

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME

Matematikçi Neslihan ÇİTLİ

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU (Y.T.Ü.)

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
2. BULANIK MATEMATİK	3
2.1 Bulanık Mantık	3
2.2 Bulanık Sayılar	4
2.2.1 Üçgensel Bulanık Sayılar	4
2.2.2 Yamuksal Bulanık Sayılar	5
2.3 Bulanık Sayılarda İşlemler	6
2.3.1 Bulanık Sayılarda Yaklaşık İşlemler	6
2.3.1.1 Üçgensel Bulanık Sayılarda Yaklaşık Aritmetik İşlemler	6
2.3.1.1.1 Eşitlik	6
2.3.1.1.2 Toplama İşlemi	7
2.3.1.1.3 Çıkarma İşlemi	7
2.3.1.1.4 Üçgensel Bulanık Sayının Simetriği	7
2.3.1.1.5 Çarpma İşlemi	7
2.3.1.1.6 Bölme İşlemi	7
2.3.1.2 Üçgensel Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemlerin Özellikleri	7
2.3.1.3 Yamuksal Bulanık Sayılarda Yaklaşık Aritmetik İşlemler	7
2.3.1.3.1 Eşitlik	8
2.3.1.3.2 Toplama İşlemi	8
2.3.1.3.3 Çıkarma İşlemi	8
2.3.1.3.4 Yamuksal Bulanık Sayının Simetriği	8
2.3.1.3.5 Çarpma İşlemi	8
2.3.1.3.6 Bölme İşlemi	8
2.3.1.4 Yamuksal Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemlerin Özellikleri	9
2.3.2 Bulanık Sayılarda Güven Aralıkları İle Aritmetik İşlemler	9
2.3.2.1 Toplama İşlemi	10
2.3.2.2 Çıkarma İşlemi	12
2.3.2.3 Çarpma İşlemi	13

2.3.2.4	Bölme İşlemi.....	14
2.3.3	Bulanık Sayılarda Üyelik Fonksiyonları İle Yapılan Aritmetik İşlemler.....	15
2.3.3.1	Toplama İşlemi	15
2.3.3.2	Çıkarma İşlemi	15
2.3.3.3	Çarpma İşlemi.....	15
2.3.3.4	Bölme İşlemi.....	15
2.3.4	Yaklaşık ve Güven Aralıkları ile Yapılan Aritmetik İşlemlerin Karşılaştırılması	16
2.3.4.1	Çarpma İşlemi.....	16
2.3.4.2	Bölme İşlemi.....	19
2.4	Bulanık Kümeler.....	21
2.5	Bulanık Kümeler İle İlgili Temel Kavramlar	23
2.5.1	Bulanık Kümenin Desteği (support).....	23
2.5.2	Bulanık Kümenin α -keseni	23
2.5.3	Bulanık Kümenin Konveksliği	24
2.5.4	Bulanık Kümenin Yüksekliği	24
2.5.5	Bulanık Kümenin Normallliği	25
2.5.6	Bulanık Kümenin Kardinalitesi	25
2.6	Bulanık Kümelerin Özellikleri	26
2.7	Bulanık Kümeler İçin Temel Küme İşlemleri	26
2.7.1	İki Bulanık Kümenin Kesişimi	26
2.7.2	İki Bulanık Kümenin Birleşimi	27
2.7.3	Bulanık Kümenin Tümlenyeni	29
2.7.4	Genişleme Prensipli (Extension Principle).....	30
3.	BULANIK KARAR VERME	33
3.1	Bulanık Kararlar	33
3.2	Bulanık Lineer Programlama.....	36
3.2.1	Hedef ve Kısıtlarda Bulanıklık Olması Hali.....	37
3.2.2	Kesin Amaç Fonksiyonu ve Kısıtlarda Bulanıklık Olması Hali.....	42
3.3	Bulanık Çok Kriterli Karar Verme (BÇKKV).....	49
3.3.1	Çok Amaçlı Karar Verme (ÇAKV).....	50
3.3.2	Çok Nitelikli Karar Verme (ÇNKKV)	55
3.3.2.1	Topsis Metodu	57
3.3.2.2	Bulanık Topsis	58
3.3.2.3	Analitik Hiyerarşi Prosesi'ne Genel Bakış (AHP)	66
3.3.2.3.1	AHP' nin Temel Adımları	67
3.3.2.3.2	Basit Ağırlıklı Toplam Metodu (Simple Additive Weighting Method):.....	70
3.3.2.4	Satty'nin AHP Yaklaşımı	71
3.3.2.4.1	Özvektör Metodu:.....	71
3.3.2.5	Bulanık Analitik Hiyerarşi Prosesi	76
3.3.2.5.1	Laarhoven ve Pedrycz Yaklaşımı	77
3.3.2.5.2	Buckley Yaklaşımı	77
3.3.2.5.3	Bulanık AHP'de Derece Analiz Yöntemi	78
4.	CATERING ŞİRKETİ SEÇİMİNE BİR UYGULAMA.....	82
5.	SONUÇ.....	94
	KAYNAKLAR.....	96

EK.....	98
Ek 1 Catering Şirketleri Müşterileri İle Yapılan Anket.....	98
ÖZGEÇMİŞ.....	102

SİMGE LİSTESİ

$\tilde{A}$	Bulanık bir küme
$\tilde{A}_\alpha$	$\tilde{A}$ bulanık kümesinin α -seviyesindeki güven aralığı
$\tilde{A}'_\alpha$	$\tilde{A}$ bulanık kümesinin kuvvetli α -seviye kümesi
A^*	Bulanık pozitif ideal çözüm
A^-	Bulanık negatif ideal çözüm
C_j	Karar kriterleri
d_i^*	Bulanık pozitif ideal çözüme uzaklık
d_i^-	Bulanık negatif ideal çözüme uzaklık
p	Hedefte negatif yönde sapma
p_i	Amaç fonksiyonu ve kısıtların sapma (bozulma) miktarları
q_i	Amaç fonksiyonu ve kısıtların sapma (bozulma) miktarları
q	Hedefte pozitif yönde sapma
U_i	A_i alternatifinin faydası
w_j	C_j kriterinin göreceli önemi (ağırlığı)
x_{ij}	Bir karar matrisinde A_i alternatifinin C_j kriterine göre performans puanı
z	Amaç fonksiyonu
α_l^*	Soldan maksimum sapma
α_r^*	Sağdan maksimum sapma
ε_{l_α}	Soldan sapma
ε_l^*	Soldan maksimum sapma
ε_{r_α}	Sağdan sapma
ε_r^*	Sağdan maksimum sapma
μ	Üyelik fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

AHP	Analitik Hiyerarşi Prosesi
CI	Tutarlılık İndeksi (Consistency Index)
CR	Tutarlılık Oranı (Consistency Ratio)
ÇKKV	Çok Kriterli Karar Verme
ÇNKV	Çok Nitelikli Karar Verme
ÇAKV	Çok Amaçlı Karar Verme
LP	Lineer Programlama
RI	Rastsal İndeks
TOPSIS	(Technique for Order Performance by Similarity to Ideal Solution) Performans Sırası İçin İdeal Çözüme Benzerlik Tekniği

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Üçgensel bulanık sayı.....	5
Şekil 2.2 Yamuksal bulanık sayı.	6
Şekil 2.3 Üçgensel bulanık sayıda güven aralığı.....	9
Şekil 2.4 Yamuksal bulanık sayıda güven aralığı.....	10
Şekil 2.5 Yamuksal bulanık sayıda güven aralığı.....	12
Şekil 2.6 Güven aralıkları cinsinden çarpım.	14
Şekil 2.7 Güven aralıkları cinsinden bölüm.	15
Şekil 2.8 İki üçgensel bulanık sayının çarpımı için sağdan ve soldan sapma.	19
Şekil 2.9 Konveks ve konveks olmayan küme.	24
Şekil 2.10 İki bulanık kümenin kesişimi.	27
Şekil 2.11 İki bulanık kümenin birleşimi.	27
Şekil 2.12 $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin kesişimi.	29
Şekil 2.13 Genişleme Prensibi.....	31
Şekil 2.14 Örnek için genişleme prensibi.....	32
Şekil 3.1 Bulanık karar	34
Şekil 3.2 Amaç fonksiyonu veya kısıtta $\leq$ olması halinde üyelik fonksiyon grafiği.....	39
Şekil 3.3 Amaç fonksiyonu veya kısıtta $\geq$ olması halinde üyelik fonksiyon grafiği.....	41
Şekil 3.4 Amaç fonksiyonu veya kısıtta $\cong$ olması halinde üyelik fonksiyon grafiği	42
Şekil 3.5 $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0$ seviyelerine karşılık gelen uygun bölgeler R_1 ve R_0	48
Şekil 3.6 Çözüm uzayı.....	53
Şekil 3.7 Hiyerarşik yapı	63
Şekil 3.8 Hiyerarşik yapı.	68
Şekil 3.9 M_1 ve M_2 'nin kesişimi	80
Şekil 4.1 Problemin hiyerarşik yapısı.....	83

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 3.1 Her bir kriterin önem ağırlığı için dilsel değişkenler	58
Çizelge 3.2 Ratingler için dilsel değişkenler	59
Çizelge 3.3 Kriterlerin önem ağırlıkları	62
Çizelge 3.4 Bütün kriterlere göre karar vericiler tarafından verilen üç adayın ratingleri	63
Çizelge 3.5 Üç alternatifin bulanık ağırlıkları ve bulanık karar matrisi	64
Çizelge 3.6 Normalleştirilmiş bulanık karar matrisi	64
Çizelge 3.7 Normalleştirilmiş bulanık ağırlıklı karar matrisi	64
Çizelge 3.8 Uzaklık ölçümü	65
Çizelge 3.9 1-9 görelî önceliklendirme ölçeği	68
Çizelge 4.1 Dilsel değişkenler ve bulanık karşılıkları	83
Çizelge 4.2 Hedefe göre bulanık değerlendirme matrisi (nitelikler arası ikili karşılaştırma matrisi)	84
Çizelge 4.3 Hijyen niteliğine göre alt niteliklerin ikili karşılaştırma matrisi	86
Çizelge 4.4 Yemek kalitesi niteliğine göre alt niteliklerin ikili karşılaştırma matrisi	88
Çizelge 4.5 Servis kalitesi niteliğine göre alt niteliklerin ikili karşılaştırma matrisi	88
Çizelge 4.6 Yemeğin temizliği alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	88
Çizelge 4.7 Servis personelinin temizliği alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	89
Çizelge 4.8 Servis araçlarının temizliği alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	89
Çizelge 4.9 Yemeklerin çeşitliliği alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	89
Çizelge 4.10 Gün içindeki tamamlayıcı yemekler alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	90
Çizelge 4.11 Yemeğin kalorisi alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	90
Çizelge 4.12 Yemeğin lezzeti alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	90
Çizelge 4.13 Servis personelinin davranışı alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	90
Çizelge 4.14 Servis süresi alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	91
Çizelge 4.15 Telefonda iletişim alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi ...	91
Çizelge 4.16 Problem çözme becerisi alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi	91
Çizelge 4.17 Öncelik ağırlıklarının birleşimi	92

ÖNSÖZ

Karar verme günlük hayatımızın bir parçasıdır. İnsanın yaşamına başlamasıyla ortaya çıkan bu olgu, bütün ömrü boyunca çok çeşitli şekillerde ve ortamlarda devam eder. Aynı şekilde aileler, şirketler, endüstri, hükümet ve benzeri kurumlar çeşitli ortamlarda zincirleme karar verme olgusunu daimi yaşarlar.

Karar verme, hedef ve amaçların gerçekleştirilmesi yönünde bütün alternatiflerden bir mümkün hareket tarzı seçme yöntemidir. Temel kaygı, yaklaşık olarak bütün karar problemlerinin genellikle zıtlaşan çok kriterlere sahip olmalarıdır.

Karar verici, çevrenin, sürecin ve kaynakların oluşturduğu kısıtları tatmin eden bir çözüme ulaşmada birden fazla kriteri göz önünde bulundurma durumundadır.

Bir sistemdeki karmaşıklık arttıkça, sistemi betimleyen ifadelerin anlamı azalmakta ve anlamlı ifadeler de belirsizliğe doğru gitmektedir. Bir kavramı, bir amacı ve bir sistemi tanımlayan ifadelerdeki belirsizliğe veya kesin olmama haline bulanıklık denir. İnsanların düşünce biçimindeki algılama farklılıkları, onların subjektif davranışları ve hedeflerindeki belirsizlikler bulanıklık olgusu ile açıklanabilir.

Kantitatif olarak bulunabilen değerler ile kalitatif verilerin etkin olarak bir arada değerlendirilip sağlıklı bir sonuç alınamaması durumu son senelerde derin bir araştırma alanı oluşturan çok nitelikli karar verme tekniklerinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu teknikler sayesinde karar verici, sayısal olarak ifade edilebilen objektif ölçütler ile sayısal olarak ifade edilemeyen subjektif ölçütleri bir arada değerlendirme ve birçok alternatif içerisinde seçim yapabilme fırsatına sahip olur.

Bu çalışmada, yukarıda anlatılanlar çerçevesinde subjektif yargılarla değerlendirilebilen problemlerde karar vermeye bir uygulama olarak en iyi catering şirketi seçimi problemi ele alınmıştır.

Bulanık Çok Kriterli Karar Vermede, kriterler arasında çelişki olması ve birbirini iyileştirmek için bir başkasından fedakarlık edilecek olmasından dolayı en iyi alternatifin seçimi zordur. Bu kriterler arasında uzlaşma sağlamak ve alternatifler arasından en uygun olanını seçmek için geliştirilen çeşitli yöntemlerden Bulanık AHP modelinin kullanılması uygun bulunmuştur. Öncelikle literatürde yer alan diğer bulanık AHP modellerinden bazıları genel hatları ile anlatılmıştır. Uygulama problemi, Chang'ın Sentetik Derece Değeri Hesaplama yöntemi ile çözülmüştür.

Tezimin hazırlanması aşamasında bana destek veren, bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU'na, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ'ye ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Sevgili Ailem'e, hem elverişli ortamın hazırlanmasından dolayı hem de hiçbir zaman esirgemedikleri maddi ve manevi desteklerinden ötürü teşekkür ederim.

Ve son olarak, çalışmalarım boyunca desteği ile bana güç veren ve her zaman yanımda olan Sevgili Mustafa ÜNLÜ'ye teşekkür ederim.

Neslihan ÇİTLİ

ÖZET

“Bulanık Çok Kriterli Karar Verme” isimli bu çalışmada çeşitli kurum ve kişilerin bulanıklık altında birden çok kritere göre değerlendirme yapmasının gerekli olduğu durumlarda en iyi karara ulaşılması için geliştirilen bulanık çok kriterli karar verme yöntemleri incelenmiştir.

Bu doğrultuda, bulanık bir çerçevede kullanılmak üzere geliştirilen Analitik Hiyerarşi Prosesi’nin birer genişlemesi olan yaklaşımlardan Laarhoven ve Pedrycz[1983] ve Buckley[1985] metodları genel hatlarıyla, Chang [1996]’in metodu ise ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Gerçek dünyanın bulanık olan yapısını modelleyebilen ve kullanıcı ile etkileşimli olarak çalışan, onun tercihleri doğrultusunda amaçları önceliklendiren ve çözüm aşamasında da bu etkileşimi sürdürerek en iyi çözüme ulaşmayı amaç edinen, hem bulanıklığı hem de çok amaçlılığı içeren bulanık AHP yaklaşımı ile catering şirketi seçimi için bir uygulama yapılmıştır.

İlk olarak 1981 yılında Hwang ve Yoon tarafından geliştirilen pozitif ideal çözüm ve negatif ideal çözüm kavramlarına dayanan Topsis yöntemi ve bu yöntemin Chen tarafından bulanık bir çerçeveye genişletildiği Bulanık Topsis metodu bir örnek ile birlikte incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Karar verme, Bulanık mantık, Bulanık çok kriterli karar verme.

ABSTRACT

In the frame of this study called “Fuzzy Multi Criteria Decision Making”, fuzzy multi criteria decision making methods, which are developed to reach the best decision in the situations that is necessary for many institution and people to evaluate with respect to more than one criteria under fuzziness, have been examined.

In this direction, the approaches Laarhoven and Pedrycz [1983], Buckley [1985] and Chang [1996] which have developed in order to be use in fuzzy environment and each one extensions of AHP have been examined with main characteristics. By means of fuzzy AHP approach, which is able to model the fuzzy structure of the real world as closely as possible and running interactively, giving weights to objectives through preemptions of user and going on interacting in solution phase to find the best solution in the fuzzy environment, including both fuzziness and multi-objectiveness, an application is done to select the best catering firm providing the most customer satisfaction.

The Topsis method was first proposed by Hwang and Yoon (1981) and bases upon the concept that the chosen alternative should have the shortest distance from the positive ideal solution and the farthest from the negative ideal solution and Fuzzy Topsis was extended to the fuzzy environment have been examined.

Keywords : Decision Making, Fuzzy Logic, Fuzzy Multi Criteria Decision Making Methods.

1. GİRİŞ

“Bulanık Çok Kriterli Karar Verme” isimli çalışmamızın amacı, bulanık küme teorisine dayanan bulanık çok kriterli karar verme yöntemlerinin incelenmesidir. Çalışmanın esas odaklandığı nokta, karar uzayının sürekli olduğu bulanık çok nitelikli karar verme alanıdır. Bu amaç doğrultusunda yazılan tez, sonuç dışında dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan Giriş’ten sonra, ilk olarak Zadeh tarafından ele alınan bulanık mantık detayları ile verilmektedir. Bu doğrultuda bulanık küme teorisinin matematiksel özellikleri ile bulanık kümelerle ilişkin temel kavramlara yer verilmiştir. Bulanık kümelerin özel bir alt kümesi olan bulanık sayılar ve bulanık sayılarla yapılan cebirsel işlemler incelenmiştir.

Bulanık karar verme başlıklı üçüncü bölümde ise bulanık ortamda karar verme konusu genel hatlarıyla açıklanmıştır. Karar vermenin en tanınmış dallarından biri olan Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV), Çok Nitelikli Karar Verme (ÇNKV) ve Çok Amaçlı Karar Verme (ÇAKV) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. ÇNKV problemleri karar uzayının ayrık olduğu problemlerdir. Bu problemler sınırlı sayıda alternatife sahiptir ve genellikle değerlendirme ve seçim ile ilgili problemlerde kullanılır. Oysa, ÇAKV problemleri, alternatiflerin önceden belirlenmediği problemlere odaklanır. Yani ÇAKV sürekli çözüm uzayını kabul eder. Genel anlamda, ÇNKV’nin sınırlı sayıda alternatif arasından en iyisini seçtiği, ÇAKV’nin ise tam aksine en iyi alternatifi tasarladığı söylenebilmektedir. Geleneksel lineer programlama probleminin ilk olarak Zimmermann tarafından bulanık küme teorisi kullanılarak modellendiği, bulanık bir hedef ve kısıtların yer aldığı bulanık lineer programlama problemi verilmektedir. Hedef ve kısıtların ayrı ayrı bulanık olması durumunda, bulanık lineer programlama modeline ilişkin çözüm yaklaşımları ele alınmıştır.

Çok kriterli karar vermenin popüler bir yaklaşımı olan ve literatürde geniş çapta kullanılan Topsis yöntemi adım adım anlatılmış ve bu yöntemin bulanık bir genişlemesi olan bulanık Topsis’in kullanılmasıyla sistem analizi mühendisi seçimine yönelik bir örneğe yer verilmiştir. Bu yöntem bulanık çok kriterli karar verme problemlerini ele almak için genişletilmiştir. İlk olarak, Tsaur, Chang ve Yen (2002), bir bulanık çok kriterli karar verme problemini merkezi netleştirme (centroid defuzzification) yolu ile kesin bir şekle dönüştürmüşler ve sonra bulanık olmayan çok kriterli karar verme problemini Topsis metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Chen ve Tzeng (2004), bir bulanık çok kriterli karar verme problemini, bulanık integrali kullanarak bulanık olmayan çok kriterli karar verme problemine çevirmişlerdir. Onlar, her bir alternatifin göreceli yakınlığını tanımlamak için, uzaklığı kullanmak yerine grey bağıntı derecesini kullanmışlardır. Chu (2002a;2002b) ve Chu

ve Lin (2003) de, bir bulanık ÇKKV problemini kesin bir probleme dönüştürmüşler ve Topsis yöntemini kullanarak kesin ÇKKV problemini çözmüşlerdir. Onlar diğerlerinden farklı olarak, ilk önce bulanık sayıların aralık aritmetiğini kullanarak bir ağırlıklı normalleştirilmiş karar matrisi içindeki bütün ağırlıklı ratinglerin üyelik fonksiyonlarını elde etmişler ve sonra onları sıralama yöntemini kullanarak kesin değerlere çevirmişlerdir (Kauffmann ve Gupta, 1991). Chen (2000), Topsis yöntemini, herhangi iki bulanık sayı arasındaki kesin Öklid (Euclidean) uzaklığı tanımlayarak bulanık grup kararı verme durumlarına genişletmiştir. Triantaphyllou ve Lin (1996), her bir alternatif için bir bulanık göreceli yakınlığa sefeden bulanık aritmetik işlemlere dayanan Topsis yönteminin bulanık bir şeklini geliştirmişlerdir.

Literatür incelemesi açıkça gösteriyor ki, Triantaphyllou ve Lin'in bulanık Topsis yöntemi dışında yukarıda bahsedilen bütün yöntemler her bir alternatif için bir kesin göreceli yakınlık tanımlar. Bulanık ağırlıkların ve bulanık ratinglerin bulanık göreceli yakınlık içinde sonuçlanacağı ileri sürülür. Kesin göreceli yakınlık, bir bulanık çok kriterli karar verme problemi için sadece bir mümkün çözüm sağlar fakat bütün mümkün çözümlerin tam görüntüsünü yansıtmaz.

Yaygın bir şekilde kullanılan Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV) yöntemlerinden biri olan ve ilk olarak Thomas L. Saaty tarafından geliştirilen Analitik Hiyerarşi Prosesi (AHP) detaylı bir şekilde anlatılmış ve yöntemin uygulama adımlarını gösteren bir örnek problem sunulmuştur. Hiyerarşik bulanık problemleri çözmek için AHP'nin bir bulanık genişlemesi olarak geliştirilen bulanık AHP yöntemlerinden üç tanesi verilmektedir. Van Laarhoven ve Pedrycz [1983] yöntemi logaritmik en küçük kareler yönteminin bulanık uyarlamalarına dayanmaktadır. İkili karşılaştırmalarda üçgensel bulanık sayılar kullanılmaktadır. Buckley [1985] metodu, ikili karşılaştırma oranları olarak yamuksal bulanık sayıları kullanmaktadır. Bu metod geometrik ortalama yöntemine dayanmaktadır. İkili karşılaştırmaların sentetik derece değeri için derece analiz yönteminin kullanıldığı Chang [1996]'ın metodunda üçgensel bulanık sayılar kullanılmaktadır.

Üçüncü bölümde, Kahraman [2003]'ün sentetik derece değeri hesaplama metodu ile en yüksek müşteri memnuniyetini veren en iyi catering şirketinin seçimi için bir analitiksel araç sağladığı modeline yer verilmiştir. Karar verme sonucu en uygun alternatifin ve geriye kalanların da tercih derecesine göre sıralanması önerilen modelde sağlanılmıştır.

2. BULANIK MATEMATİK

2.1 Bulanık Mantık

California’da Berkeley Üniversitesinde öğretim üyesi olan Lotfi A.Zadeh, 1965 yılında ortaya attığı Bulanık Mantık (Fuzzy Logic) ile bilim ve teknoloji dünyasında yeni bir çıkır açmıştır. Bulanık mantık, çok değerli mantığın bir genişlemesidir. Asıl amacı, bulanık küme teorisinin bir temeli olan kesin (crip) olmayan önermelerin kullanılmasıyla beraber bulanık usavurma için esaslar sağlamaktır (Aksoy vd., 2003).

Gerçek hayatın karmaşıklığından ve bizim algılama kapasitemizin sınırlı olmasından kesin olarak kavrayamadığımız çok sayıda çeşitli nesneler vardır ki, bunlar sadece subjektif görüşlerle değerlendirilebilir. Nesneyi nitelendiren genel özellik (örneğin güzellik) bulanık (fuzzy) özellik olarak ele alınır (Eminov ve Ballı, 2004).

1965 yılında L.A.Zadeh belirsizliğin temsili için araç olarak, bulanık kümeler (fuzzy sets) teorisini geliştirmiştir. Geçmişte, genel ve özel olarak belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar, gelişigüzel bir ayırma tabii tutulmuşlar ve iki değerli kümeler kuramı ile tanımlanmışlardır. Bulanık kümeler kuramı ise belirsizlik ifade eden terimler ve kavramların gelişigüzel bir ayırma tabi tutmaksızın belirsizliğe belirlilik derecesi atayarak çok değerli kümeler kuramı kapsamı içinde tanımlamalarına yol açar.

Matematiğin gerçek dünyayı yorumlamasında daha geniş bir uygulama alanı bu yolla bulunmuştur. Artık sadece siyah ile beyaz yoktur. Bunların arasında bütün renkler ve onların her tondaki nüansları da yer alabilmektedir. İki değerli mantığın kesin (crip) değerleri yerine daha gevşek değerlendirmeler gelmiş olmaktadır (Aksoy vd., 2003).

Bulanık küme teorisi, fazla basitleştirilmiş modelleri geliştirme ve bu suretle de gerçek dünyanın karmaşık sistemlerinin çözümlenmesi için ortaya atılmıştır (Paksoy ve Atak, 2003). “Bulanık” terimi hareketlerin ya da gözlemlerin kümesinin iyi tanımlı sınırlarının olmadığı anlatımlardaki duruma karşılık gelir. Örneğin, herhangi biri 1.70 cm boyundaki bir kişiyi uzun boylu insanlar sınıfına ayırabilir. Fakat 1.60 cm boyundaki bir kişiyi bu sınıfa dahil etme yada etmeme gerekçesi zor olacaktır. Çünkü uzunluk terimi iyi tanımlı bir sınırı teşkil etmez. Bulanıklığın bu şekli, günlük hayatlarımızda hemen hemen her yerde karşımıza çıkmaktadır. Klasik küme teorisinde bir eleman kümenin ya elemanıdır ya da değildir. Bir nesne bir kümeye kısmi olarak ait olamaz.

Zadeh bu zorluğun üstesinden gelebilmek için 1965'te bulanık küme teorisini önermiştir (Chen vd., 1992). Bulanık küme teorisi o tarihten bu yana, başta yöneylem araştırması, yöntem bilimi, kontrol teorisi, yapay zeka / akıllı sistemler, insan davranışları olmak üzere pek çok uygulama sahası bulmuştur ve uygulamalar artan bir çeşitlilikle dünya ölçeğinde yaygınlaşmaktadır (Paksoy ve Atak, 2003).

Matematiksel olarak kararsızlığı ve belirsizliği belirtecek ve bir çok problem için özünde var olan kesin olmayışı ele almak amacıyla şekillendirilmiş araçlar sağlayacak şekilde özel olarak tasarlanmış olan bulanık küme teorisinin çok kriterli karar vermeye önemli katkıları olmuştur.

Bu teoride, her bir elemana üyelik fonksiyonu aracılığı ile bir üyelik derecesi atanır. Üyelik dereceleri $[0,1]$ kapalı aralığında değerler alabilmektedirler. Herhangi bir eleman için üyelik derecesi 1 ise bu eleman kesinlikle kümenin elemanıdır; üyelik derecesi 0 ise bu eleman kesinlikle kümenin elemanı değildir. Yani 0 kümeye ait olmamayı, 1 ise kesin olarak o kümenin üyesi olmayı gösterir (Chen vd., 1992).

2.2 Bulanık Sayılar

Bulanık sayı terimi “10 a yakın”, “7 civarında” gibi kesin olmayan sayısal nicelikleri ele almak için kullanılır (Chen vd., 1992). Bulanık sayılar üyelik fonksiyonları kullanılarak tanımlanır. $\mu_A(x)$ ile gösterilen üyelik fonksiyonu $[0,1]$ aralığında değer alır. $\mu_A(x) = 0$ ise x sayısı kümenin elemanı değildir. $\mu_A(x) = 1$ ise x sayısı kesinlikle kümenin elemanıdır. Diğer durumlarda x 'in kümede olması bulanık olarak tanımlanmıştır. $\mu_A(x)$ değeri 1'e yaklaştıkça x elemanının kümedeki üyeliği artar (Aksoy vd., 2003).

