

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONTROL EDİLEBİLİRLİK ve LİE CEBİRİNİN
NORMALİZÖRÜ KULLANILARAK SİSTEMLERİN
İNCELENMESİ**

Matematikçi Hatice Handan KURHAN

**FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL

İSTANBUL, 2006

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONTROL EDİLEBİLİRLİK ve LİE CEBİRİNİN
NORMALİZÖRÜ KULLANILARAK SİSTEMLERİN
İNCELENMESİ**

Matematikçi Hatice Handan KURHAN

**FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
2. LİE GRUPLARI	3
2.1 Manifoldlar	3
2.2 Gruplar ve Lie Grupları	6
2.3 Bir Parametrelili Alt Gruplar ve Üstel Tasvir	13
2.4 Adjoint Gösterilim	22
3. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ ve KONTROL EDİLEBİLİRLİK	24
3.1 Genel Kontrol Sistemleri	24
3.2 Kontrol Edilebilirlik	26
4. NORMALİZÖRLÜ SİSTEMLERİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ	31
4.1 Normalizör	31
4.2 Homomorfizmler, Otomorfizmler ve Türevler	58
4.3 Kompakt, Bağlantılı, Abelian Olmayan Bir Lie Grubu Üzerinde Normalizörlü Lineer Kontrol Sistemlerinin Kontrol Edilebilirliği	60
SONUÇLAR	66
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGE LİSTESİ

A^t	A'nın transpozu
$\overline{A}$	A'nın eşleniği
A^t	A'nın tranzpozunun eşleniği
Ad	Adjoint gösterilim
ad	Ad'ın diferansiyeli
Aut	Otomorfizlerin kümesi
C	Kompleks sayılar kümesi
$C^\infty(M)$	M manifoldu üzerindeki tüm düz fonksiyonların kümesi
det	Determinant fonksiyonu
$df : T(M) \rightarrow T(N)$	M ve N manifoldları arasındaki $f : M \rightarrow N$ tasvirinin türevi
e	Birim eleman
End	Endomorfizlerin kümesi
exp	Üstel fonksiyon
f_v	v'ye bağlı 1-parametrelî alt grup
∂f	f'nin kısmî türevi
f'	f'nin türevi
G	Bir Lie grubu
G_Σ	Sözde grup
G_o	G'nin birim elemanının bağlantılı bir elemanı
$GL(n, R)$	Reel elemanlı n x n lik tersi alınabilir matrislerin kümesi
$GL(n, C)$	Kompleks elemanlı n x n lik tersi alınabilir matrislerin kümesi
izA	A matrisinin izi
$\ker \Pi$	Π tasvirinin çekirdeği
$L(G)$	G'nin Lie cebiri
L_a	a ile yapılmış sol öteleme
M	Diferansiyellenebilen bir manifold
R	Reel sayılar kümesi
R^n	n-boyutlu reel vektörlerin kümesi
S^3	3-boyutlu küre
S_Σ	Sözde-yarı grup
$T_p(M)$	$p \in M$ deki tüm tanjant vektörlerinin kümesi
$[X, Y]$	Lie cebirinin X, Y elemanlarının Lie parantezi
Z	Tamsayılar kümesi
$\bigcup_p T_p(M)$	$\{T_p\}_{p \in M}$ kümelerinin ayrık birleşimi
Σ	Bir genel kontrol sistemi
Δ	İnvolutiv dağılım
$\otimes$	Yarı-direk çarpım
$\in$	Elemanı
$\subseteq$	Altküme

ÖNSÖZ

Tezimi hazırlarken içeriğin oluşmasında bana sürekli yol gösteren ve değerli yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmam süresince benden manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Hatice Handan KURHAN
İSTANBUL, 2006

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, manifoldlar, gruplar ve Lie grupları tanımlandıktan sonra onların üstel tasvir ve adjoint gösterilimine yer verilmiştir. İkinci bölümde, genel kontrol sistemleri ve kontrol edilebilirlik örneklerle incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise, Lie cebirinin normalizörü üzerinde durulmuştur. Kompakt, bağlantılı bir Lie grubu üzerinde normalizörlü bir lineer kontrol sisteminin dinamiğinin konservatif vektör alanlarıyla üretildiği ve Lie grubu aynı zamanda Abelian olmayan ise normalizörlü lineer kontrol sisteminin geçişli olması için gerek ve yeter koşulun kontrol edilebilir olması gerektiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kontrol sistemleri, kontrol edilebilirlik, Lie grupları, Lie cebiri, normalizör

ABSTRACT

This study contains four chapters. In the first chapter, after the descriptions of manifolds, groups and Lie groups, their exponential map and adjoint representation are given. In the second chapter, general facts about control systems and controllability are studied with examples. In the third chapter, normalizer of Lie algebra is dwelled on. It is shown that the dynamic of a linear control system with normalizer on a compact, connected Lie group is induced by conservative vector fields and if Lie group is also non-Abelian then the system is transitive if and only if it is controllable.

Keywords: Control systems, controllability, Lie groups, Lie algebra, normalizer

1. GİRİŞ

Bir Σ genel kontrol sistemi, diferansiyellenebilen sonlu boyutlu bir M manifoldu, durum uzayı, vektör alanlarının bir D ailesi ve kontroller ile belirlidir. Σ için kontrol edilebilirlik problemi M ve D ile ilgilidir ve D deki vektör alanlarının neden olduğu negatif olmayan zamanlı yerel difeomorfizmlerin tüm bileşkeleri kullanıldığında, x den başlayarak M nin her bir y elemanına ulaşmak hangi koşullar altında mümkündür, sorusundan kaynaklanır.

Bu çalışmada kontrol edilebilirlik problemini kompakt, bağlantılı ve Abelian olmayan bir G Lie grubu ve kontrol vektörleri sol-invaryant vektör alanları olarak gözönüne aldığımız G nin $L(G)$ Lie cebirinin elemanları ve drift vektör alanı da $X(G)$ deki $L(G)$ Lie cebirinin normalizörünün bir elemanı ile belirlenen D dinamiğinden oluşan $\Sigma = (G, D)$ sistemi üzerinde inceliyoruz.

“Lie Grupları” ana başlığı altında verilen ilk bölümde, öncelikle manifoldlar hakkında temel kavramları ele alıp, daha sonra Lie grupları, Lie cebirleri ve onların üstel tasvir ve adjoint gösterilimine yer veriyoruz.

“Genel Kontrol Sistemleri ve Kontrol Edilebilirlik” adlı ikinci bölümde, diferansiyellenebilen bir M manifoldu ve bir Σ genel kontrol sistemi için, Σ nın M üzerinde her zaman geçişli olarak kabul edilebileceğini gösteren Yörünge Teoremini veriyoruz. Bu teorem, her bir $x \in M$ nin yörüngesini ve x in Σ vasıtasıyla ulaşılabilir kümelerini tanımlayarak kontrol edilebilirlik problemini ve M üzerindeki kontrol edilebilirlik probleminin yörüngelerine indirilmesine olanak vermektedir. Ayrıca kontrol edilebilirliğe dair bazı örneklerde rank koşulunu kullanıyoruz.

Son bölümde çalışmamıza esas teşkil eden “Normalizörlü Sistemlerin Kontrol Edilebilirliği” üzerinde duruyoruz. Lie grupları üzerindeki lineer vektör alanlarını, yani $\text{norm}_{X(G)}(L(G))$ normalizörü içindeki elemanları inceliyoruz.

$\text{Aut}(G)$ Lie grubunu, $\partial(L(G))$ Lie cebirini ve $L(G) \otimes \text{gl}(L(G))$ yarı-direk çarpımını gözönüne alalım. $\Phi: \text{norm}_{X(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \text{gl}(L(G))$ Lie cebiri homomorfizmi tanımlansın. Teorem 4.1.16 da eğer G bağlantılı ise o zaman $\Phi: \text{norm}_{X(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \partial(L(G))$ nin bir izomorfizm olduğunu, Teorem 4.1.19 da ise Φ nin $\text{norm}_{X(G)}(L(G))$ yi $L(G) \otimes \text{aut}(G)$ üzerine izomorfik olarak tasvir ettiğini ispatlıyoruz.

G kompakt, bağlantılı, Abelian olmayan bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri iken $\Sigma = (G, D)$ sistemi için D dinamiği

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(x) \quad j = 1, \dots, k \text{ için } Y^j \in L(G) \quad (1.1)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin bir ailesinden oluşur. Burada $x \in G$, X ise G üzerindeki tüm düz vektör alanlarının $X(G)$ Lie cebiri içinde $L(G)$ Lie cebirinin normalizörünün bir elemanıdır. $L(G)$ Lie cebirini yine sol-invariant vektör alanlarının kümesi olarak alıyoruz. Kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerin U sınıfı tüm parçalı sabit $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ fonksiyonların kümesidir. D , Σ ile birleşmiş vektör alanlarının ailesidir. Yani

$$D = \left\{ X + \sum_{j=1}^k u_j Y^j \mid X \in \text{norm}_{X(G)}(L(G)), Y^j \in L(G) \text{ ve } u_j \in U \right\} \quad (1.2)$$

dır. X e, G nin sonsuz küçük otomorfizmi diyeceğiz. X vasıtasıyla üretilmiş $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ akışı $\text{Aut}(G)$ nin 1-parametrelili bir alt grubudur.

Herhangi bir yerel kompakt Lie grubu üzerinde Haar ölçüm olarak bilinen tek-terafli invariant ölçüm vardır ve eğer Lie grubu kompakt ise iki-terafli invariant ölçüm vardır.

Teorem 4.3.4 de eğer G kompakt, bağlantılı bir Lie grubu ise o zaman $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sisteminin dinamiğini oluşturan vektör alanlarının konservativ olduğunu gösteriyoruz.

Poincare Teoremi, konservativ bir vektör alanı vasıtasıyla üretilmiş bir dinamik sistemin Poisson sabit noktalarının yoğun olduğunu ifade etmektedir. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda $\mathbb{R}^n$ ve Abelian Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğinin geçişlilikleri vasıtasıyla karakterize edildiğini önceki bölümlerde görüyoruz. Teorem 4.3.6 da, G Abelian olmayan, bağlantılı, kompakt bir Lie grubu ve $\Sigma = (G, D)$ normalizörlü bir lineer kontrol sistemi iken “ Σ geçişlidir $\Leftrightarrow \Sigma$ kontrol edilebilirdir” ifadesini Poincare’in sonucundan yararlanarak ispatlıyoruz.

2. LİE GRUPLARI

2.1 Manifoldlar

Bir Lie grubu manifold ve grup yapısına sahip bir kümedir. Öncelikle manifold kavramını verelim.

M Hausdorf topolojik uzay ve E sonlu boyutlu reel vektör uzayı olsun. U, M de açık bir küme ve V, E de açık bir küme olmak üzere $\ell: U \rightarrow V$ tasvirine harita denir. Eğer $p \in U$ ise ℓ, p civarında bir harita adını alır. $\ell_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ ve $\ell_\beta: U_\beta \rightarrow V_\beta$ haritaları üst üste geldiğinde $\ell_{\alpha\beta}$ ile gösterilen harita elde edilir. $\ell_{\alpha\beta} = \ell_\beta \ell_\alpha^{-1}: V_\alpha \rightarrow V_\beta$ olup burada $V_{\alpha\beta} = \ell_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ dır. Bu üst üste getirilmiş $\ell_{\alpha\beta}$ haritası, reel vektör uzaylarının açık kümeleri arasında bir tasvirdir ve bu tasvire reel çok değişkenli fonksiyonların teorisi uygulanabilir. Manifoldlar üzerindeki pek çok temel çalışma üst üste getirilmiş haritaların tüm çiftleri için üst üste getirilmiş fonksiyonlar ile yapılmıştır.

$M \subset \bigcup U_\alpha$ olacak şekilde $\{(\ell)_\alpha, U_\alpha, V_\alpha\}$ haritalarının bir koleksiyonu M de bir atlas olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.1: Bir M kümesi bir atlasa sahipse, E üzerinde bir manifold olur.

M nin boyutu, boyut M, E vektör uzayının boyutudur.

Tüm üst üste getirilmiş $\ell_{\alpha\beta}$ fonksiyonları için eğer $\ell_{\alpha\beta}$ düz ise M nin düz olduğunu söyleriz. Benzer olarak eğer tüm $\ell_{\alpha\beta}$ lar analitik veya C^r ise M analitik veya C^r dir. Bu bölümde verilen tüm tasvirler ve manifoldlar aksi belirtilmedikçe düz, yani C^∞ sınıfından olacaktır.

Örnek 2.1.2: $M = \mathbb{R}^n$ ve $E = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\ell: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ özdeşlik haritası ile $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu bir manifolddur.

Örnek 2.1.3: $M = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$, $E = \mathbb{R}^n$ olsun. O takdirde,

$U_+ = \{x \in M : x_{n+1} > -1\}$ olmak üzere $\ell_+(x) : \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right)$ şeklinde tanımlı

$\ell_+ : U_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $U_- = \{x \in M : x_{n+1} < 1\}$ olmak üzere $\ell_-(x) : \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$ şeklinde

tanımlı $\ell_- : U_- \rightarrow \mathbb{R}^n$ haritaları ile $M = S^n$ n-boyutlu bir manifolddur.

Örnek 2.1.4: Diskret topoloji ile $M = \mathbb{R}$ ve $E = \mathbb{R}^0 = \{p\}$ olmak üzere, $x \in \mathbb{R}$ ile indekslenmiş $U_x = \{x\}$ içinde $\ell_x(x) = p$ haritasını gözönüne alalım. Bu halde $M = \mathbb{R}$ sıfır boyutlu bir manifolddur. $n = 1$ için Örnek 2.1.2 ve Örnek 2.1.4 de verilen kümelerin aynı, fakat iki farklı topoloji ve iki farklı manifold yapısına sahip olduğuna dikkat edilmelidir.

$C^\infty(M)$, M üzerindeki tüm düz fonksiyonların kümesi olmak üzere bundan sonra M nin bir atlası sahip düz bir manifold olduğunu varsayacağız. M üzerindeki işlemleri tanjant vektörleri yardımıyla göstereyim.

Tanım 2.1.5: $X: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tasviri, X için

- i) $X(f + g) = X(f) + X(g)$
- ii) $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$

koşulları sağlandığında $p \in M$ de bir tanjant vektörü olarak adlandırılır.

Tanjant vektörleri bir vektör uzayı oluştururlar.

Teorem 2.1.6: $T_p(M)$ ile gösterilen p deki tüm tanjant vektörlerinin kümesi, M nin boyutuna sahip sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır.

İspat: İki tanjant vektörünün toplamını ve bir reel sayıyla skaler çarpımı tanımladığımızda $T_p(M)$ nin bir vektör uzayı olduğu açıkça belli olacaktır. r bir reel sayı, X ve Y , p de tanjant vektörleri olmak üzere

$$(X + Y)(f) = X(f) + Y(f) \quad (2.1)$$

ve

$$(rX)(f) = r(X(f)) \quad (2.2)$$

tanımları verilsin.

Boyutlarla ilgili sonucu görmek için bir $\ell: U \rightarrow V$ yerel haritasını alalım. Yönlü türevler alınarak $E \rightarrow T_p(M)$:

$$X_v(f) = J(f \ell^{-1})_p(v) \quad (2.3)$$

birebir tasviri elde edilir. Standart koordinatlarda kısmi türevlerin Jacobi matrisi ile verilen $J(f \ell^{-1})_p$, p noktasında $f \ell^{-1}$ nin türevidir.

Bunun sürjektif olduğunu görmek için

$$J(f \ell^{-1})_p(v) = X(f) \quad (2.4)$$

eşitliğini v için çözebilmeliyiz. Böylece çok değişkenli fonksiyonlar için Taylor teoreminin bir sonucu olarak, (2.4) tüm f ler için doğru olur.

Her bir noktadaki tanjant vektörlerinin tüm noktaları için ayrık birleşim $T(M) = \bigcup_p T_p(M)$ ile gösterilsin. $T(M)$, M üzerinde bir vektör yığındır ve tanjant yığını olarak adlandırılır. O halde $T(M)$ topoloji olarak verildiğinde $E \times E$ üzerinde bir manifold olur ve $\Pi : T(M) \rightarrow M$ izdüşümü yerel olarak önemsizdir. $X \in T_p(M)$ iken $\Pi(X) = p$ olup, $\Pi^{-1}(U_p) \cong U_p \times E$ olacak şekilde bir $U_p \subset M$ açık kümesi vardır.

Tanım 2.1.7: Bir vektör alanı, $T(M)$ nin bir parçasıdır.

Vektör alanını X ile gösterirsek

$$X : M \rightarrow T(M) \quad (2.4)$$

olup X için, $\Pi(X(p)) = p$ ya da denk olarak $X(p) \in T_p(M)$ dir.

Bir X vektör alanı ve f fonksiyonu $\tilde{X}(f)(p) = X(p)(f)$ eşitliğini sağlayan yeni bir $\tilde{X}(f)$ fonksiyonunu oluştururlar. $X(p)$ için X_p notasyonu da kullanılabilir. Şimdi vektör alanının genişlemesi tanımını verelim.

Tanım 2.1.8: Bir X vektör alanının genişlemesi $\tilde{X} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ tasviridir.

X ve Y vektör alanları için parantez işlemini tanımlayalım.

Tanım 2.1.9: İki vektör alanının parantez işlemi

$$[X, Y](p)(f) = X(p)(\tilde{Y}(f)) - Y(p)(\tilde{X}(f)) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanan bir vektör alanıdır.

Lemma 2.1.10: Eğer $\tilde{X} = \tilde{Y}$ ise $X = Y$ dir.

İspat: Eğer $\tilde{X} = \tilde{Y}$ ise $X_p(f) = Y_p(f)$ dir. Böylece $X = Y$ dir.

Teorem 2.1.11: Eğer X ve Y iki vektör alanı ise

$$[X, Y]^- = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X} \text{ dir.}$$

İspat: Tanımları kullanarak sonucu çıkaralım:

$$\begin{aligned}
[X, Y]^{-}(f)(p) &= [X, Y]_p(f) \\
&= X_p(\tilde{Y}f) - Y_p(\tilde{X}f) \\
&= \tilde{X}(\tilde{Y}f)(p) - \tilde{Y}(\tilde{X}f)(p)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Teorem 2.1.11 in sonucundan yola çıkarak parantez işleminin pek çok özelliği verilebilir.

Örnek 2.1.12: $[X, X] = 0$

Örnek 2.1.13: $[X, Y] = -[Y, X]$

Parantez işlemi aykırı simetriktr.

Örnek 2.1.14: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Jacobi özdeşliği sağlanır.

Parantez işleminin bilineerliği ile, bu örnekler tüm vektör alanlarının kümesinin bir Lie cebiri oluşturduğunu gösterir.

Son olarak f nin türevlerine bakalım.

İki manifold arasında tanımlanan $f : M \rightarrow N$ tasviri, M nin tüm ℓ_α ve N nin tüm Ψ_β haritaları için $\Psi_\beta f \ell_\alpha^{-1}$ düz olduğunda, düzdür. Şimdi düz tasvirin türevini tanımlayalım.

Tanım 2.1.15: f nin türevi $df : T(M) \rightarrow T(N)$ ile $df(X)(g) = X(gof)$ dir.

Eğer $g \in C^\infty(N)$ ise $gof \in C^\infty(M)$ olduğu dikkate alınmalıdır. Bir $p \in M$ noktasındaki $X \in T(M)$ tanjant vektörü $C^\infty(M)$ üzerinde tesir eder ve $X(gof)$ sayısını verir. $f(p) \in N$ noktasındaki $df(X) \in T(N)$ vektör alanını tanımlamak için herhangi bir $g \in C^\infty(N)$ fonksiyonu için $df(X)(g)$ değeri belirlenmelidir.

Örnek 2.1.16: $M = N = \mathbb{R}$ alındığında $T_p(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ doğal özdeşliği ile, f' basit hesaplamalardaki türev olmak üzere, $(df)_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tasviri $f'(p)$ ile çarpımdır.

2.2 Gruplar ve Lie Grupları

Bir G Lie grubu hem bir manifold hem de bir gruptur. Bir önceki bölümde manifold kavramı verildi. Bu defa grup tanımını verelim.

Tanım 2.2.1: Bir G kümesi, eğer $\mu : G \times G \rightarrow G$ tasviri aşağıdaki koşulları sağlarsa bir gruptur:

- 1) G deki tüm x, y, z ler için $\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z)$ dir.
- 2) Tüm $x \in G$ ler için $\mu(1, x) = \mu(x, 1) = x$ olacak şekilde bir $1 \in G$ elemanı vardır.
- 3) $x \in G$ için $\mu(x, y) = \mu(y, x) = 1$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır.

$\mu(x, y)$ için xy kısaltması kullanıldığında tanımdaki eşitlikler

$$1) x(yz) = (xy)z \quad (2.7)$$

$$2) 1x = x1 = x \quad (2.8)$$

$$3) xy = yx = 1 \quad (2.9)$$

biçimini alır.

(2.7) eşitliği asosyatiflik özelliği olarak adlandırılır. (2.8) deki 1 elemanı G nin birim elemanıdır. (2.9) daki y elemanı x in tersidir ve genellikle $y = x^{-1}$ olarak yazılır. $\lambda : G \rightarrow G$ iken $\lambda(x) = x^{-1}$, μ çarpma işlemi için ters tasvirdir.

Tanım 2.2.2: Bir G kümesi,

- 1) G bir analitik manifold
- 2) G bir grup
- 3) μ ve λ nın her ikisi birden analitik tasvirler

ise bir Lie grubudur.

Örnek 2.2.3: $G = \mathbb{R}^n$

Örnek 2.2.4: Reel elemanlı $n \times n$ lik tersi alınabilir matrislerin kümesi, $G = GL(n, \mathbb{R})$

Örnek 2.2.5: Kompleks elemanlı $n \times n$ lik tersi alınabilir matrislerin kümesi, $G = GL(n, \mathbb{C})$

Matrisin elemanlarının reel ya da kompleks olduğu belirtilmemişse $GL(n, \mathbb{R})$ veya $GL(n, \mathbb{C})$ yerine $GL(n)$ gösterilişi kullanılır.

Burada Örnek 2.2.4 deki grubun bir Lie grubu olduğunu gösterebiliriz.

Örnek 2.2.4 ün İspatı: Öncelikle $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir manifold yapısına sahip olduğunu gösterelim. $(a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ ve $x_{i+n(j-1)} = a_{ij}$ olsun.

$$(a_{ij}) \rightarrow (x_k) \quad (2.10)$$

tasviri $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ ile içine tasvirdir. $GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n^2}$ nin bir alt kümesidir. (2.10) tasvirindeki benzer yolla, $\mathbb{R}^{n^2}$ yi tersi alınabilir ya da alınamaz tüm matrislerin kümesi olarak tanımlarsak

$$\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.11)$$

determinant fonksiyonunu elde ederiz. $\det$, n . dereceden polinom olduğundan analitiktir. Temel lineer cebirden $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ iken

$$GL(n, \mathbb{R}) \cong \det^{-1}(\mathbb{R}^*) \quad (2.12)$$

olduğunu biliyoruz. $GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n^2}$ nin bir açık alt kümesidir ve bundan ötürü analitik manifold yapıya sahiptir. Bununla beraber, determinant tasvir bir analitik tasvirdir.

Bu defa μ ve λ nın analitikliğini kontrol edelim.

$$\mu((a_{ij})(b_{ij})) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) \quad (2.13)$$

olduğundan μ bir polinom tasvirdir ve böylece analitiktir. Kramer kuralından λ , determinantta rasyonel fonksiyondur ve böylece analitiktir.

Tüm bu sonuçlarla $GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur.

Örnek 2.2.6: $S^1 = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$

S^1 in bir Lie grubu olduğunu ispatlayalım.

Örnek 2.2.6 nın İspatı: $\mathbb{R}$, açıkça bir Lie grubudur ve $\mathbb{Z}$ diskret normal alt gruptur. $\mathbb{Z}$ diskret olduğundan $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir manifolddur. $\mathbb{Z}$ normal olduğundan $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bir gruptur. Analitiklik bir yerel özellik olduğundan $\mathbb{R}$ üzerinde toplama işleminin analitikliği ile, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nin analitik olduğu sonucu çıkar.

Korolori (sonuç) 2.2.7: $T = T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ bir Lie grubudur.

Bir G grubu, eğer G nin tüm x ve y eleman çiftleri için $xy = yx$ ise komütatif veya abelyen olarak adlandırılır.

Lie grupları teorisi ile ilgili çalışmaya aşağıdaki birim elemanla ilgili teoremi vererek başlayalım.

Teorem 2.2.8: G_0 , G nin birim elemanının bağlantılı bir elemanı olsun. O halde G_0 , G nin hem kapalı hem açık bir normal alt grubu olup, bir Lie grubudur.

İspat: G_0 in hem kapalı hem açık olması temel nokta küme topolojisinin bir sonucudur. G_0 in bir alt grup olduğunu görmek için $G_0^2 = \{xy : x, y \in G_0\}$ ve $G_0^{-1} = \{x^{-1} : x \in G_0\}$ iken $G_0^2 \subset G_0$ ve $G_0^{-1} \subset G_0$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in G_0$ olsun, buradan xG_0 bağlantılıdır ve $x \in xG_0$ dir. Böylece $xG_0 \cap G_0 \neq 0$ ve $xG_0 \subset G_0$ olur. Bu tüm $x \in G_0$ lar için doğru olduğundan $G_0^2 \subset G_0$ bulunur. Benzer olarak G_0^{-1} bağlantılıdır ve $G_0^{-1} \cap G_0 \neq 0$ dir, $1 \in G_0^{-1}$ ve $1 \in G_0$ olduğundan $G_0^{-1} \subset G_0$ dir. Böylece G_0 in G nin bir alt grubu olduğu bulunur.

$y \rightarrow xyx^{-1}$ tasviri süreklidir ve aynı gerekçelerle $xG_0x^{-1} \subset G_0$ dan $G_0^2 \subset G_0$ bulunur. Böylece G_0 bir normal alt gruptur.

G_0 in bir Lie grubu olduğu tanımlardan kolayca çıkan bir sonuçtur ve bu da ispatı tamamlar.

Birim elemandan hareket ederek sol öteleme kullanalım.

$$L_a : G \rightarrow G, L_a(g) = ag \quad (2.14)$$

tasviri, a ile yapılmış bir sol ötelemedir. Türev

$$dL_a : T(G) \rightarrow T(G) \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır. Burada $dL_a(T_g G) \subset T_{ag} G$ dir.

Tanım 2.2.9: Bir X vektör alanı eğer $X \circ L_a = dL_a(X)$ ise sol-invaryanttır.

Teorem 2.2.10: Bir sol-invaryant vektör alanı analitiktir.

İspat: X bir sol-invaryant vektör alanı olsun. Buradan,

$$X(g) = (dL_g)_1 X(1) \quad (2.16)$$

yazılır. L_g , G nin kendisine bir analitik tasviri olduğundan $g \rightarrow (dL_g)_1$ de bir analitik tasvirdir. Böylece X in analitikliği ispatlanır.

Teorem 2.2.11: $X \rightarrow X(1)$ tasviri, sol-invaryant vektör alanları ve $T_1(G)$ arasında birebir eşleme olduğunu gösterir.

İspat: $v \in T_1(G)$ için X_v

$$X_v(g) = (dL_g)_1(v) \quad (2.17)$$

ile tanımlanır.

$v \rightarrow X_v$ tasviri teoremdeki tasvirin ters tasviridir.

Tanım 2.2.12: $T_1(G)$ uzayı G nin Lie cebiridir. Genellikle $T_1(G)$ yerine G kısaltması kullanılır.

Daha önce vektör alanlarının parantez işleminin aykırı simetrik olduğunu ve Jacobi özdeşliğini sağladığını söyledik. Bu defa iki sol-invaryant vektör alanının parantez işleminin yine sol-invaryant olduğunu gösterelim.

Teorem 2.2.13: X ve Y iki sol-invaryant alan olsun. Buradan $[X, Y]$ de sol-invaryanttır.

İspat: X ve Y den $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ ye genişlemeyi kullanacağız. $\tilde{X} : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G)$ iken sol invaryantlık için

$$(\tilde{X} f) \circ L_g = \tilde{X} (f \circ L_g) \quad (2.18)$$

yazılır ve benzer durum $\tilde{Y}$ için de geçerlidir. $[X, Y]$ için sol-invaryantlığı gösterelim:

$$\begin{aligned} ([X, Y]^- f) \circ L_g &= (\tilde{X}(\tilde{Y}f) - \tilde{Y}(\tilde{X}f)) \circ L_g \\ &= \tilde{X}(\tilde{Y}f) \circ L_g - \tilde{Y}(\tilde{X}f) \circ L_g \\ &= \tilde{X}((\tilde{Y}f) \circ L_g) - \tilde{Y}((\tilde{X}f) \circ L_g) \\ &= \tilde{X}(\tilde{Y}(f \circ L_g)) - \tilde{Y}(\tilde{X}(f \circ L_g)) \\ &= [X, Y]^- (f \circ L_g) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Böylece, iki sol-invaryant vektör alanının parantez işlemi yine sol-invaryanttır.

Örnek 2.2.14: Bir Lie grubunun ilginç örneklerinden biri $SU(2)$ dir. Bu,

$$SU(2) = \{A : \overline{A^t} = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1 \} \quad (2.18)$$

şeklinde verilen, determinantı 1 olan kompleks elemanlı ve tersi tranzpozunun kompleks eşleniği olan 2×2 lik matrislerin bir kümesidir.

z ve w , $|z|^2 + |w|^2 = 1$ şartını sağlayan kompleks sayılar olsunlar. Buradan

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$SU(2)$ nin bir elemanıdır. Tersine, eğer $A \in SU(2)$ ise z ve w vardır ve A , (2.21) denklemindeki gibidir.

$z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olsun, buradan $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$ dir. $SU(2)$ üzerindeki haritalar,

$$U_1 = \{A : x > 0\}, U_2 = \{A : x < 0\},$$

$$U_3 = \{A : y > 0\}, U_4 = \{A : y < 0\}, \quad (2.22)$$

$$U_5 = \{A : u > 0\}, U_6 = \{A : u < 0\},$$

$$U_7 = \{A : v > 0\}, U_8 = \{A : v < 0\}.$$

ve karşılık gelen tasvirler,

$$\ell_1(A) = (y, u, v), \ell_2(A) = (y, u, v),$$

$$\ell_3(A) = (x, u, v), \ell_4(A) = (x, u, v), \quad (2.23)$$

$$\ell_5(A) = (x, y, v), \ell_6(A) = (x, y, v),$$

$$\ell_7(A) = (x, y, u), \ell_8(A) = (x, y, u).$$

şeklindedir. Üst üste gelen tasvirlerin analitikliği kolayca görülebilir.

$$\ell(A) = (x, y, u, v) \quad (2.24)$$

ile $\ell : SU(2) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tasviri verilsin.

Eğer A_1 ve A_2 , (z_1, w_1) ve (z_2, w_2) ile verilen iki matris ve $\ell(A_i) = (x_i, y_i, u_i, v_i)$ ise

$$\ell(A_1 A_2) = (x_3, y_3, u_3, v_3) \quad (2.25)$$

ve

$$x_3 = x_1x_2 - y_1y_2 - u_1u_2 - v_1v_2$$

$$y_3 = x_1y_2 + x_2y_1 + u_1v_2 - u_2v_1 \quad (2.26)$$

$$u_3 = x_1u_2 + x_2u_1 - y_1v_2 + y_2v_1$$

$$v_3 = x_1v_2 + x_2v_1 + y_1u_2 - y_2u_1$$

şeklindedir. P_i , 3-boyutlu alt uzaylar üzerine R^4 ün uygun izdüşümü iken ℓ_i tasvirleri $P_{i\ell} \setminus U_i$ nin bileşkesi olduğundan, matris çarpımının analitik tasvir olduğu açıktır. Ters tasvirin analitik olduğunu görmek daha da kolaydır:

$$\ell(A^{-1}) = (x, -y, -u, -v) \quad (2.27)$$

(2.24) de tanımlanan ℓ tasviri $SU(2)$ den, R^4 deki birim vektörler kümesi S^3 üzerine bir difeomorfizmdir. S^3 uzayı 3-boyutlu küredir. Böylece $SU(2)$ 3-boyutlu bir Lie grubudur.

Örnek 2.2.15: En çok karşılaştırılan klasik grumlardan bir kısmı şunlardır:

a) Birim gruplar $U(n)$

Bunlar kompleks elemanlı, tersi transpozunun eşleniği olan $n \times n$ lik matrislerdir:

$$U(n) = \{A : \overline{A^t} = A^{-1}\} \quad (2.28)$$

b) Özel birim gruplar $SU(n)$

Bunlar $U(n)$ nin determinanı 1 olan alt gruplarıdır:

$$SU(n) = \{A : \overline{A^t} = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1\} \quad (2.29)$$

c) Ortogonal gruplar $O(n)$

Bunlar reel elemanlı, tersi transpozuna eşit $n \times n$ lik matrislerdir:

$$O(n) = \{A : A^t = A^{-1}\} \quad (2.30)$$

d) Özel ortogonal gruplar $SO(n)$

Bunlar $O(n)$ nin determinanı 1 olan alt gruplarıdır:

$$SO(n) = \{A : A^t = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1\} \quad (2.31)$$

e) Simplektik grup $Sp(n)$

H dörtlüleri gösterebilirsin. O halde $H \cong \mathbb{R}^4$ dir ve H nin elemanı $x + iy + ju + kv$ şeklinde yazılır.

Bir dörtlünün eşleniği

$$\overline{x + iy + ju + kv} = x - iy - ju - kv \quad (2.32)$$

ile verilir.

$Sp(n)$ grubu dörtlü elemanlara sahip, tersi transpozunun eşleniği olan $n \times n$ lik matrislerden oluşur:

$$Sp(n) = \{A : \overline{A^t} = A^{-1}\} \quad (2.33)$$

$Sp(1)$, birim dörtlülerin kümesi olup böylece S^3 de difeomorfiktir. (2.27) denkleminde sonra $SU(2)$ ile ilgili yapılan eşlemede $SU(2)$ ve $Sp(1)$ in manifoldlar gibi difeomorfik olduğunu görürüz. Eğer iki dörtlüyü çarparsak

$$\begin{aligned} & (x_1 + iy_1 + ju_1 + kv_1)(x_2 + iy_2 + ju_2 + kv_2) \\ &= x_3 + iy_3 + ju_3 + kv_3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

elde edilir. Burada x_3, y_3, u_3 ve v_3 (2.26) denklemleriyle verilmiştir. Böylece ℓ nin yalnızca $SU(2)$ ve $Sp(1)$ arasında bir difeomorfizm değil, aynı zamanda bir grup homomorfizmi olduğu görülür.

2.3 Bir Parametrelili Alt Gruplar ve Üstel Tasvir

Bir önceki bölümde, G nin Lie cebirinin birim elemandaki teğet uzay ya da sol-invariant vektör alanlarının kümesi olarak alınabileceğini gördük. Burada 1-parametrelili alt grupların kümesi olarak Lie cebirinin üçüncü bir tanımını vereceğiz.

Tanım 2.3.1: $f : \mathbb{R} \rightarrow G$ analitik homomorfizmi G nin 1-parametrelili alt grubudur.

Homomorfizm ile f ,

$$f(x + y) = f(x).f(y) \quad (2.35)$$

denklemini sağlar.

Teorem 2.3.2: $f \rightarrow (df)_0(1)$ tasviri, G nin 1-parametrelili alt grupları ile $T_1(G)$ arasında birebir eşlemedir.

İspat: $v \in T_1(G)$ olsun. X_v sol-invaryant vektör alanı

$$X_v(g) = (dL_g)_1(v) \quad (2.36)$$

ile tanımlansın.

Diferansiyel denklemlerin sonucuyla $0 \in J$ iken $J \subset \mathbb{R}$ açık aralığı ve

$$(df)_t(1) = X_v(f(t)) \quad (2.37)$$

olacak şekilde bir $f : J \rightarrow G$ fonksiyonu vardır.

$s \in J_1$ bir sabit ve $J_1 + J_1 \subset J$ olacak şekilde $J_1 \subset J$ olsun. $t \in J_1$ için

$$t \rightarrow f(s)f(t) \quad (2.38)$$

ve

$$t \rightarrow f(s+t) \quad (2.39)$$

fonksiyonlarının her ikisi de (2.37) denklemini sağlar. Böylece diferansiyel denklemde çözümün tekliği ile J_1 de s ve t için

$$f(s)f(t) = f(s+t) \quad (2.40)$$

bulunur. f , uygun büyüklükteki N için

$$f(t) = f(t/N)^N \quad (2.41)$$

formülü ile tüm $\mathbb{R}$ ye genişletilsin. Bu fonksiyon 1-parametrelili alt gruptur. f i f_v olarak ifade edelim. $v \rightarrow f_v$ tasviri, $f \rightarrow (df)_0(1)$ tasvirinin tersidir ve bu da ispatı tamamlar.

f_v notasyonunu (2.37) denkleminin çözümünde üstel tasviri tanımlamak için kullanacağız. Öncelikle f_{sv} ve f_v arasındaki ilişkiye bakalım. g_{sv} 1-parametrelili alt grup, $g_{sv}(t) = f_v(st)$ olsun. Zincir kuralı ile

$$(dg_{sv})_t = s(df_v)_{st} \quad (2.42)$$

bulunur. O halde g_{sv} sv ye bağlı, 1-parametrelili alt gruptur. Böylece

$$f_{sv}(t) = f_v(st) \quad (2.43)$$

elde edilir.

Tanım 2.3.3: $\exp(v) = f_v(1)$ iken üstel tasvir $\exp : G \rightarrow G$ dir.

Teorem 2.3.4: $\exp \setminus V$, V den U ya bir analitik homomorfizm olacak şekilde 0 in $V \subset G$ ve 1 in $U \subset G$ açık komşulukları vardır.

İspat: $\exp$ i bir diferansiyel denklemle tanımlıyoruz. Diferansiyel denklemde çözümünün varlığı teoremlerle garanti altına alınmıştır. $\exp$ in analitikliği de aynı teoremlerle verilir.

$d(\exp)_0$ in nonsingüler olduğunu göstereceğimiz ters fonksiyon teoreminden U ve V nin varlığı ve $\exp$ in bir homomorfizm olduğu aşıkardır. Bunun için sıradaki lemmada ispatlayacağımız

$$v(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(f_v(h)) - f(1)}{h} \quad (2.44)$$

formülünü kullanacağız. $T_0(G)$, G ile gösterildiğinde $d(\exp)_0 : G \rightarrow G$ yazılır.

Şimdi işlemlere geçelim:

$$d(\exp)_0 v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\exp(tv)) - f(1)}{t} \quad (2.45)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(f_{tv}(1)) - f(1)}{t} \quad (2.46)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(f_v(t)) - f(1)}{t} \quad (2.47)$$

$$= v(f) \quad (2.48)$$

Burada (2.45), (2.44) ün doğrudan çıkan bir sonucudur. $\exp$ in tanımı (2.46) yı verir ve (2.47), (2.43) den yazılır. Son olarak (2.48), (2.44) ün tekrar kullanılmasıyla ve G ile 1-parametrelili alt grupların tanımından bulunur. Buradan $d(\exp)_0 v = v$ dir ve böylece $d(\exp)_0$ nonsingüler birim tasvirdir. Sıradaki lemmayı ispatlayarak teoremin ispatını tamamlamış olacağız.

Lemma 2.3.5: X_v sol-invariant vektör alanı ve f_v v ye bağlı 1-parametrelili alt grup olsun. $f: G \rightarrow R$ için

$$X_v(f_v(t)) f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(f_v(t+h)) - f(f_v(t))}{h} \quad (2.49)$$

şeklindedir.

İspat: $f_v(R)$ de bir Y vektör alanını

$$Y(f_v(t))f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(f_v(t+h)) - f(f_v(t))}{h} \quad (2.50)$$

ile tanımlayalım.

Y vektör alanının bu tanımı türev tanımına denktir. (2.50) den

$$dL_{f_v(t)} Y(1)f = Y(f_v(t))f \quad (2.51)$$

olduğu açıktır. Böylece $Y, f_v(R)$ boyunca sol-invarianttır. 1 in $T(R)$ de birim vektör olduğu tanımıyla

$$(df_v)_t(1)f = 1(f \circ f_v) \quad (2.52)$$

dır. Böylece Örnek 2.1.16 ile

$$(df_v)_t(1)f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(f_v(t+h)) - f(f_v(t))}{h} \quad (2.53)$$

elde edilir.

(2.50) ve (2.53) bir arada kullanıldığında

$$(df_v)_t(1) = Y(f_v(t)) \quad (2.54)$$

olup $f_v, Y(1)$ e bağlı 1-parametrelili alt gruptur. (2.37) de çözümün tekliği ile $Y(1) = v$ dir. Bu da lemmanın ispatını tamamlar.

Birim elemanı içeren G deki tüm açık U kümeleri için $H \subset U$ ise, G nin H alt grubuna bir küçük alt grup adı verilir.

Önerme 2.3.6: G Lie grubunun hiç küçük alt grubu yoktur.

İspat: U ve V Teorem 2.3.4 deki gibi verilsin. $H \subset U$ olacak şekilde H, G nin bir alt grubu ve $g \neq 1$ iken $g \in H$ olsun. Burada $g \in U$ dur. Ayrıca $\exp v = g$ olacak şekilde $v \in V$ vardır. G vektör uzayı olduğundan, $W \subset V$ ve $v \in W$ olacak şekilde 0 in bir açık W komşuluğu alınır. Buradan $\exp W, g \in \exp W$ olacak şekilde G de 1 in bir açık komşuluğudur. O halde tüm açık komşuluklarda G nin herhangi bir alt grubu yoktur.

Lie gruplarının yapısı, gruplar arasındaki tasvirlerle güçlü özellikler yükler. Bunu sıradaki teoremden göreceğiz.

Teorem 2.3.7: $f: G \rightarrow H$ ye sürekli bir homomorfizm olsun. O halde f analitiktir.

İspat: f nin G de 1 in komşuluğunda analitik olduğunu gösterelim.

$G = R$ iken, sürekli 1-parametrelili alt gruplarla başlayalım. $\exp/V$ H de $\exp(V)$ üzerine bir difeomorfizm ve $V, T_1(H)$ da 0 in bir açık komşuluğu olsun. $y \in \exp(\frac{1}{2} V)$ iken

$$y = \exp Y \quad (2.55)$$

olacak şekilde Y vardır. Eğer $z = \exp(\frac{1}{2} Y)$ ise

$$z^2 = y \quad (2.56)$$

ve $z \in \exp(\frac{1}{2} V)$ dir. $f(0) = 1$ ve f sürekli olduğundan

$$f(t) \in \exp(\frac{1}{2} V), \quad |t| \leq \varepsilon \text{ için} \quad (2.57)$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

$f(\varepsilon) = \exp(X)$ iken $f(\varepsilon/2) = \exp(X/2)$ ve indüksiyonla

$$f(\varepsilon/2^n) = \exp(X/2^n) \quad (2.58)$$

bulunur. Tüm m ve n tamsayıları için

$$f(m\varepsilon/2^n) = \exp(mX/2^n) \quad (2.59)$$

dir. f sürekli olduğundan, r reel sayısı için

$$f(r\varepsilon) = \exp(rX), \quad \text{tüm } |r| \leq 1 \text{ için} \quad (2.60)$$

elde edilir. Böylece f analitiktir.

Durumu genelleştirelim. $X_1, \dots, X_n$ G için başlangıç noktası olsun.

$$i \rightarrow f(\exp(tX_i)) \quad (2.61)$$

tasvirleri analitik, 1-parametrelili alt gruplardır. $T_1(H)$ de $Y_1, \dots, Y_n$ i

$$f(\exp(tX_i)) = \exp tY_i \quad (2.62)$$

olacak şekilde alalım. $F: R^n \rightarrow G$ yi

$$F(t_1, \dots, t_n) = \exp(t_1 X_1) \dots \exp(t_n X_n) \quad (2.63)$$

denklemleriyle tanımlayalım. O halde $F \setminus U$ bir analitik difeomorfizm olmak üzere, $U \subset \mathbb{R}^n$ komşuluğu vardır. f bir homomorfizm olduğundan (2.62) denklemi ile $f \circ F$ nin analitik olduğu görülür.

$$f = (f \circ F) \circ F^{-1} \quad (2.64)$$

denklemi f nin analitik olduğunu gösterir.

Bu teoremin ispatına dair bir kaç önemli noktaya dikkat çekmek uygun olacaktır. Tanım 2.3.1 de 1-parametreliliğin alt grupların, analitikliği de içermesi gerektiğini söyledik. O takdirde, bu gruplar, Teorem 2.3.2'de ve ispatında olduğu gibi diferansiyellenebilirler ve tüm 1-parametreliliğin alt grupları,

$$f_v(t) = \exp(tv) \quad (2.65)$$

denklemleriyle belirlenebilir. Bu durum (2.43) denkleminde, analitik homomorfizmler için açıkça gözükmemektedir. Herhangi bir sürekli homomorfizm (2.65) denklemini sağlar ve dikkat edilirse (2.60) denklemine kadar belirli değildir.

(2.63) ile verilen G üzerindeki koordinatlar, F tasviri

$$(t_1, \dots, t_n) \rightarrow \exp(tX_1 + \dots + tX_n) \quad (2.66)$$

iken normal koordinatlarımız olacaktır.

Teorem 2.3.8: $\phi: H \rightarrow G$ bir homomorfizm olsun. O takdirde,

$$\begin{array}{ccc} L(H) & \xrightarrow{d\phi} & L(G) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{\phi} & G \end{array} \quad (2.67)$$

diagramı değişmelidir.

İspat: $X \in L(H)$ olsun. O takdirde, $\phi(\exp X) \in G$ dir. $t \rightarrow \phi(\exp(tX))$, 0 daki teğeti $d\phi(X(e))$ olan G de düz bir eğridir. Aynı zamanda, ϕ bir homomorfizm olduğundan G nin 1-parametreliliğin alt grubudur. Oysa, $t \rightarrow \exp(t(d\phi(X)))$, 0 daki teğeti $(d\phi(X))(e)$ olan G nin tek 1-parametreliliğin alt grubudur. Böylece,

$$\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X))) \quad (2.68)$$

olup, $t = 1$ alındığında

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)) \quad (2.69)$$

ya da

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi \quad (2.70)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.9: A , $n \times n$ lik bir matris olsun ve $f: \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$,

$$f(t) = 1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots \quad (2.71)$$

ile tanımlansın. $f(s+t) = f(s).f(t)$ ve $(df)_0(1) = A$ olduğundan f , $GL(n)$ nin 1-parametrelili alt grubudur. Buradan, bir matris grubu için üstel tasvir

$$\exp(A) = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (2.72)$$

şeklinde olup, Lie cebiri tüm matrislerin vektör uzaylarının bir alt uzayıdır. Bu ifade reel, kompleks veya dörtlü elemanlı matrisler için geçerlidir. Lie parantezi

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.73)$$

ile tanımlanır.

Lemma 2.3.10: $\det(\exp A) = \exp(\text{tr } A)$

İspat: Bunu öncelikle A nın $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ köşegen elemanlarla bir üst üçgensel matris olduğu durum için ispatlayacağız. Buradan, A^k da $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ köşegen elemanlarla üst üçgenseldir. Böylece $\exp A = e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$ köşegen girişlerle üst üçgenseldir ve lemmanın sonucu olarak bu özel durumda

$$\begin{aligned} \det \exp A &= e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots e^{\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \end{aligned} \quad (2.74)$$

elde edilir.

Bu defa $A = PTP^{-1}$ ve T nin üst üçgensel olduğu durumu inceleyelim.

$$\exp A = P(\exp T)P^{-1} \quad (2.75)$$

olup, $\det \exp A = \det \exp T$ ve $\text{iz } A = \text{iz } T$ olduğundan yine yukarıdaki sonuç elde edilir.

Son olarak Jordan kanonik formu ile (gerektiğinde reel katsayıları kompleks olanlarla genişleterek) herhangi bir A matrisinin, T üst üçgensel matrisi için PTP^{-1} formunda olduğu bulunur.

Örnek 2.3.11: $SU(2)$ nin Lie cebiri $SU(2)$, sıfır izli, aykırı hermityen olan 2×2 lik matrislerin kümesidir. Buradan, eğer $A \in SU(2)$ ise

$$A = \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

dır. $\ell: SU(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\ell(A) = (x, y, z)$ olsun. $SU(2)$ nin Lie parantezi

$$[A_1, A_2] = \begin{pmatrix} ix_3 & y_3 + iz_3 \\ -y_3 + iz_3 & -ix_3 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

ile verilir. Burada

$$x_3 = 2(y_1 z_2 - y_2 z_1)$$

$$y_3 = 2(z_1 x_2 - z_2 x_1)$$

$$z_3 = 2(x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (2.78)$$

dir. Böylece $x, x: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ çapraz çarpımını ifade etmek üzere

$$\ell([A_1, A_2]) = 2\ell(A_1) \times \ell(A_2) \quad (2.79)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.12: Bazı klasik Lie gruplarının Lie cebirlerini yazalım. Tanımdan, Lie grupları Lie cebiriyle aynı boyuta sahiptir.

a) Birim gruplar $U(n)$ ye ait $U(n)$ Lie cebirleri aykırı hermityen kompleks matrislerden oluşur:

$$U(n) = \{A : \overline{A^t} = -A\} \quad (2.80)$$

Köşegenin üstündeki elemanların sayısı $\frac{1}{2}n(n-1)$ dir. Köşegen elemanlar tamamen hayalidir ve köşegenin alt kısmındaki elemanlar üsttekiler tarafından belirlenmiştir. Böylece

$$\text{boyut } U(n) = n + 2\frac{1}{2}n(n-1) \text{ veya}$$

$$\text{boyut } U(n) = n^2 \quad (2.81)$$

bulunur.

b) Özel birim gruplar $SU(n)$ ye ait $SU(n)$ Lie cebirleri sıfır izli aykırı hermityen kompleks matrislerden oluşur:

$$SU(n) = \{A : \overline{A^t} = -A \text{ ve } \text{iz}A = 0\} \quad (2.82)$$

Böylece,

$$\text{boyut } SU(n) = n^2 - 1 \quad (2.83)$$

bulunur.

c) Ortogonal gruplar $O(n)$ ye ait $O(n)$ Lie cebirleri reel elemanlı, aykırı simetrik matrislerden oluşur:

$$O(n) = \{A : A^t = -A\} \quad (2.84)$$

Böylece

$$\text{boyut } O(n) = \frac{1}{2}n(n-1) \quad (2.85)$$

bulunur.

d) Özel ortogonal gruplar $SO(n)$, ortogonal gruplarla aynı Lie cebirine sahiptir. Çünkü $SO(n)$, $O(n)$ deki birim elemanının bağlantılı bileşenidir.

$$\text{boyut } SO(n) = \frac{1}{2}n(n-1) \quad (2.86)$$

bulunur.

e) Simplektik gruplar $Sp(n)$ ye ait $Sp(n)$ Lie cebiri tüm aykırı simplektik matrislerden oluşur:

$$Sp(n) = \{A : \overline{A^t} = -A\} \quad (2.87)$$

Benzer biçimde,

$$\text{boyut } Sp(n) = n(2n + 1) \quad (2.88)$$

bulunur.

2.4 Adjoint Gösterilim

M bir düz manifold ve G bir Lie grubu olsun. G nin M üzerinde soldan bir etkisi her $\sigma, \tau \in G$ ve $m \in M$ için $\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m))$, $\mu(e, m) = m$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\mu : G \times M \rightarrow M$ tasviridir.

Bu tasvir, G nin M üzerinde soldan bir etkisi ise o takdirde sabit bir $\sigma \in G$ için $m \rightarrow \mu(\sigma, \tau)$ tasviri μ_σ ile gösterilen M nin bir difeomorfizmidir.

Benzer şekilde M üzerinde G nin sağdan bir etkisi her $\sigma, \tau \in G$ ve $m \in M$ için $\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau)$, $\mu(m, e) = m$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\mu : M \times G \rightarrow M$ tasviridir.

Tanım 2.4.1: Bir G Lie grubu $i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau)$ olacak şekilde $i : G \times G \rightarrow G$ iç otomorfizmi vasıtasıyla soldan kendisi üzerinde etkir. Birim eleman bu etkimenin bir sabit noktasıdır, yani her bir $\sigma \in G$ için $i_\sigma(e) = e$ dir. O zaman

$$\sigma \rightarrow di_\sigma|_e T_e G \cong L(G) \quad (2.89)$$

G nin $\text{Aut}(L(G))$ içine bir gösterilimidir. Bu gösterilim adjoint gösterilim adını alır ve

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(L(G)) \quad (2.90)$$

ile gösterilir.

(2.67) den aşağıdaki değişmeli diyagramlar elde edilir:

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{dp} & \text{End}(L(G)) \\ \exp \downarrow & & \downarrow e \\ G & \xrightarrow{\rho} & \text{Aut}(L(G)) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & L(G) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{i_\sigma} & G \end{array} \quad (2.91)$$

$$\exp \rho(\sigma)(X) = \sigma(\exp tX) \sigma^{-1},$$

$$\exp \circ \rho_\sigma = i_\sigma \circ \exp \tag{2.92}$$

Böylece eğer $t \in \mathbb{R}$ ve $X \in L(G)$ ise

$$i_\sigma(\exp(tX)) = \exp(\rho(x)(tX)) = \exp(tp(x)(X)),$$

$$x \exp(tX) x^{-1} = \exp(tp(x)(X)) \tag{2.93}$$

olduğu görülür.

3. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ VE KONTROL EDİLEBİLİRLİK

3.1 Genel Kontrol Sistemleri

Bir Σ genel kontrol sistemi, diferansiyellenebilen sonlu boyutlu bir M manifoldu, durum uzayı, vektör alanlarının bir D ailesi ve kontroller ile belirlidir. Σ için kontrol edilebilirlik problemi M ve D ile ilgilidir ve D deki vektör alanlarının neden olduğu negatif olmayan zamanlı yerel difeomorfizmlerin tüm bileşkeleri kullanıldığında, x den başlayarak M nin her bir y elemanına ulaşmak hangi koşullar altında mümkündür, sorusundan kaynaklanır.

M bir diferansiyellenebilen manifold olsun ve $X(M)$ de, M nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı tüm düz vektör alanlarının ailesini gösterebiliriz. Düz kavramını C^∞ veya analitik olarak düşüneceğiz. Her bir $X \in X(M)$, M üzerinde yerel difeomorfizmlerin 1-parametreliliğini tanımlar. Yani X için olanaklı her bir $t \in \mathbb{R}$ ye karşılık, manifoldlar üzerinde vektör alanları tarafından üretilmiş adi diferansiyel denklemlerin varlık-teklik teoreminden dolayı,

$$X_t : \text{dom}(X_t) \subset M \rightarrow M \quad (3.1)$$

bir yerel difeomorfizm olup, $\gamma^X(., x)$, x noktasındaki vektör alanlarının integral eğrisi ise, o takdirde

$$X_t(x) = \gamma^X(t, x) \quad (3.2)$$

ile tanımlıdır. X_t nin tersi

$$X_{-t} : X_t(\text{dom}(X_t)) \subset M \rightarrow \text{dom}(X_t) \subset M \quad (3.3)$$

dir. Ayrıca,

1. $X_t \circ X_s = X_{t+s}$
2. $(X_t)^{-1} = X_{-t}$
3. $X_0 = \text{Id}$

dir.

Tanım 3.1.1: Bir Σ kontrol sistemi, $\Sigma = (M, D)$ şeklinde bir ikili olarak tanımlanır. Burada, M diferansiyellenebilen bir manifold ve D , $X(M)$ nin bir alt sınıfıdır.

Uyarı 3.1.2: 1. M ye Σ nin durum uzayı denir.

2. D nin elemanları sistemin stratejileri ve Σ nın kontrolleridirler.

3. Σ bir

$$G_{\Sigma} = \{\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r \mid \varphi^j \in D, t_j \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}\} \quad (3.5)$$

sözde grubu tanımlar ve Σ tarafından M de x in yörüngesi, x de G_{Σ} nın etkisi ile verilir:

$$G_{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in G_{\Sigma}\} \quad (3.6)$$

Tanım 3.1.3: Eğer $G_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde $x \in M$ varsa, Σ sistemine geçişlidir denir.

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in G_{\Sigma}(x) \quad (3.7)$$

ifadesi ile M üzerinde “ $\sim$ ” bağıntısını tanımlayalım. Elbette, “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısıdır. Özellikle, eğer Σ bir $x \in M$ noktasında geçişli ise, o takdirde M nin her noktasında geçişlidir. Yani,

$$G_{\Sigma}(x) = M, \forall x \in M \quad (3.8)$$

dir. Ayrıca Σ ile birleşmiş,

$$S_{\Sigma} = \{\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r \mid \varphi^j \in D, t_j \geq 0, r \in \mathbb{N}\} \quad (3.9)$$

sözde-yarı grubu elde edilir ve x den Σ nın ulaşılabilirlik kümesi denilen Σ ile M deki x in pozitif yörüngesi

$$S_{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in S_{\Sigma}\} \quad (3.10)$$

dir.

Uyarı 3.1.4: 1. Kuşkusuz, $S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x)$, $\forall x \in M$ dir.

2. S_{Σ} tarafından tanımlanan M üzerindeki “ $\sim$ ” bağıntısı simetrik bir bağıntı değildir.

Gerçekten de eğer $t > 0$ ise, o takdirde X_{-t} nin S_{Σ} ya ait olması gerekmez. Yani,

$$X \in D \not\Rightarrow -X \in D \quad (3.11)$$

dir.

Kontrol teorideki temel problemlerden biri $S_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde M , D ve $x \in M$ altındaki koşulları bulmaktır. Gerçekten eğer bir x başlangıç noktası ile başlanırsa problem, Σ nın D

dinamiği ile verilen negatif olmayan stratejiler ile M nin her noktasına ulaşmaktır. Yani $S_{\Sigma}(x) = M$ ne zaman doğrudur? Uyarı 3.1.4 den dolayı,

$$S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x) \subset M \quad (3.12)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, Σ nin geçişliliği bu problemi çözmek için gerekli bir koşuldur, ancak yeterli değildir. Örneğin, eğer

$$\Sigma = \left(R, \left\{ \frac{d}{dx} \right\} \right) \quad (3.13)$$

alınırsa o zaman,

$$S_{\Sigma}(0) = [0, \infty) \subsetneq G_{\Sigma}(0) = R \quad (3.14)$$

olur. Bu basit örnek kontrol edilebilirlik probleminin çok zor bir soru olduğunu gösterir. 1970 den beri bir çok matematikçi diferansiyel geometrik açıdan kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği ile ilgilenmiştir.

3.2 Kontrol Edilebilirlik

Tanım 3.2.1: $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ya:

1. Eğer $S_{\Sigma}(x) = M$ ise, x de kontrol edilebilirdir,
2. Eğer Σ , M nin her elemanı üzerinde kontrol edilebilir ise, M üzerinde kontrol edilebilirdir ya da kısaca kontrol edilebilirdir denir.

Aşağıda ispatsız olarak genel kontrol sistemleri için teorik açıdan çok önemli bir sonucu vereceğiz. Bu sonuca, sistemin dinamiği hakkındaki tüm bilgileri koruyan, M deki herhangi bir başlangıç koşulu için durum uzayının yörüngesine indirgenmesine olanak veren Yörünge Teoremi adı verilir.

Teorem 3.2.2 (Yörünge Teoremi): $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. O takdirde $G_{\Sigma}(x)$ yörüngesi aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde diferansiyellenebilen bir manifold yapısına sahiptir:

- i) $\{G_{\Sigma}(x) \mid x \in M\}$, M nin tekil noktaları ile bir bölüntüsüdür.
- ii) $\Sigma_x = (G_{\Sigma}(x), D)$, x in yörüngesi üzerinde geçişli bir kontrol sistemidir.

iii) Δ dağılımı

$$\Delta = \left\{ \varphi_* \left(Y_{\varphi^{-1}}(x) \right) \mid \varphi \in G_\Sigma \right\} \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlı olup, her $y \in G_\Sigma(x)$ için

$$\Delta(y) = T_y G_\Sigma(x) \quad (3.16)$$

olması, Δ nın integrallenebilir manifoldları kesin olarak Σ nın yörüngesi olması demektir.

Yani

$$\text{In}_\Delta(y) = G_\Sigma(x), \quad \forall y \in G_\Sigma(x) \quad (3.17)$$

dir.

Örnek 3.2.3: $\mathbb{R}^n$ üzerindeki diferansiyel denklemlerin

$$D = \left\{ \dot{x} = Ax + Bu \mid u \in \mathbb{R}^k \right\} \quad (3.18)$$

ailesini gözönüne alalım. Burada, $A \in M_n(\mathbb{R})$ ve $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ dır.

$S_\Sigma(0)$ nın $\mathbb{R}^n$ nin bir vektör alt uzayı olduğu görülebilir ve böylece $S_\Sigma(0) = G_\Sigma(0)$ bulunur.

Ancak ve ancak

$$\text{rank}(B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) = n \quad (3.19)$$

ise Σ orijinde kontrol edilebilirdir. Bu sonuç lineer kontrol sistemlerin kontrol edilebilirliği için rank koşulu denilen Kalman Teoremi olarak bilinir.

Örnek 3.2.4: Bu örnekte, kontrol edilebilirliğe karar vermek için sadece rank koşulunu kullanıyoruz.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \mid u \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.20)$$

ile $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ kontrol edilemezdir.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \mid u \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.21)$$

ile $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ kontrol edilebilirdir.

Örnek 3.2.5: $M = \mathbb{R}^2$ olsun. Burada

$$D = \left\{ X^1 = \frac{\partial}{\partial x}, X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.22)$$

dir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

diferansiyel denklem sistemi, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x = a + t, \quad y = b, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.24)$$

şeklinde çözüldüğünden X^1 in akışı,

$$X_t^1(a, b) = \begin{pmatrix} a + t \\ b \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde X^2 nin akışı,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad (3.26)$$

sistemi, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x = ae^t, \quad y = be^{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.27)$$

şeklinde çözüldüğünden

$$X_t^2(a, b) = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.28)$$

olarak bulunur. Böylece X^1 ve X^2 ile birleşmiş akışlar, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ başlangıç koşuluyla, her $t \in \mathbb{R}$ için

$$X_t^1(a, b) = \begin{pmatrix} a + t \\ b \end{pmatrix}, \quad X_t^2(a, b) = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

şeklinde dir. Bu durumda $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ nin yörüngeleri

1. $G_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y > 0\}, b > 0$
2. $G_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y = 0\}, b = 0$ (3.30)
3. $G_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y < 0\}, b < 0$

olup pozitif yörüngeleri de

1. $S_{\Sigma}(a, b) = \left\{ (x, y) \mid \frac{ab}{x} \leq y \leq b, x \geq a \right\}, b \geq 0$
2. $S_{\Sigma}(a, b) = \left\{ (x, y) \mid b \leq y \leq \frac{ab}{x}, x \geq a \right\}, b < 0$ (3.31)

olarak bulunur. $\Sigma, \mathbb{R}^2$ nin her noktası üzerinde kontrol edilemezdir.

Örnek 3.2.6: $G = SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

grubunu ve

$$L(G) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr} A = 0\} \quad (3.32)$$

ile verilen grubun $L(G)$ Lie cebirini gözönüne alalım.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

olmak üzere

$$D = \{X + uY \mid u \in \mathbb{R}\} \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \quad (3.34)$$

dinamiğini gözönüne alalım. Akışlar

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \quad (3.35)$$

dir. $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ için

$$G_{\Sigma}(a, b) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad (3.36)$$

ve eğer $a^2 + b^2 \neq 0$ ise

$$G_{\Sigma}(0,0) = \{(0,0)\} \quad (3.37)$$

elde edilir. Oysa Σ kontrol edilemezdir. Örneğin, eğer $a > 0$, $b > 0$ ise, o takdirde

$$S_{\Sigma}(a,b) = \{(x,y) \mid x \geq a\} \quad (3.38)$$

dir.

Aşağıdaki örnek invaryant kontrol sistemlerin sınıfına aittir.

Örnek 3.2.7: G 3-boyutlu Heisenberg grubu, yani

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.39)$$

olsun. G üzerinde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

invariant vektör alanlarını, yani G nin

$$L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.41)$$

Lie cebirindeki elemanları gözönüne alalım.

$$D = \{X + uY \mid u \in \mathbb{R}\} \quad (3.42)$$

yi tanımlayalım. $\Sigma = (G, D)$ sistemi geçişlidir. Gerçekten,

$$\Delta(e) = \text{geren}\{X, Y, [X, Y]\} = L(G) \quad (3.43)$$

dir. Bir invariant Σ kontrol sistemi ancak ve ancak e birim noktasında kontrol edilebilirse, G üzerinde kontrol edilebilirdir. O takdirde $S_{\Sigma}(e) = G_{\Sigma}(e)$ olmalıdır. Bu örnekte, G nin e birim elemanının yörüngesi G ile çakışır. Σ kontrol edilemez, yani $S_{\Sigma}(e) \subsetneq G$ dir.

4. NORMALİZÖRLÜ SİSTEMLERİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ

4.1 Normalizör

$\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Tanım gereği Σ nın X drift vektör alanı, G üzerindeki tüm C^∞ (düz ya da analitik) vektör alanlarının $X(G)$ Lie cebirinde, $L(G)$ nin normalizörünün bir elemanıdır. Bu bölümde dinamiğin bu türünün bir karakterizasyonunu veriyoruz. Buradaki vektör alanları da G üzerinde lineer vektör alanları adını alacak. Her $p \in \mathbb{R}^n$ için $X_p = A(p) + u$ ise, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki X vektör alanı lineerdir. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nin bir lineer tasviridir ve u , $\mathbb{R}^n$ nin bir sabit vektörüdür. $\mathbb{R}^n$ üzerinde lineer vektör alanları aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir:

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir C^∞ X vektör alanı, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki her U sabit vektör alanı için ancak ve ancak $[X, U]$ sabit bir vektör alanı ise lineerdir. Bundan dolayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tüm lineer vektör alanlarının kümesi yine $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tüm C^∞ vektör alanlarının $X(\mathbb{R}^n)$ Lie cebirindeki $\mathbb{R}^n$ nin Lie cebirinin normalizörüdür.

G bir Lie grubu ise G nin $L(G)$ Lie cebiri, G nin e birim elemanındaki $T_e G$ teğet uzayı ile özdeşlenecek ve herhangi $Y \in L(G)$ için $\tilde{Y} \in X(G)$, $\tilde{Y}_e = Y$ olacak şekilde G üzerindeki sol-invariant vektör alanını gösterecektir.

G üzerindeki vektör alanlarını G nin $L(G)$ içine fonksiyonları ile özdeşlemeyi uygun buluyoruz: $F: G \rightarrow L(G)$,

$$F(x) = (dL_x)_x^{-1}(X_x) \quad (4.1)$$

yi sağlayan bir tasvir olacak şekilde

$$\tilde{F}_x = dL_x(F(x)) = \tilde{F(x)}_x, \quad x \in G \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlı $\sim: C^\infty \rightarrow X(G)$, $F \mapsto \tilde{F}$ tasvirini gözönüne alalım.

Önerme 4.1.1: $F \rightarrow \tilde{F}$ tasviri $C^\infty(G, L(G))$ nın $X(G)$ üzerine bir lineer izomorfizmidir.

İspat: dL_x in $dL_x^{-1} = dL_{x^{-1}}$ tersi ile bir izomorfizm olduğunu belirtelim.

Lineerlik: $F, H \in C^\infty(G, L(G))$ olsun. α, β reel sayıları için

$$\left(\widetilde{\alpha F + \beta H} \right)_x = dL_x(\alpha F + \beta H)(x) = dL_x(\alpha F(x) + \beta H(x)) = \alpha \tilde{F}_x + \beta \tilde{H}_x \quad (4.3)$$

elde edilir. Özel olarak, $\alpha = \beta = 1$ alınırsa $\widetilde{(F + H)}_x = \tilde{F}_x + \tilde{H}_x$ dir.

Birebirlik: $\tilde{F}_x = \tilde{H}_x$ olsun. O takdirde $\tilde{F}_x = dL_x(F(x)) = dL_x(H(x)) = \tilde{H}_x$ den her $x \in G$ için $F(x) = H(x)$ dir ve $F = H$ için dL_x birebirdir.

Üzerinelik: $X \in X(G)$ için $F(x) = (dL_x)^{-1}(X_x)$ olacak şekilde bir F tanımlarsak, $\tilde{F} = X$ bulunur.

Uyarı 4.1.2: Her $x \in G$ için $F(x) = Y \in G$ sabit fonksiyonu sol-invaryant $\tilde{Y} \in X(G) \cap L(G)$ vektör alanına karşılık gelir. Bununla birlikte, $C^\infty(G, L(G))$ deki sabit fonksiyonların $\sim$ altındaki görüntüsü $L(G)$ dir.

$$\text{norm}_{X(G)}(L(G)) = \{X \in X(G) \mid [X, \tilde{Y}] \in L(G), \forall Y \in L(G) \text{ için} \} \quad (4.4)$$

olsun.

Tanım 4.1.3: $\text{norm}_{X(G)}(L(G))$ deki elemanlar, G üzerindeki lineer vektör alanları olarak adlandırılırlar.

Yardımcı Teorem 4.1.4: $Y \in L(G)$ ve $F \in C^\infty(G, L(G))$ verilsin ve $H \in C^\infty(G, L(G))$ için

$$H(x) = \tilde{Y}_x(F) + [Y, F(x)], \quad x \in G \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlı olsun. O takdirde, $\tilde{H} = [\tilde{Y}, \tilde{F}]$ dir.

İspat: İspata geçmeden önce birkaç noktaya dikkat çekelim. $f \in C^\infty(G)$ olsun.

(a) Eğer $F(x) \in L(G)$ ise o zaman $F(x)_e f = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$ dir. Burada $\gamma(0) = e$ ve

$\dot{\gamma}(0) = F(x)$ dir. Eğer $\gamma(t) = \exp tF(x)$ alınırsa

$$F(x)_e f = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} f(\exp tF(x)) \quad (4.6)$$

yazılır.

(b) $Y \in L(G)$ (a) da kullanılırsa

$$\tilde{Y}_e f = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} f(\exp tY) \quad (4.7)$$

ve

$$(\tilde{Y}_e \cdot F)(x) = \tilde{Y}_x F = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(x \exp tY) \quad (4.8)$$

elde edilir. Açıkça $\tilde{Y}_x F \in L(G)$ ve $\tilde{Y} \cdot F \in C^\infty(G, L(G))$ dir. Benzer şekilde $[Y, F(\cdot)] \in C^\infty(G, L(G))$ dir. Bu durumda $\tilde{Y}_x F + [Y, F(\cdot)] \in L(G)$ ve $H \in C^\infty(G, L(G))$ olduğu sonucu çıkar.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F(x \exp tY) f \right)(x \exp tY) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F(x \exp tY) f \right)(x) \\ & + \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F(x) f \right)(x \exp tY) \end{aligned} \quad (4.9)$$

dir.

$$\text{(d)} = \left(\left(\tilde{Y}F \right)(x) \right) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(x \exp tY)$$

olup,

$$= \left(\left(\tilde{Y}F \right)(x) f \right)(x) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F(x \exp tY) f \right)(x) \quad (4.10)$$

ve

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F(x) f(x \exp tY) \right) = \tilde{Y}_x \left(F(x) f \right) = \left(\tilde{Y} \left(F(x) f \right) \right)(x) \quad (4.11)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada ispata geçebiliriz. Lie parantezinin tanımından

$$([\tilde{Y}, \tilde{F}]f)(x) = (\tilde{Y}(\tilde{F}f))(x) - (\tilde{F}(\tilde{Y}f))(x), \quad f \in C^\infty(G) \quad (4.12)$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
& \left(\tilde{Y}(\tilde{F}f) \right)(x) = \tilde{Y}_x(\tilde{F}f) \\
& = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (\tilde{F}f)(x \exp tY) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F \sim_{x \exp tY} f \right) \\
& = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F \left(x \exp tY \right) \right)_{x \exp tY} f \\
& = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F \left(x \exp tY \right) f \right)(x \exp tY) \\
& = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F \left(x \exp tY \right) f \right)(x) + \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(F(x) f \right)(x \exp tY) \\
& = \left(\left(\tilde{Y}F \right)(x) f \right)(x) + \left(\tilde{Y} \left(F(x) f \right) \right)(x) \tag{4.13}
\end{aligned}$$

(4.10) ve (4.11) den elde edilir. Ayrıca

$$\left(\tilde{F}(\tilde{Y}f) \right)(x) = \tilde{F}_x(\tilde{Y}f) = \tilde{F}(x)_x(\tilde{Y}f) = \left(F(x)(\tilde{Y}f) \right)(x) \tag{4.14}$$

bulunur. (4.13) ve (4.14) eşitlikleri (4.12) bağıntısında yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned}
\left([\tilde{Y}, \tilde{F}]f \right)(x) &= \left(\left(\tilde{Y}F \right)(x) f \right)(x) + \left(\tilde{Y} \left(F(x) f \right) \right)(x) - \left(F(x)(\tilde{Y}f) \right)(x) \\
&= \left(\left(\tilde{Y}F \right)(x) f \right)(x) + \left(\left[\tilde{Y}, F(x) \right] f \right)(x) \\
&= \left(\left(\tilde{Y}F \right)(x) f \right)(x) + \left(\left[Y, F(x) \right] f \right)(x) \tag{4.15}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\left[\tilde{Y}, \tilde{F} \right]_x = \tilde{Y}_x(F)_x + \left[Y, F(x) \right]_x = \left(\tilde{Y}_x(F) + \left[Y, F(x) \right] \right)_x = \tilde{H}_x \tag{4.16}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5: $F \in C^\infty(G, L(G))$ olsun. O takdirde her $Y \in L(G)$ için ancak ve ancak

$$F(x \exp Y) = (e^{-\text{ad}Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)]) \quad (4.17)$$

ise $F \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ dir. $\text{norm}_{X(G)}(L(G))$ deki tüm vektör alanları analitiktir.

İspat: Bir $B : L(G) \rightarrow L(G)$ tasviri $B(Y) = Y(F) + [Y, F(e)]$ şeklinde tanımlı olsun. H bir önceki yardımcı teoremdeki gibi alındığında, her $Y \in L(G)$ için $B(Y) = H(e)$ olur. O halde her $x \in G$ ve her $Y \in L(G)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G)) &\Leftrightarrow [\tilde{Y}, \tilde{F}] \in L(G) \\ &\Leftrightarrow H(x) = \tilde{Y}_x(F) + [Y, F(x)] = B(Y) \\ &\Leftrightarrow \tilde{Y}_x(F) = -[Y, F(x)] + B(Y) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(x \exp tY) = -[Y, F(x)] + B(Y) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(x \exp tY) = -[Y, F(x \exp tY)] + B(Y) \end{aligned} \quad (4.18)$$

dir. $f(t) = F(x \exp tY)$ olsun. O takdirde (4.18) den

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_t = \left(\frac{d}{dt} \right)_t F(x \exp tY) \\ &= -[Y, F(x \exp tY)] + B(Y) \quad \forall x, t \\ &= -\text{ad}(Y)(f(t)) + B(Y) \quad \forall x, t \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. $\text{ad}(Y)$ bir lineer operatör olduğundan ve $B(Y)$ t ye bağlı olmadığından,

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\text{ad}(Y)(f'(t)) = -\text{ad}(Y)(-\text{ad}(Y)(f(t)) + B(Y)) \\ &= (-\text{ad}(Y))^2(f(t)) + (-\text{ad}(Y))(B(Y)) \end{aligned} \quad (4.20)$$

bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(t) = (-\text{ad}(Y))^n(f(t)) + (-\text{ad}(Y))^{n-1}(B(Y)) \quad (4.21)$$

yazılır. $n = 1$ için bu bağıntının sağlandığı açık olup, n için sağlandığını kabul edelim ve $n + 1$ için de sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_t f^{(n)}(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_t \left\{ (-\text{ad}(Y))^n(f(t)) + (-\text{ad}(Y))^{n-1}(B(Y)) \right\} \\ &= (-\text{ad}(Y))^{n+1}(f(t)) + (-\text{ad}(Y))^n(B(Y)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

olup sonuç doğrudur. $f(t)$, $t = 0$ da analitik olduğundan

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \quad (4.23)$$

şeklinde Taylor serisiyle yazılabilir. Burada $f(0) = F(x)$ dir. Bu durumda $f^{(0)}(0) = f(0) = F(x)$

ve $n \geq 1$ için $f^{(n)}(0) = (-\text{ad}(Y))^n(F(x)) + (-\text{ad}(Y))^{n-1}(B(Y))$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-\text{ad}(Y))^n(F(x))}{n!} t^n + \sum_{n \geq 1} \frac{(-\text{ad}(Y))^{n-1}(B(Y))}{n!} t^n \\ &= e^{-\text{ad}(Y)} F(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{(-\text{ad}(Y))^{n-1}}{n!} (B(Y)) t^n \\ &= e^{-\text{ad}(Y)} F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}(Y)}}{\text{ad}(Y)} \right) (B(Y)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. $t = 1$ alınarak $f(1) = F(x \exp Y)$ ve böylece

$$F(x \exp Y) = (e^{-\text{ad}Y}) F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (B(Y)) \quad (4.25)$$

bulunur.

Uyarı 4.1.6: $B(Y) = Y(F) + [Y, F(e)] = \tilde{Y}_e(F) + [Y, F(e)] = dF_e(Y) + [Y, F(e)]$ dir.

Sonuç 4.1.7: Eğer G bağlantılı bir Lie grubu ise bir $\tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ elemanı $(F(e), dF_e)$ ikilisiyle karakterize edilir.

İspat: $U = \exp(L(G)) = \{x \in G : x = \exp Y, Y \in L(G)\}$ olsun. n üzerinden tümevarımla F fonksiyonunun U^n üzerinde $(F(e), dF_e)$ ikilisiyle belirlendiğini ispatlayacağız.

$$U^n = U^{n-1}U = \{xy \in G : x \in U^{n-1}, y \in U\} \quad (4.26)$$

olup, G bağlantılı ve $G = \bigcup_n U^n$ olduğundan sonucun doğru olduğu görülebilir. Gerçekten (4.17) de $\exp Y \in U$ için $x = e$ alınarak

$$F(\exp Y) = (e^{-\text{ad}Y})F(e) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (dF_e(Y) + [Y, F(e)]) \quad (4.27)$$

elde edilir. Bu da F in U üzerinde belirlendiğini gösterir. F in $n \geq 1$ için U^n üzerinde belirlendiğini kabul edelim ve bir $x \in U^n$ alalım. O zaman

$$F(x \exp Y) = (e^{-\text{ad}Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (dF_e(Y) + [Y, F(e)]) \quad (4.28)$$

bulunur. Burada $x \exp Y \in U^n U = U^{n+1}$ dir. Böylece F , U^{n+1} üzerinde belirlidir.

Uyarı 4.1.8: Eğer G bağlantılı bir Lie grubu ise o zaman

$$x \in G \Leftrightarrow x = \exp t_1 Y_1 \cdot \exp t_2 Y_2 \cdot \dots \cdot \exp t_n Y_n \quad (4.29)$$

olacak şekilde $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in L(G)$ vardır.

Sonuç 4.1.9: $G = \mathbb{R}^n$ olmak üzere her $p \in \mathbb{R}^n$ için $X \in \text{norm}_{X(G)}(L(G)) \Leftrightarrow Xp = A(p) + u$ dur. Burada $A, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nin bir lineer tasviri olup $u \in \mathbb{R}^n$ dir.

İspat: $\mathbb{R}^n$ nin $T_p \mathbb{R}^n$ teğet uzayı ile doğal özdeşleşmesi ile $\tilde{F}$ vektör alanı $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ fonksiyonuyla aynı olur. Böylece eğer (4.17) de x ile 0 ve Y ile p yer değiştirirse $F(0+p) = \text{Id}.dF_0(p) + \text{Id}.F(0)$ ya da $F_p = dF_0(p) + F(0)$ elde edilir.

Teorem 4.1.10: Eğer $\tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ ise, o takdirde her bir $X, Y \in L(G)$ için

$$e^{\text{ad}Y} dF_e(e^{-\text{ad}Y} X) = \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) dF_e(Y) \right] + dF_e(X) \quad (4.30)$$

dir.

İspat: (4.17) de, $x = \exp(-Y)\exp(tX)$ alınarak

$$e^{\text{ad}Y} F(\exp(-Y) \exp tX \exp Y) = F(\exp(-Y)\exp tX) + \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)]) \quad (4.31)$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} dF_e(e^{-\text{ad}Y}X) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp t(e^{-\text{ad}Y}X)) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp t(\text{Ad}(\exp(-Y)(X)))) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp(t\text{Ad}(\exp(-Y)(X)))) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F((\exp(-Y))\exp(tX)\exp(Y)) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (e^{-\text{ad}Y}) F(\exp(-Y)\exp(tX)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

olup, bu takdirde

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}Y} dF_e(e^{-\text{ad}Y}X) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp(-Y)\exp(tX)) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left((e^{-\text{ad}X}) F(\exp(-Y)) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} \right) (X(F) + [X, F(e)]) \right) \\ &= -\text{ad}XF(\exp(-Y)) + X(F) + [X, F(e)] \\ &= -\text{ad}X \left(e^{\text{ad}Y} F(e) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} \right) (X(F) + [X, F(e)]) \right) + X(F) + [X, F(e)] \\ &= -[X, (e^{\text{ad}Y} F(e))] + \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) Y(F) \right] - \left[X, \left(\frac{1 - e^{\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) [Y, F(e)] \right] \\ &\quad + X(F) + [X, F(e)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

bulunur. Eğer

$$\left(\frac{1 - e^{\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) \text{ad}Y(F(e)) = F(e) - (e^{\text{ad}Y})F(e) \quad (4.34)$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}Y} dF_e(e^{-\text{ad}Y} X) &= -[X, (e^{\text{ad}Y} F(e))] + \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) Y(F) \right] \\ &\quad - [X, F(e) - (e^{\text{ad}Y})F(e)] + X(F) + [X, F(e)] \\ &= \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) Y(F) \right] + X(F) \\ &= \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) dF_e(Y) \right] + dF_e(X) \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.11: Herhangi bir $A : L(G) \rightarrow L(G)$ lineer tasviri için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

$$(i) \quad e^{\text{ad}Y} A(e^{-\text{ad}Y} X) = \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) A(Y) \right] + A(X) \quad (X, Y \in L(G)),$$

(ii) $A, L(G)$ nin bir türevidir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Burada $A : L(G) \rightarrow L(G)$ lineer tasvirinin her $X, Y \in L(G)$ için $A[X, Y] = [AX, Y] + [X, AY]$ koşulunu sağladığını göstereceğiz. (i) de Y ile tY yer değiştirirse ve $t = 0$ da t ye göre türevi alınırsa

$$e^{\text{ad}Y} A(e^{-\text{ad}Y} X) = \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) A(Y) \right] + A(X) \quad (4.36)$$

bulunur. Bu ifadenin her iki yanının $t = 0$ da t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(e^{\text{ad}Y} A(e^{-\text{ad}Y} X) \right) &= \text{ad}Y e^{\text{ad}Y} A(e^{-\text{ad}Y} X) \Big|_{t=0} + e^{\text{ad}Y} A(-\text{ad}Y e^{-\text{ad}Y} X) \Big|_{t=0} \\ &= \text{ad}Y(A(X)) + A(-\text{ad}Y(X)) \end{aligned}$$

$$= [Y, A(x)] - A[Y, X] \quad (4.37)$$

bulunur. $A(X)$ t den bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) A(Y) \right] &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \text{ad} X \left(\left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) A(Y) \right) \\ &= [X, A(Y)] \end{aligned} \quad (4.38)$$

olup, böylece

$$A[X, Y] = [A(X), Y] + [X, A(Y)] \quad (4.39)$$

elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $A, L(G)$ nin bir türevi olsun ve $\phi(t) = A(e^{\text{ad} Y} X)$ alalım. Bu takdirde

$$\frac{d\phi}{dt} = A(\text{ad} Y e^{\text{ad} Y} X) = A([Y, e^{\text{ad} Y} X]) = [A(Y), e^{\text{ad} Y} X] + [Y, \phi(t)] \quad (4.40)$$

bulunur. Öte yandan

$$\psi(t) = e^{\text{ad} Y} \left[X, \left(\frac{e^{-\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) A(Y) \right] + e^{\text{ad} Y} A(X) \quad (4.41)$$

olsun. O takdirde,

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \text{ad} Y e^{\text{ad} Y} \left[X, \left(\frac{e^{-\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) A(Y) \right] + e^{\text{ad} Y} [X, -e^{-\text{ad} Y} A(Y)] + \text{ad} Y e^{\text{ad} Y} A(X) \\ &= \text{ad} Y e^{\text{ad} Y} \left(\left[X, \left(\frac{e^{-\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) A(Y) \right] + A(X) \right) \\ &= \text{ad} Y (\psi(t)) + [A(Y), e^{\text{ad} Y} X] \\ &= [Y, \psi(t)] + [A(Y), e^{\text{ad} Y} X] \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. Bu durumda ϕ ve ψ fonksiyonları

$$\phi(0) = A(X) = \psi(0) \quad (4.43)$$

başlangıç değeri koşuluyla aynı

$$\frac{d\zeta}{dt} = [A(Y), e^{\text{tad}Y} X] + [Y, \zeta] \quad (4.44)$$

diferansiyel denklemini sağlar. Diferansiyel denklemlerin varlık-teklik teoreminden $\phi = \psi$ dir. Böylece $t = -1$ alındığında (i) elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.12: Verilen bir $D \in L(G)$ için $\text{ad}D$ yi $L(G)$ üzerinde $(\text{ad}D)_X = [D, X]$ şeklinde tanımlı bir vektör alanı olarak alalım. Aynı zamanda D yi $D_X = D$ şeklinde tanımlı sabit vektör alanı ile özdeşleyelim. $D, E \in L(G)$ olsun. O zaman

$$(i) [E, \text{ad}D] = [D, E],$$

$$(ii) [\text{ad}E, \text{ad}D] = \text{ad}[D, E] \text{ dir.}$$

İspat: $\{x_i\}_{i=1}^n$, $L(G)$ de koordinatların bir lineer sistemi ve $f \in C^\infty(L(G))$ olsun. O takdirde

$$(\text{ad}Df)(X) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} f(X + t[D, X]) \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} (E(\text{ad}Df))(X) &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (\text{ad}Df)(X + sE) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(X + sE + t[D, X] + ts[D, E])(0, 0) \\ &= \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) E_j[D, X]_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) [D, E]_i \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$(Ef)(X) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} f(X + tE) \quad (4.47)$$

ve

$$\begin{aligned} (\text{ad}D(Ef))(X) &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (Ef)(X + s[D, X]) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(X + s[D, X] + tE)(0, 0) \\ &= \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) [D, X]_j E_i \end{aligned} \quad (4.48)$$

bulunur. Böylece

$$([E, \text{ad}D]f)(X) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) [D, E]_i = ([D, E]f)(X) \quad (4.49)$$

elde edilir. Bu da (i) yi ispatlar. (ii) yi ispatlamak için

$$\begin{aligned} (\text{ad}E(\text{ad}Df))(X) &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (\text{ad}Df)(X + s[E, X]) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(X + s[E, X] + t[D, X] + ts[D, [E, X]])(0, 0) \\ &= \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) [E, X]_j [D, X]_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) [D, [E, X]]_i \end{aligned} \quad (4.50)$$

olup, bu durumda

$$([\text{ad}E, \text{ad}D]f)(X) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) ([D, [E, X]]_i - [E, [D, X]]_i) \quad (4.51)$$

bulunur. Böylece

$$[\text{ad}E, \text{ad}D]X = [D, [E, X]] - [E, [D, X]] = [[D, E], X] \quad (4.52)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.13: Eğer $\tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ ise o zaman her $Y \in L(G)$ için

$$dF_x(\tilde{Y}_x) = [Y, F(e) - F(x)] + dF_e(Y) \quad (4.53)$$

dir.

İspat: (4.17) bağıntısında Y yerine tY konur ve t ye göre $t = 0$ da türevi alınırsa, istenilen sonuca varılır.

Teorem 4.1.14: $\phi \in \partial(L(G))$, $L(G)$ nin bir türevi ve $E \in L(G)$ olsun. O takdirde $G \times L(G)$ de

$$\Delta_{(x,X)} = \left\{ (\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \phi(Y)) : Y \in L(G) \right\} \quad (4.54)$$

şeklinde tanımlı Δ dağılımı, C^∞ , $n = \text{boyut}(L(G))$ boyutlu ve involutivdir.

İspat: Bir $D : L(G) \rightarrow L(G)$ tasviri

$$D(\cdot) = [Y, E] - \text{ad}Y(\cdot) + \phi(Y) \quad (4.55)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\Delta_{(x,X)} = \left\{ \left(\tilde{Y}_x, D(X) \right) : Y \in L(G) \right\} \quad (4.56)$$

yazılabilir. Dağılım, uzayın her elemanını o elemandaki teğet uzayının bir alt vektör uzayına götüren bir tasvir olduğuna göre

$$\Delta : G \times L(G) \rightarrow T(G \times L(G)) \cong TG \times TL(G)$$

$$(x, X) \mapsto \Delta(x, X) \leq T_x G \times T_X L(G) \quad (4.57)$$

dir. Yani $\Delta(x, X), T_{(x,X)}(G \times L(G)) \cong T_x G \times T_X L(G)$ nin bir alt uzayıdır. $T_x G \times T_X L(G)$ deki (X, Y) ve (X^1, Y^1) elemanları için

$$[(X, Y), (X^1, Y^1)] = ([X, X^1], [Y, Y^1]) \quad (4.58)$$

şeklinde Lie parantezi tanımlansın:

(i) Δ yı geren elemanlar C^∞ olduğundan Δ, C^∞ dur.

(ii) (4.54) ün ilk bileşeni $L(G)$ nin x deki bir etkisidir. Yani $T_x G$ dir ve $\tilde{Y}_x$ için $[Y, E - X] + \phi(Y)$ tektir. Dolayısıyla boyut $\Delta = \text{boyut} L(G)$ dir.

(iii) $\left(\left(\tilde{Y}_1 \right)_x, D_1(\cdot) \right) \in \Delta(x, \cdot)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left[\left(\left(\tilde{Y}_1 \right)_x, D_1(\cdot) \right), \left(\left(\tilde{Y}_2 \right)_x, D_2(\cdot) \right) \right] = \left[\left[\left(\tilde{Y}_1 \right)_x, \left(\tilde{Y}_2 \right)_x \right], [D_1(\cdot), D_2(\cdot)] \right] \\ & = \left[\left[\left(Y_1 \right)_x, \left(Y_2 \right)_x \right], [D_1(\cdot), D_2(\cdot)] \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} & [D_1(\cdot), D_2(\cdot)] = [[Y_1, E] - \text{ad} Y_1(\cdot) + \phi(Y_1), [Y_2, E] - \text{ad} Y_2(\cdot) + \phi(Y_2)] \\ & = [[Y_1, E] + \phi(Y_1), [Y_2, E] + \phi(Y_2)] + [[Y_1, E] - \text{ad} Y_2(\cdot)] \\ & + [-\text{ad} Y_1(\cdot), [Y_2, E]] + [-\text{ad} Y_1(\cdot), -\text{ad} Y_2(\cdot)] + [-\text{ad} Y_1(\cdot), \phi(Y_2)] + [\phi(Y_1), -\text{ad} Y_2(\cdot)] \end{aligned} \quad (4.60)$$

olup, Yardımcı Teorem 4.1.12 den

$$\begin{aligned}
[D_1(\cdot), D_2(\cdot)] &= [[Y_1, E] + \phi(Y_1), [Y_2, E] + \phi(Y_2)] - [Y_2, [Y_1, E]] \\
&= [Y_1, [Y_2, E]] + \text{ad}[Y_2, Y_1] + [Y_1, \phi(Y_2)] - [Y_2, \phi(Y_1)]
\end{aligned} \tag{4.61}$$

elde edilir. Burada $[[Y_1, E] + \phi(Y_1), [Y_2, E] + \phi(Y_2)] = 0$ dır. Gerçekten $[Y_1, E] + \phi(Y_1)$ ve $[Y_2, E] + \phi(Y_2)$ sabit vektör alanları olduklarından, onların Lie parantezi sıfırdır. Jacobi özdeşliği kullanılarak

$$[D_1(\cdot), D_2(\cdot)] = [[Y_1, Y_2], E] - \text{ad}[Y_1, Y_2](\cdot) + [\phi(Y_1), Y_2] + [Y_1, \phi(Y_2)] \tag{4.62}$$

elde edilir. ϕ türev olduğundan,

$$[D_1(\cdot), D_2(\cdot)] = [[Y_1, Y_2], E] - \text{ad}[Y_1, Y_2](\cdot) + \phi[Y_1, Y_2] \tag{4.63}$$

yazılır. Bu son ifade (4.59) da yerine konulursa,

$$\begin{aligned}
& \left[\left((\tilde{Y}_1)_x, D_1(\cdot) \right), \left((\tilde{Y}_2)_x, D_2(\cdot) \right) \right] \\
&= \left(\left[(Y_1), \tilde{(Y_2)} \right]_x, [[Y_1, Y_2], E] - \text{ad}[Y_1, Y_2](\cdot) + [\phi(Y_1), Y_2] + [Y_1, \phi(Y_2)] \right) \in \Delta(x, \cdot)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 4.1.15: $\tilde{F}_j \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$, $j = 1, 2$ verilsin ve bir $F \in C^\infty(G, L(G))$

$$F(x) = -[F_1(x), F_2(x)] + F_1(x)(F_2) - F_2(x)(F_1) + [F_1(x), F_2(e)] - [F_2(x), F_1(e)] \tag{4.65}$$

şeklinde tanımlı olsun. O takdirde $[\tilde{F}_1, \tilde{F}_2] = \tilde{F}$ dir.

