left(K_0((R/L)\xi_2^{(3)}s) + K_2((R/L)\xi_2^{(3)}s) \right) - \frac{\lambda^{(3)}s}{(R/L)^2} \left(K_1((R/L)\xi_2^{(3)}s) - \frac{\lambda^{(3)}s^3}{1} x \right.$$

$$\left. \frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})\left(\xi_2^{(3)}\right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{33}^{(0)} \right)}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1((R/L)\xi_2^{(3)}s) \right]$$

$$H_{31}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})\left(\xi_3^{(3)}\right)^2 s^3}{4} \left(3K_1((R/L)\xi_3^{(3)}s) + K_3((R/L)\xi_3^{(3)}s) \right) - \frac{\lambda^{(3)}\xi_3^{(3)}s^2}{2(R/L)} x \right.$$

$$\left(K_0((R/L)\xi_3^{(3)}s) + K_2((R/L)\xi_3^{(3)}s) \right) - \frac{\lambda^{(3)}s}{(R/L)^2} \left(K_1((R/L)\xi_3^{(3)}s) - \frac{\lambda^{(3)}s^3}{1} x \right.$$

$$\left. \frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})\left(\xi_3^{(3)}\right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{33}^{(0)} \right)}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1((R/L)\xi_3^{(3)}s) \right]$$

$$\begin{aligned}
L_{11}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{2\mu^{(3)}}{(R/L)^2} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)} s}{(R/L)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right] \\
L_{21}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 s^3}{4} \left(3I_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) + I_3 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) + \frac{\lambda^{(3)} \xi_2^{(3)} s^2}{2(R/L)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + I_2 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) - \frac{\lambda^{(3)} s}{(R/L)^2} \left(I_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) - \frac{((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{33}^{(0)})}{(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} x \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\lambda^{(3)} s^3}{1} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right] \\
L_{31}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 s^3}{4} \left(3I_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) + I_3 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right) - \frac{\lambda^{(3)} \xi_3^{(3)} s^2}{2(R/L)} x \right. \\
&\quad \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) - \frac{\lambda^{(3)} s}{(R/L)^2} \left(I_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) - \frac{\lambda^{(3)} s^3}{1} x \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{33}^{(0)})}{(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right] \\
H_{12}^{(2)} &= \left[-\frac{\mu^{(2)}}{(R/L)^2} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) - \frac{\mu^{(2)} (\xi_1^{(2)})^2 s^2}{4} \left(3I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) + I_3 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu^{(2)} \xi_1^{(2)} s}{2(R/L)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right] \\
H_{22}^{(2)} &= \left[-\frac{\mu^{(2)} \xi_2^{(2)} s^2}{(R/L)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right) + \frac{2\mu^{(2)} s}{(R/L)^2} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right] \\
H_{32}^{(2)} &= \left[-\frac{\mu^{(2)} \xi_3^{(2)} s^2}{(R/L)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right) + \frac{2\mu^{(2)} s}{(R/L)^2} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right] \\
H_{12}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\mu^{(3)}}{(R/L)^2} K_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) - \frac{\mu^{(3)} (\xi_1^{(3)})^2 s^2}{4} \left(3K_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + K_3 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)} s}{2(R/L)} \left(K_0 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right] \\
H_{22}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{\mu^{(3)} \xi_2^{(3)} s^2}{(R/L)} \left(K_0 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) + \frac{2\mu^{(3)} s}{(R/L)^2} K_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right] \\
H_{32}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{\mu^{(3)} \xi_3^{(3)} s^2}{(R/L)} \left(K_0 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right) + \frac{2\mu^{(3)} s}{(R/L)^2} K_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right]
\end{aligned}$$

$$L_{12}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{\mu^{(3)}}{(R/L)^2} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) - \frac{\mu^{(3)} \left(\xi_1^{(3)} \right)^2 s^2}{4} \left(3I_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + I_3 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)} s}{2(R/L)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$L_{22}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{\mu^{(3)} \xi_2^{(3)} s^2}{(R/L)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) + \frac{2\mu^{(3)} s}{(R/L)^2} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right]$$