Bulanık sayılar farklı biçimlerde ifade edilebilirler. Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar ve onların aritmetik işlemleri bu kısımda sunulacaktır.

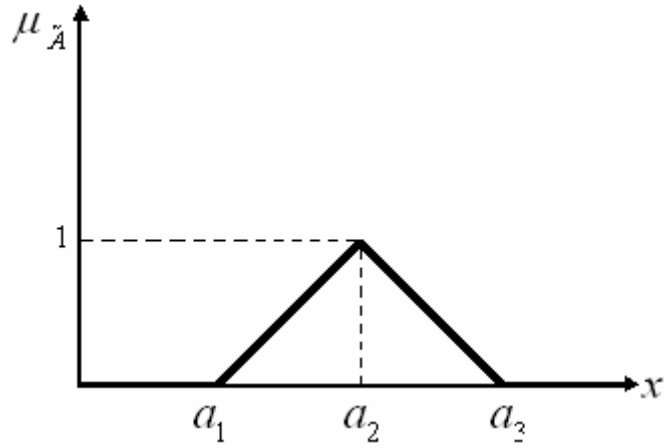
2.2.1 Üçgensel Bulanık Sayılar

Üçgensel bulanık sayılar (a_1, a_2, a_3) gibi üçlüler ile gösterilirler. a_1, a_2, a_3 parametreleri sırasıyla en küçük değeri, alınabilecek en büyük değeri ve en geniş değeri temsil etmektedirler.

$A = (a_1, a_2, a_3)$ şeklindeki bir üçgensel bulanık sayı için üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Kaufmann ve Gupta, 1988).



Şekil 2.1 Üçgensel bulanık sayı.

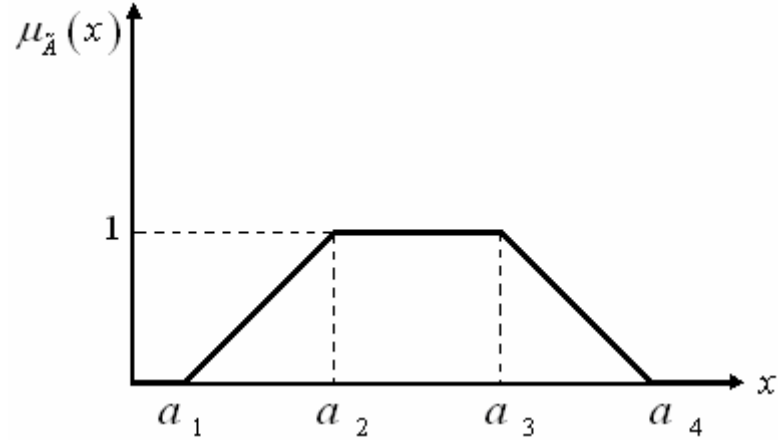
2.2.2 Yamuksal Bulanık Sayılar

Yamuksal bulanık sayılar (a_1, a_2, a_3, a_4) şeklindeki dörtlülerle ifade edilirler. Burada $[a_2, a_3]$ aralığı büyüklüğün kesinlikle gösterilebildiği sayıları ifade eder. a_1 ve a_4 sırasıyla alt ve üst sınırlardır.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ şeklindeki bir yamuksal bulanık sayı için üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & x > a_4 \end{cases}$$

yapısındadır (Kaufmann ve Gupta, 1988).



Şekil 2.2 Yamuksal bulanık sayı.

2.3 Bulanık Sayılarda İşlemler

Bu kısımda bulanık sayılar ile yapılan aritmetik işlemler ele alınmıştır. Bulanık sayılarla aritmetik işlemler, yaklaşık sonuçlar veren aritmetik işlemler, güven aralıkları ile aritmetik işlemler ve üyelik fonksiyonları ile aritmetik işlemler olmak üzere üç başlık altında incelenmektedir.

2.3.1 Bulanık Sayılarda Yaklaşık İşlemler

Yaklaşık aritmetik işlemler, bulanık üçgensel ve bulanık yamuksal sayılar üzerinde gösterilmiştir.

2.3.1.1 Üçgensel Bulanık Sayılarda Yaklaşık Aritmetik İşlemler

$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ şeklinde iki üçgensel bulanık sayı olsun.

2.3.1.1.1 Eşitlik

A ve B bulanık sayılarının eşitliği karşılıklı bütün elemanlarının (üyelik fonksiyonlarının) eşitliği anlamına gelir. Matematiksel olarak;

$$A = B \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

dır.

2.3.1.1.2 Toplama İşlemi

$A(+)B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ şeklinde ifade edilir ve sonuç yine bir üçgensel bulanık sayıdır.

2.3.1.1.3 Çıkarma İşlemi

$A(-)B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$ şeklinde ifade edilir ve sonuç üçgensel bulanık sayıdır.

2.3.1.1.4 Üçgensel Bulanık Sayının Simetriği

$A = (a_1, a_2, a_3)$ üçgensel bulanık sayı olmak üzere simetriği $-(A) = (-a_3, -a_2, -a_1)$ olacaktır.

Çarpma ve bölme işlemleri sadece pozitif bulanık sayılar üzerinde tanımlanacaktır. Pozitif bulanık sayı alt sınır değeri pozitif olan sayıdır.

2.3.1.1.5 Çarpma İşlemi

$A(.)B = (a_1.b_1, a_2.b_2, a_3.b_3)$ şeklinde ifade edilir ve sonuç üçgensel bulanık sayıdır.

2.3.1.1.6 Bölme İşlemi

$A(:)B = \left(\frac{a_1}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_1} \right)$ dir. Bu işlemin sonucu bir üçgensel bulanık sayıdır.

2.3.1.2 Üçgensel Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemlerin Özellikleri

- İki üçgensel bulanık sayının toplanması ve çıkarılması yine bir üçgensel bulanık sayıdır.
- Çarpma, tersini alma ve bölme işlemleri sonucu üçgensel bulanık sayı vermeyebilir.
- Maksimum ve minimum işlemleri sonucu da bir bulanık üçgensel sayı olmak zorunda değildir.

2.3.1.3 Yamuksal Bulanık Sayılarda Yaklaşık Aritmetik İşlemler

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ şeklinde iki yamuksal bulanık sayı olsun.

2.3.1.3.1 Eşitlik

A ve B bulanık sayılarının eşitliği karşılıklı bütün elemanlarının (üyelik fonksiyonlarının) eşitliği anlamına gelir. Matematiksel olarak;

$$A = B \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4) \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4$$

dir.

2.3.1.3.2 Toplama İşlemi

$A(+)B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$ şeklinde ifade edilir ve sonuç yine bir yamuksal bulanık sayıdır.

2.3.1.3.3 Çıkarma İşlemi

$A(-)B = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)$ şeklinde ifade edilir ve sonuç yamuksal bulanık sayıdır.

2.3.1.3.4 Yamuksal Bulanık Sayının Simetriği

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuksal bulanık sayı olmak üzere simetriği $-(A) = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1)$ olacaktır.

Yamuksal bulanık sayılarda da çarpma ve bölme işlemleri pozitif reel sayılar üzerinde tanımlanacaktır.

2.3.1.3.5 Çarpma İşlemi

$A(.)B = (a_1.b_1, a_2.b_2, a_3.b_3, a_4.b_4)$ şeklinde ifade edilir. Bu işlemin sonucu yamuksal bulanık sayıdır.

2.3.1.3.6 Bölme İşlemi

$A(:)B = \left(\frac{a_1}{b_4}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_2}, \frac{a_4}{b_1} \right)$ dir. Bu işlemin sonucu bir yamuksal bulanık sayıdır.

2.3.1.4 Yamuksal Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemlerin Özellikleri

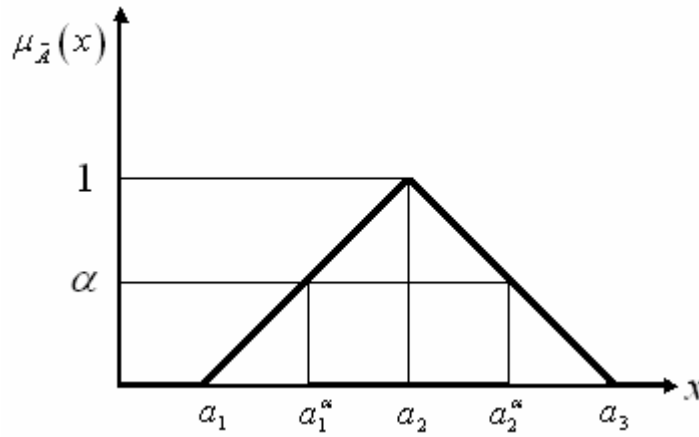
Şuna dikkat edilmelidir ki üçgensel bir bulanık sayı, $a_2 = a_3$ ile yamuksal bir bulanık sayının özel bir halidir. Üçgensel bulanık sayılar üzerindeki aritmetik işlemlerin bütün sonuçlarını yamuksal bulanık sayılara da genişletebiliriz.

- İki yamuksal bulanık sayının toplanması ve çıkarılması yine bir yamuksal bulanık sayıdır.
- Çarpma, ters alma ve bölme işlemleri sonucu yamuksal bulanık sayı vermek zorunda değildir.
- Maksimum ve minimum işlemleri de bir yamuksal bulanık sayı sonucu vermek zorunda değildir.

2.3.2 Bulanık Sayılarda Güven Aralıkları İle Aritmetik İşlemler

Bulanık sayılarda güven aralıkları ile yapılan işlemler kesin bilgiyi taşırlar. Bu nedenle elde edilen sonuçlar da kesindir.

A bir bulanık küme olsun $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ kümesine A bulanık kümesinin α seviyesinde güven aralığı denir. A_α güven aralığı Şekil 2.3’de gösterilmektedir.



Şekil 2.3 Üçgensel bulanık sayıda güven aralığı.

Burada A_α güven aralığı:

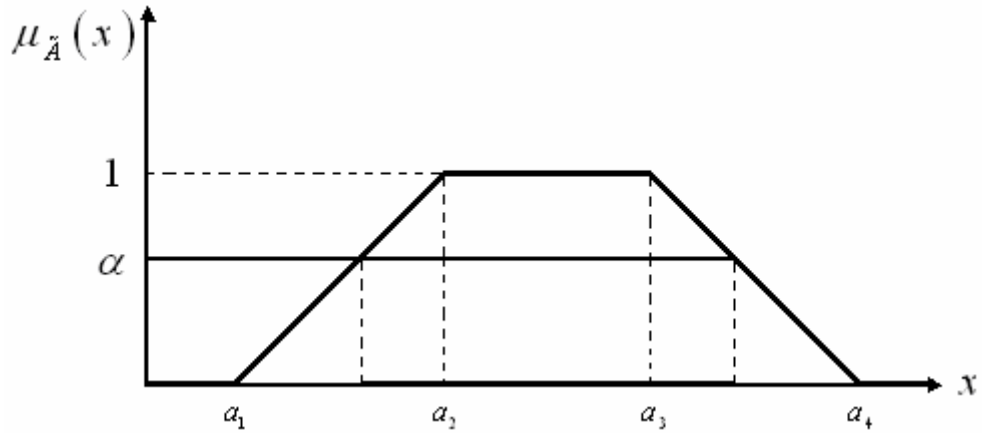
$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] \text{ dır.}$$

Örnek 2.1 :

Bir $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuksal bulanık sayısı ve bu sayının A_α güven aralığı Şekil 2.4’de gösterilmektedir.

Burada A_α güven aralığı:

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4] \text{ dır (Kaufmann ve Gupta, 1988).}$$



Şekil 2.4 Yamuksal bulanık sayıda güven aralığı.

2.3.2.1 Toplama İşlemi

$A, B \subset R$ olmak üzere ve $\alpha \in [0, 1]$ seviyesindeki güven aralığını kullanarak

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$$B_\alpha = \{x \mid \mu_B(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanan A_α, B_α bulanık sayılarının toplamı

$$A_\alpha + B_\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$$

dır (Aksoy vd., 2003).

Örnek 2.2 :

$A = (2, 3, 5)$ ve $B = (1, 4, 8)$ üçlülere ile tanımlanan A ve B iki üçgensel bulanık sayıyı ele alalım.

$$\begin{aligned} A(+)B &= (2, 3, 5)(+)(1, 4, 8) \\ &= (3, 7, 13) \end{aligned}$$

dır. Güven aralıklarını kullanarak bu iki üçgensel bulanık sayıyı toplayalım. Bu sayıların güven aralıkları tanımdan,

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [(3-2)\alpha + 2, -(5-3)\alpha + 5] \\ &= [\alpha + 2, -2\alpha + 5] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B_\alpha &= [(4-1)\alpha + 1, -(8-4)\alpha + 8] \\ &= [3\alpha + 1, -4\alpha + 8] \end{aligned}$$

olacaktır.

Bu iki üçgensel bulanık sayının toplamı,

$$A_\alpha + B_\alpha = [4\alpha + 3, -6\alpha + 13]$$

şeklinde ifade edilecektir.

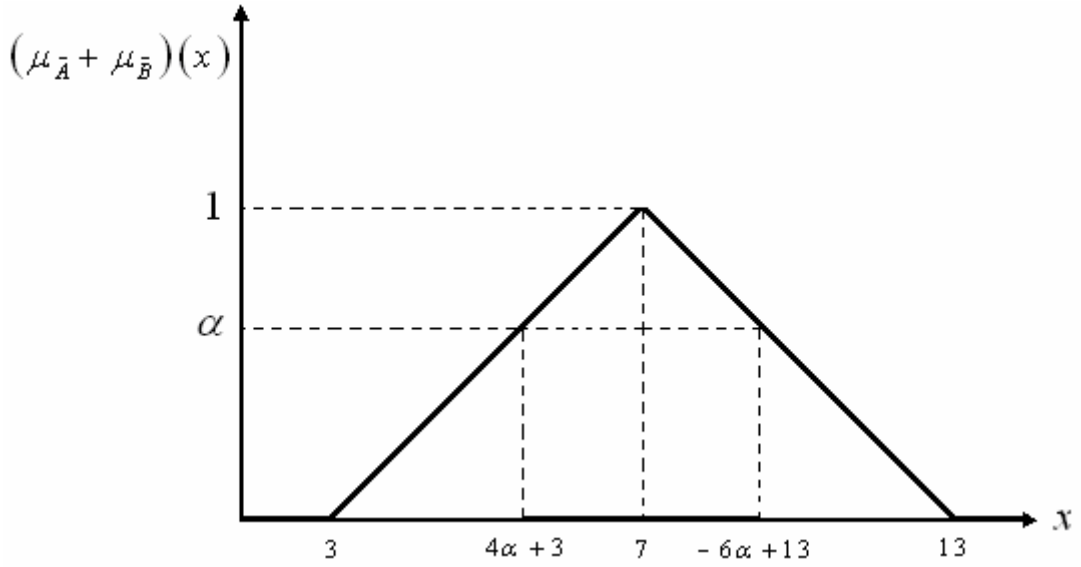
Elde edilen bu iki sonuç, $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ güven aralıklarında doğrulanacaktır. Nitekim, $\alpha = 0$ güven aralığında

$$A_0(+)B_0 = [3, 13],$$

ve $\alpha = 1$ güven aralığında

$$A_1(+)B_1 = [7, 7] = 7$$

elde edilir (Kaufmann ve Gupta, 1988).



Şekil 2.5 Yamuksal bulanık sayıda güven aralığı.

2.3.2.2 Çıkarma İşlemi

$A, B \subset R$ olmak üzere, $\alpha \in [0, 1]$ seviyesindeki güven aralığını kullanarak,

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$$B_\alpha = \{x \mid \mu_B(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanan A_α, B_α bulanık sayılarının farkı,

$$A_\alpha - B_\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]$$

dır.

Örnek 2.3 :

$A = (2, 3, 5)$ ve $B = (1, 4, 8)$ iki bulanık üçgensel sayı olsun. A ve B iki üçgensel bulanık sayı için çıkarma işlemini önce üçlülere kullanarak daha sonra güven aralığını kullanarak yapalım.

Üçlülere kullanarak,

$$\begin{aligned} A(-)B &= (2, 3, 5)(-)(1, 4, 8) \\ &= (2-8, 3-4, 5-1) \\ &= (-6, -1, 4) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu iki üçgensel sayının farkı, güven aralıkları tanımından,

$$\begin{aligned} A_\alpha - B_\alpha &= [\alpha + 2 + 4\alpha - 8, -2\alpha + 5 - 3\alpha - 1] \\ &= [5\alpha - 6, -5\alpha + 4] \end{aligned}$$

olacaktır.

$\alpha = 0$ için,

$$A_0 (-) B_0 = [-6, 4]$$

ve $\alpha = 1$ için,

$$A_1 (-) B_1 = [-1, -1] = -1$$

elde edilir.

2.3.2.3 Çarpma İşlemi

Bu işlem sadece pozitif reel sayılar için tanımlıdır. A ve B pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı iki bulanık sayı ve bu sayıların α güven aralıkları;

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \text{ ve } B_\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$$

olsun.

Bu iki bulanık sayının çarpımı, güven aralıkları cinsinden;

$$A_\alpha (.) B_\alpha = [a_1^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha]$$

dır (Aksoy, 2003)

Örnek 2.4 :

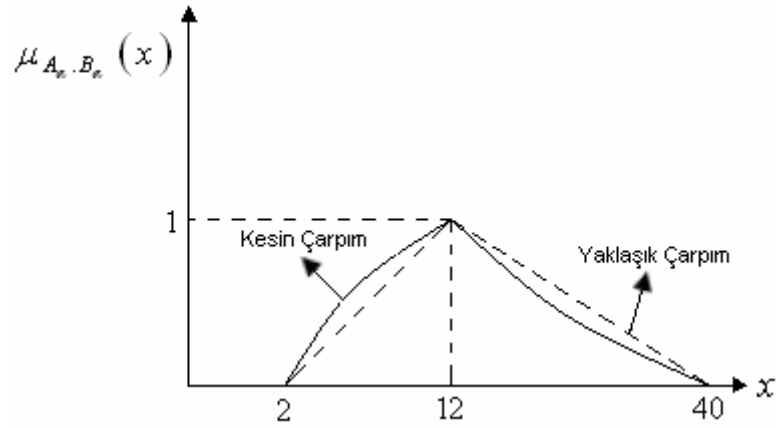
$A = (2, 3, 5)$ ve $B = (1, 4, 8)$ iki üçgensel bulanık sayı olsun.

$$A_\alpha = [\alpha + 2, -2\alpha + 5] \text{ ve } B_\alpha = [3\alpha + 1, -4\alpha + 8]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A_\alpha (.) B_\alpha &= [(\alpha + 2)(3\alpha + 1), (-2\alpha + 5)(-4\alpha + 8)] \\ &= [3\alpha^2 + 7\alpha + 2, 8\alpha^2 - 36\alpha + 40] \end{aligned}$$

dir. Bu çarpımın grafiği Şekil 2.6’da verilmektedir.



Şekil 2.6 Güven aralıkları cinsinden çarpım.

2.3.2.4 Bölme İşlemi

Bulanık sayılarda bölme işlemi pozitif reel sayılar kümesine tanımlı olup $b_1^\alpha > 0$ ve $b_2^\alpha > 0$ olmak üzere her $\alpha \in [0,1]$ için güven aralığı cinsinden

$$A_\alpha (\div) B_\alpha = \left[\frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha} \right]$$

olarak tanımlanır (Aksoy vd., 2003).

Örnek 2.5 :

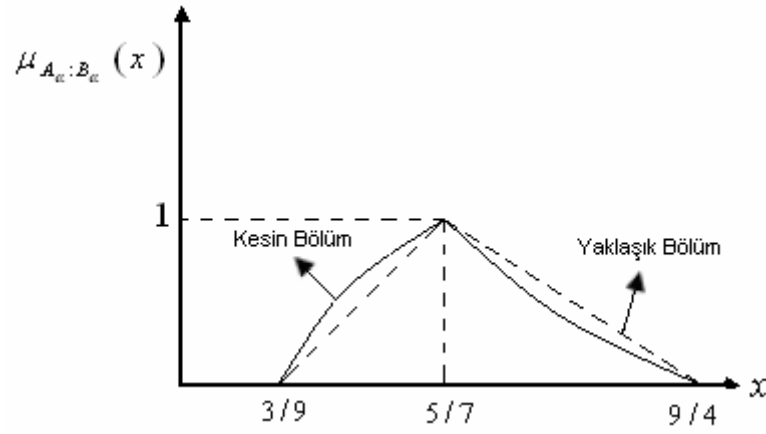
$A = (3, 5, 9)$ ve $B = (4, 7, 9)$ iki üçgensel bulanık sayı olsun

$$A_\alpha = [2\alpha + 3, -4\alpha + 9] \text{ ve } B_\alpha = [3\alpha + 4, -2\alpha + 9]$$

olmak üzere,

$$A_\alpha (\div) B_\alpha = \left[\frac{2\alpha + 3}{9 - 2\alpha}, \frac{9 - 4\alpha}{3\alpha + 4} \right]$$

dır.



Şekil 2.7 Güven aralıkları cinsinden bölüm.

2.3.3 Bulanık Sayılarda Üyelik Fonksiyonları İle Yapılan Aritmetik İşlemler

$\forall x, y, z \in R$ için üyelik fonksiyonlarını kullanarak yapılan aritmetik işlemler aşağıda verilmektedir.

2.3.3.1 Toplama İşlemi

$$\mu_{A(+)B}(Z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

2.3.3.2 Çıkarma İşlemi

$$\mu_{A(-)B}(Z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

2.3.3.3 Çarpma İşlemi

$$\mu_{A(\cdot)B}(Z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

2.3.3.4 Bölme İşlemi

$$\mu_{A(:)B}(Z) = \bigvee_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

dir. Üyelik fonksiyonlarının kullanımı bir hayli karışık hesaplamalara neden olduğundan çok fazla tercih edilmemektedir.

2.3.4 Yaklaşık ve Güven Aralıkları ile Yapılan Aritmetik İşlemlerin Karşılaştırılması

A ve B iki üçgensel bulanık sayının toplamı ve farkı sonucunda yine bir üçgensel bulanık sayı elde edilir. Ancak çarpma, bölme ve ters alma işlemleri sonucu üçgensel bulanık sayı olmak zorunda değildir. Bu kısımda çarpma ve bölme işlemleri bir her iki yöntem de kullanılarak yapılmıştır ve yöntemler arasındaki farklar açıklanmaya çalışılmıştır.

2.3.4.1 Çarpma İşlemi

$A = (a, b, c)$ üçgensel bulanık sayısı $\forall \alpha \in [0, 1]$ için α -keseni ile

$$A_\alpha = [a + (b - a)\alpha, c - (c - b)\alpha]$$

olarak tanımlanır. A bulanık sayısının iki α -keseni,

$$A_\alpha^{(1)} = [a_1 + (b_1 - a_1)\alpha, c_1 - (c_1 - b_1)\alpha]$$

$$A_\alpha^{(2)} = [a_2 + (b_2 - a_2)\alpha, c_2 - (c_2 - b_2)\alpha]$$

şeklinde ifade edilirse çarpım,

$$\begin{aligned} A_\alpha^{(1)}(.)A_\alpha^{(2)} &= [a_1 + (b_1 - a_1)\alpha, c_1 - (c_1 - b_1)\alpha](.)[a_2 + (b_2 - a_2)\alpha, c_2 - (c_2 - b_2)\alpha] \\ &= [(a_1 + (b_1 - a_1)\alpha)(a_2 + (b_2 - a_2)\alpha), (c_1 - (c_1 - b_1)\alpha)(c_2 - (c_2 - b_2)\alpha)] \\ &= [a_1a_2 + (a_1(b_2 - a_2) + a_2(b_1 - a_1))\alpha + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\alpha^2, \\ &\quad c_1c_2 - (c_1(c_2 - b_2) + c_2(c_1 - b_1))\alpha + (c_1 - b_1)(c_2 - b_2)\alpha^2] \end{aligned}$$

dır.

Böylece, $\alpha = 0$ için

$$(A_\alpha^{(1)}(.)A_\alpha^{(2)})_{\alpha=0} = [a_1a_2, c_1c_2],$$

$\alpha = 1$ için

$$(A_\alpha^{(1)}(.)A_\alpha^{(2)})_{\alpha=1} = [b_1b_2, b_1b_2] = b_1b_2$$

elde edilir. İki üçgensel bulanık sayının çarpımı yaklaşık olarak yapılırsa;

$$A = A_1(.)A_2 = (a_1, b_1, c_1)(.) (a_2, b_2, c_2) \\ = (a_1.a_2, b_1.b_2, c_1.c_2)$$

olacaktır. Bu sayıyı α -kesenlerini kullanarak yazarsak,

$$(A_1(.)A_2)_{\alpha} = [a_1a_2 + (b_1b_2 - a_1a_2)\alpha, c_1c_2 - (c_1c_2 - b_1b_2)\alpha]$$

elde edilir.

Bu yaklaşımın değerini hesaplamak için, kesin $A_1(.)A_2$ ile yaklaşık $(A_1(.)A_2)_{\alpha}$ arasındaki soldan maksimum sapma ve sağdan maksimum sapma hesaplanır. Soldan sapma,

$$\varepsilon_{l_{\alpha}} = a_1a_2 + (a_1(b_2 - a_2) + a_2(b_1 - a_1))\alpha + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\alpha^2 - a_1a_2 - (b_1b_2 - a_1a_2)\alpha \\ = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(\alpha^2 - \alpha)$$

dır. $\alpha \in [0,1]$ olduğundan $\alpha^2 \leq \alpha$ dır. Buna göre soldan sapma,

$$\varepsilon_{l_{\alpha}} = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(\alpha - \alpha^2)$$

olur. $\varepsilon_{l_{\alpha}}$ 'nın α 'ya göre türevini alıp sıfıra eşitlediğimizde soldan sapmanın maksimum olduğu $\alpha = 0.5$ değeri bulunur. $\varepsilon_{l_{\alpha}}$ 'nın α 'ya göre ikinci türevi negatiftir. Sadece α 'ya bağlı $\varepsilon_{l_{\alpha}}$ 'nın maksimum değeri $\alpha = 0.5$ için meydana gelir.

$$\varepsilon_l^* = 0.25(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \text{ dır.}$$

Benzer şekilde sağdan maksimum sapma da,

$$\varepsilon_{r_{\alpha}} = c_1c_2 - (c_1(c_2 - b_2) + c_2(c_1 - b_1))\alpha + (c_1 - b_1)(c_2 - b_2)\alpha^2 - c_1c_2 + (c_1c_2 - b_1b_2)\alpha \\ = (c_1 - b_1)(c_2 - b_2)(\alpha^2 - \alpha)$$

dır. $\alpha \in [0,1]$ olduğundan,

$$\varepsilon_{r_{\alpha}} = (c_1 - b_1)(c_2 - b_2)(\alpha - \alpha^2)$$

olur.

Sağdan sapma da maksimum değerini $\alpha = 0.5$ 'de alır. Buna göre

$$\varepsilon_r^* = 0.25(c_1 - b_1)(c_2 - b_2) \text{ dir.}$$

Örnek 2.6 :

$A^{(1)} = (1, 2, 4)$ $A^{(2)} = (3, 6, 7)$ iki üçgensel bulanık sayı olsun. Güven aralıkları açısından bu iki üçgensel bulanık sayı,

$$A_\alpha^{(1)} = [1 + \alpha, 4 - 2\alpha], \quad A_\alpha^{(2)} = [3 + 3\alpha, 7 - \alpha]$$

şeklinde ifade edilir. Bu iki üçgensel bulanık sayının çarpımı

$$\begin{aligned} A_\alpha &= A_\alpha^{(1)}(.)A_\alpha^{(2)} \\ &= [3 + 6\alpha + 3\alpha^2, 28 - 18\alpha + 2\alpha^2] \end{aligned}$$

dır.

Bu çarpım yaklaşık aritmetik işlem yaklaşımı ile yapılırsa,

$$P = A^{(1)}(.)A^{(2)} = (1*3, 2*6, 4*7) = (3, 12, 28)$$

elde edilir. Bu sayı güven aralıkları cinsinden yazılırsa,

$$P_\alpha = [3 + 9\alpha, 28 - 16\alpha]$$

olacaktır.

Sol sapma,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l_\alpha} &= 3 + 6\alpha + 3\alpha^2 - 3 - 9\alpha \\ &= 3(\alpha^2 - \alpha) \end{aligned}$$

dır.