İspat: $([\tilde{F}_1, \tilde{F}_2]f)(x) = (\tilde{F}_1(\tilde{F}_2f))(x) - (\tilde{F}_2(\tilde{F}_1f))(x), \quad f \in C^\infty(G)$

olup, burada

$$\begin{aligned}
(\tilde{F}_1(\tilde{F}_2f))(x) &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (\tilde{F}_2f)(x \exp sF_1(x)) \\
&= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} \left(F_2 \left(x \exp sF_1(x) f \right) (x \exp sF_1(x)) \right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} \left(F_2 \left(x \exp s F_1(x) \right) f \right)(x) + \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} \left(F(\tilde{x}) f \right)(x \exp s F_1(x)) \quad (4.66)$$

dır. (4.17) den

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} F_2(x \exp s F_1(x)) \\ &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} \left(\left(e^{-\text{ad} F_1(x)} \right) F_2(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad} F_1(x)}}{\text{ad} F_1(x)} \right) (F_1(x)(F_2) + [F_1(x), F_2(e)]) \right) \\ &= -[F_1(x), F_2(x)] + F_1(x)(F_2) + [F_1(x), F_2(e)] \end{aligned} \quad (4.67)$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_1(\tilde{F}_2 f))(x) &= - \left([F_1(x), F_2(x)] f \right)(x) + \left(F_1(x)(F_2) f \right)(x) \\ &+ \left([F_1(x), F_2(e)] f \right)(x) + \left(F_1(x)(F_2(x) f) \right)(x) \end{aligned} \quad (4.68)$$

olup, dolayısıyla

$$\begin{aligned} ([\tilde{F}_1, \tilde{F}_2] f)(x) &= - \left([F_1(x), F_2(x)] f \right)(x) + \left(F_1(x)(F_2) - F_2(x)(F_1) f \right)(x) \\ &+ \left(\left([F_1(x), F_2(e)] - [F_2(x), F_1(e)] \right) f \right)(x) \end{aligned} \quad (4.69)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.16: $\Phi: \text{norm}_{X(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \text{gl}(L(G))$, $\Phi(\tilde{F}) = (F(e), -dF_e)$ şeklinde tanımlı bir lineer tasvir olsun. O takdirde

(i) $\Phi, \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ den $L(G) \otimes \partial(L(G))$ yarı-direk çarpımı içine bir Lie cebiri homomorfizmidir.

(ii) Eğer G bağlantılı ise o zaman $\Phi: \text{norm}_{X(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \partial(L(G))$ bir birebir homomorfizmdir.

(iii) Eğer G bağlantılı ve basit bağlantılı ise o zaman $\Phi : \text{norm}_{X(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \partial(L(G))$ bir üzerine izomorfizmdir.

İspat: (i) $\Phi(\alpha\tilde{F}_1 + \beta\tilde{F}_2) = \alpha\Phi(\tilde{F}_1) + \beta\Phi(\tilde{F}_2)$ ve $\Phi[\tilde{F}_1, \tilde{F}_2] = [\Phi(\tilde{F}_1), \Phi(\tilde{F}_2)]$ olduğunu göstereceğiz. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 \Phi(\alpha\tilde{F}_1 + \beta\tilde{F}_2) &= \Phi\left(\alpha\tilde{F}_1 + \beta\tilde{F}_2\right) \\
 &= ((\alpha F_1 + \beta F_2)(e), d(\alpha F_1 + \beta F_2)_e) \\
 &= (\alpha F_1(e) + \beta F_2(e), -\alpha d(F_1)_e - \beta d(F_2)_e) \\
 &= (\alpha F_1(e), -\alpha d(F_1)_e) + (\beta F_2(e), -\beta d(F_2)_e) \\
 &= \alpha(F_1(e), -d(F_1)_e) + \beta(F_2(e), -d(F_2)_e) \\
 &= \alpha\Phi(\tilde{F}_1) + \beta\Phi(\tilde{F}_2)
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

ve yarı-direk çarpımın tanımından

$$\begin{aligned}
 [\Phi(\tilde{F}_1), \Phi(\tilde{F}_2)] &= [(F_1(e), -d(F_1)_e), (F_2(e), -d(F_2)_e)] \\
 &= ([F_1(e), F_2(e)] - d(F_1)_e(F_2(e)) + (d(F_2)_e(F_1(e))), [-d(F_1)_e, -d(F_2)_e])
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

elde edilir. $\Phi_j = -(dF_j)_e$ ve $E_j = F_j(e)$ $j = 1, 2$ olsun. O takdirde,

$$[\Phi(\tilde{F}_1), \Phi(\tilde{F}_2)] = ([E_1, E_2] + \Phi_1(E_2) - \Phi_2(E_1), [\Phi_1, \Phi_2]) \tag{4.72}$$

olur. $F(x)$, (4.65) deki gibi tanımlansın. Yardımcı Teorem 4.1.15 den

$$\Phi([\tilde{F}_1, \tilde{F}_2]) = \Phi(\tilde{F}) = (F(e), -dF_e) \tag{4.73}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
 F(e) &= -[F_1(e), F_2(e)] + F_1(e)(F_2) - F_2(e)(F_1) + [F_1(e), F_2(e)] - [F_2(e), F_1(e)] \\
 &= F_1(e)(F_2) - F_2(e)(F_1) - [F_2(e), F_1(e)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (dF_2)_e(F_1(e)) - (dF_1)_e(F_2(e)) + [F_1(e), F_2(e)] \\
&= -\Phi_2(E_1) + \Phi_1(E_2) + [E_1, E_2]
\end{aligned} \tag{4.74}$$

ve

$$\begin{aligned}
dF_e(Y) &= -[(dF_1)_e(Y), F_2(e)] - [F_1(e), (dF_2)_e(Y)] + (dF_1)_e(Y)(F_2) \\
&\quad - (dF_2)_e(Y)(F_1) + [(dF_1)_e(Y), F_2(e)] - [(dF_2)_e(Y), F_1(e)] \\
&= (dF_1)_e(Y)(F_2) - (dF_2)_e(Y)(F_1) \\
&= (dF_2)_e(dF_1)_e(Y) - (dF_1)_e(dF_2)_e(Y) \\
&= -[(dF_1)_e, (dF_2)_e](Y) \\
&= -[\Phi_1, \Phi_2](Y)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

dir. Böylece

$$\Phi([\tilde{F}_1, \tilde{F}_2]) = (F(e), -dF_e) = ([E_1, E_2] + \Phi_1(E_2) - \Phi_2(E_1), [\Phi_1, \Phi_2]) \tag{4.76}$$

olup, bu da (4.72) ile birlikte (i) yi ispatlar.

(ii) $\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\tilde{F}_2) \Rightarrow \tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\tilde{F}_2) &\Rightarrow (F_1(e), -(dF_1)_e) = (F_2(e), -(dF_2)_e) \\
&\Rightarrow F_1(e) = F_2(e) \text{ ve } (dF_1)_e = (dF_2)_e
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Sonuç 4.1.7 den $\tilde{F}_1, (F_1(e), (dF_1)_e)$ ikilisi ve $\tilde{F}_2, (F_2(e), (dF_2)_e)$ ikilisiyle belirlendiğinden (4.77) bağıntıları ile birlikte $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$ elde edilir.

(iii) Her $(E, \Phi) \in L(G) \times \partial(L(G))$ için $(E, \Phi) = \Phi(\tilde{F})$ olacak şekilde bir $\tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ nin varlığını göstereceğiz. $(E, \Phi) \in L(G) \times \partial(L(G))$ olsun.

$$\psi(t) = (e^{-\text{ad}Y})X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (\Phi(Y) + [Y, E]) \tag{4.78}$$

şeklinde tanımlı bir $\psi: \mathbb{R} \rightarrow L(G)$ tasvirini gözönüne alalım. Bu takdirde $\psi(0) = X$ ve

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= (-\text{ad}Y e^{-\text{tad}Y})X + e^{-\text{tad}Y} (\Phi(Y) + [Y, E]) \\
&= (-\text{ad}Y e^{-\text{tad}Y})X + \text{ad}Y (\text{ad}^{-1}Y (e^{-\text{tad}Y} (\Phi(Y) + [Y, E]))) \\
&\quad + \text{ad}Y (\text{ad}^{-1}Y (\Phi(Y) + [Y, E])) - \text{ad}Y (\text{ad}^{-1}Y (\Phi(Y) + [Y, E])) \\
&= \text{ad}Y (-e^{-\text{tad}Y}X + (\text{ad}^{-1}Y (e^{-\text{tad}Y} (\Phi(Y) + [Y, E]))) \\
&\quad + \text{ad}Y (\text{ad}^{-1}Y (\Phi(Y) + [Y, E])) + \text{ad}Y (-\text{ad}^{-1}Y (\Phi(Y) + [Y, E])) \\
&= \left[Y, -e^{-\text{tad}Y}X + \frac{e^{-\text{tad}Y}}{\text{ad}Y} (\Phi(Y) + [Y, E]) \right] + \left[Y, \frac{\Phi(Y) + [Y, E]}{\text{ad}Y} \right] + \left[Y, -\frac{\Phi(Y) + [Y, E]}{\text{ad}Y} \right] \\
&= \left[Y, -e^{-\text{tad}Y}X + \left(\frac{e^{-\text{tad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) (\Phi(Y) + [Y, E]) \right] + \left[Y, \frac{\Phi(Y) + [Y, E]}{\text{ad}Y} \right] \\
&= \left[Y, -e^{-\text{tad}Y}X + \left(\frac{e^{-\text{tad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) (\Phi(Y) + [Y, E]) \right] + \text{ad}Y (\text{ad}^{-1}Y (\Phi(Y) + [Y, E])) \\
&= [Y, \psi(t)] + \Phi(Y) + (Y, E) \\
&= [Y, E - \psi(t)] + \Phi(Y)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

dir. Böylece $\psi'(0) = [Y, E - X] + \Phi(Y)$ bulunur.

$$D_Z = [Y, E - Z] + \Phi(Y) \text{ ya da } D. = [Y, E - .] + \Phi(Y) \tag{4.80}$$

şeklinde bir $D \in X(L(G))$ tanımlayalım. $\psi(t)$, $\psi(0) = X$ ve $\psi'(0) = D_X$ ile $X \in X(L(G))$ noktasından geçen $D \in X(G)$ nin integral eğrisidir. Eğer $\gamma(t): \mathbb{R} \rightarrow G \times L(G)$, $\gamma(t) = (x \exp(tY), \psi(t))$ şeklinde tanımlanırsa o zaman $\gamma(0) = (x, X)$ ve $\gamma'(t) = (\tilde{Y}_{x \exp(tY)}, \psi'(t))$ olup,

$$\gamma'(0) = (\tilde{Y}_x, D_x) = (\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \Phi(Y)) \tag{4.81}$$

bulunur. Böylece $\gamma(t), (x, X)$ noktasından geçen $(\tilde{Y}, D)_{(z, Z)} = (\tilde{Y}_z, D_z)$ şeklinde tanımlı

$(\tilde{Y}, D) \in X(G \times L(G))$ nin integral eğrisidir. Δ , Teorem 4.1.14 de tanımlandığı şekilde $G \times L(G)$ üzerinde bir involutiv dağılım ve $\iota: M_{(x,X)} \rightarrow G \times L(G)$, (x, X) noktasından geçen Δ nın maksimal bağlantılı bir integral altmanifoldu olsun. Burada ι bir kapsama tasviri olup, $\iota|_{M_{(x,X)}}$ özdeşliktir ve

$$d\iota|_{(x,X)}: T_{(x,X)}M_{(x,X)} \rightarrow T_{\iota(x,X)}(G \times L(G)) = T_{(x,X)}(G \times L(G)) \quad (4.82)$$

dir. $(M_{(x,X)}, \iota)$, $G \times L(G)$ üzerinde Δ nın bir integral altmanifoldu olduğundan

$$d\iota|_{(x,X)} T_{(x,X)}M_{(x,X)} = \Delta(\iota(x, X)) = \Delta(x, X) \quad (4.83)$$

elde edilir ($d\iota|_{(x,X)}$ bir izomorfizmdir). $(\tilde{Y}, D) \in \Delta$ ve $\gamma(t)$, (x, X) noktasından geçen $(\tilde{Y}, D) \in X(G \times L(G))$ nin bir integral eğrisi olduğundan her t için $\gamma(t) \in M_{(x,X)}$ dir. O halde her $Y \in L(G)$ için

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= (x \exp Y, \psi(1)) \\ &= \left(x \exp Y, \left(e^{-\text{ad}Y} \right) X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) \right) (\Phi(Y) + [Y, E]) \in M_{(x,X)} \end{aligned} \quad (4.84)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \pi_1: G \times L(G) &\rightarrow G \\ (x, X) &\mapsto x \end{aligned} \quad (4.85)$$

izdüşümünü gözönüne alalım ve $p = \pi_1 \circ \iota$ olsun:

$$\begin{array}{ccc} M_{(x,X)} & \xrightarrow{\iota} & G \times L(G) \\ p \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & G & \end{array} \quad (4.86)$$

Bu takdirde,

$$dp|_{(x,X)} (\tilde{Y}_x, D_x) = dp_{(x,X)} (\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \Phi(Y)) = \tilde{Y}_x \quad (4.87)$$

olup, özel olarak (e, E) noktası için

$$dp|_{(e,E)}(\tilde{Y}_e, D_E) = \tilde{Y}_e = Y \quad (4.88)$$

elde edilir, Bu da $p : M \rightarrow G$ nin bir düzenli tasvir olduğunu gösterir. Bu defa p nin bir örtü tasviri olduğunu ispatlayacağız. V ve $U \exp : V \rightarrow U$ bir difeomorfizm olacak şekilde sırasıyla $L(G)$ de 0 in ve G de e nin simetrik açık komşulukları olsun. Verilen bir $(x, X) \in M$ için $s : xU \rightarrow M$ tasviri

$$s(x \exp Y) = \left(x \exp Y, (e^{-\text{ad}Y})X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (\Phi(Y) + [Y, E]) \right) \in M_{(x,X)}, Y \in V \quad (4.89)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman s, xU üzerinde (x, X) den geçen $p : M \rightarrow G$ nin bir yerel kısmıdır. Burada $p(M) = G$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $x \in p(M)$ ise o zaman s tasviri, $xU \subset p(M)$ olduğunu gerektirir. Bu takdirde n üzerinden tümevarımla $U^n \subset p(M)$ olduğu sonucu çıkar. G bağlantılı olduğundan $p(M) = G$ bulunur.

Bir $x \in G$ için $p^{-1}(x) = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ve (x, X_α) dan geçen xU üzerindeki yerel kısım s_α olsun. O zaman

$$p^{-1}(xU) = \bigcup_{\alpha \in A} s_\alpha(xU) \quad (4.90)$$

dır. Gerçekten eğer $(x \exp Y, Z) \in M, Y \in V$ ise $(x \exp Y, Z)$ den geçen $(x \exp Y)U$ üzerinde tanımlanmış yerel kısım σ olsun. O zaman, eğer $(x, X_\alpha) = \sigma(x)$ ise $(x \exp Y, Z) = s_\alpha(x \exp Y)$ bulunur.

Öte yandan, eğer $\alpha \neq \beta$ ise o takdirde $s_\alpha(xU)$ ve $s_\beta(xU)$ ayrıktır. Gerçekten $s_\alpha(x \exp Y) = s_\beta(x \exp Z)$ ($Y, Z \in V$), $Y = Z$ ve $(e^{-\text{ad}Y})X_\alpha = (e^{-\text{ad}Y})X_\beta$ olduğunu gerektirir. Bu $X_\alpha \neq X_\beta$ olmasıyla çelişir. $p : s_\alpha(xU) \rightarrow xU$ bir difeomorfizm olduğundan, $p : M \rightarrow G$ bir örtü tasviridir.

G basit bağlantılı olduğundan $p : M \rightarrow G$ bir difeomorfizmdir.

$$\pi_2 : G \times L(G) \rightarrow L(G)$$

$$(x, Y) \mapsto Y \quad (4.91)$$

olsun. O zaman

$$\begin{array}{ccc}
 & p^{-1} & \\
 & \leftarrow & \\
 M_{(x,X)} & \xrightarrow{p} & G \\
 \pi_2 \searrow & & \swarrow \pi_2 \circ p^{-1} \\
 & L(G) &
 \end{array} \quad (4.92)$$

diyagramı elde edilir. $X = \pi_2(p^{-1}(x))$, $x \in G$ olsun. O takdirde

$$\begin{array}{ccc}
 & dp^{-1}|_x & \\
 & \leftarrow & \\
 T_{(x,X)}M_{(x,X)} & & T_x G \\
 d\pi_2|_{(x,X)} \searrow & & \swarrow d(\pi_2 \circ p^{-1})|_x = d\pi_2|_{(x,X)} dp^{-1}|_x \\
 & T_x L(G) &
 \end{array} \quad (4.93)$$

bulunur. Böylece

$$dp^{-1}|_x(\tilde{Y}_x) = (\tilde{Y}_x, D_x) = (\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \Phi(Y)) \quad (4.94)$$

elde edilir. $F = \pi_2 \circ p^{-1}$ olsun. O takdirde $F(x) = \pi_2(p^{-1}(x))$ olup, özel olarak $x = e$ alınırsa

$$F(e) = \pi_2(p^{-1}(e)) = \pi_2(e, E) = E \quad (4.95)$$

bulunur. Açıkça $F: G \rightarrow L(G)$ iyi tanımlıdır ve

$$\begin{aligned}
 dF_x(\tilde{Y}_x) &= d\pi_2|_{(x,X)} dp^{-1}|_x(\tilde{Y}_x) = d\pi_2|_{(x,X)}(\tilde{Y}_x, D_x) \\
 &= D_x = [Y, [E - X]] + \Phi(Y) = [Y, F(e) - F(x)] + \Phi(Y)
 \end{aligned} \quad (4.96)$$

olup,

$$dF_e(\tilde{Y}_e) = dF_e(Y) = [Y, 0] + \Phi(Y) = \Phi(Y) \Rightarrow dF_e = \Phi \quad (4.97)$$

elde edilir. $\lambda(t) = F(x \exp tY)$ olsun ve $\psi(t)$ yukarıdaki gibi tanımlansın. O takdirde

$$\psi(t) = (e^{-\text{tad}Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{tad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)]) \quad (4.98)$$

olup,

$$\lambda'(t) = [Y, F(e) - \lambda(t)] + \Phi(Y)$$

$$\psi'(t) = [Y, F(e) - \psi(t)] + \Phi(Y) \quad (4.99)$$

bulunur. $\lambda(0) = F(x) = \psi(0)$ olduğundan $\lambda(t) = \psi(t)$ olduğu sonucu çıkar. Böylece

$$F(x \exp Y) = (e^{-\text{ad}Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)]) \quad (4.100)$$

olup Teorem 4.1.5 den

$$\Phi(\tilde{F}) = (F(e), -dF_e) = (E, -\Phi) \in L(G) \times \partial(L(G)) \quad (4.101)$$

olacak şekilde $\tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ elde edilir.

Teorem 4.1.17: $\pi: G_1 \rightarrow G$, bağlantılı Lie gruplarının bir örtü homomorfizmi ve $K = \ker \pi$ olsun. O takdirde $\tilde{F}_1 \in \text{norm}_{X(G_1)}(L(G))$ bir $\tilde{F} \in X(G)$ ye ancak ve ancak her $k \in K$ için $F_1(k) = F_1(e)$ ise π -bağılıdır. Bu durumda $\tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ ve $\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\tilde{F})$ dir.

İspat: e ve e' sırasıyla G_1 ve G ye karşılık gelen birim elemanlar ve $x \in G_1$ olsun. Öncelikle $\tilde{F}_1 \in X(G_1)$ ve $\tilde{F} \in X(G)$ nin ancak ve ancak $F_1 = F \circ \pi$ ise π -bağlı olduğunu ispatlayacağız:

$$\tilde{F}_1 \sim_{\pi} \tilde{F} \Leftrightarrow F_1 = F \circ \pi \quad (4.102)$$

Tanım gereğince $\tilde{F}_1 \sim_{\pi} \tilde{F} \Leftrightarrow d\pi_x(\tilde{F}_1)_x = \tilde{F}_{\pi(x)}$ dir. Buradan

$$d\pi_x(\tilde{F}_1)_x = d\pi_x(dL_x|_e(F_1(x))) = (d\pi_x \circ dL_x|_e)(F_1(x)) \quad (4.103)$$

ve $\tilde{F}_{\pi(x)} = dL_{\pi(x)}|_{e'}(F(\pi_x))$ olup,

$$d\pi_x(\tilde{F}_1)_x = (d\pi_x \circ dL_x|_e)(F_1(x)) = dL_{\pi(x)}|_{e'}(F(\pi_x)) \quad (4.104)$$

elde edilir. $d\pi_x \circ dL_x|_e = d(\pi_x \circ L_x)|_e$ eşitliği kullanılarak

$$d(\pi_x \circ L_x)|_e(F_1(x)) = dL_{\pi(x)}|_{e'}(F(\pi(x))) \quad (4.105)$$

bulunur. Burada

$$\begin{array}{ccc}
T_e G_1 & \xrightarrow{d\pi_e} & T_e G \\
dL_x|_e \downarrow & & \downarrow dL_{\pi(x)}|_{e'} \\
T_x G_1 & \xrightarrow{d\pi_e} & T_{\pi(x)} G
\end{array} \tag{4.106}$$

diyagramını gözönüne alalım: Bu durumda

$$d(\pi_x \circ L_x)|_e (F_1(x))_e = dL_{\pi(x)}|_{e'} (d\pi_e F_1(x))_e = dL_{\pi(x)}|_{e'} (F_1(x))_{e'} \tag{4.107}$$

bulunur. Böylece (4.105) bağıntısından

$$dL_{\pi(x)}|_{e'} (F_1(x))_{e'} = dL_{\pi(x)}|_{e'} (F(\pi(x)))_{e'} \tag{4.108}$$

ve $dL_{\pi(x)}|_{e'}$ bir izomorfizm olduğundan her $x \in G$ için $F_1(x) = F(\pi(x))$ elde edilir. Yani $F_1 = F \circ \pi$ dir.

Bu defa her $k \in K$ için $F_1 = F \circ \pi \Leftrightarrow F_1(k) = F_1(e)$ olduğunu ispatlayacağız.

$(\Rightarrow)$: $k \in K$ olsun. O zaman $F_1(k) = F(\pi(k)) = F(e)$ olup k keyfi olduğundan

$$F_1(k) = F(e), \quad \forall k \in K \tag{4.109}$$

bulunur. Ayrıca $F_1(e) = F(\pi(e)) = F(e)$ olduğundan $\forall k \in K$ için $F_1(k) = F_1(e)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $k \in K$ ve $k \exp Y \in G_1$ için (4.17) den

$$\begin{aligned}
F_1(k \exp Y) &= (e^{-\text{ad}Y}) F_1(k) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F_1) + [Y, F_1(e)]) \\
&= (e^{-\text{ad}Y}) F_1(e) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F_1) + [Y, F_1(e)]) \\
&= F_1(\exp Y)
\end{aligned} \tag{4.110}$$

bulunur. Dolayısıyla $F_1(k)$ ve $F_1, e \in G_1$ in bir komşuluğunda çakışır ve her ikisi de analitik olup, her yerde çakışırlar. Böylece eğer $x, y \in G_1$ ve $\pi(x) = \pi(y)$ ise o zaman bir $k \in K$ için $y = kx$ dir. Bu durumda $F_1(y) = F_1(x)$ olur ve bu da $F_1 = F \circ \pi$ olacak şekilde $F \in C^\infty(G)$ nin varlığını gerektirir. Bu son iddia Teorem 4.1.5 den ya da aynı $X \in L(G)$ vasıtasıyla üretilmiş

$\tilde{X}_1 \in X(G_1)$ ve $\tilde{X} \in X(G)$ sol-invariant vektör alanlarının π -bağlı olduğu sonucundan çıkar.

G bağlantılı ve basit bağlantılı bir Lie grubu olsun. O takdirde $\delta(\varphi) = (d\varphi)_e$ şeklinde tanımlı $\delta: \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(L(G))$ tasviri bir üzerine izomorfizmdir. $\text{Aut}(L(G))$, $\text{GL}(L(G))$ nin kapalı bir altgrubu olduğundan kendisi $\text{GL}(L(G))$ nin bir tek topolojik altgrubu yapısına sahip olup Lie cebiri $\partial(L(G))$ dir. Böylece $\text{Aut}(G)$, δ yı ve Lie gruplarının izomorfizmlerini üreten bir tek Lie grubu yapısı kazanır. $\text{Aut}(G)$ nin Lie cebirini $(d\delta)_e$ vasıtasıyla $\partial(L(G))$ ile özdeşleyeceğiz ve karşılık gelen üstel tasviri de $\text{Exp}: \partial(L(G)) \rightarrow \text{Aut}(G)$ ile göstereceğiz. $\pi: G_1 \rightarrow G$ bağlantılı bir G Lie grubunun evrensel örtü homomorfizmi ve $K = \ker \pi$ olsun. O takdirde G nin tüm Lie otomorfizmlerinin $\text{Aut}(G)$ grubu $\{\varphi \in \text{Aut}(G_1): \varphi(K) \subset K\}$ ile özdeşlenebilir. Bu yolla $\text{Aut}(G)$, $\text{Aut}(G_1)$ in tek topolojik Lie altgrubu yapısıyla onu $\{\varphi \in \text{Aut}(G_1): \varphi(K) \subset K\}$ ya izomorf yapan bir Lie yapısı kazanır. $\text{Aut}(G)$ nin $\text{aut}(G)$ Lie cebirini $\partial(L(G))$ nin bir Lie altcebirini ile özdeşleyeceğiz ve karşılık gelen üstel tasviri de $\text{Exp}: \text{aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$ ile göstereceğiz. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} \text{aut}(G) & \rightarrow & \partial(L(G)) \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow e \\ \text{Aut}(G) & \leftarrow & \text{Aut}(L(G)) \end{array} \quad (4.111)$$

değişmeli diyagramı yazabiliriz. Burada e , $\partial(L(G))$ ve $\text{Aut}(L(G))$ arasındaki üstel tasviri göstermektedir. Herhangi $\Phi \in \text{aut}(G)$ ve $X \in L(G)$ için

$$(\delta \circ \text{Exp})\Phi = (e \circ (d\delta)_e)\Phi = e(\Phi) = e^\Phi \quad (4.112)$$

olup,

$$(\delta \circ \text{Exp})\Phi = (d\text{Exp}\Phi)_e = e^\Phi \quad (4.113)$$

elde edilir. Öte yandan $\text{Exp}\Phi \in \text{Aut}(G)$ ve $X \in L(G)$ için

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{(d\text{Exp}\Phi)_e} & L(G) \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xleftarrow{\text{Exp}\Phi} & G \end{array} \quad (4.114)$$

diyagramından

$$(\text{Exp}\Phi)(\exp X) = \exp\left((d\text{Exp}\Phi)_e X\right) = \exp\left(e^\Phi(X)\right) \quad (4.115)$$

bulunur.

Teorem 4.1.18: G nin $L(G)$ Lie cebiri ile bağlantılı bir Lie grubu olduğunu varsayalım. Eğer $X \in L(G)$ ve $\Phi \in \text{aut}(G)$ ise o zaman $\Phi(\tilde{X}) = (X, 0)$ ve $\Phi(\tilde{F}) = (0, -\Phi)$ olacak şekilde $\tilde{X}, \tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ vektör alanları vardır. O takdirde, her $x \in G$ ve $t \in \mathbb{R}$ için G nin difeomorfizmlerinin 1-parametrelili $\tilde{X}_t, \tilde{F}_t$ grupları

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t(x) &= x \exp tX \\ \tilde{F}_t(x) &= (\text{Exp}t\Phi)(x) \end{aligned} \quad (4.116)$$

şeklinde verilir.

İspat: $R_{\exp tX}$ ve $\text{Exp}t\Phi, G$ (ya da G_1) nin difeomorfizmlerinin 1-parametrelili grupları olduğundan onlarla birleşmiş vektör alanlarını hesaplamak yeterlidir. İlk önce $x(t) = x \exp tX$ alalım. O zaman $\dot{x}(0) = dL_x(X)$ dir. $X(x) = X$ sabit fonksiyonu (4.17) bağıntısını sağlar. Gerçekten

$$\begin{aligned} & e^{-\text{ad}Y}X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(Y(X) + [Y, X(e)]) \\ &= e^{-\text{ad}Y}X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(dX_e(Y) + \text{ad}Y(X)) \\ &= e^{-\text{ad}Y}X + \text{ad}^{-1}Y(\text{ad}Y(X) - e^{-\text{ad}Y}\text{ad}Y(X)) \\ &= e^{-\text{ad}Y}X + X - e^{-\text{ad}Y}X = X = X(x) \end{aligned} \quad (4.117)$$

bulunur. Böylece Teorem 4.1.5 den $X \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ olup,

$$\Phi(\tilde{X}) = (X(e), -dX_e) = (X, 0) \quad (4.118)$$

elde edilir. Buradan $\tilde{X}_x = dL_x(X)$ nin $\tilde{X}_e = X$ ve $\dot{x}(0) = \tilde{X}_x$ olacak şekilde sol-invariant vektör alanı olduğu sonucu çıkar. Bu da ilk iddiayı ispatlar.

$\text{Expt}\Phi$ ye karşılık gelen $\tilde{H}_1 \in X(G_1)$ ve $\tilde{H} \in X(G)$ vektör alanlarını gözönüne alalım. $x_1 \in G_1$ olsun ve $x_1 = \exp X$ için $x_1(t) = (\text{Expt}\Phi)(x_1)$ olduğunu düşünelim. O takdirde (4.115) bağıntısı kullanılarak:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (\text{Expt}\Phi)(x_1) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} ((\text{Expt}\Phi)(\exp X)) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \exp(e^{t\Phi}(X)) = d\exp_X(\Phi(X)) \\ &= (dL_{x_1})_e \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} \right) (\Phi(X)) \end{aligned} \quad (4.119)$$

elde edilir. Bu takdirde $\tilde{H}_1$ vektör alanına karşılık gelen $H_1 \in C^\infty(G_1)$ analitik fonksiyonu, $(\tilde{H}_1)_{x_1} = \dot{x}_1(0)$ ile

$$H_1(\exp X) = H_1(x_1) = \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} \right) (\Phi(X)), \quad X \in L(G) \quad (4.120)$$

bağıntısını sağlar.

$\tilde{F}_1 = \Phi^{-1}(0, -\phi)$ ye karşılık gelen F_1 analitik fonksiyonu (4.17) eşitliğini sağlar. Yani,

$$F_1(\exp X) = e^{-\text{ad}Y} F_1(e) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F_1) + [Y, F_1(e)]) \quad (4.121)$$

dir. Burada $F_1(e) = 0$ ve $(dF_1)_e = \phi$ dir. Çünkü

$$\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\Phi^{-1}(0, -\phi)) = (F_1(e), -(dF_1)_e) \Rightarrow (0, -\phi) = (F_1(e), -(dF_1)_e) \quad (4.122)$$

dir. Bu durumda F_1 aynı zamanda

$$F_1(\exp X) = \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} \right) ((dF_1)_e(X)) = \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} \right) (\phi(X)), \quad X \in L(G) \quad (4.123)$$

bağıntısını sağlar. Bu nedenle her $x_1 \in G$ için $F_1(x_1) = H(x_1)$ olup, bu da her $x_1 = \exp X \in G$ için $(\tilde{F}_1)_{x_1} = (\tilde{H}_1)_{x_1}$ olduğunu gerektirir. Oysa

$$d\pi_{x_1}(\tilde{F}_1)(x_1) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (\pi \circ \gamma)(t) \quad (4.124)$$

olup, burada $\gamma(0) = x_1$ ve $\dot{\gamma}(0) = (\tilde{F}_1)_{x_1}$ dir. Dolayısıyla $\gamma(t) = (\text{Expt}\phi)(x_1)$ dir. Böylece

$$d\pi_{x_1}(\tilde{F}_1)(x_1) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \pi(\text{Expt}\phi(x_1)) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (\text{Expt}\phi(\pi(x_1))) \quad (4.125)$$

bulunur. Teorem 4.1.17 den $\tilde{F}_1$ ya π -bağlı bir $\tilde{F} \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ vardır ve $\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\tilde{F}) = (0, -\phi)$ dir. Ayrıca (4.125) den $\text{Expt}\phi$ nin, $\tilde{F}$ ile birleşmiş G nin difeomorfizmlerinin 1-parametrelili grubu olduğu sonucu çıkar.

$\iota : \text{norm}_{X(G)}(L(G)) \rightarrow \text{norm}_{X(G_1)}(L(G))$ tasviri $\iota(\tilde{F}) = \tilde{F} \circ \pi$ şeklinde tanımlansın. O takdirde Teorem 4.1.16 dan ι nın Lie cebirlerinin bir birebir homomorfizmi olduğu ve

$$\begin{array}{ccc} \text{norm}_{X(G_1)}(L(G)) & \rightarrow & L(G) \otimes \partial(L(G)) \\ \iota \uparrow & & \uparrow \text{id} \\ \text{norm}_{X(G)}(L(G)) & \rightarrow & L(G) \otimes \partial(L(G)) \end{array} \quad (4.126)$$

diyagramının değişmeli olduğu sonucu çıkar.

Teorem 4.1.19: $\pi : G_1 \rightarrow G$ bağlantılı bir G Lie grubunun bir evrensel örtü homomorfizmi olsun. O takdirde $\Phi, \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ yi $L(G) \otimes \text{aut}(G)$ üzerine izomorfik olarak tasvir eder. Ayrıca eğer $i : L(G) \otimes \text{aut}(G) \rightarrow L(G) \otimes \partial(L(G))$ kapsama tasvirini gösterirse o zaman aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir:

$$\begin{array}{ccc} \text{norm}_{X(G_1)}(L(G)) & \rightarrow & L(G) \otimes \partial(L(G)) \\ \iota \uparrow & & \uparrow i \\ \text{norm}_{X(G)}(L(G)) & \rightarrow & L(G) \otimes \text{aut}(G) \end{array} \quad (4.127)$$

İspat: $\text{aut}(G) \cong \partial(L(G))$ olup, Teorem 4.1.16 dan $\text{norm}_{X(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \partial(L(G))$ bir birebir izomorfizmdir. Buradan, $\text{norm}_{X(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \text{aut}(G)$ de bir birebir izomorfizmdir. Böylece geriye sadece

$$\Phi(\text{norm}_{X(G)}(L(G))) \subset L(G) \otimes \text{aut}(G) \quad (4.128)$$

olduğunu göstermek kalıyor. Burada

$$\Phi\left(\text{norm}_{X(G)}(L(G))\right)=\{(X,\phi)\mid (X,\phi)=\Phi(\tilde{F}), \tilde{F}\in \text{norm}_{X(G)}(L(G))\} \quad (4.129)$$

dir. $\tilde{F}\in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ ve $\Phi(\tilde{F})=(E,\phi)$ olsun. $L(G)\otimes \text{aut}(G)\subset \Phi\left(\text{norm}_{X(G)}(L(G))\right)$ dir. Gerçekten, Teorem 4.1.18 den $(X,\phi)\in L(G)\otimes \text{aut}(G)$ iken $\Phi(\tilde{X})=(X,0)$ ve $\Phi(\tilde{S})=(0,-\phi)$ olacak şekilde $\tilde{X}, \tilde{S}\in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ vardır. Böylece

$$\Phi(\tilde{X}+\tilde{S})=\Phi(\tilde{X})+\Phi(\tilde{S})=(X,-\phi)\in \Phi\left(\text{norm}_{X(G)}(L(G))\right) \quad (4.130)$$

elde edilir. Yani $L(G)\otimes \text{aut}(G)\subset \Phi\left(\text{norm}_{X(G)}(L(G))\right)$ dir. Dolayısıyla $\Phi(\tilde{F})=(0,-\phi)$ olduğu kabul edilebilir. $\tilde{F}_1=\imath(\tilde{F})=\tilde{F}\circ\pi$ olsun. Yine Teorem 4.1.18 den, verilen bir $k\in K=\ker\pi$ için $x_1(t)=(\text{Expt}\phi)(k)$, k noktasından geçen $\tilde{F}_1$ in bir integral eğrisidir. Yani,

$$\Phi(\tilde{F}_1)=\Phi(\imath(\tilde{F}))=\text{id}(\Phi(\tilde{F}))=\Phi(\tilde{F})=(0,\phi) \quad (4.131)$$

dir. Oysa $(\tilde{F}_1)_k=(dL_k)_e F_1(k)=(dL_k)_e F_1(e)=0$ dir. Bu nedenle her $t\in \mathbb{R}$ için $x_1(t)=k$ dir.

$$e=\pi(x_1(t))=\pi((\text{Expt}\phi)(k)), \quad \forall t\in \mathbb{R} \quad (4.132)$$

olup bu durumda, her $t\in \mathbb{R}$ için $(\text{Expt}\phi)(k)\in K$, yani $\text{Exp}(t\phi)\in \text{Aut}(G)$ dir. Bu takdirde $\phi\in \text{aut}(G)$ dir. Böylece $\Phi(\tilde{F})=(0,\phi)$ bulunur.