$$L_{32}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{\mu^{(3)} \xi_3^{(3)} s^2}{(R/L)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right) + \frac{2\mu^{(3)} s}{(R/L)^2} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right]$$

$$H_{13}^{(2)} = -i \left[\frac{\mu^{(2)} s}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right]$$

$$H_{23}^{(2)} = -i \left[\mu^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^0 + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_2^{(2)} \right)^2 \right) \xi_2^{(2)} s^3}{2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{33}^{(2)} = -i \left[\mu^{(2)} \frac{\left(\lambda^{(2)} - \sigma_{zz}^0 + \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \left(\xi_3^{(2)} \right)^2 \right) \xi_3^{(2)} s^3}{2 \left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{13}^{(3)} = i \left[\frac{\mu^{(3)} s}{(R/L)} K_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right]$$

$$H_{23}^{(3)} = -i \left[\mu^{(3)} \frac{\left(\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^0 + \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 \right) \xi_2^{(3)} s^3}{2 \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right)} \left(K_0 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{33}^{(1)} = -i \left[\mu^{(3)} \frac{\left(\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^0 + \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 \right) \xi_3^{(3)} s^3}{2 \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right)} \left(K_0 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$L_{13}^{(3)} = -i \left[\frac{\mu^{(3)} s}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right]$$

$$L_{23}^{(3)} = -i \left[\mu^{(3)} \frac{\left(\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^0 + \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 \right) \xi_2^{(3)} s^3}{2 \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$L_{33}^{(3)} = -i \left[\mu^{(3)} \frac{\left(\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^0 + \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 \right) \xi_3^{(3)} s^3}{2 \left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right)} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{14}^{(2)} = i \left[\frac{1}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right]$$

$$H_{24}^{(2)} = i \left[-\frac{\xi_2^{(2)} s^2}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{34}^{(2)} = i \left[-\frac{\xi_3^{(2)} s^2}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{14}^{(3)} = (-1)x \left[\frac{1}{(R/L)} K_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right]$$

$$H_{24}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{\xi_2^{(3)} s^2}{2} \left(K_0 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{34}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{\xi_3^{(3)} s^2}{2} \left(K_0 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$L_{14}^{(3)} = (-1)x \left[\frac{1}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right]$$

$$L_{24}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{\xi_2^{(3)} s^2}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$L_{34}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{\xi_3^{(3)} s^2}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{15}^{(2)} = \left[\frac{\xi_1^{(2)} s}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{25}^{(2)} = \left[\frac{s}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right]$$

$$H_{35}^{(2)} = \left[\frac{s}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right]$$

$$H_{15}^{(3)} = (-1)x \left[\frac{\xi_1^{(3)} s}{2} \left(K_0 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$H_{25}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{s}{(R/L)} K_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right]$$

$$H_{35}^{(3)} = (-1)x \left[-\frac{s}{(R/L)} K_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right]$$

$$L_{15}^{(3)} = (-1)x \left[\frac{\xi_1^{(3)} s}{2} \left(I_0 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + I_2 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right]$$

$$L_{25}^{(3)} = (-1)x \left[\frac{s}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right]$$

$$L_{35}^{(3)} = (-1)x \left[\frac{s}{(R/L)} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right]$$

$$H_{16}^{(2)} = 0$$

$$H_{26}^{(2)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(2)} s \right) \right]$$

$$H_{36}^{(2)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu^{(2)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(2)} s \right) \right]$$

$$H_{16}^{(3)} = 0$$

$$H_{26}^{(3)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right]$$

$$H_{36}^{(3)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right]$$

$$L_{16}^{(3)} = 0$$

$$L_{26}^{(3)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} I_1 \left((R/L) \xi_2^{(3)} s \right) \right]$$