Maksimum sapma $\alpha = 0.5$ için meydana gelir. Dolayısıyla soldan sapmanın maksimum değeri

$$\varepsilon_l^* = 3(0.5^2 - 0.5) = -0.75 \text{ dir.}$$

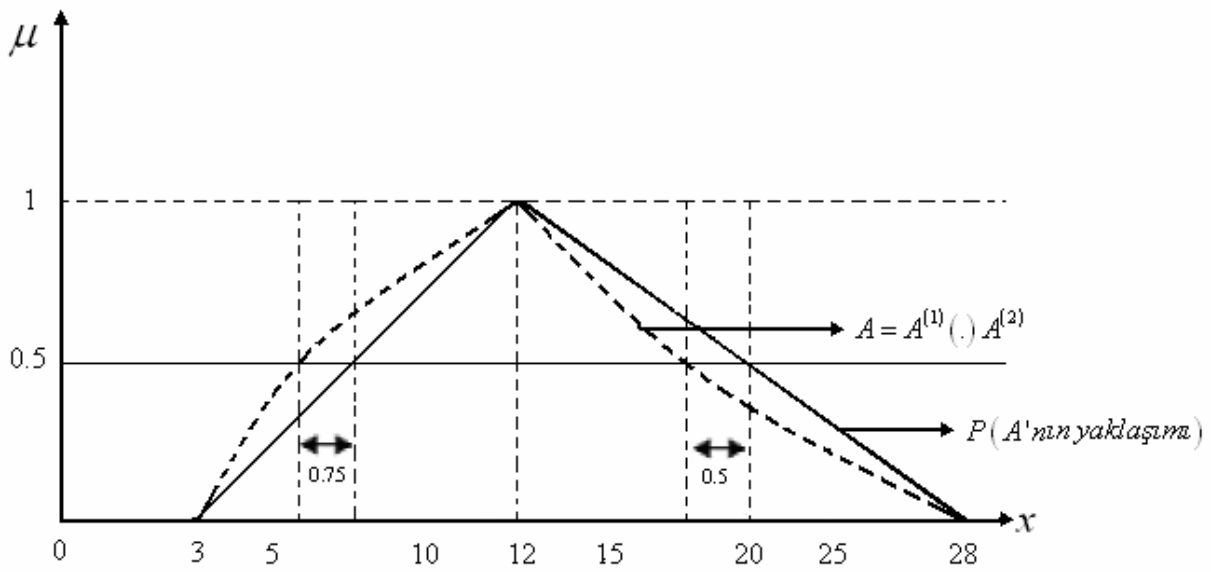
Benzer şekilde sağ sapma,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r_\alpha} &= 28 - 18\alpha + 2\alpha^2 - 28 + 16\alpha \\ &= 2(\alpha^2 - \alpha)\end{aligned}$$

dır. Sağdan sapma maksimum değerini $\alpha = 0.5$ 'de alır ve

$$\varepsilon_r^* = 2(0.5^2 - 0.5) = -0.50 \text{ dir.}$$

Buradan, üçgensel bulanık sayılar ile yapılan yaklaşık çarpma işleminin, iki üçgensel bulanık sayının çarpımı için iyi bir yaklaşım olduğu sonucu çıkarılır. Sol ve sağ sapmalar Şekil 2.8'de gösterilmektedir.



Şekil 2.8 İki üçgensel bulanık sayının çarpımı için sağdan ve soldan sapma.

2.3.4.2 Bölme İşlemi

$A^{(1)} = (a_1, b_1, c_1)$ ve $A^{(2)} = (a_2, b_2, c_2)$ şeklinde iki üçgensel bulanık sayı olsun.

$$A_\alpha^{(1)} = [a_1 + (b_1 - a_1)\alpha, c_1 - (c_1 - b_1)\alpha]$$

$$A_\alpha^{(2)} = [a_2 + (b_2 - a_2)\alpha, c_2 - (c_2 - b_2)\alpha]$$

olmak üzere bu iki üçgensel bulanık sayının bölümü,

$$\begin{aligned}
A_{\alpha}^{(1)}(\cdot) A_{\alpha}^{(2)} &= [a_1 + (b_1 - a_1)\alpha, c_1 - (c_1 - b_1)\alpha](\cdot) \\
&= [a_2 + (b_2 - a_2)\alpha, c_2 - (c_2 - b_2)\alpha] \\
&= \left[\frac{a_1 + (b_1 - a_1)\alpha}{c_2 - (c_2 - b_2)\alpha}, \frac{c_1 - (c_1 - b_1)\alpha}{a_2 + (b_2 - a_2)\alpha} \right]
\end{aligned}$$

olacaktır.

Bu iki üçgensel bulanık sayının bölme işlemi yaklaşık yaklaşımla,

$$P = A^{(1)}(\cdot) A^{(2)} = \left[\frac{a_1}{c_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{a_2} \right]$$

olacaktır.

Soldan sapma,

$$\alpha_l^* = \frac{c_2 - \sqrt{b_2 c_2}}{c_2 - b_2} \quad \text{için maksimum olur}$$

ve sağdan sapma

$$\alpha_r^* = \frac{\sqrt{a_2 b_2} - a_2}{b_2 - a_2} \quad \text{için maksimum olur.}$$

Örnek 2.7 :

$A^{(1)} = (2, 7, 13)$ ve $A^{(2)} = (4, 8, 11)$ iki üçgensel bulanık sayı olsun. Güven aralıkları cinsinden bu iki üçgensel bulanık sayı

$$A_{\alpha}^{(1)} = [2 + 5\alpha, 13 - 6\alpha] \quad A_{\alpha}^{(2)} = [4 + 4\alpha, 11 - 3\alpha]$$

şeklinde gösterilir.

Bu iki bulanık sayının bölümü,

$$A_{\alpha}^{(1)}(\cdot) A_{\alpha}^{(2)} = \left[\frac{2 + 5\alpha}{11 - 3\alpha}, \frac{13 - 6\alpha}{4 + 4\alpha} \right] \quad \text{dır.}$$

Bu bölüm yaklaşık olarak ,

$$P = A^{(1)}(:,)A^{(2)} = \left(\frac{2}{11}, \frac{7}{8}, \frac{13}{4}\right) \text{ dır.}$$

Bu bölüm α seviyesindeki güven aralıkları cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \left[\frac{2}{11} + \left(\frac{7}{8} - \frac{2}{11} \right) \alpha, \frac{13}{4} - \left(\frac{13}{4} - \frac{7}{8} \right) \alpha \right] \\ &= [0.1818 + 0.6931\alpha, 3.2500 - 2.3750\alpha] \end{aligned}$$

olacaktır.

Sol sapmanın maksimum olduğu α değeri

$$\alpha_l^* = \frac{11 - \sqrt{8*11}}{11 - 8} = 0.5397$$

ve maksimum soldan sapma

$$\varepsilon_l^* = \frac{2 + 5\alpha}{11 - 3\alpha} - 0.1818 - 0.6931\alpha \Big|_{\alpha=0.5397} = -0.0549$$

dir.

Sağ sapmanın maksimum olduğu α değeri

$$\alpha_r^* = \frac{\sqrt{4*8} - 4}{8 - 4} = 0.4142$$

ve maksimum sağdan sapma

$$\varepsilon_r^* = \frac{13 - 6\alpha}{4 + 4\alpha} - 3.2500 - 2.3750\alpha \Big|_{\alpha=0.4142} = -0.4075$$

dir (Kaufmann ve Gupta,1988).

2.4 Bulanık Kümeler

Bulanık (fuzzy) terimi, olasılık dağılımları cinsinden tanımlanabilen belirsiz niceliklerin matematiği anlamındadır. Bulanık kümeler kuramının amacı, belirsizlik ifade eden, tanımlanması güç veya anlamı güç kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik getirmek istemidir. Modern mantıkta bir kümenin elemanları kesin elemanlardır. Bu elemanlar kümenin elemanıdır ya da değildir. Bu tür elemanlardan oluşan kümelere kesin

(crisp) kümeler denir. Bulanık kümeler belirlilik derecesi “ya hep ya hiç” kavramının ötesinde bir görüşten ortaya çıkar. Çoğunlukla günlük hayatta kesin sayılar ve ifadeler yerine sınırları bulanık “sayılar, ifadeler, nesne sınıfları” kullanılır (Aksoy vd.,2003).

Kesin kümelerde $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere klasik bir A kümesinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in A \\ 0 & ; \quad x \notin A \end{cases}$$

Klasik küme kavramında 0 ile 1 arasında değişen üyelik fonksiyonu, bir elemanın bir kümeye ait olması durumunda 1 değerini, kümeye ait olmaması durumunda 0 değerini alacaktır.

Tanım 2.4.1

X bir evrensel küme olmak üzere, X ’in bir $\tilde{A}$ bulanık kümesi, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ değeri x ’in A ’daki üyelik değerini temsil etmek üzere bir $x \in X$ elemanına $[0,1]$ aralığında bir $\mu_{\tilde{A}}(x)$ reel sayısı atayan

$$\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Böylece $\mu_{\tilde{A}}(x)$ değeri 1’e yaklaştıkça, x elemanının A ’daki üyelik derecesi artar (Sakawa,1993).

Bir $\tilde{A}$ bulanık kümesi x elemanı ve $\mu_{\tilde{A}}(x)$ derecesinin bir kümesi olarak tanımlanabilir ve

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

veya

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$$

şeklinde ifade edilir.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ sadece 0 ve 1 iki noktayı içerdiği zaman, A bulanık bir küme değildir ve $\mu_{\tilde{A}}(x)$ bulanık olmayan bir kümenin yani klasik bir kümenin karakteristik fonksiyonuna özdeşdir. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ üyelik fonksiyonu klasik bir kümenin karakteristik fonksiyonunun genişlemesidir.

Çünkü sadece 0 ve 1 değil, 0 ve 1 arasında değerler alır (Zimmerman,1993).

Örnek 2.8 :

Bir emlakçı müşterilerine önerdiği evleri sınıflandırmak istemektedir. Bu evlerin rahatlığının bir göstergesi, içindeki yatak odalarının sayısıdır. $X=\{1,2,...,10\}$, x (=bir evdeki yatak odalarının sayısı) ile tanımlanmış, evlerin mevcut tiplerinin bir kümesi olsun. O zaman bulanık küme, “dört kişilik bir aile için rahat ev tipi”

$$\tilde{A}=\{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3),(7,0),(8,0),(9,0),(10,0)\}$$

olarak tanımlanabilir.

2.5 Bulanık Kümeler İle İlgili Temel Kavramlar

2.5.1 Bulanık Kümenin Desteği (support)

Bir bulanık $\tilde{A}$ kümesinin desteği, $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ olacak şekilde bütün $x \in X$ 'lerin oluşturduğu kesin kümedir ve

$$S(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

şeklinde ifade edilir (Zimmerman,1993).

Örnek 2.9 :

$\tilde{A} = \{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3),(7,0),(8,0),(9,0),(10,0)\}$ bulanık kümesinin desteği,

$S(\tilde{A}) = \{1,2,3,4,5,6\}$ olacaktır. $\{7,8,9,10\}$ elemanları $\tilde{A}$ bulanık kümesinin desteğinin bir elemanı değildir.

2.5.2 Bulanık Kümenin α -keseni

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin, üyelik fonksiyon derecesi en az α seviyesinde olan elemanlarının kesin kümesi α -seviye kümesi olarak adlandırılır ve

$$\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad \text{şeklinde ifade edilir.}$$

$$\tilde{A}'_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

ise “kuvvetli α -seviye kümesi” ya da “kuvvetli α -keseni” olarak adlandırılır (Zimmerman).

Örnek 2.10 :

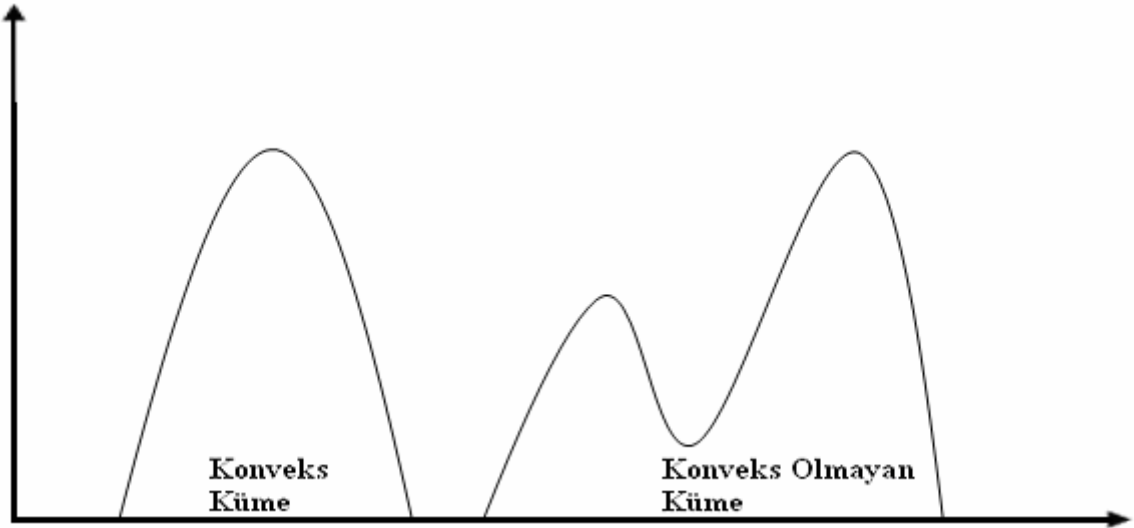
$\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3), (7, 0), (8, 0), (9, 0), (10, 0)\}$ bulanık kümesinin α -keseni $\alpha = 0.8$ için $\tilde{A}_{0.8} = \{(3, 0.8), (4, 1)\}$ dir.

2.5.3 Bulanık Kümenin Konveksliği

Konvekslik bulanık küme teorisinde önemli bir rol oynar. Bir $\tilde{A}$ bulanık kümesi $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$$

koşulunu sağlıyorsa konvekstir denir. Ayrıca, bir bulanık küme bütün α seviye kümeleri konveks ise konvekstir. Şekil 2.9’ da konveks ve konveks olmayan kümeler gösterilmektedir.



Şekil 2.9 Konveks ve konveks olmayan küme.

2.5.4 Bulanık Kümenin Yüksekliği

X üzerinde tanımlı bir $\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ’in en küçük üst sınırıdır ve

$$hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

ile ifade edilir (Sakawa,1993). Yani $\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ' in aldığı en üst değerdir (Aksoy vd.,2003).

2.5.5 Bulanık Kümenin Normallığı

X üzerinde tanımlı bir $\tilde{A}$ bulanık kümesi, $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ varsa normal bulanık küme olarak adlandırılır (Sakawa,1993).

Tanım 2.5.1

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği 1'e eşit ise, $\tilde{A}$ bulanık kümesine normal bulanık küme, aksi takdirde normal olmayan bulanık küme adı verilir.

Bulanık kümenin yüksekliği ve normallığı tanımından sonra bulanık sayının farklı bir tanımı verilebilir.

Tanım 2.5.2 Bulanık Sayı

Yüksekliği 1 olan konveks bir küme, bulanık sayı olarak adlandırılır. Yani normal ve konveks olan bir bulanık kümeye bulanık sayı denir (Aksoy vd., 2003).

2.5.6 Bulanık Kümenin Kardinalitesi

Bulanık $\tilde{A}$ kümesinin kardinalitesi;

X sonlu bir küme olmak üzere,

$$|\tilde{A}| = \sum \mu_{\tilde{A}}(x), x \in X$$

olarak tanımlanmıştır. X sonsuz bir küme ise,

$$|\tilde{A}| = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x) dx$$

dir. Göreceli (relative) kardinalite ise,

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

şeklinde ifade edilir.

Göreceli kardinalite, $\tilde{A}$ 'nın elemanlarının X 'de ağırlıklandırılması şeklinde yorumlanabilir.

Örnek 2.11 : $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ve

$\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3), (7, 0), (8, 0), (9, 0), (10, 0)\}$ olsun. Bu

kümenin kardinalitesi $|\tilde{A}| = 0.2 + 0.5 + 0.8 + 1 + 0.7 + 0.3 = 3.5$ ve göreceli kardinalitesi

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} = \frac{3.5}{10} = 0.35 \text{ olarak bulunur (Zimmerman, 1993).}$$

2.6 Bulanık Kümelerin Özellikleri

A , B ve C kümeleri X evreninin birer bulanık alt kümeleri olmak üzere, bu kümeler arasında oluşan çeşitli ilişkiler birer özellik olarak aşağıda belirtilmektedir.

Değişme Özelliği: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

Birleşme Özelliği: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

Dağılma Özelliği: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

De Morgan Özelliği: $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Denk Güçlü Olma Özelliği: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

2.7 Bulanık Kümeler İçin Temel Küme İşlemleri

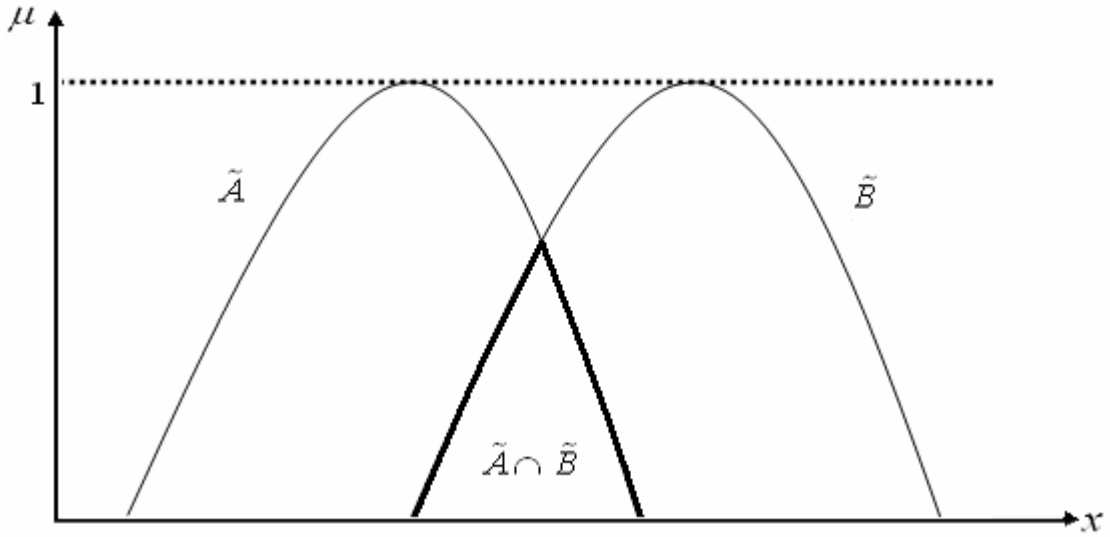
Bulanık kümelerle işlemlerin üyelik fonksiyonları aracılığıyla tanımlanması, üyelik fonksiyonunun bulanık bir küme için kritik bir öneme sahip olduğunun göstergesidir. Bu kısımda, ilk olarak Zadeh (1965) tarafından ele alınan ve bulanık küme teorisi için tutarlı bir yapı teşkil eden bulanık kümeler ile ilgili kavramlara yer verilmiştir.

2.7.1 İki Bulanık Kümenin Kesişimi

$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ kesişim işleminin üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \}, x \in X$$

olarak tanımlanır ve grafiği Şekil 2.10'da verilmiştir.



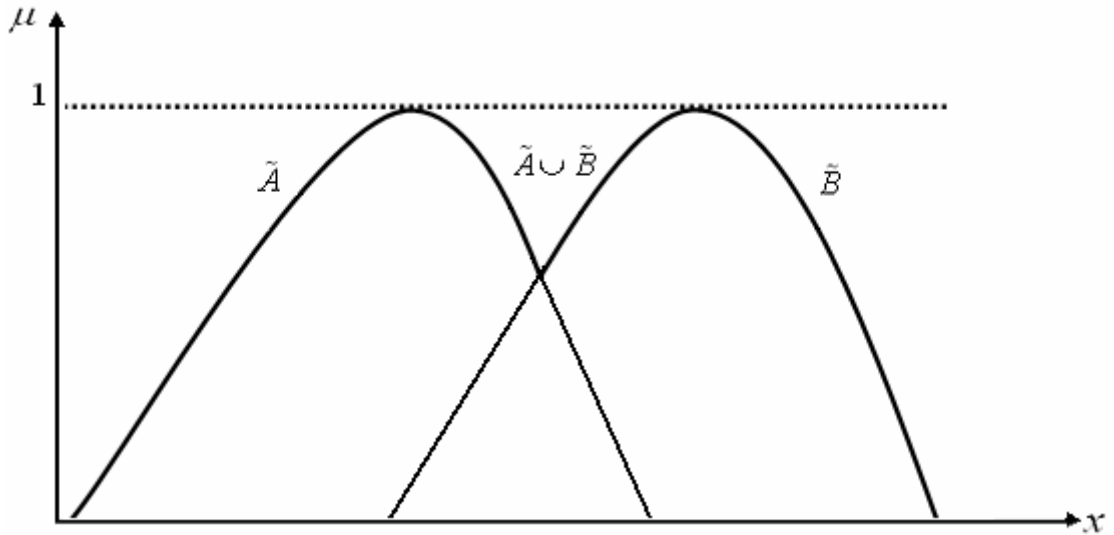
Şekil 2.10 İki bulanık kümenin kesişimi.

2.7.2 İki Bulanık Kümenin Birleşimi

$\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ birleşim işleminin üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X$$

olarak tanımlanır ve grafiği Şekil 2.11’de verilmiştir (Zimmerman,1993).



Şekil 2.11 İki bulanık kümenin birleşimi.

Bulanık küme teorisinde, a ve b’nin minimumu ve maksimumu sırasıyla,

$$\min(a, b) = a \wedge b \quad , \quad \max(a, b) = a \vee b$$

olarak ifade edilir. Bu notasyonu kullanarak $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık kümenin kesişimi ve birleşimi ,

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$$

olarak yazılabilir (Sakawa,1993).

Örnek 2.12 :

$\tilde{A}$ = “10’ dan çok büyük reel sayılar”

$\tilde{B}$ = “11’e yaklaşık sayılar”

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümeleri

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 10 \\ \left(1 + (x - 10)^{-2}\right)^{-1} & , x > 10 \end{cases}$$

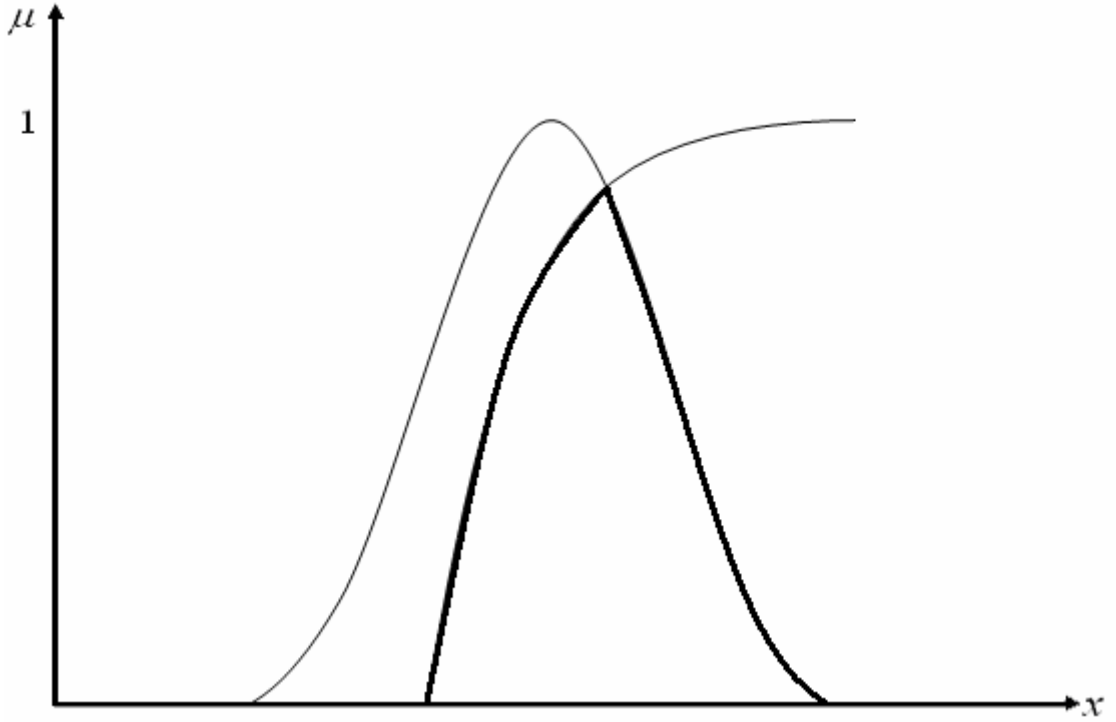
$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \left(1 + (x - 11)^4\right)^{-1}$$

üyelik fonksiyonlarıyla verilmiş olsun. Bu durumda iki bulanık kümenin kesişim ve birleşim kümelerinin üyelik fonksiyonları şu şekilde tanımlanır.

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \begin{cases} \min \left[\left(1 + (x - 10)^{-2}\right)^{-1}, \left(1 + (x - 11)^4\right)^{-1} \right] & , \quad x > 10 \\ 0 & , \quad x \leq 10 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max \left[\left(1 + (x - 10)^{-2}\right)^{-1}, \left(1 + (x - 11)^4\right)^{-1} \right], x \in X.$$

İki bulanık kümenin kesişiminin üyelik fonksiyonu Şekil 2.12 ile verilmiştir (Zimmermann,1993).



Şekil 2.12 $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin kesişimi.

2.7.3 Bulanık Kümenin Tümlenyeni

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin $\bar{\tilde{A}}$ tümlenyeni, $\forall x \in X$ için $\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanmıştır.

Örnek 2.13 :

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ve $\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$

ve $\tilde{B} = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1)\}$ olsun.

Bu iki bulanık kümenin kesişimi $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$,

$$\tilde{C} = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.3)\}$$

dir.

Bu iki bulanık kümenin birleşimi $\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$,

$$\tilde{D} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1)\}$$

dir.

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin X ' e göre tümleyenleri sırasıyla,

$$\bar{\tilde{A}} = \{(1, 0.8), (2, 0.5), (3, 0.2), (4, 0), (5, 0.3), (6, 0.7), (7, 1), (8, 1), (9, 1), (10, 1)\}$$

ve

$$\bar{\tilde{B}} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 0.8), (4, 0.6), (5, 0.4), (6, 0.2), (7, 0), (8, 0), (9, 1), (10, 1)\}$$

olacaktır (Zimmermann, 1993).

Burada, kesin kümeler için geçerli olan ,

$$A \cup \bar{A} \neq X$$

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

özellikleri bulanık kümelerde geçerli değildir (Aksoy vd., 2003).

2.7.4 Genişleme Prensibi (Extension Principle)

Bulanık küme teorisinin en önemli kavramlarından biri de kesin matematiksel kavramları bulanık kümelere genişletmede kullanılabilen genişleme prensibidir. Bu kavram ilk olarak Zadeh tarafından 1965'de ortaya atılmıştır. Daha sonra Zadeh'in 1973, 1975 ve Jain'in 1976'da yaptıkları çalışmalarda bu kavram ile ilgili çeşitli modifikasyonlar önerilmiştir. Zadeh'in 1973 ve Dubois ve Prade'nin 1980'de yaptıkları çalışmaları temel alarak genişleme prensibi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

X , uzayların kartezyen çarpımları olmak üzere $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ olsun. $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$ sırasıyla $X_1, \dots, X_r$ 'de r tane bulanık küme olmak üzere, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $y = f(x_1, \dots, x_r)$ bağıntısıyla verilsin. Genişleme prensibi, Y 'de bir $\tilde{B}$ bulanık kümesi tanımlama imkanı sağlar.