4.2 Homomorfizmler, Otomorfizmler ve Türevler

Tanım 4.2.1: G ve H iki Lie grubu olmak üzere $\theta:G\rightarrow H$ tasvirine, eğer θ, C^∞ ve her $a,b\in G$ için $\theta(ab)=\theta(a)\cdot\theta(b)$ ise bir Lie grubu homomorfizmi adı verilir. G ve H nın Lie cebirlerini sırasıyla $L(G)$ ve $L(H)$ ile gösterelim. Bu takdirde θ homomorfizmi $L(G)$ den $L(H)$ ye bir $C^\infty X_t$ eğrisi için

$$X=\left(\frac{d}{dt}X_t\right)_{t=0}\in L(G)\Rightarrow d\theta X=\left(\frac{d}{dt}d\theta X_t\right)_{t=0}\in L(H) \quad (4.133)$$

olacak şekilde bir $d\theta$ lineer tasvirini üretir. $d\theta$ lineer tasvirine, $d\theta[X,Y]=[d\theta X, d\theta Y]$ ile

birlikte bir Lie cebiri homomorfizmi denir. Lie grupları ve Lie cebirleri üzerinde izomorfizm ve otomorfizm kavramları bilinen yollarla elde edilir.

Tanım 4.2.2: Bir $\theta_t \in \text{Aut}L(G)$ eğrisi için $\theta_0 = e$ olacak şekilde eğer

$$\Omega = \left(\frac{d}{dt} \theta_t \right)_{t=0} \quad (4.134)$$

ise Ω ya $L(G)$ nin bir sonsuz küçük otomorfizmi denir.

Bu tanımla $\theta_t[X, Y] = [\theta_t X, \theta_t Y]$ yazılır. Böylece $t=0$ da diferansiyel alınarak $\Omega[X, Y] = [\Omega X, Y] + [X, \Omega Y]$ elde edilir. Açıkça Ω lineerdir.

Tanım 4.2.3: Bir $\Omega : L(G) \rightarrow L(G)$ lineer tasvirine, eğer

$$\Omega[X, Y] = [\Omega X, Y] + [X, \Omega Y] \quad (4.135)$$

ise $L(G)$ nin bir türevi adı verilir.

Önerme 4.2.4: Bir $L(G)$ Lie cebirinin türev ve sonsuz küçük otomorfizm kavramları çıkarılır. Eğer Ω bir türev ise, o zaman $\exp \Omega$ bir otomorfizmdir.

İspat: Ω , $L(G)$ nin bir türevi olsun. $Z_t = [(\exp t\Omega)X, (\exp t\Omega)Y]$ alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_t &= [\Omega(\exp t\Omega)X, (\exp t\Omega)Y] + [(\exp t\Omega)X, \Omega(\exp t\Omega)Y] \\ &= \Omega[(\exp t\Omega)X, (\exp t\Omega)Y] \\ &= \Omega Z_t \end{aligned} \quad (4.136)$$

elde edilir.

$$\frac{d}{dt} Z_t = \Omega Z_t, \quad Z_0 = [X, Y] \quad (4.137)$$

diferansiyel denklemi

$$Z_t = (\exp t\Omega)[X, Y] \quad (4.138)$$

tek çözümünü kabul eder. Bu da $\exp t\Omega \in \text{Aut}L(G)$ olduğunu ispatlar.

$$\left(\frac{d}{dt} \exp t\Omega \right)_{t=0} = \Omega \quad (4.139)$$

olduğundan, Ω bir sonsuz küçük otomorfizmdir.

Önerme 4.2.5: Bir $L(G)$ Lie cebirinin türevleri lineer bir Lie cebiri oluşturur.

İspat: Bu türevlerin lineer bir uzay oluşturdıkları açıktır. Ω_1, Ω_2 , $L(G)$ nin iki türevi olsun.

Bu takdirde

$$\Omega_1 \Omega_2 [X, Y] = [\Omega_1 \Omega_2 X, Y] + [\Omega_1 X, \Omega_2 Y] + [\Omega_2 X, \Omega_1 Y] + [X, \Omega_1 \Omega_2 Y] \quad (4.140)$$

olup

$$\begin{aligned} [\Omega_1, \Omega_2][X, Y] &= \Omega_1 \Omega_2 [X, Y] - \Omega_2 \Omega_1 [X, Y] \\ &= [(\Omega_1 \Omega_2 - \Omega_2 \Omega_1) X, Y] + [X, (\Omega_1 \Omega_2 - \Omega_2 \Omega_1) Y] \\ &= [[\Omega_1, \Omega_2] X, Y] + [X, [\Omega_1, \Omega_2] Y] \end{aligned} \quad (4.141)$$

elde edilir. Bu da $[\Omega_1, \Omega_2]$ nin yine $L(G)$ nin bir türevi olduğunu ispatlar.

4.3 Kompakt, Bağlantılı, Abelian Olmayan Bir Lie Grubu Üzerinde Normalizörlü Linear Kontrol Sistemlerinin Kontrol Edilebilirliği

G kompakt, bağlantılı, Abelian olmayan bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri olsun.

$\Sigma = (G, D)$ sistemini gözönüne alalım. D dinamiği

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(x) \quad j = 1, \dots, k \text{ için } Y^j \in L(G) \quad (4.142)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin bir ailesinden oluşur. Burada $x \in G$, X ise G üzerindeki tüm düz vektör alanlarının $X(G)$ Lie cebiri içinde $L(G)$ Lie cebirinin normalizörünün bir elemanıdır. $L(G)$ Lie cebirini yine sol-invariant vektör alanlarının kümesi olarak alıyoruz. Kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerin U sınıfı tüm parçalı sabit $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ fonksiyonların kümesidir. D , Σ ile birleşmiş vektör alanlarının ailesidir. Yani

$$D = \left\{ X + \sum_{j=1}^k u_j Y^j \mid X \in \text{norm}_{X(G)}(L(G)), Y^j \in L(G) \text{ ve } u_j \in U \right\} \quad (4.143)$$

dır. X e G nin sonsuz küçük otomorfizmi diyeceğiz. X vasıtasıyla üretilmiş $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ akışı $\text{Aut}(G)$ nin 1-parametrelili bir alt grubudur.

Σ sisteminin D dinamiğinin elemanları G üzerindeki global difeomorfizmlerin

$$G_\Sigma = \{\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_v}^v \mid \varphi^j \in D, t_j \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}\} \quad (4.144)$$

grubunu ve

$$S_\Sigma = \{\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_v}^v \mid \varphi^j \in D, t_j \geq 0, v \in \mathbb{N}\} \quad (4.145)$$

yarı grubunu üretir.

Tanım 4.3.1: $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sistemine

- a) eğer $\forall x \in G$ için $S_\Sigma(x) = G$ ise kontrol edilebilirdir,
- b) eğer $\forall x \in G$ için $G_\Sigma(x) = G$ ise geçişlidir denir.

Rank koşulunun sağlanması demek Σ nın geçişli olması demektir. Yani, G_Σ grubu G üzerinde geçişli olarak etkir.

Tanım 4.3.2: Bir w ölçümüne, G Lie grubu üzerinde integre edilebilir her f fonksiyonu için eğer

$$\int f(gh) w = \int f(h) w \quad (4.146)$$

ise sol-invarianttır denir. Burada $g, h \in G$ dir. Benzer şekilde w ölçümüne eğer

$$\int f(hg) w = \int f(h) w \quad (4.147)$$

ise sağ-invarianttır denir.

Herhangi bir yerel kompakt Lie grubu üzerinde Haar ölçüm olarak bilinen tek-terafli invariant ölçüm vardır ve eğer Lie grubu kompakt ise iki-terafli invariant ölçüm vardır.

Tanım 4.3.3: G bir Lie grubu olsun. G üzerindeki doğal ölçüm bir X vektör alanı ile birleşmiş dinamik sistemin etkisi altında invariant ise bu X vektör alanı bir konservativ vektör alanı adını alır.

Teorem 4.3.4: G kompakt, bağlantılı bir Lie grubu ve $\Sigma = (G, D)$ normalizörlü bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde D dinamiği ile birleşmiş vektör alanları konservativedir.

İspat: Σ normalizörlü bir lineer kontrol sistemi olduğundan, D dinamiği

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(x) \quad j = 1, 2, \dots, k \text{ için } Y^j \in L(G) \quad (4.148)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin bir ailesinden oluşur. Burada $X, L(G)$ nin $\text{norm}_{X(G)}(L(G))$ normalizörünün bir elemanıdır. Teorem 4.1.16 dan $X \in \text{norm}_{X(G)}(L(G))$ yerine $(W, Y^0) \in \partial(L(G)) \otimes L(G)$ elemanını alabiliriz. Bu durumda $u_j = 1$ sabit kontrolü için D dinamiği

$$D = \left\{ W + \sum_{j=0}^k Y^j \mid W \in \partial(L(G)), Y^j \in L(G) \right\} \quad (4.149)$$

formuna indirgenir. D nin sağ tarafının toplam kısmı sol-invaryant vektör alanlarından oluştuğundan, kendisi de sol-invaryanttır. G kompakt olduğundan, yukarıdaki açıklamadan dolayı bu toplam sol ölçüm invaryanttır. W , Tanım 4.2.3 ile verilen $L(G)$ den kendisi içine sol invaryantlığı koruyan bir lineer tasvir olduğundan, sol ölçüm invaryantlığı da korur. Böylece D dinamiği konservativ vektör alanlarından oluşur.

Teorem 4.3.5 (Poincare): Bir konservativ vektör alanı vasıtasıyla üretilmiş bir dinamik sistemin Poisson sabit noktaları yoğundur.

Bir x noktası, ancak ve ancak x in her N_x komşuluğu ve her pozitif t sayısı için $X_{t_1}(x)$ ve $X_{t_2}(x)$, N_x içinde olacak şekilde t den büyük t_1 ve t_2 varsa Poisson sabittir.

Teorem 4.3.6: G Abelian olmayan, bağlantılı, kompakt bir Lie grubu olmak üzere $\Sigma = (G, D)$ normalizörlü bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde Σ geçişlidir $\Leftrightarrow \Sigma$ kontrol edilebilirdir.

İspat: $(\Leftarrow)$ Σ kontrol edilebilir ise tanımdan dolayı sistemin geçişliliği aşıkardır.

$(\Rightarrow)$ $x, y \in G$ için

$$y = \phi_{t_p}^p \circ \dots \circ \phi_{t_j}^j \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(x) \quad (4.150)$$

olacak şekilde $i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{R}^+$ sayılarının var olduğunu göstereceğiz. Sistem geçişli ise G deki her x noktası için $S_\Sigma^+(x)$ pozitif yörüngesinin iç noktaları pozitif yörünge içinde yoğundur teoremi, eğer $S_\Sigma^+(x)$ $S_\Sigma^-(x)$ ile yer değiştirirse yine doğrudur. $\bar{y}$, $S_\Sigma^-(y)$ nin bir iç noktası ve $N_{\bar{y}} \subset S_\Sigma^-(y)$ olacak şekilde $\bar{y}$ nin bir komşuluğu olsun. Sistem geçişli olduğundan

$$\bar{y} = \varphi_{s_p}^p \circ \dots \circ \varphi_{s_j}^j \circ \dots \circ \varphi_{s_1}^1(x) \quad (4.151)$$

olacak şekilde $s_j \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$ vardır. Kolaylık sağlaması amacıyla

$$\bar{y} = \varphi_{s_2}^2 \circ \varphi_{s_1}^1(x) \quad (4.152)$$

olsun. Burada s_1 pozitif ve s_2 de negatiftir. $g = \varphi_{s_1}^1(x)$ olsun. O takdirde

$$N_g = \varphi_{-s_2}^2(N_{\bar{y}}) \quad (4.153)$$

kümesi g nin bir komşuluğudur ve $S_\Sigma^+(x)$ ile arakesiti boş değildir. Böylece N_g , φ^2 için Poisson sabit olan bir z noktası içerir. $N_z \subset N_g \cap S_\Sigma^+(x)$ olacak şekilde z nin bir komşuluğu olsun. Poisson sabit noktanın tanımından φ_s^2 noktası N_z ye ait olacak şekilde $|s_2|$ den daha büyük bir s reel sayısı vardır. O zaman

(i) $s + s_2$ sayısı pozitifdir,

(ii) $\varphi_{s+s_2}^2(z)$ noktası $N_{\bar{y}}$ ye aittir.

y noktası $S_\Sigma^-(y)$ de herhangi bir noktanın pozitif yörüngesi içindedir. Böylece y , $S_\Sigma^+ \varphi_{s+s_2}^2(z)$ ye aittir. Bu da teoremin gereklilik kısmını ispatlar.

Örnek 4.3.7: $\mathbb{R}^3$ üzerinde

$$SO(3) = \{A \in O(3) \mid \det A = 1\} \quad (4.154)$$

dönel Lie grubunu gözönüne alalım. Burada $O(3)$ her $x, y \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad (4.155)$$

olacak şekilde tüm $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tasvirlerinden oluşan ya da buna eşdeğer olarak

$$O(3) = \{A \in GL_3(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\} \quad (4.156)$$

şeklinde tanımlı ortogonal gruptur. $SO(3)$ de determinanı 1 olan

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \phi_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.157)$$

ortogonal dönüşümlerini gözönüne alalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için $SO(3)$ de bir nokta vardır ve o takdirde $\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)$

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad \dot{\phi}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Y^1 \in T_e(SO(3)) \\ \phi_2(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad \dot{\phi}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y^2 \in T_e(SO(3)) \\ \phi_3(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad \dot{\phi}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y^3 \in T_e(SO(3)) \end{aligned} \quad (4.158)$$

olacak şekilde $SO(3)$ üzerinde eğrilerdir. Burada

$$\begin{aligned} T_e(SO(3)) &\cong L(SO(3)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned} \quad (4.159)$$

olup,

$$[Y^1, Y^2] = -Y^3, [Y^1, Y^3] = Y^2 \text{ ve } [Y^2, Y^3] = -Y^1 \quad (4.160)$$

olduğundan

$$L(SO(3)) = \text{geren}_{L.A.} \{Y^1, Y^2\} = \text{geren}_{L.A.} \{Y^1, Y^3\} = \text{geren}_{L.A.} \{Y^2, Y^3\} \quad (4.161)$$

elde edilir.

$$\Sigma: \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X + u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad X \in \text{SO}(3) \quad (4.162)$$

şeklinde tanımlı Σ kontrol sistemini gözönüne alalım. Σ kompakt $\text{SO}(3)$ Lie grubu üzerinde bir önceki teoremin koşullarını sağlayan bir kontrol sistemidir. Bu durumda

$$S_{\Sigma}(\text{Id}) = G_{\Sigma}(\text{Id}) = \text{SO}(3) \quad (4.163)$$

olup, sistem kontrol edilebilirdir.

SONUÇLAR

Üç bölümden oluşan bu çalışmada ilk bölümde, manifoldlar, gruplar ve Lie grupları tanımlandıktan sonra onların üstel tasvir ve adjoint gösterilimine yer verilmiştir. İkinci bölümde, genel kontrol sistemleri ve kontrol edilebilirlik örneklerle incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise, Lie cebirinin normalizörü üzerinde durulmuştur. Sonuç olarak kompakt, bağlantılı bir Lie grubu üzerinde normalizörlü bir lineer kontrol sisteminin dinamiğinin konservativ vektör alanlarıyla üretildiği ve Lie grubu aynı zamanda Abelian olmayan ise normalizörlü lineer kontrol sisteminin geçişli olması için gerek ve yeter koşulun kontrol edilebilir olması gerektiği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Ayala, V., Tirao, J., (1994), "Controllability of Linear Vector Fields on Lie Groups", Preprint No IC/94/310, International Centre for Theoretical Physics.
- Beardon, A., (1985), "Geometry of Discrete Groups", Springer Verlag.
- Bonnard, B., Jurdjevic, V., Kupka, I., Sallet, G., (1982), "Controllabilite sur le Produit Semi-direct d'un Groupe Compact par un E.V. Reel", Trans. Am. Math. Soc.
- Brockett, R., (1972), "Systems Theory on Group Manifolds and Cosets Spaces", Siam Journal Control 10, pp. 265-284.
- Cohen, A., (1931), "An Introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups", G.E. Stechert and Co., New York.
- Collingwood, D., McGovern, W., (1993), "Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras", Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- Conlon, L., (1993), "Differentiable Manifolds: A first course", Birkhauser Pub.
- Hausner, M., Schwartz, J. T., (1968), "Lie Groups, Lie Algebras", New York, London, Paris.
- Helgason, S., (1962), "Differential Geometry and Symmetric Spaces", Academic Press.
- Humphreys, J., (1972), "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Springer Verlag, New York.
- Isidori, A., (1989), "Nonlinear Control Systems", Springer Verlag.
- Jacopson, N., (1962), "Lie Algebras", Interscience Publishers, New York.
- Jurdjevic, V., Kupka, I., (1981), "Control Systems on semi-simple Lie Groups and Their Homogeneous Spaces", Ann. Inst. Fourier, Grenoble 31, 4, pp. 151-179.
- Kalman, R., (1968), "Lectures on Controllability and Observability", Lecture Notes CIME.
- Kara, A., (1994), "A Controllability Theorem for Invariant Systems on Lie Groups", ICTP.
- Kupka, I., (1987), "Introduction to the Theory of Systems", 16 coloquio Brasileiro de Matematica.
- Markus, L., (1980), "Controllability of multi-trajectories on Lie Groups", Proceedings of Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, Lecture Notes in Mathematics 898, pp. 250-265.
- Mohler, (1973), "Bilinear Control Process", Mathematics in Science and Engineering, Vol. 106, Ac. Press New York and London.

Narendra, K., Kalman, R., Ho, Y., (1963), "Controllability of Linear Dynamical Systems", Contrib. to Diff. Equations 1 (2), pp. 189-213.

Nomizu, K., (1956), "Lie Groups and Differential Geometry", The Mathematical Society of Japan, Nagoya.

San Martin, L., Crouch, P., (1984), "Controllability on Principle Fibre Bundle with Compact Structure Group", Systems and Control Letters 5, pp. 35-40.

Sarychev, A. V., Agrachev, A. A., Gamkrelidze, R. V., (1989), "Local Invariants of Smooth Control Systems", Acta Applicandae Mathematicae 14, 191-237.

Spivak, M., (1965), "Calculus on Manifolds", The Benjamin Cummings Pub. Com.

Sussmann, H., Jurdevic, V., (1972), "Control Systems on Lie Groups", Journal of Differential Equations 12, pp. 313-329.

Varadarajan, V., (1974), "Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations", Prentice Hall, Inc.

Warner, F., W., (1971), "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups", Scott Foresman and Company, Glenview Illinois.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Hatice Handan Kurhan	
Doğum tarihi	01.01.1976	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1991-1994	İstek Özel Bilge Kağan Lisesi
Lisans	1994-2000	Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2002-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Yabancı dil	İngilizce	

Çalıştığı kurumlar

2001-2004	Zeytinburnu Tekstil Meslek Lisesi
2004-Devam ediyor	Kadriye Moroğlu Lisesi