$$L_{36}^{(3)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} I_1 \left((R/L) \xi_3^{(3)} s \right) \right]$$

$$H_{11}^{(1)} = \left[-\frac{2\mu^{(1)}}{((R/L) + (h/L))^2} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) - \frac{\mu^{(1)} \xi_1^{(1)} s}{((R/L) + (h/L))} x \right. \\ \left. \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
H_{21}^{(1)} = & \left[\frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 s^3}{4} \left(3K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) + K_3 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda^{(1)} \xi_2^{(1)} s^2}{2(R/L)} \left(K_0 \left((R/L) \xi_2^{(1)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \right) - \frac{\lambda^{(1)} s}{((R/L) + (h/L))^2} x \right. \\
& \left(K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) - \frac{\left(\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_2^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{33}^0 \right) \lambda^{(1)} s^3}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \frac{1}{1} x \right. \\
& \left. K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \right] \\
H_{31}^{(1)} = & \left[- \frac{\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 s^3}{4} \left(3K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) + K_3 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \right) \right. \\
& - \frac{\lambda^{(1)} \xi_3^{(1)} s^2}{2((R/L) + (h/L))} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \right) \\
& - \frac{\lambda^{(1)} s}{((R/L) + (h/L))^2} \left(K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) - \frac{\left(\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \left(\xi_3^{(1)} \right)^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{33}^0 \right)}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} x \right. \\
& \left. \frac{\lambda^{(1)} s^3}{1} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \right] \\
H_{11}^{(3)} = & (-1)x \left[- \frac{2\mu^{(3)}}{(R/L)^2} K_1 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) - \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)} s}{(R/L)} \left(K_0 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) + K_2 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right] \\
H_{21}^{(3)} = & (-1)x \left[\frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 s^3}{4} \left(3K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + K_3 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right. \\
& - \frac{\lambda^{(3)} \xi_2^{(3)} s^2}{2((R/L) + (h/L))} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \\
& - \frac{\lambda^{(3)} s}{(R/L)^2} \left(K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) - \frac{\left(\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{33}^{(0)} \right)}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} x \right. \\
& \left. \frac{\lambda^{(3)} s^3}{1} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right] \\
H_{31}^{(3)} = & (-1)x \left[- \frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 s^3}{4} \left(3K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + \right. \\
& \left. K_3 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right) - \frac{\lambda^{(3)} \xi_3^{(3)} s^2}{2(R/L)} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) - \frac{\lambda^{(3)} s}{(R/L)^2} \left(K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right. \\
& \left. - \frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{33}^{(0)} \right) \lambda^{(3)} s^3}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} \frac{1}{1} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right] \\
L_{11}^{(3)} = & (-1)x \left[- \frac{2\mu^{(3)}}{\left((R/L) + (h/L) \right)^2} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) + \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)} s}{\left((R/L) + (h/L) \right)} \right. \\
& \left. \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right. \\
L_{21}^{(3)} = & (-1)x \left[\frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 s^3}{4} \left(3I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + I_3 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right. \\
& + \frac{\lambda^{(3)} \xi_2^{(3)} s^2}{2(R/L)} \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) - \frac{\lambda^{(3)} s}{(R/L)^2} xx \\
& \left. \left(I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) - \frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) \left(\xi_2^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{33}^{(0)} \right) \lambda^{(3)} s^3}{(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} \frac{1}{1} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right] \\
L_{31}^{(3)} = & (-1)x \left[\frac{\left(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 s^3}{4} \left(3I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + I_3 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right. \\
& - \frac{\lambda^{(3)} \xi_3^{(3)} s^2}{2(R/L)} \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) - \frac{\lambda^{(3)} s}{(R/L)^2} x \right. \\