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, \dots, x_r), (x_1, \dots, x_r) \in X\}$$

ve

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min \{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

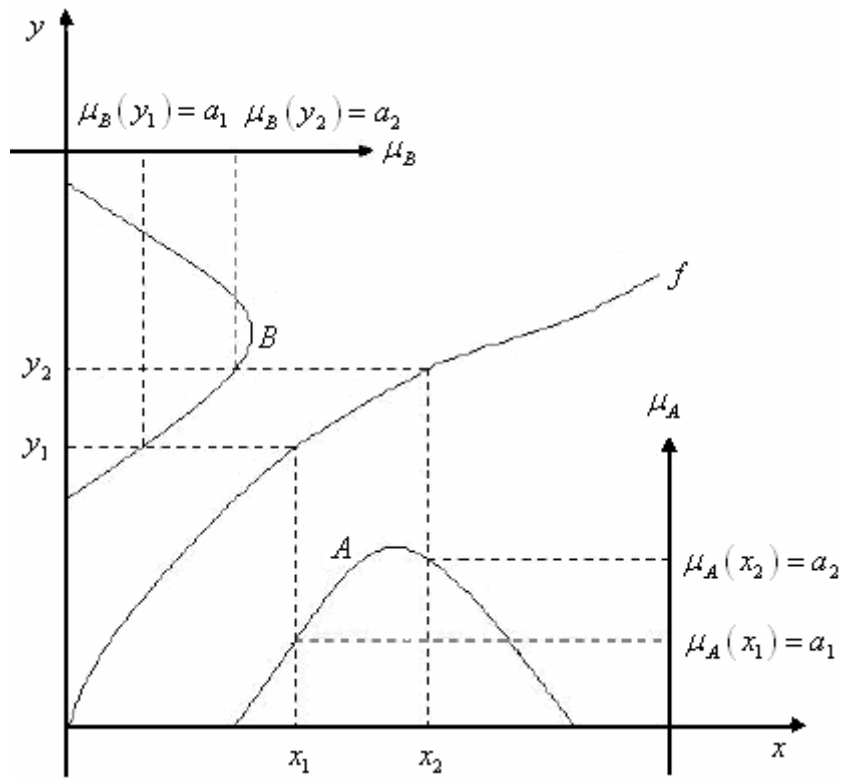
dır. Burada f^{-1} , f fonksiyonunun ters fonksiyonunu ifade etmektedir (Zimmermann,1993).

$r = 1$ için genişleme prensibi,

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) | y = f(x), x \in X\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

şeklindedir.

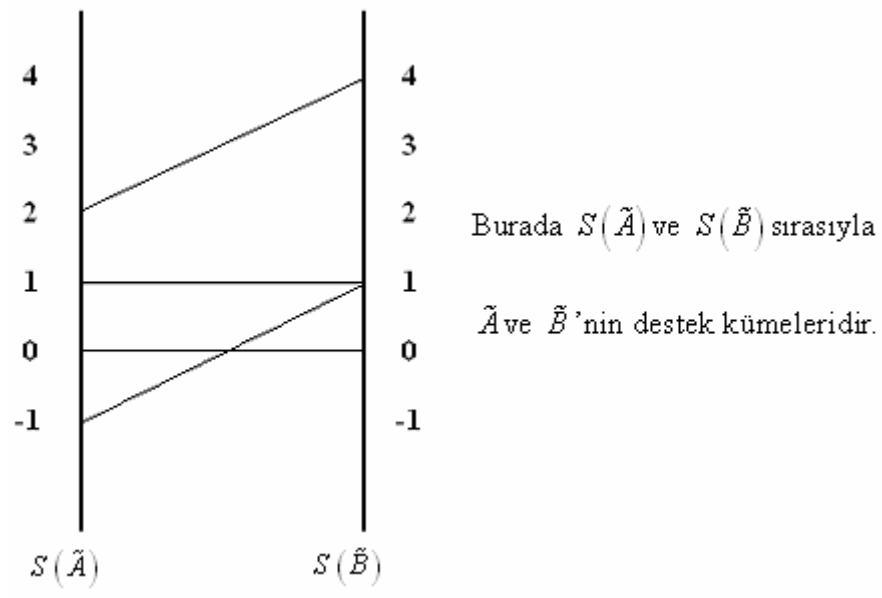


Şekil 2.13 Genişleme Prensibi.

Örnek 2.14:

$\tilde{A} = \{(-1, 0.5), (0, 0.8), (1, 1), (2, 0.4)\}$ ve $f(x) = x^2$ olması halinde genişleme prensibini uygulayalım.

$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(0, 0.8), (1, 1), (4, 0.4)\}$ sonucu elde edilir ve bu işlem şekil 2.14'de açıkça görülmektedir (Zimmerman, 1993).



Şekil 2.14 Örnek 2.14 için genişleme prensibi.

3. BULANIK KARAR VERME

3.1 Bulanık Kararlar

Karar terimi bir avukat, bir işadamı, bir general, bir psikolog ya da bir istatistik uzmanı tarafından kullanılıp kullanılmadığına bağlı olarak birçok farklı anlamlara sahip olabilir. Bu, bir durumda yasal bir yapı ifade ederken diğerinde matematiksel bir model olabilir.

Klasik karar teorisinde bir karar; karar alternatiflerinin (karar uzayı) bir kümesi; doğa durumlarının bir kümesi (durum uzayı kümesi); kararın her bir ikilisini atayan ve bir sonuç belirten bağıntı; ve son olarak sonuçları çekiciliklerine göre sıraya koyan fayda fonksiyonu ile tanımlanabilir. Belirlilik altında karar verirken karar verici, hangi durumu beklediğini bilir ve verilen geçerli durum uzayından en yüksek faydalı karar alternatifini seçer. Risk altında karar verirken ise karar verici hangi durumun gerçekleşeceğini bilmez, sadece durumların olasılık fonksiyonunu bilir. Dolayısıyla bu kez karar verme daha zor bir hal alır.

1970’de Bellman ve Zadeh, bir kararın klasik modelini göz önüne almışlar ve bulanık çerçevede karar vermek için, bulanık karar teorisindeki yazarların çoğu için bir hareket noktası olarak görev yapan bir model önermişlerdir. Amaç fonksiyonu gibi kısıtların da bulanık olduğu durumlarda belirlilik altında karar verme durumunu incelemişler ve şunları ileri sürmüşlerdir: bulanık amaç fonksiyonu ve kısıtlar kendi üyelik fonksiyonları ile karakterize edilebilirler. Amaç fonksiyonu ve aynı zamanda kısıtları sağlamayı (optimize etmeyi) istediğimizde, bulanık çerçevede bir karar, bulanık olmayan çerçevede karara benzer şekilde; amaç fonksiyonu ve kısıtları aynı zamanda sağlayan seçeneklerin seçimi olarak tanımlanır. Yukarıdaki tanıma bağlı kalınır ve kısıtların etkileşimli olmadığı kabul edilirse, “Mantıksal ve” kesişim işlemine karşılık gelir. Bu nedenle bulanık çerçevede bir karar, bulanık kısıtların ve bulanık amaç fonksiyonunun kesişimi olarak incelenebilir.

Bu kavram aşağıdaki örnek ile açıklanabilir [Bellman ve Zadeh 1970].

Örnek 3.1 :

Amaç fonksiyonu “x’in 10’dan yeteri kadar büyük olması” olarak ifade edilsin. Burada amacın üyelik fonksiyonu şu şekilde yazılabilir.

$$\mu_{\tilde{O}}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 10 \\ \left(1 + (x-10)^{-2}\right)^{-1} & , x > 10 \end{cases}$$

“x, 11 civarında olmalı” kısıtı ise,

$\mu_{\tilde{C}}(x) = \left(1 + (x-11)^4\right)^{-1}$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Kararın $\mu_{\tilde{D}}(x)$ üyelik fonksiyonu da,

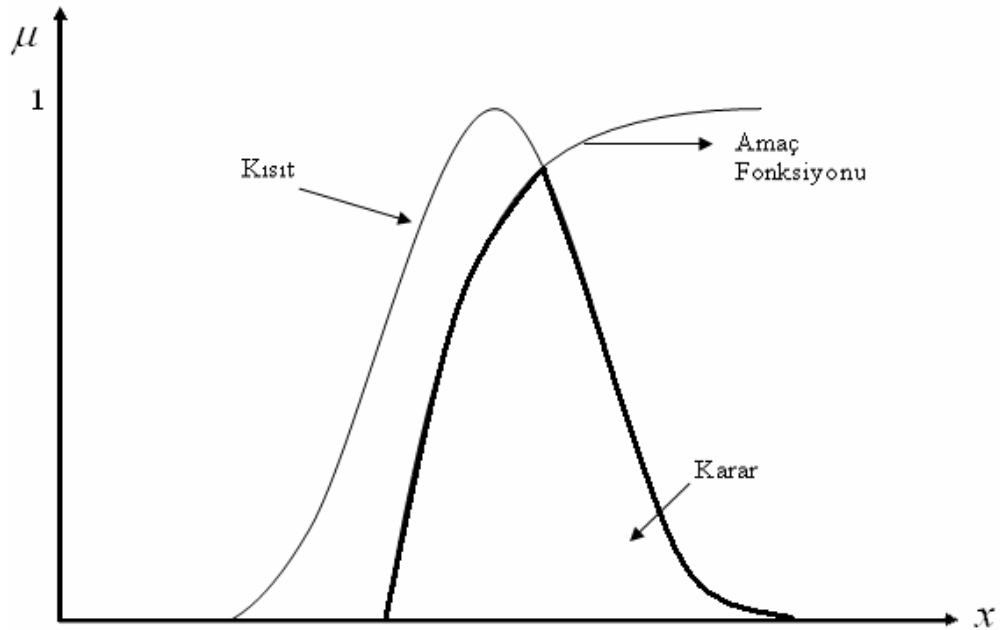
$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \mu_{\tilde{O}}(x) \wedge \mu_{\tilde{C}}(x)$$

ile ifade edilir. Dolayısıyla,

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \begin{cases} \min \left\{ \left(1 + (x-10)^{-2}\right)^{-1}, \left(1 + (x-11)^4\right)^{-1} \right\} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(1 + (x-11)^4\right)^{-1} & x > 11.75 \\ \left(1 + (x-10)^{-2}\right)^{-1} & 10 < x \leq 11.75 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

olacaktır. Bu bulanık karar Şekil 3.1’de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Bulanık karar.

Tanım 3.1 Bulanık Karar

Bellmann ve Zadeh'in 1970 yılındaki makalelerinde belirttikleri bulanık karar aşağıda belirtilmiştir.

Bir X alternatifler uzayında, bir $\tilde{G}$ bulanık hedefi ve bir $\tilde{C}$ bulanık kısıtı verilmiş olsun. Öyleyse, $\tilde{G}$ ve $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ ve $\tilde{C}$ 'nin kesişiminden meydana gelen bir bulanık küme olan $\tilde{D}$ karar şekline dönüşür. Yani,

$$\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$$

dır ve buna paralel olarak,

$$\mu_{\tilde{D}} = \min \{ \mu_{\tilde{G}}, \mu_{\tilde{C}} \}$$

dır.

Daha genel olarak, $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n$ gibi n tane hedef ve $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m$ gibi m tane kısıta sahip olduğumuzu farz edelim. O zaman nihai karar, verilen $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n$ hedeflerinin ve verilen $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m$ kısıtlarının kesişimidir. Yani,

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \dots \cap \tilde{G}_n \cap \tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \dots \cap \tilde{C}_m$$

ve buna paralel olarak

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{D}} &= \min \{ \mu_{\tilde{G}_1}, \mu_{\tilde{G}_2}, \dots, \mu_{\tilde{G}_n}, \mu_{\tilde{C}_1}, \mu_{\tilde{C}_2}, \dots, \mu_{\tilde{C}_m} \} \\ &= \min \{ \mu_{\tilde{G}_i}, \mu_{\tilde{C}_j} \} \\ &= \min \{ \mu_i \} \end{aligned}$$

dir.

Bellman ve Zadeh bu tanımlarında aşağıdaki üç kabulü gözönüne almışlardır.

1. Modelde hedef ve kısıtları birleştiren “ve”, “mantıksal ve” ye karşılık gelmektedir.
2. “Mantıksal ve”, kuramsal küme kesişimine karşılık gelmektedir.
3. Bulanık kümelerin kesişimi olurluluk anlamında minimum operatör ile tanımlanmıştır.

Bellman ve Zadeh, 1970 yılındaki makalelerinde kesişimin minimum yorumunun şartlar ve

çevreye bağlı olarak değiştirilebileceğini belirtmişler ve kararın açık bir tanımını, hedef ve kısıtların birleşmesi (karışması) olarak ifade etmişlerdir (Zimmerman,1993).

3.2 Bulanık Lineer Programlama

1976'da H.-J Zimmermann ilk olarak geleneksel lineer programlama problemlerini bulanık küme teorisini kullanarak modellemeyi önermiştir. Lineer programlama problemini, bulanık bir hedef ve bulanık kısıtlar ile ele almıştır. Bu çalışma, Bellman ve Zadeh'in 1970 yılında lineer üyelik fonksiyonları ile birlikte önerdikleri karar teorisini takiben yapılmıştır (Sakawa,1993).

Lineer programlama modelleri, karar uzayının kısıtlar ile; "hedef" (fayda fonksiyonu) in amaç fonksiyonu ile tanımlandığı ve karar tipinin belirlilik altında karar verme olduğu karar modelinin özel bir türü olarak düşünülecektir.

Klasik lineer programlama problemi;

$$\begin{aligned} \max f(x) &= c^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c, x &\in R^n, b \in R^m, A \in R^{m \times n} \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

Burada A , b ve c 'nin tüm bileşenleri kesin sayılardır. $\leq$ ve "max" kesin kavramlardır.

Eğer LP kararı bulanık bir çerçevede verilmek zorunda olursa, yukarıdaki modelde bazı değişiklikler olur. İlk olarak, karar verici amaç fonksiyonunu maksimum ya da minimum yapmayı gerçekten istemeyebilir. Daha doğrusu, net bir ifadeyle bile tanımlanamamış olan bazı istek seviyelerine ulaşmak isteyebilir.

İkinci olarak, kısıtlar bulanık olabilir yani " $\leq$ " işareti kesinlikle matematiksel anlamda düşünülmemelidir fakat küçük sapmalar kabul edilebilir. Bu, kısıtlar istek seviyelerini belirtirlerse ya da kısıtlar, kesin bir kısıt ile tam bir şekilde tahmin edilemeyen duyu gereksinimlerini (tat, renk, koku v.b.) belirtirlerse olabilir. Ayrıca, A matrisinin ya da b ve c vektörlerinin katsayıları bulanık karaktere sahip olabilir.

Son olarak, kısıtların rolü klasik lineer programlamadakinden farklıdır. Herhangi bir kısıt, çözümü uygun olmayan hale getirebilir. Bulanık lineer programlama bütün bu belirsizlik

tiplerini vermek için bir çok teknik sunar. Bunlardan en yaygın olanı Bellmann ve Zadeh tarafından verilen karar modelidir (Zimmerman,1993). Bu kısımda Bellmann ve Zadeh'in yaygın olan simetrik karar modeli incelenecektir. Bu modelde, bir bulanık maksimizasyonun nasıl yorumlanacağına karar vermek durumunda kalınacaktır. Burada, bulanık hedef için bir yaklaşım ve kesin amaç fonksiyonu için birer yaklaşım sunulacaktır.

Bazı yazarlar [Tanaka ve Asai 1984], A, b, c katsayılarını bulanık sayılar olarak ve kısıtları bulanık fonksiyonlar olarak düşünürler. Burada, hedef ve kısıtlar bulanık kümeler ile temsil edilecek ve daha sonra bir maksimum kararı elde etmek için birleştirilecektir.

Klasik LP'de herhangi bir kısıtın bozulması çözümü mümkün olmayan (imkansız) kılar. Dolayısıyla, bütün kısıtlar eşit ağırlıklı ya da eşit önemli olarak düşünülür. Klasik LP'den farklı olarak bulanık LP'de kısıtlara eklenecek göreceli ağırlıklar çok önemlidir.

Bulanık bir ortamda, lineer programlamanın özel bir modeli olarak geliştirilen "bulanık lineer programlama"nın klasik lineer programlamanın tersine tek bir model tipi olarak tanımlanamayacağı fakat modellenecek gerçek durumun özelliklerine ya da kabullerine bağlı olan bir çok çeşidinin mümkün olduğu açıktır.

Parametre veya sembollerdeki bulanıklık, üzerine konulan ' $\sim$ ' işareti ile gösterilir.

3.2.1 Hedef ve Kısıtlarda Bulanıklık Olması Hali

Karar vericinin hedefi bir bulanık küme ile ifade edebildiği ve çözüm uzayının bulanık kümeler ile modellenebilen kısıtlar ile tanımlandığı modeldir. Modelde, karar verici başarmak istediği amaç fonksiyonunun değeri için bir z istek seviyesi atar. Bu takdirde, bulanık lineer programlama problemi şu şekilde olur:

$$\text{Amaç: } c^T x \gtrsim z$$

$$\text{Kısıtlar: } Ax \lesssim b$$

$$x \geq 0$$

olacak şekilde x 'in bulunmasıdır.

Burada, $\lesssim, \leq$ 'in $\gtrsim$ ise $\geq$ 'in bulanıklaştırılmış şeklini ifade eder. $\max f(x) = c^T x$ amaç fonksiyonu, z 'i bir üst sınır olarak dikkate almak için minimumlaştırıcı hedef olarak yazılmak zorundadır.

$$\begin{pmatrix} -c \\ A \end{pmatrix} = B \text{ ve } \begin{pmatrix} -z \\ b \end{pmatrix} = d$$

ile ifade edilirse problem,

$$\begin{aligned} Bx &\leq d \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde x 'in bulunması haline dönüşür. Yukarıdaki denklemin $m+1$ satırının her biri, $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip bir bulanık küme ile ifade edilir. Modelin karar bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_{i=1} \mu_i(x)$$

dir.

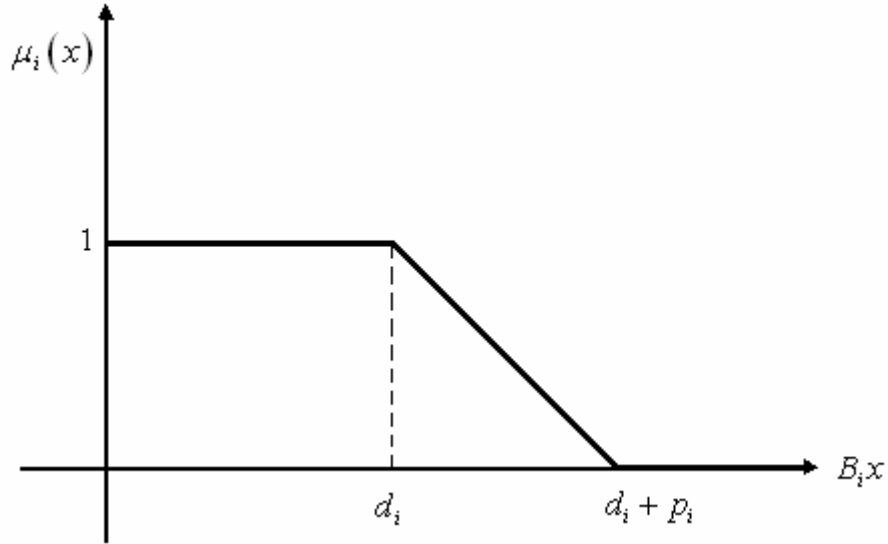
B_i , B 'nin i .satırını göstermek üzere $\mu_i(x)$, $B_i x \leq d_i$ bulanık eşitsizliğini sağlayan x 'in derecesi olarak yorumlanabilir.

Karar vericinin, bir bulanık küme ile değil de bir kesin optimal çözüm ile ilgilenmesi halinde,

$$\max_{x \geq 0} \min_{i=1} \mu_i(x) = \max_{x \geq 0} \mu_{\tilde{D}}(x)$$

maksimumlaştırıcı çözüm kullanılabilir.

$\mu_i(x)$, eğer amaç fonksiyonunu içeren kısıtlar tamamen bozulmuşsa 0 ve eğer iyi tanımlanmışsa (yani crisp anlamda iyi tanımlanmış) 1 olmalıdır. $\mu_i(x)$, 1'den 0'a doğru monoton azalmalıdır, üyelik fonksiyon grafiği



Şekil 3.2 Amaç fonksiyonu veya kısıtta $\lesseqgtr$ olması halinde üyelik fonksiyon grafiği.

dır. $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonu, $[d_i, d_i + p_i]$ tolerans aralığı boyunca lineer bir şekilde azalır.

Matematiksel gösterimi;

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & B_i x \leq d_i \\ \in [0,1] & d_i < B_i x \leq d_i + p_i \\ 0 & B_i x > d_i + p_i \end{cases}$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & B_i x \leq d_i \\ 1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i} & d_i < B_i x \leq d_i + p_i \\ 0 & B_i x > d_i + p_i \end{cases}$$

yapısındaadır. p_i 'ler amaç fonksiyonu ve kısıtların kabul edilebilir bozulmalarının (sapmalarının) değerleridir.

Bazı yeni düzenlemelerden sonra,

$$\max_{x \geq 0} \min_i \left(1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i} \right)$$

elde edilir.

Buradaki amaca Bellman ve Zadeh'in karar modeli uygundur. Yani bu çözüm, kesin kısıtlar ve $x \geq 0$ non-negatiflik şartları altında

$$\mu_{\bar{D}}(x) = \min_i \{\mu_i(x)\} = \lambda \text{ ise}$$

$$\mu_i(x) \geq \lambda \quad i = 1, \dots, m$$

şartlarını da sağlamalıdır.

Lineer programlama problemi;

$$\text{Amaç:} \quad \max \quad \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \lambda p_i + B_i x \leq d_i + p_i \quad i = 1, \dots, m+1$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$x \geq 0$$

yapısındadır. Gerçekten;

$$\min_i \{\mu_i(x)\} = \lambda \text{ ise } \forall i (i = 1, 2, \dots, m+1) \text{ için } \mu_i(x) \geq \lambda$$

$$1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{B_i x - d_i}{p_i}$$

$$p_i (1 - \lambda) \geq B_i x - d_i$$

$$\lambda p_i + B_i x \leq d_i + p_i$$

bulunacaktır.

Eğer bu lineer programlama probleminin çözümü (λ, x_0) ise, bu çözüm modelin maksimumlaştırıcı çözümüdür.

$i = 1, \dots, m+1$, $0 \leq t_i \leq p_i$ olmak üzere, i . kısıtın bozulma derecesini ölçen bir t_i değişkeni tanımlansın. O zaman, i . satırın üyelik fonksiyonu;

$$\mu_i(x) = 1 - \frac{t_i}{p_i}$$

olur.

O zaman, eşdeğer crisp model

maksimum λ

$$\lambda p_i + t_i \leq p_i \quad i = 1, \dots, m+1$$

$$B_i x - t_i \leq d_i$$

$$t_i \leq p_i$$

$$x, t \geq 0$$

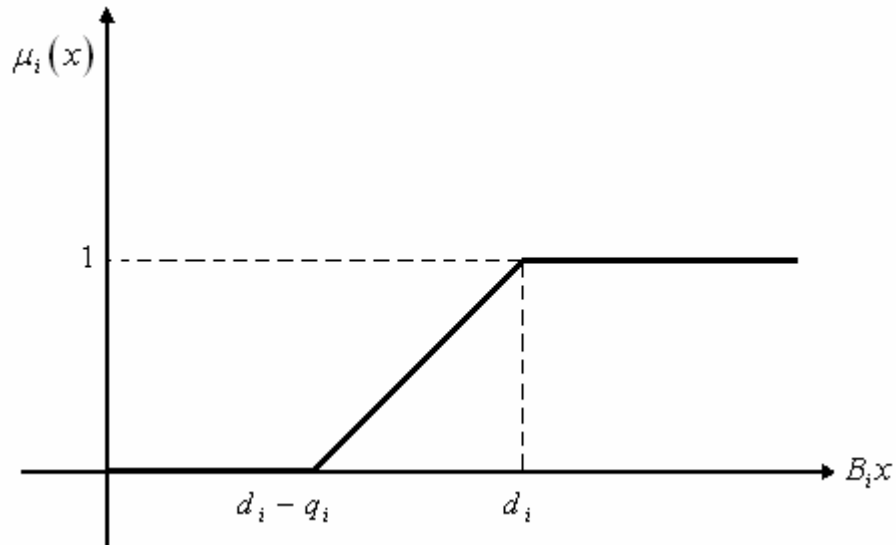
yapısındadır.

Amaç fonksiyonu veya kısıtta $\geq$ olması halinde lineer programlama problemi,

$$Bx \geq d$$

$$x \geq 0$$

olacak şekilde x 'in bulunması haline dönüşür. Amaç fonksiyonu ve kısıtların kabul edilebilir sapmalarının değerleri q_i olmak üzere üyelik fonksiyon grafiği;



Şekil 3.3 Amaç fonksiyonu veya kısıtta $\geq$ olması halinde üyelik fonksiyon grafiği.

ve denklemini

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & B_i x < d_i - q_i \\ \frac{B_i x - d_i}{q_i} + 1 & d_i - q_i \leq B_i x \leq d_i \\ 1 & B_i x > d_i \end{cases}$$

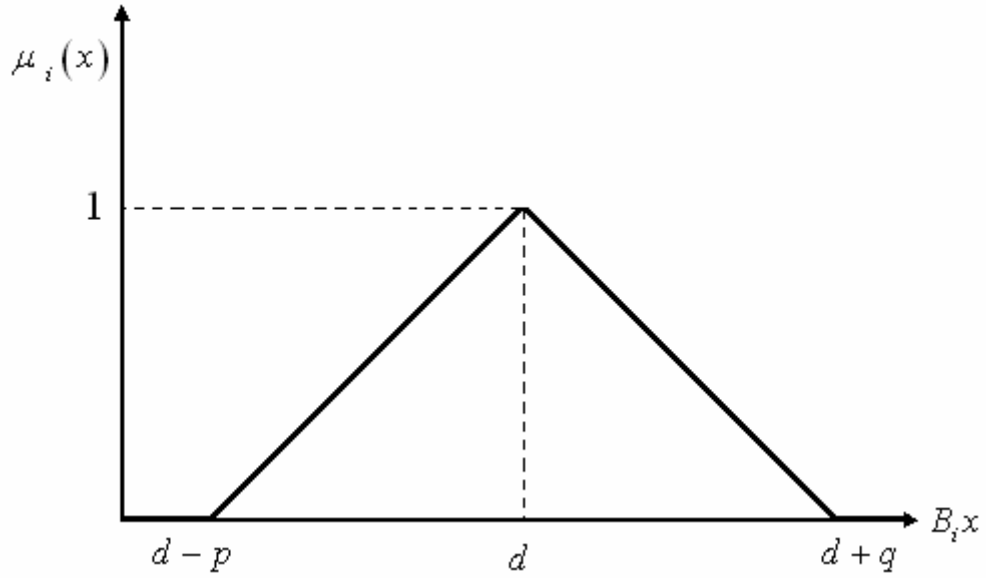
olur.

Amaç fonksiyonu veya kısıtta $\cong$ olması halinde lineer programlama problemi,

$$Bx \cong d$$

$$x \geq 0$$

olacak şekilde x 'in bulunması haline dönüşür. Bx 'in d hedefinden negatif yönde p , pozitif yönde q sapmasının kabul edilebilir olduğu farz edilsin. Bu durumda üyelik fonksiyon grafiği;



Şekil 3.4 Amaç fonksiyonu veya kısıtta $\cong$ olması halinde üyelik fonksiyon grafiği.

ve denklemini;

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & B_i x < d - p \\ \frac{B_i x - d}{p} + 1 & d - p \leq B_i x < d \\ \frac{-B_i x + d}{q} + 1 & d \leq B_i x \leq d + q \\ 0 & B_i x > d + q \end{cases}$$

yapısındadır.

3.2.2 Kesin Amaç Fonksiyonu ve Kısıtlarda Bulanıklık Olması Hali

Bu modelde amaç fonksiyonu kesin (crisp), kısıtlar ise bulanıktır. Yani amaç fonksiyonu ya maksimum ya da minimum yapılmak zorundadır. Bu modelde problem, kısıtların tanımlandığı bulanık bölge üzerinde extremum noktasının bulunmasıdır.

Orlovski 1977 yılındaki çalışmasında, çözüm uzayının bütün α -seviye kümelerine karşılık gelen amaç fonksiyonunun $r = f(x)$ en iyi değerlerini hesaplamayı önermiştir. Bu makalesinde, bulanık küme kararını; amaç fonksiyonunun çözüm uzayının ilgili α -seviyelerine eşit $\mu_f(r)$ üyelik derecesine sahip optimal değerleri olarak düşünmüştür.

Modeli tanıtmadan önce modelde kullanılacak bazı tanımlara yer verilecektir.

Tanım 3.2:

Wernes'in 1984 yılında önerdiği bulanık küme karar tanımı aşağıdaki gibidir.

Çözüm uzayının α -seviye kümeleri $R_\alpha = \{x | x \in X, \mu_R(x) \geq \alpha\}$ ve her bir α -seviye kümesinin en iyi çözümler kümesi $N(\alpha) = \left\{x | x \in R_\alpha, f(x) = \sup_{x' \in R_\alpha} f(x')\right\}$ olsun.

Böylece bulanık küme “kararı”,

$$\mu_{opt}(x) = \begin{cases} \sup_{\alpha \in N(\alpha)} \alpha & x \in \bigcup_{\alpha > 0} N(\alpha) \\ 0 & x \notin \bigcup_{\alpha > 0} N(\alpha) \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile, “amaç fonksiyonunun optimal değerler” bulanık kümesi ise,

$$\mu_f(r) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(r)} \mu_{opt}(x) & r \in R \wedge f^{-1}(r) \neq \emptyset \\ 0 & r \in R \wedge f^{-1}(r) = \emptyset \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Burada $f(x)$, r değerini alan bir fonksiyondur. Her α için,

$$\text{Amaç : } \max f(x)$$

$$\text{Kısıtlar: } \alpha \leq \mu_i(x) \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \in X$$

yapısındaki LP problemi çözümlidir.

Tanım 3.3: $f: X \rightarrow R^1$, X 'den R^1 'e bir amaç fonksiyonu, $\tilde{R}$ bir bulanık uygun bölge (çözüm uzayı), $S(\tilde{R})$ $\tilde{R}$ 'nin desteği ve R_1 , $\alpha = 1$ için $\tilde{R}$ 'nin α -seviye kesenidir. $\tilde{R}$ çözüm

uzayını veren hedefin (amaç fonksiyonunun) üyelik fonksiyonu:

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \leq \sup_{R_1} f \\ \frac{f(x) - \sup_{R_1} f}{\sup_{S(\tilde{R})} f - \sup_{R_1} f} & \sup_{R_1} f < f(x) < \sup_{S(\tilde{R})} f \\ 1 & \sup_{S(\tilde{R})} f \leq f(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Fonksiyonel uzayda buna karşılık gelen üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{G}}(r) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(r)} \mu_{\tilde{G}}(x) & r \in R \wedge f^{-1}(r) \neq \emptyset \\ 0 & r \in R \wedge f^{-1}(r) = \emptyset \end{cases}$$

dır.

Bulanık LP'nin yapısı

$$\max f(x) = cx$$

$$\begin{aligned} Ax &\lesseqgtr b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

veya

$$\min f(x) = cx$$

$$\begin{aligned} Ax &\gtrless b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(1) yapısındaki bulanık kısıtları temsil eden bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları;

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & A_i x \leq b_i \\ \frac{b_i + p_i - A_i x}{p_i} & b_i < A_i x \leq b_i + p_i \\ 0 & A_i x > b_i + p_i \end{cases}$$

ve (2) yapısındaki bulanık kısıtları temsil eden bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları;

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & A_i x \geq b_i \\ \frac{-b_i + p_i + A_i x}{p_i} & b_i - p_i \leq A_i x < b_i \\ 0 & A_i x < b_i - p_i \end{cases}$$

yapısındadır. Burada p_i , i . kısıtın hedeften kabul edilebilir sapmasıdır.

$A_i x = b_i$ için $\mu_i(x) = 1$ yani $\mu_{\bar{R}}(x) = 1$, $A_i x = b_i + p_i$ ya da $A_i x = b_i - p_i$ için $\mu_i(x) = 0$ yani $\mu_{\bar{R}}(x) = 0$ olduğundan üyelikler $[b_i - p_i, b_i]$ aralığında monoton artan, $[b_i, b_i + p_i]$ aralığında monoton azalandır.

Amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu aşağıdaki iki LP probleminin çözümü ile belirlenir.

$$\text{Amaç: } \max f(x) = cx$$

$$\text{Kısıtlar: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

lineer programlama probleminde $\max f(x) = cx$ amaç fonksiyonunun $\mu_i(x) = 1$ 'e karşılık gelen kesin kısıtlar üzerindeki optimumu f_1 olsun. Yani, $\sup_{R_1} f = (cx)_{opt} = f_1$ dir.

$$\text{Amaç: } \max f(x) = cx$$

$$\text{Kısıtlar: } Ax \leq b + p$$

$$x \geq 0$$

lineer programlama probleminde $\max f(x) = cx$ amaç fonksiyonunun $\mu_i(x) = 0$ 'a karşılık gelen bulanık kısıtlar üzerindeki optimumu f_0 olsun. Yani, $\sup_{S(\bar{R})} f = (cx)_{opt} = f_0$ dir.

Dolayısıyla amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\bar{G}}(x) = \begin{cases} 1 & f_0 \leq cx \\ \frac{cx - f_1}{f_0 - f_1} & f_1 < cx < f_0 \\ 0 & cx \leq f_1 \end{cases}$$

yapısındadır.

Bulanık LP'nin çözümü amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtların minimum üyeliğini maksimum yapan çözümdür. Yani,

$$\min \{ \mu_{\tilde{G}}(x), \mu_i(x); i=1, \dots, m \} = \lambda$$

olmak üzere

$$\max \lambda$$

$$\mu_{\tilde{G}}(x) \geq \lambda$$

$$\mu_i(x) \geq \lambda \quad i=1, \dots, m$$

$$x \in X$$

problemin çözümüdür.

Daha açık bir ifade ile

$$\text{Amaç: } \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar: } \lambda(f_0 - f_1) - cx \leq -f_1$$

$$\lambda p + Ax \leq b + p$$

$$\lambda, x \geq 0$$

şeklinde belirtilebilir.

Örnek 3.2: Bulanık LP problemi

$$\text{Amaç: } \max f(x) = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$\text{Kısıtlar: } 0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

olsun.

Bulanık kısıtlardaki sapmaların sırasıyla $p_1 = 6$, $p_2 = 4$, $p_3 = 2$ olduğu kabul edilsin.

Kısıtların üyelik fonksiyonları:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & x_1 < 3 \\ \frac{9-x_1}{6} & 3 \leq x_1 \leq 9 \\ 0 & x_1 > 9 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & x_1 + x_2 < 4 \\ \frac{8-(x_1+x_2)}{4} & 4 \leq x_1 + x_2 \leq 8 \\ 0 & x_1 + x_2 > 8 \end{cases}$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 1 & 0.5x_1 + x_2 < 3 \\ \frac{5-(0.5x_1+x_2)}{2} & 3 \leq 0.5x_1 + x_2 \leq 5 \\ 0 & 0.5x_1 + x_2 > 5 \end{cases}$$

dır. LP problemi

Amaç: $\max f(x) = 2x_1 + x_2$

$$x_1 \leq 9 - 6\alpha$$

Kısıtlar: $x_1 + x_2 \leq 8 - 4\alpha$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 5 - 2\alpha$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

olacak şekilde düzenlenir.

$\mu_i(x) = 1$ yani $\mu_{\bar{R}}(x) = 1$ tatmin düzeyinde, yani kısıtlarda herhangi bir bozulma olmadığında problem,

Amaç: $\max f(x) = 2x_1 + x_2$

$$x_1 \leq 3$$

Kısıtlar : $x_1 + x_2 \leq 4$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

dır. Yani $\alpha = 1$ durumudur. Problemin optimal çözümü $x_1 = 3, x_2 = 1$ için $\max f(x) = f_1 = 7$

dir. Bu çözüm kesin kısıtlara göre bulunmuştur.

$\mu_i(x) = 0$ yani $\mu_{\bar{R}}(x) = 0$ tatmin düzeyinde, yani kısıtlar tamamen bozulduğunda problem,

Amaç: $\max f(x) = 2x_1 + x_2$

$$x_1 \leq 9$$

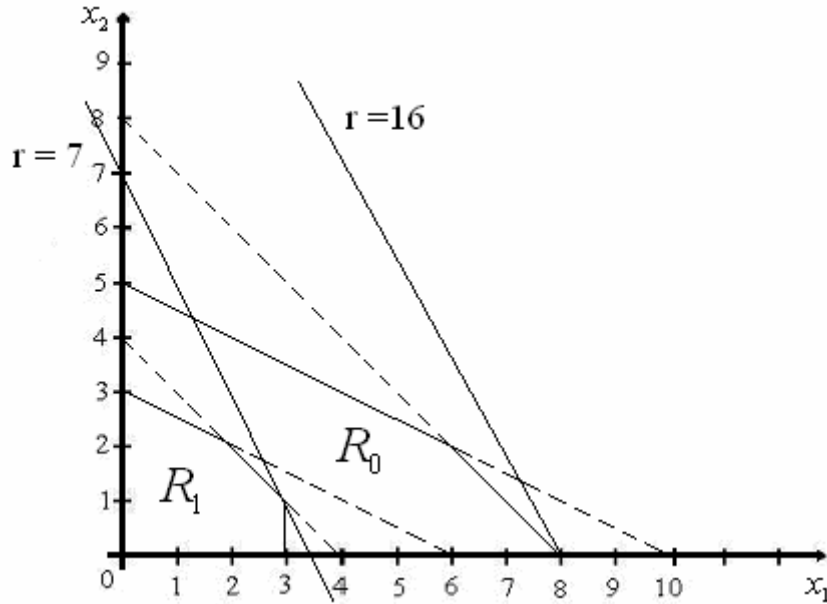
Kısıtlar : $x_1 + x_2 \leq 8$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

yapısındadır. Yani $\alpha = 0$ durumudur. Bu problemin optimal çözümü $x_1 = 8, x_2 = 0$ için $\max f(x) = f_0 = 16$ olur. Burada amaç fonksiyonu bulanık kısıtlara göre optimal yapılmıştır.

Şekil 3.5 $\mu_{\tilde{r}}(x) = 0$ ve $\mu_{\tilde{r}}(x) = 1$ için R_0 ve R_1 uygun bölgelerini göstermektedir.



Şekil 3.5 $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0$ seviyelerine karşılık gelen uygun bölgeler R_1 ve R_0 .

$7 \leq \max \leq 16$ olmak üzere $\max f(x) = 2x_1 + x_2$ amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 1 & 2x_1 + x_2 \geq 16 \\ \frac{2x_1 + x_2 - 7}{9} & 7 < 2x_1 + x_2 < 16 \\ 0 & 2x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

dır.

Optimal karar problemi ise,

Amaç: $\max \lambda$

$$\mu_{\bar{G}}(x) = \frac{2x_1 + x_2 - 7}{9} \geq \lambda$$

$$\mu_1(x) = \frac{9 - x_1}{6} \geq \lambda$$

$$\text{Kısıtlar: } \mu_2(x) = \frac{8 - (x_1 + x_2)}{4} \geq \lambda$$

$$\mu_3(x) = \frac{5 - (0.5x_1 + x_2)}{2} \geq \lambda$$

$$\lambda, x_1, x_2 \geq 0$$

ile çözülebilir. Problemi düzenlersek,

Amaç: $\max \lambda$

$$9\lambda - 2x_1 - x_2 \leq -7$$

$$6\lambda + x_1 \leq 9$$

$$\text{Kısıtlar: } 4\lambda + x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2\lambda + 0.5x_1 + x_2 \leq 5$$

$$\lambda, x_1, x_2 \geq 0$$

Problemin WINQSB ile çözümü $x_1 = 5.84$, $x_2 = 0.05$, $\lambda = 0.53$ ve $f(x) = 11.73$ olarak bulunur (Zimmerman, 1993).

3.3 Bulanık Çok Kriterli Karar Verme (BÇKKV)

Faaliyetlerin arzu edilebilirliklerine göre karşılaştırılmaları, ürünlerin uygunluğuna karar verilmesi veya karar problemlerinde optimal çözümlerin belirlenmesi çoğu durumda tek bir kriter veya tek bir amaç fonksiyonu kullanılarak yapılamaz. Bu durum çok kriterli karar vermeyi gerekli kılar (Zimmerman, 1993)

Çok kriterli karar verme, karar vericilerin seçenekleri birçok kritere göre tanımlamasına, değerlendirmesine, sıralamasına, derecelendirmesine, seçme ya da reddetmesine yardımcı olan kavramlar, yaklaşımlar, modeller ve yöntemler bütünüdür (Tiryaki, 2003).

Çok kriterli karar vermede iki ana alan geliştirilmiştir. Çok amaçlı karar verme ve çok nitelikli karar verme. Bu iki alan arasındaki temel fark; çok amaçlı karar vermenin sürekli karar uzaylarına yoğunlaşması, çok nitelikli karar vermenin ise kesikli karar uzaylarına yoğunlaşmasıdır (Zimmerman, 1993). Yani çok nitelikli karar analizinde seçenekler kümesi sonlu ve ayrıktır. Seçenekler birer birer ele alınarak birçok kritere göre sıralaması,

derecelendirilmesi ve değerlendirilmesi yapılır. Çok amaçlı karar vermede ise daha çok uygun seçenekler sayısı büyük olan deterministik problemlere uygulanabilir. Seçenekler kümesi karar değişkenleri üzerinde tanımlanmış kısıtlarla oluşturulur ve aynı anda birden fazla amaç fonksiyonu ele alınır. Her iki yaklaşımda da uygun seçenekler etkin algoritmalar kullanılarak küçük sayıda seçeneklere daraltılır. Bunun sonunda bulunan seçenekler kümesi istenen çözümler kümesidir (Tiryaki, 2003).

Çok kriterli karar verme üzerindeki literatür yakın geçmişte oldukça gelişmiştir. Bulanık küme teorisi hem çok amaçlı karar vermeye hem de çok nitelikli karar vermeye önemli katkıda bulunmuştur (Zimmerman,1993).

Çok kriterli karar vermeyi ele almada dört önemli anahtar sözcük; nitelikler (attributes), amaçlar (objectives), hedefler (goals), kriterler (criteria) dir. Bu terimlerin evrensel tanımları yoktur.

Kriterler: Kriterler faydanın bir ölçüsü ve değerlendirme için bir kaynaktır. Kriterler, gerçek bir problem ortamında niteliklerin veya amaçların bir şekli olarak ortaya çıkarlar.

Hedefler: Hedefler, isteğin öncelik değerleri veya dereceleridir. Genellikle bunları kısıtlar olarak belirtiriz. Çünkü bunlar alternatif kümesini kısıtlamak ve sınırlamak için tasarlanmıştır.

Hedef belli bir noktayı gösterirken, amaç genel olarak bir istek yönünü gösterir (Lai ve Hwang, 1996). Şu halde hedefler, amaçların daha da somutlaşarak belirli değerlere dönüşmüş şekilleri olarak tanımlanabilir (Evren ve Ülengin, 1992).

Nitelikler (Bileşenler): Performans dereceleri, bileşenler, faktörler, ayırt edici nitelikler ve özellikler nitelikler için eşanlamlı sözcüklerdir. Bir nitelik, bir amacın seviyelerini değerlendirme anlamında sağlamalıdır. Her bir alternatif, bir çok nitelik ile tanımlanabilir (Lai ve Hwang, 1996).

Amaçlar: Bir karar verme probleminde amaçlar, kriterlerin karar vericinin arzuları doğrultusunda yönlendirilmiş şekli olarak tanımlanabilir (Evren ve Ülengin, 1992).

3.3.1 Çok Amaçlı Karar Verme (ÇAKV)

Çok amaçlı karar verme problemi, matematiksel programlamada genellikle “vektör-maksimizasyonu” problemi olarak adlandırılır ve ilk defa Kuhn ve Tucker tarafından 1951’de ele alınmıştır (Zimmerman,1993). Matematiksel olarak bu problem;

$$\max(z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x))$$

Kısıtlar: $Ax \leq 0$

$$x \geq 0$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada x , n -boyulu karar değişkenleri vektörüdür. Görüldüğü gibi bir amaç fonksiyonu yerine k tane amaç fonksiyonu ihtiva eden bir vektörün maksimize edilmesi sözkonusudur. Problemin optimum çözümü tüm amaç fonksiyonlarını birlikte enbüyükleyen çözümdür. Böyle bir çözüme ulaşmak çok zordur. Çünkü genellikle göz önüne alınan amaçlar, diğer bir deyimle değerlendirme kriterleri birbiri ile çelişkili ve negatif yönde etkileşimlidir. Örneğin, bir fabrikanın kontrol kısmının temel probleminin özünü, kaliteyi arttırmak, kalite kontrol masafalarını azaltmak gibi amaçlar oluşturur. Aslında bu iki amaç birbirini ters yönde etkilemektedir. Bu halde optimum çözümden söz etmek zorlaşmaktadır. Her bir amaç için optimum olan çözümlerin belirli bir şekilde karar vericinin tercihlerini de dikkate alarak uzlaştırılması en çıkar yol olarak gözükmektedir. Sonuçta ulaşılan çözüme de tek amaçlı karar problemlerindeki optimum çözüm yerine, en iyi uzlaşık çözüm demek daha doğru olacaktır (Evren ve Ülengin, 1992).

Tanım 3.5:

Vektör maksimizasyonu problemi, $z(x) = (z_1(x), \dots, z_k(x))$ $x \in R^n$ 'den R^k 'ya vektör değerli bir fonksiyon ve X çözüm uzayı olmak üzere

$$\text{“maksimum” } \{z(x) | x \in X\}$$

olarak tanımlanır.

Vektör-maksimizasyonu problemi en az iki aşamaya ayrılabilir;

1. Etkin çözümlerin belirlenmesi
2. Optimal uzlaşık bir çözümün belirlenmesi.

Çok amaçlı problemlerde, verilen kısıtlar altında tüm amaç fonksiyonlarının aynı anda en iyi değerini aldığı optimal nokta ideal nokta olarak adlandırılır.

Tanım 3.6:

$z_i^* = \max \{z_i(x) | Ax \leq b, x \geq 0\}$, $i = 1, \dots, k$ için her bir amacın optimal değeri olmak üzere

$z_i^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*)$ noktasına ideal nokta denir.

Tanım 3.7:

$\text{Max } \{z(x) | x \in X\}$, Tanım 3.5’de tanımlandığı gibi bir vektör maksimizasyonu problemi olmak üzere,

$z_i(x) \geq z_i(\bar{x}) \quad i=1, \dots, k$ ve en az bir $i=1, \dots, k$ için $z_i(\hat{x}) > z_i(\bar{x})$ olacak şekilde bir $\hat{x} \in X$ yoksa, $\bar{x}$ bir “etkin çözüm” olarak adlandırılır.

Bütün etkin çözümlerin kümesi genellikle “tam çözüm” olarak adlandırılır. Burada $z_i(\bar{x})$ değerleri basılamaz çözüm olarak adlandırılır.

Tanım 3.8:

Bir vektör maksimizasyonu probleminin optimal uzlaşık çözümü, karar verici tarafından vektör değerli amaç fonksiyonu içinde kapsanan bütün kriterler göz önünde bulundurularak bütün diğer çözümlere göre tercih edilen bir $x \in X$ çözümüdür.

Etkin çözümler kümesinden optimal uzlaşık çözüm olarak adlandırılan bir özel çözüm elde etmek için üç ana yaklaşım bilinir.

1. Fayda Yaklaşımı [Keeney ve Raiffa 1976]
2. Hedef Programlama [Charnes ve Cooper 1961]
3. Etkileşimli Yaklaşımlar [Dyer 1973]

Bu yaklaşımların ilk iki tanesi karar vericinin tercih fonksiyonunu, bireysel amaç fonksiyonlarının ya ağırlıklar (faydalar) ya da uzaklık fonksiyonları (örneğin bir ideal çözümden uzaklık gibi) ile birleşmesine göre belirleyebileceğini varsaymaktadır. Bu yaklaşımlar genellikle, bireysel amaç fonksiyonlarının kombinasyonunun, lineer kombinasyonlar ile elde edilen en yüksek toplam faydaya sahip uzlaşık çözüme götürdüğünü kabul eder. Üçüncü yaklaşım sadece kabul edilebilir bir uzlaşık çözüme ulaşmak için yerel bilgiyi kullanır.

Örnek 3.3:

$$\text{Amaç : } \max Z_1(x) = -x_1 + 2x_2$$

$$Z_2(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Kısıtlar : } -x_1 + 3x_2 \leq 21$$

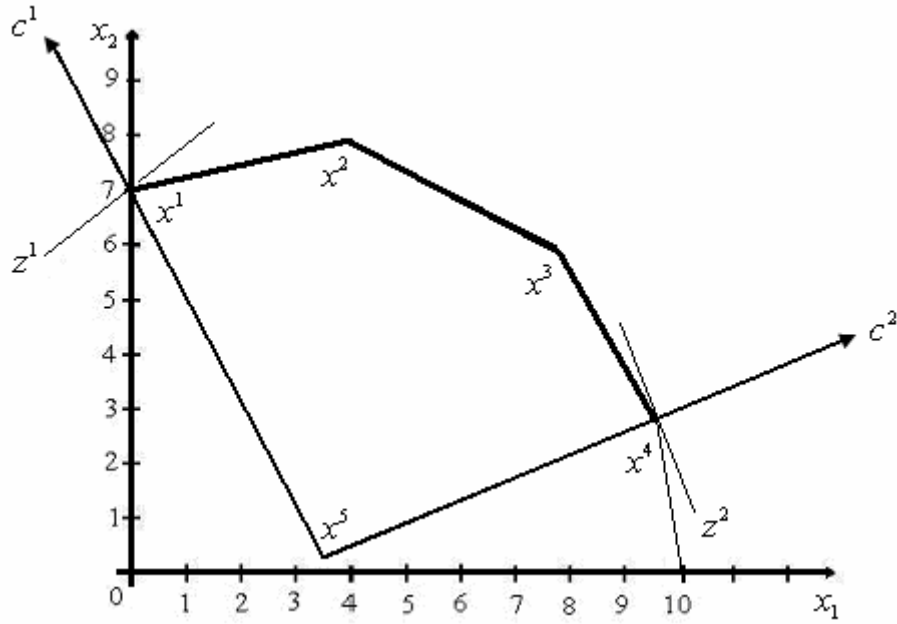
$$x_1 + 3x_2 \leq 27$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 45$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Çok amaçlı lineer programlama problemi verilmiş olsun. Şekil 3.6 bu problemin çözüm uzayını gösterir.



Şekil 3.6 Çözüm uzayı.

“Tam çözüm”, $x^1 - x^2 - x^3 - x^4$ kenarıdır. $x^1(0,7)$, $z_1(x) = -x_1 + 2x_2$ amaç fonksiyonuna göre, $x^4(9,3)$ ise $z_2(x) = 2x_1 + x_2$ amaç fonksiyonuna göre optimaldir. $x^5 = (3.4; 0.2)$ çözümü $z_1(x^5) = -3, z_2(x^5) = 7$ olarak amaçların kabul edilebilir en küçük değerleridir.

Amaçların optimal noktaları şu şekilde olacaktır.

$$x^1 = (0,7) \text{ için } \max z_1(x) = z_1(x^1) = z_1^* = 14 \text{ ve } z_2(x^1) = 7$$

$$x^4 = (9, 3) \text{ için } \max z_2(x) = z_2(x^4) = z_2^* = 21 \text{ ve } z_1(x^4) = -3$$

dir.

Amaç fonksiyonlarını tanımlayan bulanık kümelerin $\mu_1(x)$ ve $\mu_2(x)$ üyelik fonksiyonları sırasıyla $z_1(x) = 14$ ve $z_2(x) = 21$ ' in en yüksek başarılabılır değerlerinde 0'dan 1'e doğrusal olarak artar.

Çok amaçlı lineer programlama probleminin çözümüne bulanık bir yaklaşım aşağıda verilmektedir.

Amaçların üyelik fonksiyonları;

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0 & z_1(x) < -3 & \text{için} \\ \frac{z_1(x) + 3}{17} & -3 < z_1(x) \leq 14 & \text{için} \\ 1 & z_1(x) > 14 & \text{için} \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0 & z_2(x) < 7 & \text{için} \\ \frac{z_2(x) - 7}{14} & 7 \leq z_2(x) \leq 21 & \text{için} \\ 1 & z_2(x) > 21 & \text{için} \end{cases}$$

olarak ifade edilir.

Problem üyelik fonksiyonlarından yararlanarak;

Amaç: $\max \lambda$

$$\frac{z_1(x) + 3}{17} \geq \lambda$$

$$\frac{z_2(x) - 7}{14} \geq \lambda$$

Kısıtlar:

$$-x_1 + 3x_2 \leq 21$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 27$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 45$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

lineer programlama problemine dönüştürülür. Modelin son hali,

$$\begin{aligned}
 \text{Amaç:} \quad & \max \lambda \\
 & x_1 - 2x_2 + 17\lambda \leq 3 \\
 & 2x_1 + x_2 - 14\lambda \geq 7 \\
 & -x_1 + 3x_2 \leq 21 \\
 \text{Kısıtlar:} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 27 \\
 & 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 30 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

yapısındadır.

Problemin çözümü $x_1 = 5.0323, x_2 = 7.3226$ ve $\lambda = 0.7419$ olarak bulunur. $x^0 = (5.03; 7.32)$ uzlaşık çözümüne karşılık gelen amaç fonksiyon değerleri $z_1(x^0) = 9.6129$ ve $z_2(x^0) = 17.3872$ dir (Zimmerman,1993).

3.3.2 Çok Nitelikli Karar Verme (ÇNKV)

Bir Çok Nitelikli Karar Verme (Multi Attribute Decision Making (MADM)) problemi,

$$D = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

olarak ifade edilebilir. Burada $A_i, i = 1, 2, \dots, m$ mümkün alternatifleri, $C_j, j = 1, 2, \dots, n$ alternatiflerin performanslarının ölçüldüğü kriterleri, x_{ij}, A_i alternatifinin C_j kriterine göre performans puanını (reytingini), $w_j (j = 1, \dots, n)$ ise C_j kriterlerinin göreceli önemini ifade etmektedir.

Klasik Çok Nitelikli Karar Verme çözüm yöntemlerinde bütün x_{ij}, w_j değerleri kesin sayılar olarak kabul edilir. Bir fayda fonksiyonu $U(x_1, x_2, \dots, x_m)$, karar verici tarafından üstü kapalı

olarak veya açıkça tanımlanır. Fayda fonksiyonu, A_i alternatifinin x_{ij} performans puanlarını birleştirerek bir U_i final faydası oluşturur. Burada final faydası, bir alternatifin karar vericinin faydasını ne kadar iyi tatmin ettiğini gösterir. Yüksek final faydalı alternatifler karar verici tarafından tercih edilen olarak ifade edilir. Gerçek hayat problemlerinde, alternatiflerin performans puanlarını gösteren x_{ij} değerleri kesin, bulanık ya da dilsel olabilir.

Örneğin; bir profesör pozisyonu için 3 aday düşünülmektedir. Yaratıcılık (C_1), Olgunluk (C_2), İletişim Becerisi (C_3) ve Yayın Sayısı (C_4) kriter olarak kullanılmıştır. İlk üç kriter için performans puanları sayılabilir değildir, bunlar “iyi”, “orta”, “kötü” v.b. gibi dilsel terimlerle ifade edilir. Dördüncü kriter ise bazı tam sayı değerler ile ifade edilebilir. Görüldüğü gibi bu çok nitelikli karar verme probleminde bulanık ve kesin veriler birlikte kullanılmıştır. Gerçek dünya MADM problemlerinin çoğu bu tiptedir (Chen vd.,1992).

Çok Nitelikli Karar Verme problemleri, birçok alternatifin, işin veya adayların kriterlerin veya niteliklerin bir kümesine dayandırılarak seçilmeye gerek duyulduğu çeşitli durumlar altında ele alınır. Böyle durumlarda alternatifleri karşılaştırmak karar vermenin anahtarıdır. Ancak, karar verici alternatifleri karşılaştırma halinde, karar problemlerinin bu tipinde ölçüt olan, kesin olmayan ve belirsiz verileri de dikkate almalıdır. Bulanık küme teorisi, MADM problemlerinin çözümündeki bu belirsizlik karşılaştırmasını ele almak için kusursuz biçimde uygun olmuştur (Aouam vd., 2003).

Bulanık çok kriterli karar verme yöntemleri, bulanık veriler içeren problemleri çözmek için önerilmiştir. Bellman ve Zadeh bulanık küme teorisi ve karar verme problemleri arasında ilişki kurmuşlardır. 1977’de Baas ve Kwakernaak bulanık MADM için klasik bir çalışma olarak kabul edilen bir bulanık MADM yöntemi önermişlerdir.

Zimmermann, bulanık MADM yöntemini iki-faz yöntemi olarak ele almıştır. İlk faz, her bir alternatif için bulanık fayda fonksiyonunun (bulanık final reytingleri) bulunmasını gerektirir. İkinci faz, derecelenme sırasını belirlemek için bulanık sıralama metotlarının uygulanmasını gerektirir (Chen vd.,1992).

Bu bölümde mevcut bulanık MADM yöntemlerinden en yaygın olanları sayısal örneklerle verilecektir. Her bir yöntemin avantajları ve dezavantajları da mümkün olduğunca ortaya çıkarılacaktır.

3.3.2.1 Topsis Metodu

Topsis ilk olarak 1981 yılında Hwang ve Yoon tarafından önerilmiştir. Topsisin mantığı ideal çözüm ve negatif ideal çözümü tanımlamaktır. İdeal çözüm, fayda kriterini maksimum maliyet kriterini minimum yapan çözümdür. Negatif ideal çözüm ise maliyet kriterini maksimum fayda kriterini minimum yapar. Seçilen alternatifin pozitif ideal çözüme en yakın ve negatif ideal çözüme en uzak uzaklıkta olması gerektiği mantığına dayanır. Topsisde alternatiflerin sıralanması “ideal çözüme göreli benzerlik” yaklaşımına dayanır.

Kısaca ideal çözüm, kriterin ulaşılabilir en iyi değerlerinden negatif ideal çözüm ise kriterin ulaşılabilir en kötü değerlerinden oluşturulur. Alternatif seçimi süreçleri boyunca en iyi alternatif, ideal çözüme en yakın ve negatif ideal çözüme en uzak olan olacaktır (Tsaur vd., 2002). Topsis yönteminde, performans ratingleri ve kriterlerin ağırlıkları kesin değerler olarak verilir. Birçok durumda, kesin veriler gerçek dünya durumlarını modellemede yetersiz kalır. İnsanların tercihleri içeren fikirleri genellikle belirsizdir ve tercihleri kesin sayısal bir değer ile tahmin edilemez. Birçok gerçekçi yaklaşım sayısal değerler yerine dilsel (linguistic) değerlendirmeleri kullanır, yani problemdeki kriterlerin ağırlıkları ve ratingler dilsel değişkenler vasıtasıyla değerlendirilir.

Bu kısımda, Topsis kavramının Chen (1997) tarafından bulanık ortamdaki çok kriterli karar verme problemlerini çözmek için genişletildiği bir Bulanık Topsis metodu sunulacaktır. Karar verilerindeki ve grup kararı verme yöntemindeki bulanıklığı gözönüne alarak kriterlerin ağırlıklarını ve her bir kritere göre alternatiflerin ratinglerini belirlemek için üçgensel bulanık sayılar ile ifade edilebilen dilsel değişkenler kullanılır. Karar matrisi bir bulanık karar matrisine dönüştürülür. Karar vericilerin bulanık ratinglerinin birleştirildiği bir ağırlıklı normalleştirilmiş bulanık karar matrisi oluşturulur. Topsis kavramına göre bulanık pozitif ideal çözüm ve bulanık negatif ideal çözümü tanımlayabiliriz. İki üçgensel bulanık sayı arasındaki uzaklığı hesaplamak için bir köşe metodu (vertex method) sunulmuştur. Bu köşe metodu kullanılarak, her bir alternatifin sırasıyla bulanık pozitif ideal çözümden ve bulanık negatif ideal çözümden uzaklıkları hesaplanır. Son olarak, bütün alternatiflerin bir sıralama derecesini belirlemek için her bir alternatifin bir yakınlık katsayısı tanımlanır. Yakınlık katsayısı arttıkça alternatif bulanık pozitif ideal çözüme yakınlaşır ve bulanık negatif ideal çözümden uzaklaşır.

Bulanık Topsis modelini tanıtmadan önce bazı gerekli tanımlar verilecektir.

Tanım 3.9 : $\tilde{D}$ matrisi eğer en az bir elemanı bulanık sayı ise bulanık matris olarak

adlandırılır.

Tanım 3.10 : Bir dilsel değişken değerleri dilsel terimler olan değişkendir.

Tanım 3.11 : $\tilde{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ve $\tilde{n} = (n_1, n_2, n_3)$ şeklinde iki üçgensel bulanık sayı olsun. Bu iki üçgensel bulanık sayı arasındaki uzaklığı hesaplamak için köşe metodu (vertex method),

$$d(\tilde{m}, \tilde{n}) = \sqrt{\frac{1}{3}[(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2]}$$

olarak tanımlanır.

Önerilmiş olan birçok uzaklık ölçümü fonksiyonu vardır. Köşe metodu etkili ve iki üçgensel bulanık sayı arasındaki uzaklığı hesaplamak için kolay bir yöntem olması sebebiyle tercih edilmiştir (Chen,2000).

3.3.2.2 Bulanık Topsis

Bir karar verici için nitelikleri dikkate alarak bir alternatifin kesin performans ratingini belirlemek her zaman zordur. Bulanık bir yaklaşım kullanmanın değeri, kesin sayılar yerine bulanık sayılar kullanarak alternatiflerin göreceli önemini belirlemektir. Burada Topsis bulanık ortama genişletilmektedir (Yang ve Hung, 2005). Çeşitli kriterlerin önem ağırlıkları ve niteliksel kriterlerin oranları dilsel değişkenler olarak ele alınmaktadır. Bu dilsel değişkenler Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2’ deki gibi pozitif üçgensel bulanık sayılar içinde ifade edilebilir.

Çizelge 3.1 Her bir kriterin önem ağırlığı için dilsel değişkenler

Çok Düşük	(ÇD)	(0,0,0.1)
Düşük	(D)	(0,0.1,0.3)
Orta Düşüklükte	(OD)	(0.1,0.3,0.5)
Orta	(O)	(0.3,.5,0.7)
Orta Yükseklikte	(OY)	(0.5,0.7,0.9)
Yüksek	(Y)	(0.7,0.9,1.0)
Çok Yüksek	(ÇY)	(0.9,1.0,1.0)

Çizelge 3.2 Ratingler için dilsel değişkenler

Çok Zayıf	(ÇZ)	(0,0,1)
Zayıf	(Z)	(0,1,3)
Orta Zayıflıkta	(OZ)	(1,3,5)
Makul	(M)	(3,5,7)
Orta İyilikte	(Oİ)	(5,7,9)
İyi	(İ)	(7,9,10)
Çok İyi	(Çİ)	(9,10,10)

Her bir kriterin önem ağırlığı ya direk atama ile ya da ikili karşılaştırmaları kullanarak dolaylı yoldan elde edilebilir. Burada, karar vericilerin kriterlerin önemini ve çeşitli kriterlere göre alternatiflerin ratinglerini değerlendirmede dilsel değişkenleri kullanmaları önerilmiştir.

Bir karar grubunda K tane kişinin olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, her bir kritere göre alternatiflerin ratingi ve kriterlerin önemi ,

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{K} [\tilde{x}_{ij}^1 (+) \tilde{x}_{ij}^2 (+) \dots (+) \tilde{x}_{ij}^K]$$

$$\tilde{w}_j = \frac{1}{K} [\tilde{w}_j^1 (+) \tilde{w}_j^2 (+) \dots (+) \tilde{w}_j^K]$$

olarak hesaplanır. Burada, $\tilde{x}_{ij}^K$ ve $\tilde{w}_j^K$, K . karar vericinin ratingi ve önem ağırlığıdır.

Daha önce belirtildiği gibi, bir bulanık çok kriterli karar verme problemi matris formatında,

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \cdots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W} = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n]$$

olarak ifade edilir. Burada, $\forall i, j$ için $\tilde{x}_{ij}$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $\tilde{w}_j$ dilsel değişkenlerdir. Bu dilsel değişkenler, $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ ve $\tilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3})$ gibi üçgensel bulanık sayılar ile tanımlanabilir. Çeşitli kriter ölçeklerini bir karşılaştırılabilir ölçeğe dönüştürebilmek için, lineer ölçek dönüşümü kullanılır. Böylece, $\tilde{R}$ ile ifade edilen normalleştirilmiş bulanık karar matrisi elde edilir;

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n}.$$

B ve C sırasıyla fayda kriterlerinin ve maliyet kriterlerinin bir kümesidir ve

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*} \right), j \in B$$

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_j^-}{c_{ij}}, \frac{a_j^-}{b_{ij}}, \frac{a_j^-}{c_{ij}} \right), j \in C$$

$$c_j^* = \max_i c_{ij} \quad j \in B$$

$$a_j^- = \min_i a_{ij} \quad j \in C$$

Yukarıda bahsedilen normalleştirme yöntemi, normalleştirilmiş üçgensel bulanık sayıların değerleri $[0,1]$ aralığına aittir özelliğini korur. Her bir kriterin farklı önemlerini dikkate alarak, ağırlıklı normalleştirilmiş bulanık karar matrisi,

$$\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}]_{m \times n}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

olarak oluşturulur. Burada, $\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(\cdot) \tilde{w}_j$ dir.

Ağırlıklı normalleştirilmiş bulanık karar matrisine göre $\tilde{v}_{ij}, \forall i, j$ elemanları normalleştirilmiş pozitif üçgensel bulanık sayılardır ve değerleri de $[0,1]$ kapalı aralığına aittir.

Bulanık pozitif ideal çözüm (A^*) ve bulanık negatif ideal çözüm (A^-),

$$A^* = (\tilde{v}_1^*, \tilde{v}_2^*, \dots, \tilde{v}_n^*),$$

$$A^- = (\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_n^-)$$

olarak tanımlanır.

Burada, $\tilde{v}_j^* = (1, 1, 1)$ ve $\tilde{v}_j^- = (0, 0, 0) \quad j = 1, 2, \dots, n$ dir.

Her bir alternatifin A^* ve A^- 'den uzaklığı

$$d_i^* = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_i^- = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

olarak hesaplanır. Burada, $d(.,.)$, iki bulanık sayı arasındaki uzaklık ölçümüdür.

Yakınlık katsayısı, bütün alternatiflerin sıralama derecesini belirlemek için tanımlanır. Her bir alternatifin yakınlık katsayısı,

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^* + d_i^-}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

olarak hesaplanır.

CC_i , 1'e yaklaştıkça A_i alternatifi bulanık pozitif ideal çözüme (A^*) yaklaşır, bulanık negatif ideal çözümden (A^-) uzaklaşır. Dolayısıyla, yakınlık katsayısına göre bütün alternatiflerin sıralama derecesi belirlenir ve bir uygun alternatifler kümesi arasından en iyisi seçilir.

Bulanık Topsis yönteminin algoritması aşağıda verilmektedir.

Adım 1: Karar vericilerden bir komite kurulur ve değerlendirme kriterleri belirlenir.

Adım 2: Kriterlerin önem ağırlıkları için uygun dilsel değişkenler ve her bir kritere göre alternatifler için dilsel ratingler seçilir.

Adım 3: C_j kriterinin birleştirilmiş bulanık $\tilde{w}_j$ ağırlığını elde etmek için kriterlerin ağırlıkları birleştirilir ve C_j kriteri altında A_i alternatifinin birleştirilmiş bulanık $\tilde{x}_{ij}$ ratingini elde etmek için karar vericilerin fikirleri birleştirilir.

Adım 4: Bulanık karar matrisi ve normalleştirilmiş bulanık karar matrisi oluşturulur.

Adım 5: Ağırlıklı normalleştirilmiş bulanık karar matrisi oluşturulur.

Adım 6: Bulanık pozitif ideal çözüm ve bulanık negatif ideal çözüm belirlenir.

Adım 7: Her bir alternatifin sırasıyla bulanık pozitif ideal çözüm ve bulanık negatif ideal çözümden uzaklığı hesaplanır.

Adım 8: Her bir alternatifin yakınlık katsayısı hesaplanır.

Adım 9: Yakınlık katsayısına göre bütün alternatiflerin sıralama derecesi belirlenir.

Örnek 3.4 :

Bir yazılım şirketi bir sistem analizi mühendisini işe almak istemektedir. Ön elemelerden sonra,

daha ileri değerlendirme için üç aday (A_1, A_2, A_3) kalmıştır. Görüşmeyi yönetmek ve en uygun adayı seçmek için üç karar vericiden (D_1, D_2, D_3) bir kurul oluşturulmuştur. Beş fayda kriteri ele alınmıştır:

- (1) duygusallık (C_1),
- (2) sözlü iletişim becerisi (C_2),
- (3) kişilik (C_3),
- (4) geçmiş tecrübe (C_4),
- (5) özgüven (C_5).

Bu karar probleminin hiyerarşik yapısı Şekil 3.7 ile verilmektedir. Önerilen metod, bu problemi çözmek için uygulanır ve hesaplama yöntemi aşağıdaki gibi özetlenir.

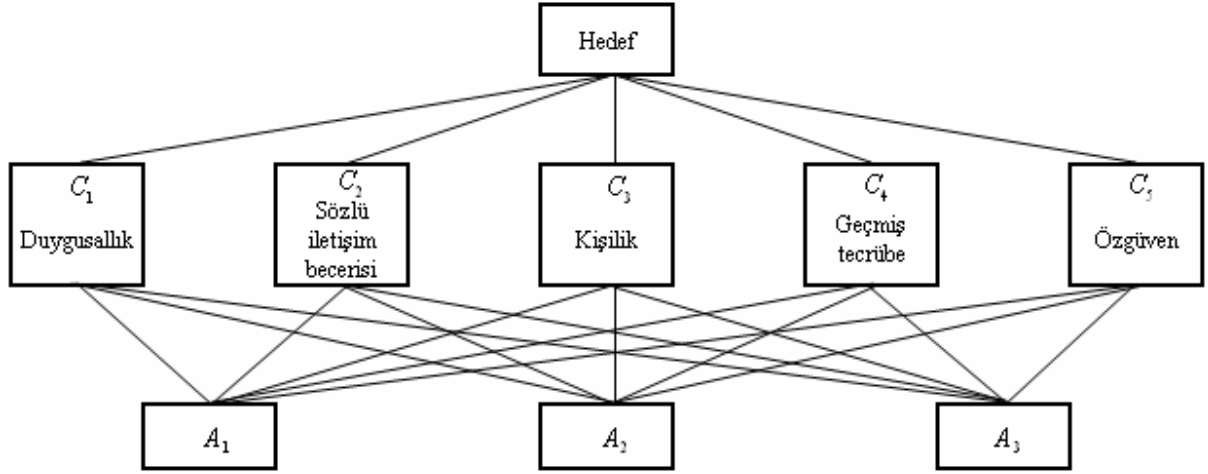
Adım 1: Karar vericiler kriterlerin önemini belirlemek için (Çizelge 3.1’de gösterilen) dilsel ağırlıklandırma değişkenlerini kullanırlar. Bunlar Çizelge 3.3’ de sunulmaktadır.

Adım 2: Karar vericiler her bir kritere göre alternatiflerin ratingini değerlendirmek için (Çizelge 3.2 ile gösterilen) dilsel rating değişkenlerini kullanırlar. Bunlar Çizelge 3.4’de sunulmaktadır.

Adım 3: Bulanık karar matrisini oluşturmak için her bir kriterin bulanık ağırlığını belirlemek için dilsel değerlendirmenin üçgensel bulanık sayılara dönüşümü Çizelge 3.5’de verilmektedir.

Çizelge 3.3 Kriterlerin önem ağırlıkları

	D_1	D_2	D_3
C_1	Y	ÇY	OY
C_2	ÇY	ÇY	ÇY
C_3	ÇY	Y	Y
C_4	ÇY	ÇY	ÇY
C_5	O	OY	OY



Şekil 3.7 Hiyerarşik yapı.

Çizelge 3.4 Bütün kriterlere göre karar vericiler tarafından verilen üç adayın ratingleri

Kriter	Adaylar	Karar Vericiler		
		D_1	D_2	D_3
C_1	A_1	Oİ	İ	Oİ
	A_2	İ	İ	Oİ
	A_3	Çİ	İ	M
C_2	A_1	İ	Oİ	M
	A_2	Çİ	Çİ	Çİ
	A_3	Oİ	İ	Çİ
C_3	A_1	M	İ	İ
	A_2	Çİ	Çİ	İ
	A_3	İ	Oİ	Çİ
C_4	A_1	Çİ	İ	Çİ
	A_2	Çİ	Çİ	Çİ
	A_3	İ	Çİ	Oİ
C_5	A_1	M	M	M
	A_2	Çİ	Oİ	İ
	A_3	İ	İ	O

Çizelge 3.5 Üç alternatifin bulanık ağırlıkları ve bulanık karar matrisi

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(5.7,7.7,9.3)	(5,7,9)	(5.7,7.7,9)	(8.33,9.67,10)	(3,5,7)
A_2	(6.3,8.3,9.7)	(9,10,10)	(8.3,9.7,10)	(9,10,10)	(7,9,10)
A_3	(6.3,8,9)	(7,9,10)	(7,9,10)	(7,9,10)	(6.3,8.3,9.7)
Ağırlık	(0.7,0.9,1)	(0.9,1,1)	(0.77,0.93,1)	(0.9,1,1)	(0.43,0.63,0.83)

Adım 4: Normalize edilmiş bulanık karar matrisi Çizelge 3.6’da gösterilmektedir.

Çizelge 3.6 Normalleştirilmiş bulanık karar matrisi

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(0.59,0.79,0.96)	(0.5,0.7,0.9)	(0.57,0.77,0.9)	(0.83,0.97,1)	(0.3,0.5,0.7)
A_2	(0.65,0.86,1)	(0.9,1,1)	(0.83,0.97,1)	(0.9,1,1)	(0.7,0.9,1)
A_3	(0.65,0.82,0.93)	(0.7,0.9,1)	(0.7,0.9,1)	(0.7,0.9,1)	(0.63,0.83,0.97)

Adım 5: Ağırlıklı normalize edilmiş bulanık karar matrisi Çizelge 3.7’deki gibi oluşturulur.

Çizelge 3.7 Normalleştirilmiş bulanık ağırlıklı karar matrisi

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(0.41,0.71,0.96)	(0.45,0.7,0.9)	(0.44,0.72,0.9)	(0.75,0.97,1)	(0.13,0.32,0.58)
A_2	(0.46,0.77,1)	(0.81,1,1)	(0.64,0.9,1)	(0.81,1,1)	(0.3,0.57,0.83)
A_3	(0.46,0.74,0.93)	(0.63,0.9,1)	(0.54,0.84,1)	(0.63,0.9,1)	(0.27,0.52,0.81)

Adım 6: Bulanık pozitif ideal çözüm ve bulanık negatif ideal çözüm,

$$A^* = [(1,1,1), (1,1,1), (1,1,1), (1,1,1), (1,1,1)]$$

$$A^- = [(0,0,0), (0,0,0), (0,0,0), (0,0,0), (0,0,0)]$$

olarak belirlenir.

Adım 7: Her bir adayın sırasıyla bulanık pozitif ideal çözüm ve bulanık negatif ideal çözümden uzaklığı hesaplanır. Örneğin 1.adayın bulanık pozitif ideal çözüm ve bulanık negatif ideal çözüme olan uzaklıkları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}
 d_1^- &= \sqrt{\frac{1}{3}[(0-0.41)^2 + (0-0.71)^2 + (0-0.96)^2]} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{3}[(0-0.45)^2 + (0-0.7)^2 + (0-0.9)^2]} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{3}[(0-0.44)^2 + (0-0.72)^2 + (0-0.9)^2]} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{3}[(0-0.75)^2 + (0-0.97)^2 + (0-1)^2]} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{3}[(0-0.13)^2 + (0-0.32)^2 + (0-0.58)^2]} \\
 &= 3.45
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_1^* &= \sqrt{\frac{1}{3}[(1-0.41)^2 + (1-0.71)^2 + (1-0.96)^2]} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{3}[(1-0.45)^2 + (1-0.7)^2 + (1-0.9)^2]} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{3}[(1-0.44)^2 + (1-0.72)^2 + (1-0.9)^2]} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{3}[(1-0.75)^2 + (1-0.97)^2 + (1-1)^2]} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{3}[(1-0.13)^2 + (1-0.32)^2 + (1-0.58)^2]} \\
 &= 2.10
 \end{aligned}$$

Diğer alternatiflerin de pozitif ideal çözüme ve negatif ideal çözüme uzaklıkları benzer şekilde hesaplanır.

Çizelge 3.8 Uzaklık ölçümü

	A^*	A^-
A_1	2.10	3.45
A_2	1.24	4.13
A_3	1.59	3.85

Adım 8: Her bir adayın yakınlık katsayısı

$$CC_1 = \frac{3.45}{2.10 + 3.45} = 0.62, \quad CC_2 = \frac{4.13}{1.24 + 4.13} = 0.77, \quad CC_3 = \frac{3.85}{1.59 + 3.85} = 0.71$$

olarak hesaplanır.

Adım 9: Yakınlık katsayısına göre, üç adayın sıralama derecesi A_2, A_3 ve A_1 'dir. En iyi seçim A_2 adayıdır (Chen, 2000).

3.3.2.3 Analitik Hiyerarşi Prosesi'ne Genel Bakış (AHP)

1970'lerin başında, Thomas Lorie Saaty, ABD Savunma Bakanlığı silahsızlanma, Orta Doğu Sorunu, Sudan için ulaştırma sisteminin geliştirilmesi gibi karmaşık problemler üzerinde çalışmıştır. Yöneylem araştırması ve matematik alanına birçok teorik katkıda buluna Profesör Saaty, giderek karmaşıkleşan modelleme yaklaşımlarının karar problemlerinin çözümünde beklenen etkiyi yapmadığını görmüş ve karmaşık karar problemlerinin çözümünde kullanılmak üzere matematiksel sadeliği sebebiyle kolay anlaşılan ve uygulanan bir teknik geliştirme uğraşına girmiştir. Çalışmalarının sonucunda bugün Analitik Hiyerarşi Süreci (Analytical Hierarchy Process-AHP) adı ile anılan tekniği geliştirmiştir. AHP tekniği karar vericilerin çok farklı alanlardaki karar problemlerini yapılandırma ve analiz etme sürecine büyük başarı ile hizmet etmiş ve yoğun olarak uygulaması yapılmıştır.

AHP, insanoğlunun hiçbir şekilde kendisine öğretilmeyen fakat varoluşundan bu yana karar verme sorunu ile karşılaştığında içgüdüsel olarak benimsediği karar mekanizmasıdır. İçgüdüsel mekanizma, karar sürecinde doğal olarak niteliksel kriterleri de göz önünde bulundurmaktadır. Bu sebeple AHP'nin gücü, diğer çoğu yaklaşımla ele alınması zor veya mümkün olmayan ama kararları etkileyen bu gibi etkenleri de ele alabilmesinden kaynaklanmaktadır.

AHP içinde, karmaşık problemleri basitleştirip, daha kolay anlaşılabilir hale getiren ve problemi oluşturan bileşenler arasındaki ilişkiyi gösteren bir karar metodolojisi bulunmaktadır.

AHP kişileri nasıl karar vermeleri gerektiği konusunda bir yöntem kullanmaya zorunlu kılmak yerine, onlara kendi karar verme sistemlerini tanıma imkanı sağlayarak daha iyi karar verilmesini sağlayan bir karar verme modelidir.

AHP, karar vericiye, problem için belirlediği her faktör veya kriter için karşılaştırma imkanı verirken, belirlemiş olduğu faktör ve kriterleri ard arda gelen seviyelerde bir hiyerarşik yapı içerisinde sıralamasına da olanak sağlamaktadır (Sak vd., 2003).

AHP'nin en önemli özelliği karar vericinin hem objektif hem de subjektif düşüncelerini karar sürecine dahil edebilmesidir. Bir diğer ifade ile AHP, bilginin, deneyimin, bireyin düşüncelerinin ve önsezilerinin mantıksal bir şekilde birleştirildiği bir yöntemdir (Kuruüzüm ve Atsan, 2001).

3.3.2.3.1 AHP' nin Temel Adımları

AHP, karar problemini aşağıdaki temel adımlara böler:

1. Problemin düzenlenmesi
2. Yerel önceliklerin değerlendirilmesi
3. Genel önceliklerin hesaplanması.

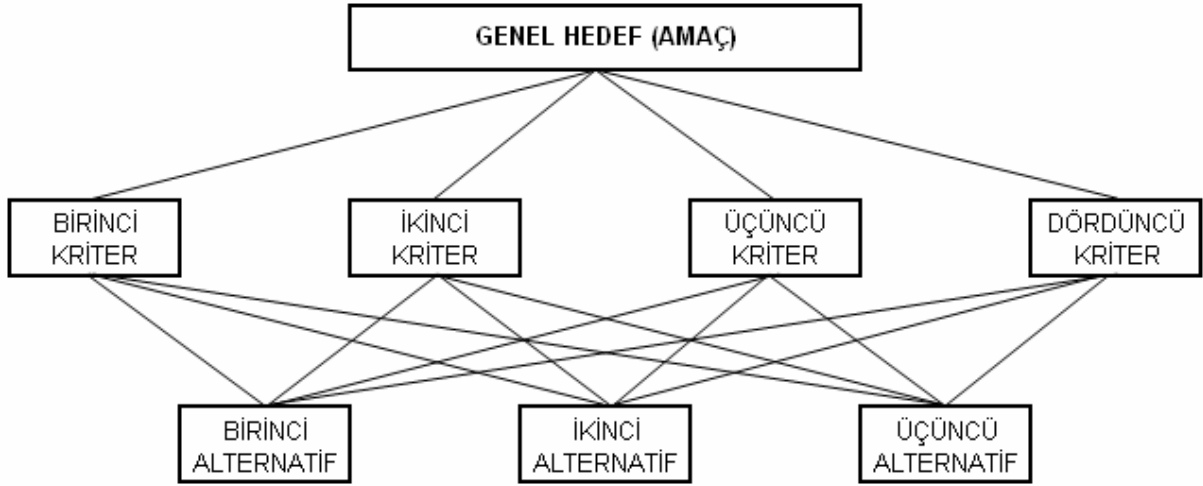
AHP karar problemi, her bir seviyenin sonlu sayıda karar elemanlarını içerdiği farklı seviyelerde hiyerarşik olarak düzenlenir (Mikhailov ve Tsvetinov,2004).

i. Hiyerarşik Yapının Oluşturulması:

AHP' de karar vericinin amacı doğrultusunda kriterlerin ve ona ait olan alt kriterlerin belirlenip, hiyerarşik yapının oluşturulması ilk adımdır. AHP' de öncelikle amaç belirlenir ve bu amaç doğrultusunda seçimi etkileyen kriterler ortaya konur. Daha sonra kriterler gözönüne alınarak potansiyel alternatifler belirlenir. Sonuçta karar için hiyerarşik bir yapı oluşturulmuş olur (Sak vd ., 2003).

Hiyerarşinin en alt seviyesi bütün mümkün alternatiflerden oluşurken en üst seviye genel hedefi gösterir. Aradaki bir veya daha fazla seviye karar kriterlerini ve alt kriterleri ifade eder (Mikhailov ve Tsvetinov,2004).

Hiyerarşik yapı, günlük hayatta karşılaşılan ve modeli kurulan problemlerin yapı taşıdır. Karar verici hiyerarşik yapıyı oluşturma süreci içinde modelini bu temel yapı üzerinde oluşturmaktadır. Şekil 3.8'de hiyerarşik yapı örneği verilmektedir (Sak vd., 2003).



Şekil 3.8 Hiyerarşik yapı.

ii. Değerlendirme:

Hiyerarşik yapı oluşturulduktan sonra her bir kriter temelinde alternatiflerin karşılaştırılması ve kriterlerin de kendi aralarında karşılaştırılması için ikili karşılaştırma matrisleri oluşturulur (Sak vd., 2003). Matrislerin oluşturulmasında Thomas L.Saaty tarafından önerilen ikili subjektif karşılaştırma tekniğine göre kriterlerin ikili karşılaştırmalı önemlilik yargıları 1-9 göreceli önceliklendirme ölçeği verilmiştir.

Çizelge 3.9 1-9 göreceli önceliklendirme ölçeği

Değer	Tanımlama	Açıklama
1	Eşit önemli	İki faaliyet amaca eşit düzeyde katkıda bulunuyor.
3	Orta derece önemli	Tecrübe ve yargı bir faaliyeti diğerine çok az derecede tercih ettiriyor.
5	Kuvvetli derecede önemli	Tecrübe ve yargı bir faaliyeti diğerine kuvvetli bir şekilde tercih ettiriyor.
7	Çok kuvvetli derede önemli	Bir faaliyet güçlü bir şekilde tercih ediliyor ve baskınlığı uygulamada rahatlıkla görülüyor.
9	Kesin önemli	Bir faaliyetin diğerine tercih edilmesine ilişkin kanıtlar çok büyük bir güvenilirliğe sahip.
2,4,6,8	Ara değerler	Uzlaşma gerektiğinde kullanılmak üzere yukarıda listelenen yargılar arasına düşen değerler.

İkili karşılaştırmalar karar kriterlerinin ve alternatiflerin öncelik dağılımlarının kurulması için tasarlanmıştır. Daha açık bir ifade ile, hiyerarşideki elemanlar bir üst kademedeki elemana göre göreceli önemlerinin belirlenmesi için ikili olarak karşılaştırılır (Kuruşüm ve Atsan,2001).

İkili karşılaştırmalar AHP'nin en önemli aşamasıdır (Sak vd., 2003). Elde edilen ikili karşılaştırma değerleri ikili karşılaştırma matrisine yerleştirilir. Bu matriste a_{ij} elemanı i . kriterle j . kriterin ikili karşılaştırma değerini göstermektedir ve $a_{ij} = 1/a_{ji}$ eşitliği ile elde edilir. Bu özelliğe karşılık olma özelliği denir (Eminov ve Ballı,2004).

Her bir ikili karşılaştırma matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix}$$

olarak gösterilir. Bu bütün a_{ij} 'lerin pozitif olduğu bir karşılıklı matristir (Chen vd.,1992).

AHP yöntemi, A_i alternatifinin C_j niteliğine göre r_{ij} performans puanını hesaplamak amacıyla her bir nitelik için ikili karşılaştırma matrislerini kullanır. Nitelikler için ikili karşılaştırma matrisi niteliklerin ağırlıklarını hesaplamak için kullanılır. Performans puanları ve ağırlık kümesi ,

$$D = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\underline{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

olarak düzenlenmiştir. Burada r_{ij} ve w_j , $\forall i, j$ için reel sayılar üzerinde değer alırlar. Klasik Basit Toplam Ağırlıklandırma (Simple Additive Weighting) yöntemi $\forall i$ için A_i 'nin U_i faydalarını bulmak için kullanılır. Bu method bu bölüm içinde tanıtılacaktır.

AHP'nin ikinci aşaması normalleştirilmiş matrislerin oluşturulmasıdır. Normalleştirilmiş matris,her bir sütun değerinin ayrı ayrı ilgili sütun toplamına bölünmesi ile elde edilir.

Normalleştirilmiş matristen hareketle, her bir sıra değerlerinin ortalaması alınır. Elde edilen bu değerler, her bir kriter için yüzde önem ağırlıklarıdır.

Karar vericinin kriterler arasında kıyaslama yaparken tutarlı davranıp davranmadığını ölçmek için Tutarlılık Oranı'nın (T.O.) hesaplanması gerekir. Bu hesaplamada n kriter sayısına bağlı olarak rasgele indeks sayıları kullanılır. Hesaplamalar sonucunda bulunan değer 0.10'un altında ise, oluşturulan karşılaştırma matrisinin tutarlı olduğu sonucuna varılır. Aksi durumda karar matrisi tekrar düzenlenmelidir (Dağdeviren ve Eren, 2001).

iii. Önceliklerin Hesaplanması:

AHP'nin son adımı kriterlerin önem ağırlıkları ile alternatiflerin önem ağırlıklarının çarpımı ve her bir alternatife ait öncelik değerinin bulunmasıdır. Bu değerlerin toplamı 1'e eşittir. En yüksek değeri alan alternatif, karar problemi için en iyi alternatiftir (Sak vd.,2003).

3.3.2.3.2 Basit Ağırlıklı Toplam Metodu (Simple Additive Weighting Method):

Bir alternatifin puanı, nitelik değerlerinin ağırlıklı toplamı olarak hesaplanır. Her bir alternatif için, her bir niteliğin ölçüm ratingi ile onun önem ağırlığını çarparak ve bütün niteliklere göre bu çarpımları toplayarak bir puan hesaplanır.

$\forall i$ için A_i 'nin U_i faydası

$$U_i = \frac{\sum_{j=1}^n w_j r_{ij}}{\sum_{j=1}^n w_j}$$

şeklinde hesaplanır. En yüksek puana sahip alternatif seçilir. Matematiksel olarak en çok tercih edilen A^* alternatifi,

$$A^* = \left\{ U_i \mid \max_i \sum_{j=1}^n w_j r_{ij} / w_j \right\}$$

olacak şekilde seçilir. Burada r_{ij} , sayısal olarak karşılaştırılabilir bir ölçek ile i . alternatifin j . niteliğe göre puanıdır. w_j ise j . niteliğin önem ağırlığıdır.

Bu yöntemde, nitelikler hem sayısal hem de karşılaştırılabilir olmalıdır. Karar verici niteliklere göreli ağırlıklar atar. En iyi bilinen ve geniş çapta kullanılan bir yöntemdir (Chen vd., 1992).

3.3.2.4 Satty'nin AHP Yaklaşımı

Analitik hiyerarşi prosesi (AHP) yöntemi ilk olarak Saaty tarafından önerilmiştir. Saaty'nin yaklaşımında, $\forall i, j$ için a_{ij} ikili karşılaştırma oranları reel sayılardır. Her bir ikili karşılaştırma matrisi özvektör yöntemi kullanılarak çözülür. Bulunan ağırlıklar ve performans puanları da reel sayılardır. Klasik Basit Toplam Ağırlıklandırma yöntemi alternatiflerin faydalarını hesaplamak için kullanılır.

Saaty, bulanıklığın iki tipi olduğunu ifade eder; algıdaki bulanıklık ve anlamdaki bulanıklık. Birincisi, hemen anlaşılamayan amaçların veya düşüncelerin karmaşıklığı sebebiyle olur. İkincisi ise, anlamın göreceliğine mal edilmiştir, yani amaçların anlamı, farklı amaçların gerçekleşmesinde (tatmininde) hangi fonksiyonun bu amaçları yerine getirdiğine bağlıdır.

Bulanıklığın her iki türünün anlamını vermek için bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem, bulanıklığın göreceliğini, bir çok nitelikli yapı içinde sistemin görevlerini hiyerarşik olarak düzenleyerek ölçer.

Algoritmayı vermeden önce, niteliklerin göreceli önemini ve performans puanlarını meydana getirmek için kullanılabilen “özvektör metodu” kısaca anlatılacaktır.

3.3.2.4.1 Özvektör Metodu:

Hiyerarşideki birkaç seviyenin $C_1, C_2, \dots, C_n$ elemanlarını ele alalım. Amacımız, bu $C_i (i = 1, \dots, n)$ değerlerinin bir sonraki seviyeyi etkileyecek $w_1, w_2, \dots, w_n$ ağırlıklarını bulmaktır. Daha önceden belirtildiği gibi matrisimizdeki sayılar ikili karşılaştırmaların kat değerlerini göstermektedir.

a_{ij} , C_i 'nin C_j ile karşılaştırıldığı andaki kuvvetini gösteren sayıyı ifade eder. Bu a_{ij} sayılarının matrisi A veya $A = (a_{ij})$ ile ifade edilir.

Daha önceden belirtildiği gibi,

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

idi. Yani, A matrisinin elemanlarının tersi alınabilir. Eğer kararlarımız her kıyasımız için gerçekleşiyor ise tüm i, j, k ' lar için

$$a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}$$

dır ve A matrisine “tutarlı matris” denir. Tutarlı matrisin tam (hatasız) ölçümlerle yapıldığı aşikardır. Yani, $w_1, w_2, \dots, w_n$ ağırlıkları bilinmektedir. Bu durumda,

$$a_{ij} = w_i / w_j \quad ; \quad i, j = 1, \dots, n \quad \text{ve},$$

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = w_i / w_j \cdot w_j / w_k = w_i / w_k = a_{ik}$$

dır. Tabi ki ;

$$a_{ji} = w_j / w_i = \frac{1}{w_i / w_j} = 1 / a_{ij}$$

dir. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i ; i = 1, \dots, n$ denklemler kümesinden oluşan $Ax = y$ matris eşitliğini ele alalım.

$a_{ij} = w_i / w_j$ eşitliğinden faydalanarak,

$$a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} = 1 \quad i, j = 1, \dots, n \text{ eşitliğini,}$$

dolayısıyla,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j (1/w_i) = n \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = n w_i \quad i = 1, \dots, n$$

elde ederiz. Bu denklem ise aşağıdaki denklem ile eşdeğerdir.

$$A \cdot w = n \cdot w$$

Matris teorisine göre bu formül, w vektörünün n özdeğerine göre özvektör olduğunu ifade eder. Bu eşitliğin tamamını yazarsak aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$A = \begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline A_1 & w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ A_2 & w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_n & w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{array} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Uygulamada, a_{ij} 'ler gerçek ölçüm değerlerine değil, öznel kararlara dayandırılır. Dolayısıyla a_{ij} değerleri, w_i/w_j ideal oranlardan sapacaktır ve $A.w = n.w$ denklemi de geçerliliğini yitirecektir. Bu noktada, matris teorisinin iki kuralı bize yardımcı olur.

Birincisi, eğer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sayıları $Ax = \lambda x$ eşitliğini sağlıyorsa A 'nın özdeğerleridir ve $\forall i$ için, $a_{ii} = 1$ ise

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, $A.w = n.w$ denklemi sağlanırsa biri hariç (ki bu da n 'dir) bütün özdeğerler sıfıra eşit olur. Açıkça, ifade etmek gerekirse tutarlı durumda n , A 'nın en büyük özdeğeridir.

İkinci yardımcı öge ise şöyledir: eğer bir kişi, pozitif ve tersi alınabilir A matrisinin a_{ij} değerlerini küçük miktarda değiştirirse, özdeğeri de küçük miktarda değişir.

Bu sonuçlar birleştirilirse şu yargıya varılabilir: eğer A matrisinin köşegeni ($a_{ii} = 1$) değerlerinde oluşuyorsa ve A matrisi tutarlı ise a_{ij} 'lerdeki ufak değişiklikler en büyük özdeğer olan $\lambda_{\max}$ 'ı n 'e ($\lambda_{\max} \rightarrow n$) yakınlştırır ve diğer özdeğerleri de sıfıra ($\forall i = 1, \dots, k, \lambda_i \neq \lambda_{\max}$ olacak şekilde $\lambda_i \rightarrow 0$) yaklaştırır.

Dolayısıyla problem şudur; eğer A matrisi ikili karşılaştırma değerlerinden oluşuyorsa öncelik vektörünü oluşturmak için

$$A.w = \lambda_{\max}.w$$

denklemini sağlayan w vektörünün bulunmasıdır. Çünkü, bu normalize edilmiş çözüm için istenir. w üzerinde küçük değişiklikler yapılarak

$$\alpha = \sum_{i=1}^n w_i \text{ ve } w \text{ yerine } (1/\alpha).w$$

yerleştirilirse, bu teklik olma özelliğini sağlar ve aynı zamanda

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

olur.

a_{ij} üzerindeki ufak değişiklikler, $\lambda_{\max}$ değerinde ufak değişikliklere yol açtığı için, $\lambda_{\max}$ değerinin n değerinden sapması tutarlılığın ölçümü demektir. Bu da türetilen skalanın, tahmin edilmek istenen skalaya olan yakınlığının hesaplanmasına olanak verir. Tutarlılık indeksi (Consistency index) olan

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

ifadesi “tutarlılığa yakınlık” göstergesi olarak alınır. Rastsal olarak üretilmiş $n \times n$ matrislerin hesaplanan CI değerlerinin ortalaması rastsal indeks (tesadüfi indeks) olarak tanımlanır. Rastsal indeks de kullanılarak tutarlılık oranı (Consistency ratio) şöyle tanımlanır:

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

Genellikle, bu sayının 0.1’den küçük olması , “sonucumuzdan memnun olabiliriz” anlamına gelmektedir.

Örnek 3.4 : Bu kısımda Saaty’nin 1977 yılında yayınlanan makalesinde yer alan örneğe yer verilecektir.

Doktora derecesini henüz yeni almış bir öğrenciye üç iş teklif edilmiştir. Karşılaştırma için 6 tane nitelik belirlenmiştir. Bunlar: C_1 : araştırma, C_2 : gelişim, C_3 : fayda, C_4 : mesai arkadaşlığı, C_5 : yerleşim yeri ve C_6 : itibar’dır.

Nitelikler Arası İkili Karşılaştırma Matrisi

	Araştırma	Gelişim	Fayda	Mesai Ark.	Yerleşim Yeri	İtibar
Araştırma	1	1	1	4	1	1/2
Gelişim	1	1	2	4	1	1/2
Fayda	1	1/2	1	5	3	1/2
Mesai Ark.	1/4	1/4	1/5	1	1/3	1/3
Yerleşim Yeri	1	1	1/3	3	1	1
İtibar	2	2	2	3	1	1

Her bir nitelik için işlerin ikili karşılaştırma matrisi;

Araştırma	A	B	C	Gelişim	A	B	C
A	1	1/4	1/2	A	1	1/4	1/5
B	4	1	3	B	4	1	1/2
C	2	1/3	1	C	5	2	1

Fayda	A	B	C	Mesai Ark.	A	B	C
A	1	3	1	A	1	1/3	5
B	1/3	1	1	B	3	1	7
C	3	1	1	C	1/5	1/7	1

Yerleşim	A	B	C	İtibar	A	B	C
A	1	1	7	A	1	7	9
B	1	1	7	B	1/7	1	5
C	1/7	1/7	1	C	1/9	1/5	1

Niteliklerin ikili karşılaştırmalarının yapıldığı ilk matrisin özdeğeri $\lambda_{\max} = 6.35$ dir ve buna karşılık gelen özvektör

$$B_1 = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.16 & 0.19 & 0.19 & 0.05 & 0.12 & 0.30 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dır.

Geriye kalan matrislerin yani işlerin kriterlere göre ikili karşılaştırma matrislerine karşılık gelen özdeğerleri ve özvektörleri ;

$$\lambda_{\max} = [3.02 \quad 3.02 \quad 3.56 \quad 3.05 \quad 3.00 \quad 3.21]$$

$$B_2 = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.14 & 0.10 & 0.32 & 0.28 & 0.47 & 0.77 \\ 0.63 & 0.33 & 0.22 & 0.65 & 0.47 & 0.17 \\ 0.24 & 0.57 & 0.46 & 0.07 & 0.07 & 0.05 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dır.

Alternatiflerin ağırlık vektörü;

$$W = B_2 \times B_1 = \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.34 \\ 0.26 \end{bmatrix}$$

olur.

A, B ve C işlerine karşılık gelen ağırlıklar karşılaştırıldığında, adayın A işinin teklifini kabul etmesi için farklılıklar yeterince büyüktür (Chen vd .,1992).

3.3.2.5 Bulanık Analitik Hiyerarşi Prosesi

İlk olarak Saaty tarafından önerilen Analitik Hiyerarşi Prosesi'nde, a_{ij} , ikili karşılaştırma oranları kesin sayılar olarak ele alınmıştır. Her bir ikili karşılaştırma matrisi özvektör yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Sonuçta elde edilen ağırlıklar ve performans puanları da kesin, reel sayılardır (Chen vd .,1992).

Çeşitli yazarlar tarafından önerilmiş olan birçok bulanık AHP yöntemi vardır. Bu yöntemler, bulanık küme teorisi kavramlarını kullanarak alternatif seçimi ve gerekçe problemlerine

sistematik yaklaşımlardır. Karar vericiler genellikle aralık değerlendirmeleri sabit değerlendirmelerden daha güvenli bulurlar. Bunun nedeni, karar vericilerin karşılaştırma yönteminin bulanık doğası gereği tercihleri hakkında kesin olmamalarıdır.

Bulanık AHP alanındaki en erken çalışma, Van Laarhoven ve Pedrycz'in üçgensel üyelik fonksiyonları ile tanımlanmış bulanık oranları karşılaştıran 1983 yılındaki çalışmalarında görülmüştür. Buckley (1985), karşılaştırma oranlarının bulanık önceliklerini yamuksal üyelik fonksiyonları ile belirtmiştir. Chang (1996), bulanık AHP'yi ele almak için, bulanık AHP'nin ikili karşılaştırma ölçeği için, üçgensel bulanık sayıların kullanımı ve ikili karşılaştırmaların sentetik derece değeri için derece analiz yönteminin kullanımı ile yeni bir yaklaşım sunmuştur (Büyüközkan vd., 2004).

Bu kısımda Van Laarhoven ve Pedrycz ile Buckley yaklaşımları genel özellikleriyle, Chang'in yaklaşımı ise detaylı bir şekilde anlatılmaktadır.

3.3.2.5.1 Laarhoven ve Pedrycz Yaklaşımı

Laarhoven ve Pedrycz, Saaty'nin Analitik Hiyerarşi Prosesi'nin açık bir genişlemesi olan bir algoritma önermişlerdir (Laarhoven P.J.M ve W.Pedrycz). Klasik AHP yönteminde, bulanıklık direk olarak bulanık notasyonlar kullanılarak ifade edilmez. Karar probleminde bir ikili karşılaştırmalar matrisi oluşturarak dolaylı olarak ifade edilir. AHP'nin bu genişletilmiş versiyonunda, ikili karşılaştırmalar matrisinde yer alan elemanlar üçgensel bulanık sayılar ile ifade edilmiştir. Karşılaştırma adımları aynen klasik AHP'de olduğu gibi yapılmaktadır. Bulanık ağırlıklar ve bulanık performans ağırlıklarını elde etmek için Lootsma'nın logaritmik en küçük kareler metodunu kullanmışlardır.

3.3.2.5.2 Buckley Yaklaşımı

Buckley (Buckley, 1985) de, Saaty'nin Analitik Hiyerarşi Prosesi yöntemini, bulanık karşılaştırma oranlarını dahil ederek genişletmiştir. Buckley, Laarhoven ve Pedrycz'in metodunun iki probleme bağımlı olduğuna dikkat çekmiştir. Bunlardan ilki, Laarhoven ve Pedrycz'in yönteminde yer alan lineer denklemlerin her zaman tek çözümünün olmamasıdır. Bir diğeri ise, ağırlıkların bulunmasında üçgensel bulanık sayıların kullanılması konusunda ısrar etmeleridir. Üçgensel bulanık sayılar üzerindeki cebirsel işlemlerin sonucu her zaman bir üçgensel bulanık sayı olmadığı için, Laarhoven ve Pedrycz bulanık sayının şeklini korumak için yaklaşık yöntemleri kullanmak zorunda kalmışlardır.

Buckley, bu zorlukların üstesinden gelebilmek için, bulanık ağırlıkları ve performans puanlarını (scores) elde etmek için geometrik ortalama metodunu kullanmıştır. Bu metodun kullanılmasının sebebi bulanık durumlara kolaylıkla genişletilebilmesi ve karşılıklı (reciprocal) matrislerden tek çözüm elde edilmesini garantilemesidir. Buckley, karar vericiler tarafından ifade edilen bulanık oranları tanımlamak için üçgensel bulanık sayılar yerine yamuksal bulanık sayıları kullanmıştır (Chen vd., 1992).

3.3.2.5.3 Bulanık AHP’de Derece Analiz Yöntemi (Extent Analysis Method on Fuzzy AHP)

Chang 1996’da bulanık AHP’yi ele almak için, bulanık AHP’nin ikili karşılaştırma ölçümü için üçgensel bulanık sayıların kullanımı ile bir yaklaşım önermiştir. Derece analiz metodu (extent analysis method) olarak adlandırılan bu metodu, ikili karşılaştırmaların sentetik derece değeri için kullanmıştır. Bu yöntemin adımları diğer bulanık AHP yöntemlerine nispeten daha kolaydır ve klasik AHP’ye benzer (Büyüközkan vd., 2004).

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bir amaç kümesi ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bir hedef kümesi olmak üzere, Chang’ın (1992;1996) derece analiz yöntemine göre her bir amaç alınır ve g_i derece analizi sırasıyla yerine getirilir. Her bir amaç için m tane derece analiz değeri,

$$M_{g_i}^1, M_{g_i}^2, \dots, M_{g_i}^m, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olarak elde edilir. Burada bütün $M_{g_i}^j$ ($j = 1, 2, \dots, m$)’ler üçgensel bulanık sayılardır.

Chang’ın derece analizinin adımları aşağıdaki gibidir.

Adım 1:

i. amaca göre bulanık sentetik derece değeri,

$$S_i = \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \otimes \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \right]^{-1}$$

olarak tanımlanır.

$\sum_{j=1}^m M_{g_i}^j$ ’yi elde etmek için,

$$\sum_{j=i}^m M_{g_i}^j = \left(\sum_{j=1}^m l_j, \sum_{j=1}^m m_j, \sum_{j=1}^m u_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olacak şekilde özel bir matris için m tane derece analiz değerlerinin bulanık toplama işlemini yerine getirelim ve

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \right]^{-1}, \text{yi}$$

elde etmek için ,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j = \left(\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n u_i \right)$$

olacak şekilde $M_{g_i}^j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) değerlerinin bulanık toplama işlemini yerine getirelim.

Daha sonra,

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \right]^{-1} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n u_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^n l_i} \right)$$

olacak şekilde

$$\left(\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n u_i \right) \text{ vektörünün tersini hesaplayalım.}$$

Adım 2:

$M_2 = (l_2, m_2, u_2) \geq M_1 = (l_1, m_1, u_1)$ 'in olasılık derecesi yani M_2 'nin M_1 'e tercih edilme oranı

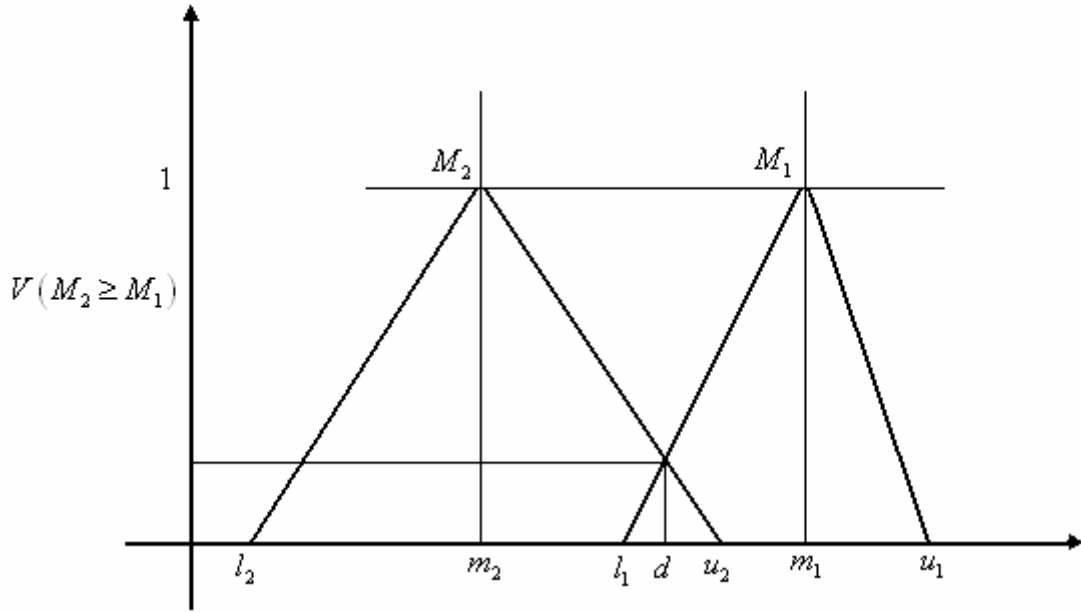
$$V(M_2 \geq M_1) = \sup_{y \geq x} \left[\min(\mu_{M_1}(x), \mu_{M_2}(x)) \right]$$

olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$V(M_2 \geq M_1) = hgt(M_1 \cap M_2) = \mu_{M_2}(d)$$

$$= \begin{cases} 1, & m_2 \geq m_1 \quad \text{ise} \\ 0, & l_1 \geq u_2 \quad \text{ise} \\ \frac{l_1 - u_2}{(m_2 - u_2) - (m_1 - l_1)}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada d , μ_{M_1} ve μ_{M_2} arasında en yüksek kesişim noktası D 'nin ordinatıdır.



Şekil 3.9 M_1 ve M_2 'nin kesişimi.

M_1 ve M_2 'yi karşılaştırmak için, $V(M_1 \geq M_2)$ ve $V(M_2 \geq M_1)$ değerlerinin her ikisine de gerek duyulur.

Adım 3: k tane konveks bulanık sayıdan daha büyük bir konveks bulanık sayı için olasılık derecesi $M_i (i=1,2,...,k)$,

$$\begin{aligned} V(M \geq M_1, M_2, ..., M_k) &= V[(M \geq M_1) \text{ ve } (M \geq M_2) \text{ ve } ... \text{ ve } (M \geq M_k)] \\ &= \min_i V(M \geq M_i), \quad i=1,2,3,...,k \end{aligned}$$

ile tanımlanabilir.

$$d'(A_i) = \min V(S_i \geq S_k)$$

olduğu kabul edilirse $k=1,2,...,n$ için ; $k \neq i$ ağırlık vektörü

$$W' = (d'(A_1), d'(A_2), ..., d'(A_n))^T$$

ile verilir. Burada, $A_i (i=1,2,...,n)$ n tane elemandır.

Adım 4:

Normalleştirme yolu ile normalleştirilmiş ağırlık vektörleri

$$W = (d(A_1), d(A_2), \dots, d(A_n))^T$$

dir. Burada W bulanık olmayan bir sayıdır (Kahraman vd., 2004).

4. CATERING ŞİRKETİ SEÇİMİNE BİR UYGULAMA

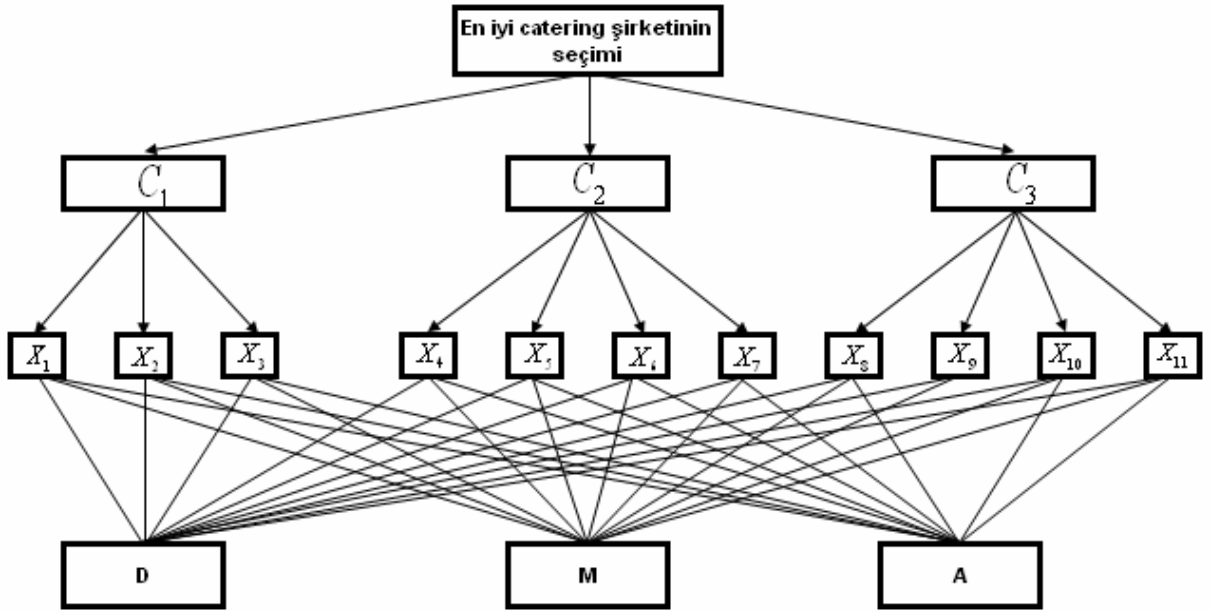
Bu bölümde, Kahraman (2004)'ın en yüksek müşteri memnuniyetini veren en iyi catering şirketinin seçimi için bir analitiksel araç sağladığı örneği ele alınacaktır. Problemin çözümüne Chang (1996)'ın derece analiz metodu uygulanmıştır. Üç Türk catering şirketinin müşterileri ile görüşülmüştür ve müşteriler tarafından, catering şirketlerini seçerken gözönünde bulundurulmuş en önemli kriterler tasarlanmış ve bir anket ile saptanmıştır. Müşteriler ve uzmanlar tarafından her bir karşılaştırma için üretilen üçgensel bulanık sayıların anlamları ikili karşılaştırma matrislerinde başarılı bir şekilde kullanılmıştır (Kahraman vd.,2004).

Karşılaştırmalar ve ağırlıkların belirlenmesi şu şekilde yapılacaktır:

- Ana amacımıza göre üç ana kriterin değerlendirilmesi
- Her ana kriter için kendi alt kriterlerinin değerlendirilmesi
- Tüm alt kriterler için alternatiflerin değerlendirilmesi (Başlıgil, 2005).

Örnek [Kahraman, Cebeci, Ruan 2004]:

Bir fabrika, en iyi catering şirketini seçerek sözleşme yapmayı istemektedir. Alternatif Türk catering şirketleri Durusu (D), Mertol (M) ve Afiyetle (A)'dır. Bu üç catering şirketi, üçü arasında en iyi catering şirketini seçmek için karşılaştırılacaktır. Hedef, alternatifler arasında en iyi catering şirketini seçmektir. Karar verme grubu, catering şirketi müşterilerinden ve gıda mühendisi 5 tane uzmandan oluşmaktadır. Anket ile belirlenen temel nitelikler, hijyen (C_1), yemek kalitesi (malzemeler) (C_2) ve servis kalitesi (C_3)'dir. Alt nitelikler, yemeklerin çeşitliliği (X_4), gün içindeki tamamlayıcı yemekler (X_5), yemeğin kalorisi (X_6), yemeğin lezzeti (X_7), yemeğin temizliği (X_1), servis personelinin temizliği (X_2), servis araçlarının temizliği (X_3), servis süresi (X_9), telefonda iletişim (X_{10}), problem çözme yeteneği (X_{11}) ve servis personelinin davranışı (X_8) olarak belirlenmiştir. Problemin hiyerarşik yapısı Şekil 4.1 ile verilmektedir.



Şekil 4.1 Problemin hiyerarşik yapısı.

Bulanık karşılaştırma verilerinin nasıl elde edildiği catering şirketi müşterileri ile yapılan anket ile açıklanmaktadır. Nitelikler arasında ikili karşılaştırmaların yardımı ile tercih derecelerini belirlemeyi hedefleyen bu anketler Ek:1’de verilmektedir. Anketler ikili karşılaştırma sorularını yanıtlamaya yardımcı olur. Gösterilen kontrol işaretleri 4.2-4.17 Çizelgelerindeki bulanık tercih sayıları ile sonuçlanır. Dilsel değişkenler ve bulanık karşılıkları aşağıdaki Çizelge 4.1’de verilmektedir.

Çizelge 4.1 Dilsel değişkenler ve bulanık karşılıkları.

Üçgensel Bulanık Sayılar	Dilsel (Linguistic) Karşılıklar
(1,1,1)	Eşit önemli
(2/3,1,3/2)	Biraz fazla önemli
(3/2,2,5/2)	Oldukça önemli
(5/2,3,7/2)	Çok önemli
(7/2,4,9/2)	Kesin önemli

Hedef ile ilgili bulanık değerlendirme matrisi Çizelge 4.2’de verilmektedir. Karar verme grubu önce ana niteliklere göre alt nitelikleri karşılaştırır. Çizelge 4.3, hijyenin alt niteliklerinin bulanık karşılaştırma verilerini verir. İkili karşılaştırmaların diğer matrisleri ve

her bir matrisin ağırlık vektörü Çizelge 4.4. ve Çizelge 4.5.'de verilmektedir. Gıda mühendisi 5 uzman, catering şirketlerini alt niteliklere göre karşılaştırmışlardır (Çizelge 4.6.-Çizelge 4.16).

En iyi catering şirketi için öncelik ağırlıklarını belirlemek amacıyla, alt nitelikler, nitelikler ve alternatifler için öncelik ağırlıklarını birleştirme Çizelge 4.17 ile verilmektedir..

İkili karşılaştırma matrislerinde, karşılaştırma oranları geometrik ortalamaları alınarak tek bir karşılaştırma oranı şekline dönüştürülmüştür. Bu değer, 5 tane karar verici için ortak karar olarak alınmıştır.

Çizelge 4.2 Hedefe göre bulanık değerlendirme matrisi (nitelikler arası ikili karşılaştırma matrisi).

	C_1	C_2	C_3
C_1	(1,1,1)	(3/2,2,5/2)	(2/3,1,3/)
C_2	(2/5,1/2,2/3)	(1,1,1)	(3/2,2,5/)
C_3	(2/3,1,3/2)	(2/5,1/2,2/3)	(1,1,1)

Kriterler arası ikili karşılaştırma matrisi için bulanık sentetik derece değerleri,

$$\begin{aligned}
 S_{C_1} &= (3.17, 4.00, 5.00) \otimes (8.14, 10.00, 12.34)^{-1} \\
 &= (3.17, 4.00, 5.00) \otimes \left(\frac{1}{12.34}, \frac{1}{10.00}, \frac{1}{8.14} \right) \\
 &= (0.26, 0.40, 0.61)
 \end{aligned}$$

Burada,

$$(3.17, 4.00, 5.00) = (1, 1, 1) + (3/2, 2, 5/2) + (2/3, 1, 3/2)$$

şeklinde matrisin 1. satırının elemanlarının toplamından elde edilmiştir.

(8.14, 10.00, 12.34) değeri ise matrisin tüm satırlarının toplamından elde edilmiştir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
S_{C_2} &= (2.90, 3.50, 4.17) \otimes (8.14, 10.00, 12.34)^{-1} \\
&= (2.90, 3.50, 4.17) \otimes \left(\frac{1}{12.34}, \frac{1}{10.00}, \frac{1}{8.14} \right) \\
&= (0.24, 0.35, 0.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{C_3} &= (2.07, 2.50, 3.17) \otimes (8.14, 10.00, 12.34)^{-1} \\
&= (2.07, 2.50, 3.17) \otimes \left(\frac{1}{12.34}, \frac{1}{10.00}, \frac{1}{8.14} \right) \\
&= (0.17, 0.25, 0.39)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Nitelikler arası ikili karşılaştırma matrisinden elde edilen bulanık sentetik derece değerlerini kullanarak, niteliklerin önem ağırlıklarını hesaplayalım.

$$V(S_{C_1} \geq S_{C_2}) = m_2 \geq m_1 \quad \text{olduğundan } 1.00$$

$$V(S_{C_1} \geq S_{C_3}) = m_2 \geq m_1 \quad \text{olduğundan } 1.00$$

$$V(S_{C_2} \geq S_{C_1}) = \mu_{S_{C_2}}(d) = \frac{0.26 - 0.51}{(0.35 - 0.51) - (0.40 - 0.26)} = 0.84$$

$$V(S_{C_2} \geq S_{C_3}) = m_2 \geq m_1 \quad \text{olduğundan } 1.00$$

$$V(S_{C_3} \geq S_{C_1}) = \mu_{S_{C_3}}(d) = \frac{0.26 - 0.39}{(0.25 - 0.39) - (0.40 - 0.26)} = 0.47$$

$$V(S_{C_3} \geq S_{C_2}) = \mu_{S_{C_3}}(d) = \frac{0.24 - 0.39}{(0.25 - 0.39) - (0.35 - 0.24)} = 0.61$$

elde edilir.

Böylece, bir niteliğin diğerlerine göre tercih derecesini gösteren ağırlıklar,

$$V(S_{C_1} > S_{C_2}, S_{C_3}) = \min(1, 1) = 1$$

$$V(S_{C_2} > S_{C_1}, S_{C_3}) = \min(0.84, 1) = 0.84$$

$$V(S_{C_3} > S_{C_1}, S_{C_2}) = \min(0.47, 0.61) = 0.47$$

bulunur. Yani,

$$d'(C_1) = \min V(S_{C_1} \geq S_K) = 1$$

$$d'(C_2) = \min V(S_{C_2} \geq S_K) = 0.84$$

$$d'(C_3) = \min V(S_{C_3} \geq S_K) = 0.47$$

dir. Buradan,

$$W' = (d'(C_1), d'(C_2), d'(C_3))^T = (1, 0.84, 0.47)^T$$

ağırlıklar vektörü hesaplanır. Normalleştirilirse,

$$W = \left(\frac{1}{1+0.84+0.47}, \frac{0.84}{1+0.84+0.47}, \frac{0.47}{1+0.84+0.47} \right)^T$$

$$W_G = (0.43, 0.37, 0.20)^T$$

elde edilir.

Çizelge 4.3 Hijyen niteliğine göre alt niteliklerin ikili karşılaştırma matrisi.

	X_1	X_2	X_3
X_1	(1,1,1)	(3/2,2,5/2)	(3/2,2,5/2)
X_2	(2/5,1/2,2/3)	(1,1,1)	(2/3,1,3/2)
X_3	(2/5,1/2,2/3)	(2/3,1,3/2)	(1,1,1)

Bulanık sentetik derece değerleri,

$$\begin{aligned} S_{X_1} &= (4.00, 5.00, 6.00) \otimes (8.14, 10.00, 12.34)^{-1} \\ &= (4.00, 5.00, 6.00) \otimes \left(\frac{1}{12.34}, \frac{1}{10.00}, \frac{1}{8.14} \right) \\ &= (0.32, 0.50, 0.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{X_2} &= (2.07, 2.50, 3.17) \otimes (8.14, 10.00, 12.34)^{-1} \\ &= (2.07, 2.50, 3.17) \otimes \left(\frac{1}{12.34}, \frac{1}{10.00}, \frac{1}{8.14} \right) \\ &= (0.17, 0.25, 0.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{X_3} &= (2.07, 2.50, 3.17) \otimes (8.14, 10.00, 12.34)^{-1} \\
&= (2.07, 2.50, 3.17) \otimes \left(\frac{1}{12.34}, \frac{1}{10.00}, \frac{1}{8.14} \right) \\
&= (0.17, 0.25, 0.39)
\end{aligned}$$

elde edilir. Önem ağırlıkları ise,

$$V(S_{X_1} \geq S_{X_2}) = m_2 \geq m_1 \quad \text{olduğundan } 1.00,$$

$$V(S_{X_1} \geq S_{X_3}) = m_2 \geq m_1 \quad \text{olduğundan } 1.00,$$

$$V(S_{X_2} \geq S_{X_1}) = \mu_{S_{X_2}}(d) = \frac{0.32 - 0.39}{(0.25 - 0.39) - (0.50 - 0.32)} = 0.21 \quad ,$$

$$V(S_{X_3} \geq S_{X_1}) = \mu_{S_{X_3}}(d) = \frac{0.32 - 0.39}{(0.25 - 0.39) - (0.50 - 0.32)} = 0.21 \quad ,$$

$$V(S_{X_2} \geq S_{X_3}) = m_2 \geq m_1 \quad \text{olduğundan } 1.00,$$

$$V(S_{X_3} \geq S_{X_2}) = m_2 \geq m_1 \quad \text{olduğundan } 1.00$$

elde edilir ve ağırlıklar,

$$V(S_{X_1} > S_{X_2}, S_{X_3}) = \min(1, 1) = 1$$

$$V(S_{X_2} > S_{X_1}, S_{X_3}) = \min(0.21, 1) = 0.21$$

$$V(S_{X_3} > S_{X_1}, S_{X_2}) = \min(0.21, 1) = 0.21$$

olarak hesaplanır. Yani,

$$d'(X_1) = \min V(S_{X_1} \geq S_K) = 1.00$$

$$d'(X_2) = \min V(S_{X_2} \geq S_K) = 0.21$$

$$d'(X_3) = \min V(S_{X_3} \geq S_K) = 0.21$$

dir. Buradan,

$$W' = (d'(X_1), d'(X_2), d'(X_3))^T = (1.00, 0.21, 0.21)^T$$

ağırlıklar vektörü hesaplanır. Normalleştirilirse,

$$W_{C_1} = \left(\frac{1}{1+0.21+0.21}, \frac{0.21}{1+0.21+0.21}, \frac{0.21}{1+0.21+0.21} \right)^T$$

$$W_{C_1} = (0.70, 0.15, 0.15)^T$$

elde edilir (Kahraman, 2003).

Çizelge 4.4 Yemek kalitesi niteliğine göre alt niteliklerin ikili karşılaştırma matrisi.

	X_4	X_5	X_6	X_7
X_4	(1,1,1)	(3/2,2,5/2)	(2/7,1/3,2/5)	(5/2,3,7/2)
X_5	(2/5,1/2,2/3)	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)	(7/2,4,9/2)
X_6	(5/2,3,7/2)	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)	(5/2,3,7/2)
X_7	(2/7,1/3,2/5)	(2/9,1/4,2/7)	(2/7,1/3,2/5)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{C_2} = (0.19, 0.04, 0.77, 0.00)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.5 Servis kalitesi niteliğine göre alt niteliklerin ikili karşılaştırma matrisi.

	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
X_8	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)	(7/2,4,9/2)	(2/9,1/4,2/7)
X_9	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)	(5/2,3,7/2)	(2/7,1/3,2/5)
X_{10}	(2/9,1/4,2/7)	(2/7,1/3,2/5)	(1,1,1)	(2/9,1/4,2/7)
X_{11}	(7/2,4,9/2)	(5/2,3,7/2)	(7/2,4,9/2)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{C_3} = (0.00, 0.05, 0.00, 0.95)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.6 Yemeğin temizliği alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(5/2,3,7/2)	(3/2,2,5/2)
Mertol	(2/7,1/3,2/5)	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)
Afiyetle	(2/5,1/2,2/3)	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_1} = (0.66, 0.00, 0.34)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.7 Servis personelinin temizliği alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(2/3,1,3/2)	(2/9,1/4,2/7)
Mertol	(2/3,1,3/2)	(1,1,1)	(2/5,1/2,2/3)
Afiyetle	(7/2,4,9/2)	(3/2,2,5/2)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_2} = (0,0,1)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.8 Servis araçlarının temizliği alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(2/3,1,3/2)	(2/7,1/3,2/5)
Mertol	(2/3,1,3/2)	(1,1,1)	(2/5,1/2,2/3)
Afiyetle	(5/2,3,7/2)	(3/2,2,5/2)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_3} = (0,0,1)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.9 Yemeklerin çeşitliliği alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)	(2/3,1,3/2)
Mertol	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)	(1,1,1)
Afiyetle	(2/3,1,3/2)	(1,1,1)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_4} = (0,0,1)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.10 Gün içindeki tamamlayıcı yemekler alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(5/2,3,7/2)	(2/3,1,3/2)
Mertol	(2/7,1/3,2/5)	(1,1,1)	(1,1,1)
Afiyetle	(2/3,1,3/2)	(1,1,1)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_5} = (0.87, 0, 0.13)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.11 Yemeğin kalorisi alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(2/9,1/4,2/7)	(2/7,1/3,2/5)
Mertol	(7/2,4,9/2)	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)
Afiyetle	(5/2,3,7/2)	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_6} = (0.00, 0.31, 0.69)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.12 Yemeğin lezzeti alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(2/3,1,3/2)	(1,1,1)
Mertol	(2/3,1,3/2)	(1,1,1)	(2/9,1/4,2/7)
Afiyetle	(1,1,1)	(7/2,4,9/2)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_7} = (0.27, 0.18, 0.55)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.13 Servis personelinin davranışı alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(7/2,4,9/2)	(5/2,3,7/2)
Mertol	(2/9,1/4,2/7)	(1,1,1)	(1,1,1)
Afiyetle	(2/7,1/3,2/5)	(1,1,1)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_8} = (1, 0, 0)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.14 Servis süresi alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(3/2,2,5/2)	(2/7,1/3,2/5)
Mertol	(2/5,1/2,2/3)	(1,1,1)	(7/2,4,9/2)
Afiyetle	(5/2,3,7/2)	(2/9,1/4,2/7)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_9} = (0.05, 0.64, 0.31)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.15 Telefonda iletişim alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(7/2,4,9/2)	(2/3,1,3/2)
Mertol	(2/9,1/4,2/7)	(1,1,1)	(2/3,1,3/2)
Afiyetle	(2/3,1,3/2)	(2/3,1,3/2)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_{10}} = (0.72, 0.00, 0.28)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.16 Problem çözme becerisi alt niteliğine göre alternatiflerin ikili karşılaştırma matrisi.

	Durusu	Mertol	Afiyetle
Durusu	(1,1,1)	(1,1,1)	(2/9,1/4,2/7)
Mertol	(1,1,1)	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)
Afiyetle	(7/2,4,9/2)	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)

Ağırlık vektörü $W_{x_{11}} = (0, 0, 1)^T$ olarak hesaplanır.

Çizelge 4.17 Öncelik ağırlıklarının birleşimi.

Hijyenin alt nitelikleri					
	X_1	X_2	X_3	Alternatiflerin öncelik ağırlığı	
Ağırlık	0.70	0.15	0.15		
Alternatif					
Durusu	0.66	0	0	0.46	
Mertol	0	0	0	0.00	
Afiyetle	0.34	1	1	0.54	
Yemek kalitesinin alt nitelikleri					
	X_4	X_5	X_6	X_7	Alternatiflerin öncelik ağırlığı
Ağırlık	0.19	0.04	0.77	0.00	
Alternatif					
Durusu	0	0.87	0	0.27	0.03
Mertol	0	0	0.31	0.18	0.24
Afiyetle	1	0.13	0.69	0.55	0.73
Servis kalitsinin alt nitelikleri					
	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	Alternatiflerin öncelik ağırlığı
Ağırlık	0.00	0.05	0.00	0.95	
Alternatif					
Durusu	1	0.05	0.72	0	0.003
Mertol	0	0.64	0	0	0.032
Afiyetle	0	0.31	0.28	1	0.965
Hedefin ana nitelikleri					
	C_1	C_2	C_3	Alternatiflerin öncelik ağırlığı	
Ağırlık	0.43	0.37	0.20		
Alternatif					
Durusu	0.46	0.03	0.003	0.21	
Mertol	0	0.24	0.032	0.10	
Afiyetle	0.54	0.73	0.965	0.69	

Afiyetle catering şirketi seçilir (Kahraman vd., 2004).

Bu modelin olumsuz tarafı bir veya daha fazla karar kriterine sıfır ağırlık verilmesidir. Bu kabul edilemez, çünkü alternatiflerin değerlendirilmesinde bazı kriterler dikkate alınmayacaktır (Enea ve Piazza, 2004).

5. SONUÇ

Hayatımızın hemen hemen her noktasında karşı karşıya kaldığımız karar verme problemi yıllardır incelenmekte ve gelişmekte olan bir konudur. Bilim ve teknolojiye yaşanan hızlı gelişmeler, toplumun daha karmaşık bir hale gelmesine sebep olmuştur ve bununla birlikte karar yöntemleri de gittikçe artarak belirsiz ve analiz etmesi zor bir hal almıştır. Kesin ve sayılabilir verilere dayanan klasik mantık ve klasik matematiğin tam aksine belirsiz, kesin olmayan verilere dayanan kararlar almak insanoğlunun sahip olduğu bir niteliktir.

Karar verme sürecinde, sorun yapılandırıldıktan sonra bir karar modeli kurularak seçeneklerin niteliklere göre performans değerleri elde edilir, niteliklerin önemleri belirlenir ve karar vericinin tercihleri modellenir.

Model, gerçek yaşamın basitleştirilmiş gösterimi ya da özeti olarak tanımlanır. Gerçek çoğu zaman tam olarak kopyalanamayacak kadar karışıktır. Model geliştirme, problemin öğeleri arasındaki ilişkilere ışık tutar ve karar vericiye seçenekleri göstermede yardımcı olur. Dolayısıyla model, karar vermenin önemli bir bileşenidir.

Karar verme sürecinde yardımcı olarak kullanılacak pek çok model geliştirilmiştir. AHP, çok geniş bir uygulama alanına sahiptir ve pek çok karar probleminde etkin olarak kullanılmaktadır. Basit kararlardan, karmaşık ve büyük yoğunluktaki kararlara kadar geniş bir problem alanının içinde kullanılmakta olan bir yöntemdir. Saaty (1980), Analitik Hiyerarşi Yöntemi'nin kullanılması sırasında, doğrudan doğruya ilgili kişiler ile yüz yüze anket yapıp onların ikili karşılaştırmalara ilişkin görüşlerinin alınmasını önermektedir. Kriterlerin ve alternatiflerin sayısal olarak fazla olduğu durumlarda AHP modeli uygulanması alternatiflerin ikili karşılaştırmalarının fazla olmasından dolayı karar vericide bezginlik yaratması ve aşırı zaman harcanmasına yol açabilir.

AHP'nin amacı uzmanın bilgisini yansıtmak olmasına rağmen klasik AHP insana ait düşünme tarzını hala yansıtamaz. İnsanların, klasik AHP'de değerlendirme puanlarını belirlerken düşünceleri genellikle kesin değildir. Bundan dolayı, hiyerarşik bulanık problemleri çözmek için AHP'nin bir bulanık genişlemesi olarak bulanık AHP modelleri geliştirilmiştir [Laarhoven ve Pedrycz, Buckley, Chang]. Bu modellerin karşılaştırılması sonucunda Chang'ın modelinin daha avantajlı olduğu kanısına varılır. Chang tarafından önerilen en önemli buluş, sentetik derece değeri hesaplamak için derece analizinin uygulanmasıdır. Derece analizinin amacı, birbiriyle zıtlaşan farklı hedefler arasında kararı desteklemektir. Bizim çalışmamızda da Chang [1996]'ın sentetik derece değeri hesaplama metodu

kullanılarak en yüksek müşteri memnuniyetini sağlayan en iyi catering şirketinin seçimi problemi çözülmüştür.

Ayrıca bu çalışmada bulanık çok kriterli karar verme metotları bünyesinde Topsis ve Chen [2000]'in, herhangi iki bulanık sayı arasında bir Öklid uzaklığı tanımlayarak Topsis metodunu bulanık grup kararı verme durumlarına genişlettiği Bulanık Topsis yöntemi incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Aksoy, Y., Özkan, E.M. ve Karanfil, S., (2003), Bulanık Mantığa Giriş, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
- Aouam, T., Chang, S.I. ve Lee, E.S., (2003), “Fuzzy MADM: An Outranking Method”, *European Journal of Operational Research*, 145: 317-328.
- Başılgil, H., (2005), “The Fuzzy Analytic Hierarchy Process For Software Selection Problems”, *Journal of Engineering and Natural Sciences*.
- Can, C.İ., (2004), “Çok Kriterli Karar Verme Süreci İçin Bir Karar Destek Sistemi Geliştirilmesi ve Savunma Sanayinde Uygulaması”, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tez Önerisi, Ankara.
- Büyüközkan, G., Kahraman, C. ve Ruan, D., (2004), “A Fuzzy Multi-Criteria Decision Approach for Software Development Strategy Selection”, *International Journal of General Systems*, 33: 259-280.
- Chen, C.-T., (2000), “Extensions of The Topsis For Group Decision – Making Under Fuzzy Environment”, *Fuzzy Sets and Systems*, 114:1-9.
- Chen, S. ve Hwang, C. in collaboration with Hwang, F., (1992), *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*, Springer – Verlag, Germany.
- Dağdeviren, M. ve Eren, T., (2001), “Tedarikçi Firma Seçiminde Analitik Hiyerarşi Prosesi ve 0-1 Hedef Programlama Yöntemlerinin Kullanılması”, *Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Dergisi*, 16(2): 41-52.
- Eminov, M. Ve Ball, S., (2004), “Karmaşık Problemler İçin Belirsizlik Altında Çok Kriterli Bulanık Karar Verme”, *YA/EM 2004- Yöneylem Araştırması / Endüstri Mühendisliği XXIV. Ulusal Kongresi*, 15-18 Haziran, 2004, Gaziantep – Adana.
- Enea, M. ve Piazza, T., (2004), “Project Selection by Constrained Fuzzy AHP”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3: 39-62.
- Evren, R. ve Ülengin, F., (1992), *Yönetimde Çok Amaçlı Karar Verme*, İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul.
- Gürbüz, T., (2003), “Çok Ölçütlü Karar Verme Teknikleri İle İnsan Kaynakları Performans Değerlendirmesi”, Yüksek Lisans Tezi.
- Janko, W. ve Bernroider, E., (2005), “Multi Criteria Decision Making An Application Study of Electre and Topsis”.
- Kahraman, C., Cebeci, U. Ve Ruan, D., (2004), “Multi-attribute Comparison of Catering Service Companies Using Fuzzy AHP: The Case of Turkey”, *Int. J. Production Economics*, 87: 171-184.
- Kara Harp Okulu Savunma Bilimleri Enstitüsü Harekat Araştırması Anabilim Dalı Harekat Analiz Bölümü, (2003), *Çok Amaçlı Karar Verme*, Ankara.
- Kaufman, A. ve Gupta, M.M., (1988), *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Elsevier Science Publishers B.V., The Netherlands.
- Kuruüzüm, A. ve Atsan, N., (2001), “Analitik Hiyerarşi Yöntemi ve İşletmecilik Alanındaki Uygulamaları”, *Akdeniz İ.İ.B.F. Dergisi*, (1), 83-105.

- Lai, Y. ve Hwang, C., (1996), Fuzzy Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications, 2nd Corrected Printing, Springer – Verlag, Berlin Heidelberg.
- Mikhailov, L. ve Tsvetinov, P., (2004), “Evaluation of Services Using A Fuzzy Analytic Hierarchy Process”, Applied Soft Computing, 5: 23-33.
- Özkan, M.M., (2003), Bulanık Hedef Programlama, Ekin Kitabevi, Bursa,
- Paksoy, T. ve Atak, M., (2003), “Etkileşimli Bulanık Çok Amaçlı Doğrusal Programlama İle Bütünleşik Üretim Planlama: Hidrolik Pompa İmalatçısı Firma Örnek Olayı”.
- Sakawa, M., (1993), Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Pres, New York.
- Tiryaki, F., (2003), “Çok Amaçlı Doğrusal Programlama Ders Notları”, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü, İstanbul.
- Tsaur, S.-H., Chang, T.-Y. ve Yen, C.-H., (2002), “The Evaluation of Airline Service Quality by Fuzzy MCDM”, Tourism Management, 23:107-115.
- Yang, T. ve Hung, C.-C., Article in Press, “Multiple Attribute Decision Making Methods For Plant Layout Decision Problem”, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing.
- Zimmermann, H.-J., (1993), Fuzzy Sets Theory – and Its Applications, Seconds, Revised Edition, Sixth Printing, Kluwer Academic Publishers, Boston / Dordrecht / London.

EK**Ek 1 Catering Şirketleri Müşterileri İle Yapılan Anket**

Catering şirketlerinin müşterilerine bir anket uygulanmıştır. Durusu'nun 24, Mertol'un 17 ve Afiyetle şirketinin 14 müşterisi soruları cevaplandırmışlardır.

Eğer sol taraftaki nitelik sağ taraftakinden daha önemli ise, tercih edilen önem seviyesinin altında “Eşit” önemin sol tarafına “✓” işareti koyulmuştur. Eğer sol taraftaki nitelik sağ taraftakinden daha az önemli ise tercih edilen önem seviyesinin altında “Eşit” önemin sağ tarafına “✓” işareti koyulmuştur.

S1. Hijyen yemek kalitesi ile karşılaştırıldığında ne kadar önemli?

S2. Hijyen servis kalitesi ile karşılaştırıldığında ne kadar önemli?

S3. Yemek kalitesi servis kalitesi ile karşılaştırıldığında ne kadar önemli?

En iyi Catering şirketine göre		Bir ana niteliğin diğerlerine göre önemi (ya da tercihi)								
Sorular	Nitelikler	7/2, 4, 9/2) Kesin önemli	5/2, 3, 7/2) Çok önemli	(3/2, 2, 5/2) Oldukça önemli	(2/3, 1, 3/2) Biraz fazla önemli	(1, 1, 1) Eşit	(2/3, 1, 3/2) Biraz fazla önemli	(3/2, 2, 5/2) Oldukça önemli	(5/2, 3, 7/2) Çok önemli	(7/2, 4, 9/2) Kesin önemli
S1	C ₁			✓						C ₂
S2	C ₁				✓					C ₃
S3	C ₂			✓						C ₃

Hijyene göre		Bir ana niteliğin diğerlerine göre önemi (ya da tercihi)	
Sorular	Nitelikler	$7/2, 4, 9/2$ Kesin önemli $5/2, 3, 7/2$ Çok önemli $(3/2, 2, 5/2)$ Oldukça önemli $(2/3, 1, 3/2)$ Biraz fazla önemli $(1, 1, 1)$ Eşit $(2/3, 1, 3/2)$ Biraz fazla önemli $(3/2, 2, 5/2)$ Oldukça önemli $(5/2, 3, 7/2)$ Çok önemli $(7/2, 4, 9/2)$ Kesin önemli	Nitelikler
S4	X_1		X_2
S5	X_1	✓	X_3
S6	X_2		X_3

[illegible]

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 29.01.1979

Doğum yeri Kandıra

Lise 1993-1997 Kenan Evren Süper Lisesi

Lisans 1998-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2003-2006 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

Çalıştığı kurum

2005-Devam ediyor Finansbank A.Ş. Operasyon Merkezi
Dış Ticaret Birimi Yetkili Yardımcısı