& \left. \left(I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) - \frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) \left(\xi_3^{(3)} \right)^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{33}^{(0)} \right) \lambda^{(3)} s^3}{(\lambda^{(3)} + \mu^{(3)})} \frac{1}{1} x \right. \right. \\
& \left. \left. I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right] \\
H_{12}^{(1)} = & \left[- \frac{\mu^{(1)}}{\left((R/L) + (h/L) \right)^2} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) - \frac{\mu^{(1)} \left(\xi_1^{(1)} \right)^2 s^2}{4} x \right. \\
& \left(3K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) + K_3 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) \right) - \frac{\mu^{(1)} \xi_1^{(1)} s}{2 \left((R/L) + (h/L) \right)} x \\
& \left. \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) \right) \right] \\
H_{22}^{(1)} = & \left[\frac{\mu^{(1)} \xi_2^{(1)} s^2}{\left((R/L) + (h/L) \right)} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \right) + \right. \\
& \left. \frac{2\mu^{(1)} s}{\left((R/L) + (h/L) \right)^2} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{32}^{(1)} &= \left[\frac{\mu^{(1)} \xi_3^{(1)} s^2}{((R/L) + (h/L))} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{2\mu^{(1)} s}{(R/L)^2} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \right] \\
H_{12}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\mu^{(3)}}{((R/L) + (h/L))^2} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) - \frac{\mu^{(3)} \left(\xi_1^{(3)} \right)^2 s^2}{4} x \right. \\
&\quad \left(3K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) + K_3 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) - \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)} s}{2((R/L) + (h/L))} x \\
&\quad \left. \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right] \\
H_{22}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{\mu^{(3)} \xi_2^{(3)} s^2}{((R/L) + (h/L))} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\mu^{(3)} s}{((R/L) + (h/L))^2} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right] \\
H_{32}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{\mu^{(3)} \xi_3^{(3)} s^2}{((R/L) + (h/L))} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\mu^{(3)} s}{((R/L) + (h/L))^2} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right] \\
L_{12}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\mu^{(3)}}{((R/L) + (h/L))^2} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) - \frac{\mu^{(3)} \left(\xi_1^{(3)} \right)^2 s^2}{4} x \right. \\
&\quad \left(3I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) + I_3 \left((R/L) \xi_1^{(3)} s \right) \right) + \frac{\mu^{(3)} \xi_1^{(3)} s}{2((R/L) + (h/L))} x \\
&\quad \left. \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right] \\
L_{22}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\mu^{(3)} \xi_2^{(3)} s^2}{((R/L) + (h/L))} \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\mu^{(3)} s}{(R/L)^2} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right] \\
L_{32}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\mu^{(3)} \xi_3^{(3)} s^2}{((R/L) + (h/L))} \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\mu^{(3)} s}{((R/L) + (h/L))^2} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right] \\
H_{13}^{(1)} &= i \left[\frac{\mu^{(1)} s}{((R/L) + (h/L))} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{23}^{(1)} &= -i \left[\mu^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_2^{(1)})^2) \xi_2^{(1)} s^3}{2(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})} \left(K_0((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) + \right. \\
&\quad \left. K_2((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \\
H_{33}^{(1)} &= -i \left[\mu^{(1)} \frac{(\lambda^{(1)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\xi_3^{(1)})^2) \xi_3^{(1)} s^3}{2(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})} \left(K_0((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) + \right. \\
&\quad \left. K_2((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \Big] \\
H_{13}^{(3)} &= i \left[\frac{\mu^{(3)} s}{((R/L) + (h/L))} K_1((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right] \\
H_{23}^{(3)} &= -i \left[\mu^{(3)} \frac{(\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})(\xi_2^{(3)})^2) \xi_2^{(3)} s^3}{2(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})} \left(K_0((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right. \\
&\quad \left. + K_2((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \Big] \\
H_{33}^{(3)} &= -i \left[\mu^{(3)} \frac{(\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})(\xi_3^{(3)})^2) \xi_3^{(3)} s^3}{2(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})} \left(K_0((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + \right. \\
&\quad \left. K_2((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \Big] \\
L_{13}^{(3)} &= -i \left[\frac{\mu^{(3)} s}{((R/L) + (h/L))} I_1((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right] \\
L_{23}^{(3)} &= -i \left[\mu^{(3)} \frac{(\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})(\xi_2^{(3)})^2) \xi_2^{(3)} s^3}{2(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})} \left(I_0((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + \right. \\
&\quad \left. I_2((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \Big] \\
L_{33}^{(3)} &= -i \left[\mu^{(3)} \frac{(\lambda^{(3)} - \sigma_{zz}^0 + (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})(\xi_3^{(3)})^2) \xi_3^{(3)} s^3}{2(\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)})} \left(I_0((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + \right. \\
&\quad \left. I_2((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \Big] \\
H_{14}^{(1)} &= \left[\frac{1}{((R/L) + (h/L))} K_1((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right] \\
H_{24}^{(1)} &= \left[-\frac{\xi_2^{(1)} s^2}{2} \left(K_0((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s + K_2((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \right] \\
H_{34}^{(1)} &= \left[-\frac{\xi_3^{(1)} s^2}{2} \left(K_0((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s + K_2((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{14}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{1}{((R/L) + (h/L))} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) \right] \\
H_{24}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\xi_2^{(3)} s^2}{2} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right] \\
H_{34}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\xi_3^{(3)} s^2}{2} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right] \\
L_{14}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{1}{((R/L) + (h/L))} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) \right] \\
L_{24}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\xi_2^{(3)} s^2}{2} \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right) \right] \\
L_{34}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{\xi_3^{(3)} s^2}{2} \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right) \right] \\
H_{15}^{(1)} &= \left[\frac{\xi_1^{(1)} s}{2} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(1)} s \right) \right) \right] \\
H_{25}^{(1)} &= \left[-\frac{s}{((R/L) + (h/L))} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \right] \\
H_{35}^{(1)} &= \left[-\frac{s}{((R/L) + (h/L))} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \right] \\
H_{15}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{\xi_1^{(3)} s}{2} \left(K_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) + K_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right] \\
H_{25}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{s}{((R/L) + (h/L))} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right] \\
H_{35}^{(3)} &= (-1)x \left[-\frac{s}{((R/L) + (h/L))} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right] \\
L_{15}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{\xi_1^{(3)} s}{2} \left(I_0 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) + I_2 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_1^{(3)} s \right) \right) \right] \\
L_{25}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{s}{((R/L) + (h/L))} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right] \\
L_{35}^{(3)} &= (-1)x \left[\frac{s}{((R/L) + (h/L))} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right] \\
H_{16}^{(1)} &= 0 \\
H_{26}^{(1)} &= i \left[\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_2^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(1)} s \right) \right]
\end{aligned}$$

$$H_{36}^{(1)} = i \left[\frac{\left((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) (\xi_3^{(1)})^2 - \mu^{(1)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(1)} s \right) \right]$$

$$H_{16}^{(3)} = 0$$

$$H_{26}^{(3)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right]$$

$$H_{36}^{(3)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} K_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right]$$

$$I_{16}^{(3)} = 0$$

$$I_{26}^{(3)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_2^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_2^{(3)} s \right) \right]$$

$$I_{36}^{(3)} = -i \left[\frac{\left((\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) (\xi_3^{(3)})^2 - \mu^{(3)} - \sigma_{zz}^0 \right) s^2}{\lambda^{(3)} + \mu^{(3)}} I_1 \left(((R/L) + (h/L)) \xi_3^{(3)} s \right) \right]$$

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 06.09.1969

Doğum yeri Yozgat

Lise 1984-1987 Kayseri Sümer Lisesi

Lisans 1987-1993 Hacettepe Üniversitesi Matematik Öğretmenliği (Almanca)

Yüksek Lisans 1996-1999 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Doktora 2000- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1994-1998 Küçük Çekmece Marmara Lisesi Matematik Öğretmeni

1998-Devam ediyor YTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi