

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TAM SÜREKLİ OPERATÖRLERİN S-SAYILARI

Matematikçi Aylan VARDAR ÜZGÜN

**FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ehliman ADIGÜZELOV

İSTANBUL , 2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	i
ÖNSÖZ.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	2
2.1 Eşlenik ve Kendine Eş Operatörler.....	2
2.2 Lineer Operatörün Spektrumu.....	8
2.3 Tam Sürekli Operatörler.....	11
2.4 Üniter Operatörler	28
2.5 İzometrik ve Kısmen İzometrik Operatörler.....	30
3. TAM SÜREKLİ OPERATÖRLERİN S-SAYILARI.....	35
3.1 Kendine Eş Tam Sürekli Operatörlerin Özdeğerlerinin Minimax Özellikleri.....	35
3.2 Tam Sürekli Operatörlerin s-Sayıları ve Onların En Basit Özellikleri.....	38
3.2.1. Tam Sürekli Operatörlerin s-Sayıları.....	38
3.2.2. Tam Sürekli Operatörün Schmidt Açılımı.....	40
3.2.3. s-Sayılarının Yaklaşım Özelliği ve Ondan Elde Edilen Eşitsizlikler.....	42
3.2.4. s-Sayıları İle İlgili Asimtotik Teorem.....	45
3.3 Tam Sürekli Operatörlerin s-Sayıları, Özdeğerleri ve Köşegen Elemanları Arasındaki İlişkileri Gösteren Eşitsizlikler	46
3.4 Tam Sürekli Operatörlerin Toplam ve Çarpımlarının s-Sayıları İçin Eşitsizlikler.....	60
3.5 Örnek	66
4. SONUÇLAR.....	70
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	72

SİMGE LİSTESİ

A^*	A operatörünün eşleniği
A^{-1}	A operatörünün tersi
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	A operatörünün değer kümesi
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$B(X,Y)$	Tüm sınırlı lineer $A: X \rightarrow Y$ operatörlerinin kümesi
σ_∞	Tüm tam sürekli $A: H \rightarrow H$ operatörlerinin kümesi
$s_j(A)$	$A \in \sigma_\infty$ operatörünün s -sayıları ($j = 1,2,\dots$)
$r(A)$	A operatörünün boyutu
$\nu(A)$	$A \in \sigma_\infty$ operatörünün sıfırdan farklı tüm özdeğerlerinin cebirsel katlılıklarının toplamı
$\text{Ker}A$	A operatörünün çekirdeği
$M^\perp$	M lineer manifoldunun ortogonal tümleyeni

ÖNSÖZ

“Tam sürekli operatörlerin s-sayıları” ile ilgili yaptığım bu tez çalışmanın konuya ilgi duyan araştırmacı kişilere iyi bir kaynak olmasını temenni eder çalışmam sırasında benden sabır ve hoşgörüsünü esirgemeyen çok değerli danışmanım Prof. Dr. Ehliman Adıgüzelov’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

“Tam Sürekli Operatörlerin s-Sayıları” adlı bu tez çalışmasında H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere H ’den H ’ye tam sürekli operatörlerin s-sayılarının temel özellikleri incelenmiş ve tam sürekli bir integral operatörün s-sayıları ile ilgili bir örnek verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Hilbert uzayı, eşlenik operatör, kendine eş operatör, normal operatör, tam sürekli operatör, üniter operatör, izometrik operatör, kısmen izometrik operatör, özdeğer, s-sayıları.

ABSTRACT

Let H be a separable Hilbert space. In this thesis, entitled “s-numbers of Completely Continuous Operators”, we examined basic properties of s-numbers of completely continuous operators on $H \rightarrow H$ and then we gave an example about s-numbers of an completely continuous integral operator.

Keywords: Hilbert space, conjugate operator, self-adjoint operator, normal operator, completely continuous operator, uniter operator, izometric operator, partial izometrik operator, eigenvalues, s-numbers.

1. GİRİŞ

Tam sürekli operatörlerin s-sayıları muhtemelen ilk defa E.Schmidt'in kendine eş olmayan integral operatörlerle ilgili çalışmasında ortaya konmuştur. Fakat matrislerin ve tam sürekli operatörlerin s-sayılarının temel özellikleri yıllar önce incelenmiştir. Ancak daha sonraki dönemlerde s-sayılarının bu özelliklerinin tam sürekli operatörlerin simetrik-normalu ideallerinin genel teorisinde, spektrumun asimtotik özelliklerinin incelenmesinde ve birçok farklı problemlerin çözülmesinde önemli bir rol oynadığı gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında tam sürekli operatörlerin s-sayılarının temel özellikleri kapsamlı bir anlatımını içermektedir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Eşlenik ve Kendine Eş Operatörler

Teorem 2.1.1 (F. Riesz): H bir Hilbert uzayı ve f H 'de tanımlı sınırlı lineer bir fonsiyonel olsun. O takdirde öyle bir tek $u \in H$ vardır ki her $x \in H$ için

$$f(x) = (x, u)$$

ve

$$\|f\| = \|u\| \tag{2.1}$$

dir.

Tanım 2.1.1 : H bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör olsun. y , H 'nin herhangi bir elemanı olmak üzere H de tanımlı

$$f_y(x) = (Ax, y) \quad (x \in H)$$

fonsiyoneli göz önüne alalım. A 'nın H 'den H 'ye sınırlı lineer operatör olmasından yararlanarak kolayca görülebilir ki, her $y \in H$ için f_y sınırlı lineer bir fonsiyoneldir.

Teorem 2.2.1 gereğince her $y \in H$ için

$$f_y(x) = (Ax, y) = (x, y^*) \quad (x \in H) \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir tek $y^* \in H$ elemanı vardır. Burada her $y \in H$ elemanına

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad (x \in H)$$

koşulunu sağlayan ve bir $y^* \in H$ karşılık getiren bir $A^* : H \rightarrow H$ operatörünün tanımlandığı görülmektedir. Dolayısıyla

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (x, y \in H) \quad (2.3)$$

dir.

Bu A^* operatörüne A 'nın eşlenik operatörü denir.

Teorem 2.1.2 : H bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör olsun. O takdirde A 'nın eşleniği olan A^* operatörü de sınırlı lineer operatördür ve

$$\|A\| = \|A^*\| \quad (2.4)$$

dir.

İspat: Önce A^* operatörünün lineer olduğunu gösterelim. Her $y_1, y_2 \in H$ ve her $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ($K \in \{R, C\}$) için

$$\begin{aligned} (Ax, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= (Ax, \lambda_1 y_1) + (Ax, \lambda_2 y_2) \\ &= \overline{\lambda_1 (Ax, y_1)} + \overline{\lambda_2 (Ax, y_2)} \\ &= \overline{\lambda_1 (x, A^* y_1)} + \overline{\lambda_2 (x, A^* y_2)} \\ &= (x, \lambda_1 A^* y_1) + (x, \lambda_2 A^* y_2) \\ &= (x, \lambda_1 A^* y_1 + \lambda_2 A^* y_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

dir

Buradan eşlenik operatör tanımı gereğince

$$A^* (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A^* y_1 + \lambda_2 A^* y_2 \quad (2.6)$$

A^* 'nın sınırlı olduğunu gösterelim. Her $x, y \in H$ için:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (2.7)$$

dir.

Burada $x = A^* y$ alınırsa

$$(AA^* y, y) = (A^* y, A^* y) = \|A^* y\|^2$$

elde edilir. Cauchy- Schwartz eşitsizliğinden yararlanarak buradan

$$\|A^* y\|^2 = (AA^* y, y) \leq \|AA^* y\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|A^* y\| \cdot \|y\|$$

ya da

$$\|A^* y\| \leq \|A\| \cdot \|y\| \quad (y \in H) \quad (2.8)$$

bulunur.

Bu eşitsizlikten $A^* : H \rightarrow H$ operatörünün sınırlı olduğu ve

$$\|A^*\| \leq \|A\| \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.7)'de $y = Ax$ alınırsa

$$\|Ax\|^2 = (x, A^* Ax) \leq \|x\| \cdot \|A^* Ax\| \leq \|x\| \cdot \|A^*\| \cdot \|Ax\|$$

$$\|Ax\| \leq \|x\| \cdot \|A^*\| \quad (x \in H) \quad (2.10)$$

bulunur. Buradan da

$$\|A\| \leq \|A^*\| \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.9) ve (2.11)'den

$$\|A\| = \|A^*\| \quad (2.12)$$

elde edilir

Kolayca gösterilebilir ki , eşlenik operatörler aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$1) (A + B)^* = A^* + B^* \quad (2.13)$$

$$2) (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \quad (2.14)$$

$$3) (AB)^* = B^* A^* \quad (2.15)$$

$$4) (A^*)^* = A \quad (2.16)$$

Tanım 2.1.2 : H bir Hilbert Uzayı ve $A : H \rightarrow H$ sınırlı bir lineer operator olsun. $A = A^*$ ise yani her $x, y \in H$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (2.17)$$

ise A 'ya kendine eş operatör denir.

Örnek 2.1.1 : $K(t,s)$, $[a,b] \times [a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ karesinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$A: L_2[a, b] \rightarrow [a, b],$$

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds \quad (x = x(t) \in L_2[a, b])$$

operatörünü göz önüne alalım.

$\forall x, y \in L_2[a, b]$ için

$$(Ax, y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s) x(s) ds \right) \overline{y(t)} dt = \int_a^b x(s) \left(\int_a^b K(t, s) \overline{y(t)} dt \right) ds = \int_a^b x(s) \overline{\left(\int_a^b \overline{K(t, s)} y(t) dt \right)} ds = (x, A^* y)$$

dir. Burada $(A^* y)(s) = \int_a^b \overline{K(t, s)} y(t) dt$ dir.

Görüldüğü gibi $K(t, s)$ fonksiyonu,

$$\overline{K(t, s)} = K(s, t)$$

koşulunu sağlıyorsa A operatörü kendine eştir.

Örnek 2.1.2 : H sonsuz boyutlu bir Hilbert Uzayı ve $\{e_i\}_1^\infty, \{g_i\}_1^\infty$ H de herhangi iki ortonormal dizi olsun. $\{\lambda_i\}_1^\infty$ sınırlı bir sayı dizisi olmak üzere

$$A : H \rightarrow H,$$

$$Ax = \sum_1^\infty \lambda_i (x, e_i) g_i$$

lineer operatörünü göz önüne alalım. $\{\lambda_i\}$ sayı dizisinin sınırlı olmasından ve her $x \in H$ için

$$\sum_1^\infty |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

Bessel Eşitsizliğinden yararlanarak ,

$$\|Ax\|^2 = \sum_1^\infty |\lambda_i|^2 |(x, e_i)|^2 \leq c^2 \sum_1^\infty |(x, e_i)|^2 \leq c^2 \|x\|^2$$

ya da

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad (c>0)$$

bulunur .

Görüldüğü gibi A operatörü sınırlıdır. A^* operatörünü bulalım. Her $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x, e_i) g_i, y \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i(x, e_i) g_i, y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x, e_i) (g_i, y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (x, \overline{\lambda_i}(y, g_i) e_i) \\ &= \left(x, \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda_i}(y, g_i) e_i \right). \end{aligned}$$

Eşlenik operatör tanımı gereğince buradan

$$A^* y = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda_i}(y, g_i) e_i$$

bulunur. Buradan da $\lambda_i = \overline{\lambda_i}, e_i = g_i$ ($i = 1, 2, \dots$) koşulları sağlandığı takdirde A operatörünün kendine eş olduğu görülmektedir. $\square$

A: $H \rightarrow H$ kendine eş bir operatör olsun. Her $x \in H, x \neq 0$ için $(Ax, x) > 0$ ($(Ax, x) < 0$) ise A'ya pozitif (negatif) operatör denir ve bu $A > 0$ ($A < 0$) şeklinde yazılır. Her $x \in H$ için $(Ax, x) \geq 0$ ($(Ax, x) \leq 0$) ise A'ya negatif olmayan (pozitif olmayan) bir operatör denir ve bu $A \geq 0$ ($A \leq 0$) şeklinde gösterilir.

A: $H \rightarrow H$ ve B: $H \rightarrow H$ kendine eş herhangi iki operatör olsun, A-B: $H \rightarrow H$ operatörü pozitif (negatif olmayan) bir operatör ise A ya B den büyüktür (küçük değildir) denir ve $A > B$ ($A \geq B$) olarak yazılır. A, H' den H' ye tam sürekli bir operatör ise $A \in \sigma_{\infty}(H)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.3 : A negatif olmayan kendine eş bir operatör ve B de $B^2 = A$ olacak şekilde kendine eş bir operatör ise B ye A'nın karekökü denir.

Teorem 2.1.3 : Negatif olmayan kendine eş bir $A : H \rightarrow H$ operatörünün bir tek negatif olmayan kendine eş B karekökü vardır. Eğer C,

$$AC = CA$$

olacak şekilde herhangi bir lineer operatör ise

$$BC = CB$$

dir (Lysternik ve Sobolev, 1955).

2.2. Lineer Operatörün Spektrumu

Tanım 2.2.1 : X bir lineer uzay ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A: D(A) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun. $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x_0 \in D(A)$ (x_0 vektörü) ve λ_0 sayısı varsa, λ_0 'a A operatörünün bir özdeğeri ve x_0 'a da bu özdeğere karşılık gelen bir özvektör denir.

Tanım 2.2.2 : Bir A lineer operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen tüm özvektörlerin ve sıfır elemanının oluşturduğu N_λ lineer manifolduna A'nın λ özdeğerine karşılık gelen özuzayı denir.

Tanım 2.2.3 : Bir A lineer operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen N_λ özuzayının boyutuna λ özdeğerinin katlılığı denir.

Teorem 2.2.1 : A herhangi bir lineer operatör olsun. Bir λ sayısı için $A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersinin var olması için gerek ve yeter koşul λ 'nın A operatörünün bir özdeğeri olmamasıdır.

Tanım 2.2.4 : X bir kompleks Banach Uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operator olsun. Bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersi var, sınırlı ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} = X$ ise bu λ sayısına A operatörünün bir regular değeri veya regüler noktası denir A operatörünün tüm regüler değerlerinin kümesine A operatörünün rezolvent kümesi denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. $\rho(A)$ kümesinde tanımlı $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatör fonksiyonuna A 'nın rezolventi denir.

Tanım 2.2.5 : X bir kompleks Banach Uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operator olsun. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün spektrumu denir.

Teorem 2.1.1, Tanım 2.1.4 ve Tanım 2.1.5'den bir A lineer operatörünün özdeğerlerinin A 'nın spektrumuna ait olduğu görülmektedir. Sonlu boyutlu uzaylarda her lineer operatörün spektrumu sadece özdeğerlerden ibarettir.

Tanım 2.2.6 (Dumford ve Schwartz (1957)) : X kompleks bir Banach Uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operator olsun. A operatörünün tüm özdeğerlerinden oluşan kümeye bir başka deyişle $A - \lambda I$ operatörünün tersinin var olmadığı tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine A 'nın spektrumunun noktasal kısmı denir.

$A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersi var, sınırsız ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} = X$ olduğu tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine A 'nın spektrumunun sürekli kısmı denir.

$A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersi var ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} \neq X$ olduğu tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine A 'nın spektrumunun kalan kısmı denir.

Örnek 2.2.1: $C[a, b] (-\infty < a < b < \infty)$ uzayının sürekli türeve sahip olan ve $x(a) = x(b)$ koşulunu sağlayan tüm $x = x(t)$ fonksiyonlarının kümesini $D(A)$ ile gösterelim.

$$A : D(A) \rightarrow C[a, b]$$

$$(Ax)(t) = ix'(t)$$

türev operatörünün özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz burada $i = (0, 1)$ sanal birimdir.

A operatörünün özdeğerleri

$$ix'(t) = \lambda x(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (2.18)$$

$$x(a) = x(b) \quad (2.19)$$

sınır değer probleminin özdeğerleridir. (2.18) denkleminin genel çözümüm c keyfi bir sabit olmak üzere

$$x(t) = ce^{-i\lambda t}$$

şeklindedir. λ 'nın özdeğer olması için $x(a) = x(b)$ yani

$$e^{-i\lambda a} = e^{-i\lambda b} \quad (2.20)$$

koşulunun sağlanması gerekir. (2.20)'den

$$e^{-i\lambda(b-a)} = 1$$

ya da

$$\lambda(b-a) = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

bulunur. Dolayısıyla (2.18), (2.19) probleminin yani A operatörünün özdeğerleri

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{b-a} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

şeklindedir. $\lambda_n = \frac{2n\pi}{b-a}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler (özfonksiyonlar)

$$\varphi_n(t) = ce^{-\frac{2n\pi i}{b-a}t} \quad c \neq 0$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi her λ_n özdeğerinin katlılığı birdir.

Teorem 2.2.2 : H bir Hilbert uzayı ve $D(A) \subset H$ olmak üzere $A:D(A) \rightarrow H$ bir kendine eş operator olsun. Bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı için aşağıdakiler denktir:

a) λ , A 'nın spektrumunun sürekli kısmına aittir.

b) $R(A - \lambda I) \neq H$ ve $\overline{R(A - \lambda I)} = H$.

İspat:

Önce a) koşulunun sağlandığını varsayalım. O halde tanım gereği $(A - \lambda I)^{-1}$ ters operatörü var, sınırsız ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} = H$ dir. $(A - \lambda I)^{-1}$ ters operatörünün varlığından λ sayısının A 'nın bir özdeğeri olmadığı elde edilir. O halde $\overline{R(A - \lambda I)} = H$ dir. Öte yandan $\lambda \in \sigma(A)$ olduğundan $R(A - \lambda I) \neq H$ dir.

Bu kez b) koşullarının sağlandığını varsayalım. $\overline{R(A - \lambda I)} = H$ olduğundan λ A 'nın bir özdeğeri değildir ve dolayısıyla $(A - \lambda I)^{-1}$ ters operatörü vardır. Ayrıca $A - \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$) operatörü kendine eş olduğundan $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörü de kendine eştir. Eğer $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörü sınırlı olsaydı $D((A - \lambda I)^{-1}) = H$ yani $R(A - \lambda I) = H$ olurdu. Bu sonuç b) koşullarından birincisine aykırıdır. Dolayısıyla $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörü sınırsızdır. Sonuç olarak λ sayısı A operatörünün spektrumunun sürekli kısmına aittir. $\square$

2.3. Tam Sürekli Operatörler

Tanım 2.3.1: X ve Y herhangi iki normlu lineer uzay ve $A: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer A operatörü, X 'in her sınırlı alt kümesini Y 'nin rölatif kompakt bir alt kümesine dönüştürürse A 'ya tam sürekli (kompakt) bir operatör denir. $\square$

Tam sürekli operatörün tanımından görüldüğü gibi her tam sürekli operatör sınırlıdır ve dolayısıyla sürekli.

Teorem 2.3.1: X ve Y herhangi iki normlu lineer uzay olsun. Bir $A: X \rightarrow Y$ bir lineer operatörünün tam sürekli olması için gerek ve yeter koşul her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{Ax_n\}$ dizisinin Y 'de yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır.

İspat. A operatörü tam sürekli ve $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir sınırlı dizi olsun. Tanım gereği $\{Ax_n\}$ kümesi rölatif kompaktır. $\{Ax_n\}$ rölatif kompakt olduğundan tanım gereği $\{Ax_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{Ax_n\}$ dizisinin Y 'de yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu varsayalım.

E , herhangi bir sınırlı küme olsun. $A(E)$ 'nin rölatif kompakt olduğunu göstermek gerekir.

$\{y_n\} \subset A(E)$ olsun. $y_n = Ax_n$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset E$ ($n = 1, 2, \dots$) dizisi vardır. E kümesi sınırlı olduğundan $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır. O halde $\{Ax_n\}$ dizisinin yani $\{y_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla $A(E)$ kümesi rölatif kompaktır. Yani A operatörü tam sürekli dir.

Tanım 2.3.2: $\phi = \{\varphi\}, [a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) aralığında tanımlı fonksiyonların bir kümesi olsun. Eğer tüm $\varphi \in \phi$ fonksiyonları ve tüm $x \in [a, b]$ 'ler için

$$|\varphi(x)| < c$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti varsa ϕ fonksiyonlar kümesine düzgün sınırlıdır denir.

Tanım 2.3.3: $\phi = \{\varphi\}, [a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonların bir kümesi olsun. Her ε verildiğinde $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan tüm $t_1, t_2 \in [a, b]$ 'ler için ve tüm $\varphi \in \phi$ 'ler için

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa ϕ fonksiyonlar kümesine eşsürekli dir denir.

Teorem 2.3.2 (Arzela): $C[a,b]$ uzayının bir $\phi = \{\phi\}$ alt kümesinin rölatif kompakt olması için gerek ve yeter koşul ϕ 'nin düzgün sınırlı ve eşsüreklili olmasıdır.

Örnek 2.3.1: $K(t,s), [a,b] \times [a,b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) karesinde sürekli bir fonksiyon olsun. $A: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ lineer operatörünü gözönüne alalım.

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s).x(s)ds \quad (x = x(t) \in C[a,b])$$

A'nın tam sürekli bir operatör olduğunu gösterelim:

$E \subset C[a,b]$ herhangi sınırlı bir küme olsun. $A(E) = \left\{ \int_a^b K(t,s).x(s)ds : x \in E \right\}$ kümesini ele alalım.

$$\left| \int_a^b K(t,s).x(s)ds \right| \leq \int_a^b |K(t,s)|.|x(s)|ds \leq \int_a^b |K(t,s)|. \max_{a \leq s \leq b} |x(s)|ds = \|x(s)\| \int_a^b |K(t,s)|.ds \quad (2.21)$$

$K(t,s), [a,b] \times [a,b]$ karesinde sürekli olduğundan sınırlıdır, yani tüm $t,s \in [a,b]$ için $K(t,s) < c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır.

Diğer taraftan E kümesi sınırlı olduğundan tüm $x \in E$ 'ler için $\|x\| < c_1$ olacak şekilde $c_1 > 0$ sabiti vardır.

O halde (2.21)'den tüm $x \in E$ ' ler için

$$\left| \int_a^b K(t,s).x(s)ds \right| < c.c_1(b-a)$$

elde edilir. Böylece $A(E)$ kümesinin düzgün sınırlı olduğunu göstermiş olduk.

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b K(t_1, s)x(s)ds - \int_a^b K(t_2, s)x(s)ds \right| &\leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| |x(s)| ds \\
&\leq c_1 \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| ds
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$K(t, s)$ sınırlı ve kapalı $[a, b] \times [a, b]$ karesinde sürekli olduğundan Contor Teoremi gereğince düzgün süreklidir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan tüm $t_1, t_2 \in [a, b]$ 'ler ve tüm $s \in [a, b]$ 'ler için

$$|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{c_1(b-a)} \tag{2.23}$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. (2.22) ve (2.23)'ten

$$\left| \int_a^b K(t_1, s)x(s)ds - \int_a^b K(t_2, s)x(s)ds \right| \leq \varepsilon \quad (\forall x \in E)$$

elde edilir. Bu sonuç $A(E)$ fonksiyonlar kümesinin eş sürekli olduğunu gösterir.

$A(E)$ kümesi düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğundan Arzela Teoremi gereğince rölatif kompaktır. Böylece, her sınırlı $E \subset C[a, b]$ kümesi için, $A(E) \subset C[a, b]$ 'nin rölatif kompakt olduğunu gösterdik. Bu da tanım gereği A 'nın tam sürekli operatör olması demektir.

Tanım 2.3.4. X herhangi bir lineer uzay, $n \in \mathbb{N}$ sabit sayı olsun. Eğer X uzayının n tane lineer bağımsız elemanı var ve $(n + 1)$ tane elemanı lineer bağımlı ise X 'e sonlu boyutlu bir uzay, n 'ye de X 'in boyutu denir. $\dim X = n$ ile gösterilir.

Eğer $\forall m \in \mathbb{N}$ sayısı için X 'in m tane lineer bağımsız elemanı varsa X 'e sonsuz boyutlu bir uzay denir ve bu durumda $\dim X = \infty$ yazılır.

Örneğin

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ bir boyutludur.

$\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) n boyutludur. Bu uzayın n tane $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ elemanları lineer bağımsızdır ve $\forall (n+1)$ tane elemanı lineer bağımlıdır.

l_2 uzayı sonsuz boyutlu uzaydır. Çünkü bu uzayın $\forall m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$) için m tane $e_1 = (1, 0, \dots), e_2 = (0, 1, \dots), \dots, e_m = \underbrace{(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_{m \text{ tan e}}$ elemanları lineer bağımsızdır.

Teorem 2.3.3: X ve Y herhangi iki lineer uzay $D(A) \subset X$ olmak üzere $A: D(A) \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. $\dim D(A) < \infty$ ise $\dim R(A) \leq \dim D(A)$ dır. ($R(A) = \{Ax : x \in D(A)\}$)

İspat. $\dim D(A) = n$ olsun. $R(A)$ 'nın $n+1$ elemanının lineer bağımlı olduğunu gösterelim.

$y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$, $R(A)$ 'nın herhangi $n+1$ tane elemanı olsun. $Ax_i = y_i$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in D(A)$ elemanları vardır. $\dim D(A) = n$ olduğundan tanım gereği $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ elemanları lineer bağımlıdır. Yani

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{n+1} x_{n+1} = 0 \quad (2.24)$$

olacak şekilde en az biri sıfırdan farklı olan $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ sayıları vardır. (2.24)'ten

$$A(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{n+1} x_{n+1}) = 0$$

ya da A 'nın lineer olmasından yararlanarak

$$c_1 Ax_1 + c_2 Ax_2 + \dots + c_{n+1} Ax_{n+1} = 0$$

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{n+1} y_{n+1} = 0$$

elde edilir. Yukarıda ifade edildiği gibi $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ sabitlerinden en az biri sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ elemanları lineer bağımlıdır. $R(A)$ 'nın her $n+1$ tane elemanı lineer bağımlı olduğundan $\dim R(A) \leq n$ dir.

Teorem 2.3.4: X ve Y herhangi iki lineer uzay, $A: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun.

- a) A sınırlı ve $\dim R(A) < \infty$ ise A operatörü tam süreklidir.
- b) $\dim X < \infty$ ise A tam süreklidir.

İspat.

a) $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir sınırlı dizi olsun. A sınırlı operator olduğundan $\{Ax_n\} \subset R(A)$ dizisi de sınırlıdır. Gerçekten

$$\|Ax_n\| \leq \|A\| \|x_n\| \leq \|A\| c \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$\{Ax_n\}$, sonlu boyutlu $R(A)$ lineer uzayının sınırlı bir dizisi olduğundan lineer cebirden $\{Ax_n\}$ 'nin yakınsak bir alt diziye sahip olduğu bilinmektedir. O halde Teorem 2.3.1. gereğince A operatörü tam süreklidir.

b) $\dim X < \infty$ olsun. Teorem 2.3.3. gereğince $\dim R(A) \leq \dim X < \infty$ dur. Dolayısıyla A sonlu boyutlu X uzayından, sonlu boyutlu $R(A)$ uzayına lineer bir operatördür. Lineer cebirden bu tür operatörlerin sınırlı olduğu bilinmektedir. O halde a) şikkından A operatörü tam süreklidir.

Örnek 2.3.2: X ve Y herhangi iki lineer normlu uzay, $f_1, f_2, \dots, f_n$ X 'te tanımlı herhangi n tane sınırlı lineer fonksiyonel $y_1, y_2, \dots, y_n$ 'de Y 'nin herhangi elemanları olsun.

$A: X \rightarrow Y, Ax = \sum_{i=1}^n f_i(x).y_i$ lineer operatörünü gözönüne alalım. Burada $\dim R(A) \leq n$ dir.

A operatörü sınırlıdır. Gerçekten

$$\|Ax\| \leq \sum_{i=1}^n \|f_i(x)\| \|y_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\| \|x\| \|y_i\| = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \|f_i\| \|y_i\|}_{c \text{ sabit}} \right) \|x\|$$

$\|Ax\| \leq C\|x\|$ dir. Teorem 2.3.4.a 'dan dolayı A operatörü tam süreklidir.

Yardımcı Teorem 2.3.1 (F. Riesz (1965)): X herhangi bir normlu lineer uzay, L' de X'in $L \neq X$ olacak şekilde herhangi bir alt uzayı ($L \subsetneq X$) o takdirde her $\varepsilon > 0$ için $\|x\| = 1, g(x, L) > 1 - \varepsilon$ koşullarını sağlayan bir $x = x(\varepsilon) \in X$ elemanı vardır.

$$g(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$$

İspat.

x_0 , X'in L'ye ait olmayan bir elemanı ve $d = \rho(x_0, L)$ olsun.

$d > 0$ dir. Gerçekten $d = 0$, yani $d = \rho(x_0, L) = \inf_{u \in L} \|x_0 - u\| = 0$ olsaydı infimum tanımından $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - u_n\| = 0$ olacak şekilde $\{u_n\} \in L$ dizisi bulunurdu. Bu durumda L kapalı olduğundan $x_0 \in L$ 'dir. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $(d \neq 0) d > 0$ dir.

İnfimum tanımından $\forall \varepsilon > 0$ için

$$(0 <) d \leq \|x_0 - u_0\| \leq d + d\varepsilon \quad (2.25)$$

olacak şekilde bir $u_0 = u_0(\varepsilon) \in L$ elemanı vardır

$$x = \frac{x_0 - u_0}{\|x_0 - u_0\|}, \quad \|x_0 - u_0\| \text{ sıfır olamaz } d > 0$$

$u \in L$ olsun.

$$\|x - u\| = \left\| \frac{x_0 - u_0}{\|x_0 - u_0\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x_0 - u_0\|} \|x_0 - [u_0 + \|x_0 - u_0\|u]\| \quad (2.26)$$

$u \in L$ ve L bir alt uzay olduğundan $[u_0 + \|x_0 - u_0\|u] \in L$ dir. Dolayısıyla

$$\|x_0 - [u_0 + \|x_0 - u_0\|u]\| \geq d \quad (2.27)$$

(2.25), (2.26) ve (2.27)'den

$$\|x - u\| > \frac{d}{d + d\varepsilon} \quad (\forall u \in L)$$

$$\text{O zaman } \inf_{u \in L} \|x - u\| \geq \frac{d}{d + d\varepsilon} \Rightarrow \rho(x, L) \geq \frac{d}{d + d\varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon \Rightarrow \rho(x, L) > 1 - \varepsilon .$$

Öte yandan norm tanımından $\|x\| = \left\| \frac{x_0 - u_0}{\|x_0 - u_0\|} \right\| = 1$ dir.

Teorem 2.3.5: X sonsuz boyutlu normlu lineer bir uzay, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de X 'te sonsuz lineer bağımsız elemanlar sistemi olsun. O taktirde $E_n, x_1, x_2, \dots, x_n \ n \in N$ elemanlarının gerdiği lineer manifold olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{y_n\}$ dizisi vardır.

- 1) $y_n \in E_n$
- 2) $\|y_n\| = 1 \ (n = 1, 2, \dots)$
- 3) $\rho(y_{n+1}, E_n) > \frac{1}{2} \ (n = 1, 2, \dots)$

İspat. $E_n \subset E_{n+1} \ (n = 1, 2, \dots)$ olduğu açıktır. Öte yandan $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanları $\forall n \in N$ için lineer bağımsız olduğundan $E_n \neq E_{n+1}$ dir.

$y_1 \in E_1$ ve $\|y_1\| = 1$ olsun. Yardımcı Teorem 2.3.1.'den dolayı $\forall n \in N$ sayısı için

$$\|y_{n+1}\| = 1 \ , \ \rho(y_{n+1}, E_n) > \frac{1}{2}$$

olacak şekilde $y_{n+1} \in E_{n+1}$ elemanı vardır.

Teorem 2.3.5.'ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 2.3.1: X sonsuz boyutlu normlu lineer bir uzay ise $B[0,1] = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı rölâtif kompakt değildir.

İspat. $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, X 'in sonsuz lineer bağımsız bir elemanlar sistemi ve E_n de $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ elemanlarının gerdiği lineer manifold olsun. Teorem 2.3.5. gereğince $y_n \in E_n$, $\|y_n\| = 1$ ve $\rho(y_{n+1}, E_n) > \frac{1}{2}$ olacak şekilde bir $\{y_n\}$ dizisi vardır.

$$\{y_n\} \subset B[0,1] \quad (\|y_n\| = 1)$$

$$n > m \Rightarrow \rho(y_n, y_m) \geq \rho(y_n, E_m) = \inf_{u \in E_m} \|y_n - u\| \geq \inf_{u \in E_{n-1}} \|y_n - u\| \geq \rho(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

Böylece $n \neq m$ ise $\rho(y_n, y_m) > \frac{1}{2}$, yani $\|y_n - y_m\| > \frac{1}{2}$ dir.

Görüldüğü gibi $\{y_n\} \subset B[0,1]$ dizisi hiçbir yakınsak alt diziye sahip değildir. Dolayısıyla $B[0,1]$ kapalı birim yuvarı rölâtif kompakt değildir.

SONUÇ 2.3.2: X sonsuz boyutlu normlu lineer bir uzay ise $I : X \rightarrow X; Ix = x$ ($x \in X$) birim operatörü tam sürekli değildir.

Açıklama: I operatörü sınırlı $B[0,1] = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kümesini kendisine yani rölâtif kompakt olmayan $B[0,1]$ kümesine dönüştürdüğünden tam sürekli değildir.

Teorem 2.3.6: X, Y ve Z herhangi normlu lineer uzay ve $A \in B(X, Y), T \in B(Y, Z)$ olsun. Eğer A ve T operatörlerinden biri tam sürekli ise $TA : X \rightarrow Z$ operatörü tam sürekli dir.

İspat. $A: X \rightarrow Y$ operatörünün tam sürekli olduğunu Kabul edelim. $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir sınırlı dizi olsun. O halde A operatörü tam sürekli olduğundan $\{Ax_n\}$ dizisinin yakınsak bir $\{Ax_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Ax_{n_i} = y \quad (y \in Y)$$

olsun. $T: Y \rightarrow Z$ operatörü sınırlı olduğundan süreklidir. Dolayısıyla

$$\lim_{i \rightarrow \infty} TA x_{n_i} = Ty$$

olacaktır. Böylece her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{TAx_n\}$ dizisinin yakınsak bir $\{TAx_{n_i}\}$ dizisine sahip olduğunu gösterdik. O halde Teorem 2.3.1. gereğince TA operatörü tam süreklidir.

Bu kez $T: Y \rightarrow Z$ operatörünün tam sürekli olduğunu varsayalım. $\{x_n\} \subset X$ sınırlı bir dizi olsun. O halde A operatörü sınırlı olduğundan $\{Ax_n\} \subset Y$ dizisi de sınırlı olacaktır. Diğer taraftan T operatörü tam sürekli olduğundan Teorem 2.3.1. gereğince $\{TAx_n\} \subset Z$ dizisinin yakınsak bir $\{Ax_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Dolayısıyla TA operatörü tam süreklidir.

Teorem 2.3.7. X ve Y herhangi iki lineer normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ ve $B: X \rightarrow Y$ herhangi iki tam sürekli operatör olsun. O taktirde her α, β sayıları için $\alpha A + \beta B$ operatörü tam süreklidir.

İspat. $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir sınırlı dizi olsun.

A tam sürekli bir operator olduğundan $\{Ax_n\}$ dizisinin yakınsak bir $\{Ax_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ dizisi sınırlı ve B tam sürekli bir operator olduğundan $\{Bx_{n_i}\}$ dizisinin yakınsak bir $\{Bx_{n_{i_p}}\}_{p=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

$\{Ax_{n_i}\}$ dizisinin yakınsak olduğundan $\{Ax_{n_{i_p}}\} \subset \{Ax_{n_i}\}$ alt dizisi de yakınsak olacaktır.

Dolayısıyla $\left\{ \alpha Ax_{n_{i_p}} + \beta Bx_{n_{i_p}} \right\}_{p=1}^{\infty} \subset Y$ dizisi yakınsaktır.

Böylece her sınırlı $\{x_n\} \subset X$ dizisi için $\{\alpha Ax_n + \beta Bx_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu gösterdik. Bu sonuç Teorem 2.3.1. gereğince $\alpha A + \beta B : X \rightarrow Y$ operatörünün tam sürekli olması demektir.

Tanım 2.3.5: X herhangi bir metrik uzay, E ve M de X 'in herhangi iki alt kümesi olsun. Eğer bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$E \subset \bigcup_{x \in M} B(x, \varepsilon) \quad (B(x, \varepsilon) = \{u \in X : \rho(u, x) < \varepsilon\})$$

ise M 'ye E kümesinin ε ağı denir. Bir başka deyişle, $\forall y \in E$ için $\rho(y, x) < \varepsilon$ olacak şekilde $x \in M$ varsa M 'ye E 'nin ε ağı denir.

Teorem 2.3.8: X bir tam metrik uzay olsun bir $E \subset X$ kümesi her $\varepsilon > 0$ için rölatif kompakt ε ağına sahipse E kümesi rölatif kompaktır.

Teorem 2.3.9: X normlu bir lineer uzay, B de bir Banach uzayı olsun. $\{A_n\}, B(X, Y)$ de bir dizi ve $A \in B(X, Y)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$ olsun $\{A_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ operatörleri tam sürekli ise A da tam sürekli dir.

İspat. $E \subset X$ herhangi bir sınırlı küme ve $\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. E kümesi sınırlı olduğundan tüm $x \in E$ 'ler için $\|x\| < c$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır. Öte yandan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0 \text{ olduğundan } \|A_i - A\| < \frac{\varepsilon}{c} \text{ olacak şekilde bir } \varepsilon \in N \text{ vardır.}$$

$y \in A(E)$ herhangi bir eleman ise o halde $y = Ax$ ve $x \in E$ dir.

$$\|y - A_i x\| = \|Ax - A_i x\| \leq \|A - A_i\| \|x\| < \|A - A_i\| c < \varepsilon$$

Buradan görüldüğü gibi $A_i(E)$ kümesi, $A(E)$ kümesinin ε - ağıdır. A_i operatörü tam sürekli olduğundan $A_i(E)$ kümesi rölatif kompakttır. Dolayısıyla $A(E)$ kümesinin her $\varepsilon > 0$ için rölatif kompakt ε - ağı vardır. O halde Teorem 2.3.8. gereğince $A(E)$ kümesi rölatif kompakttır. A operatörü her sınırlı E kümesini rölatif kompakt bir kümeye dönüştürdüğünden tam süreklidir.

Örnek 2.3.3: $A: l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = \left(\frac{\xi_i}{i} \right)_1^\infty$ ($x = (\xi_i)_1^\infty \in l_2$) operatörünü göz önüne alalım. A operatörünün tam sürekli olduğunu gösterelim. A operatörü sınırlıdır. Gerçekten

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{i^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 = \|x\|^2$$

ya da

$$\|Ax\| \leq \|x\|,$$

yani $c = 1$ dir. Dolayısıyla A sınırlıdır.

$A_n: l_2 \rightarrow l_2$ operatörünü göz önüne alalım.

$$A_n x = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \dots \right) \text{ olsun. Bu durumda } \{A_n\}_1^\infty \subset B(l_2, l_2) \text{ dir.}$$

Öte yandan $\dim R(A_n) = n$ dir. O halde Teorem 2.3.4.a. gereğince her A_n operatörü tam süreklidir.

Diğer taraftan

$$\|(A - A_n)x\|^2 = \left\| \left(0, \dots, 0, \frac{\xi_{n+1}}{n+1}, \frac{\xi_{n+2}}{n+2}, \dots \right) \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{i^2} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 = \frac{1}{n^2} \|x\|^2$$

$$\|(A - A_n)x\| \leq \frac{1}{n} \|x\|$$

$$\|A - A_n\| \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

dır. O halde Teorem 2.3.9. gereğince A operatörü tam süreklidir.

Teorem 2.3.10: H bir Hilbert uzayı , $A: H \rightarrow H$ da sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer A^*A operatörü tam sürekli ise A operatörü de tam süreklidir.

İspat.

$\{x_n\} \subset H$ sınırlı bir dizi olsun. A^*A operatörü tam sürekli olduğundan $\{A^*Ax_n\} \subset H$ dizisinin yakınsak bir $\{A^*Ax_{n_i}\}$ alt dizisi vardır.

$$\begin{aligned} \|Ax_{n_i} - Ax_{n_p}\|^2 &= \|A(x_{n_i} - x_{n_p})\|^2 \\ &= (A(x_{n_i} - x_{n_p}), A(x_{n_i} - x_{n_p})) \\ &= ((x_{n_i} - x_{n_p}), A^*A(x_{n_i} - x_{n_p})) \\ &\leq \|x_{n_i} - x_{n_p}\| \|A^*A(x_{n_i} - x_{n_p})\| \\ &= \|x_{n_i} - x_{n_p}\| \|A^*Ax_{n_i} - A^*Ax_{n_p}\| \\ &\leq c \|A^*Ax_{n_i} - A^*Ax_{n_p}\| \end{aligned}$$

$\{A^*Ax_{n_i}\}$ dizisinin yakınsaklığından ve son bağıntıdan $\{Ax_{n_i}\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucu elde edilir.

Diğer taraftan H tam uzay olduğundan $\lim_{i \rightarrow \infty} Ax_{n_i} = y$ olacak şekilde $y \in H$ elemanı vardır.

Böylece her sınırlı $\{x_n\} \subset H$ dizisi için $\{Ax_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu göstermiş olduk. O halde Teorem 2.3.1.'den A operatörü tam süreklidir.

Teorem 2.3.11: H bir Hilbert uzayı olsun. $A: H \rightarrow H$ operatörü tam sürekli ise $A^*: H \rightarrow H$ operatörü de tam sürekli dir.

Teorem 2.3.12: X bir Banach uzayı ve $A: X \rightarrow X$ tam sürekli bir operatör olsun. A operatörünün spektrumunun sıfırdan farklı her noktası A 'nın ayrık bir özdeğ eridir.

Teorem 2.3.13: X bir normlu lineer uzay ve $A: X \rightarrow X$ tam sürekli bir operatör olsun. A 'nın sıfırdan farklı her özdeğ erinin katlılığı sonludur.

Teorem 2.3.14: X bir normlu lineer uzay ve $A: X \rightarrow X$ tam sürekli bir operatör olsun. O taktirde her $\varepsilon > 0$ için A 'nın $|\lambda| > \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan farklı λ özdeğ erlerinin sayısı sonludur.

Teorem 2.3.14.'ten aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.3.3: Tam sürekli bir operatörün özdeğ er kümesi bir tek sıfır yığılma noktasına sahip olabilir.

Teorem 2.3.15 (Naimark, (1968)): Tam sürekli kendine eş bir operatörünün spektrumunun sıfırdan farklı noktaları herbirinin katlılığı sonlu olan özdeğ erlerden ibarettir ve bu özdeğ erler kümesi sadece sıfır yığılma noktasına sahip olabilir. Karşıt olarak bu özelliğ e sahip olan her kendine eş operatör tam sürekli dir.

Teorem 2.3.16: Her sıfırdan farklı tam sürekli kendine eş operatörün en az bir tane sıfırdan farklı özdeğ eri vardır.

Teorem 2.3.17: A tam sürekli kendine eş bir operatör ve $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}$ A 'nın tüm özdeğ erler kümesi olsun. O taktirde $\|A\| = \sup_n \{\lambda_n\}$ dir.

Teorem 2.3.18: H bir Hilbert uzayı $A: H \rightarrow H$ sıfırdan farklı tam sürekli kendine eş bir operatör ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ sıfırdan farklı özdeğ erleri olsun. Burada her özdeğ er kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. A operatörünün $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ özdeğ erlerine karşılık gelen

ortonormal özvektörleri sırasıyla $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ olsun. O taktirde her $x \in H$ elemanı için Ax elemanı $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ ortonormal kümesine göre

$$Ax = \sum_n (Ax, e_n) e_n = \sum_n (x, e_n) \lambda_n e_n$$

Fourier seri açılımı şeklinde gösterilebilir.

Teorem 2.3.19: H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ tam sürekli kendine eş bir operatör olsun. O taktirde A 'nın özvektörlerinden oluşan ortonormal bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset H$ tabanı vardır.

Teorem 2.3.20 (Smirnov, (1964)): H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ kendine eş bir operatör olsun. A operatörü

1. A operatörünün özvektörlerinden oluşan tam ortonormal bir küme vardır.
2. Sıfırdan farklı her özdeğerin katlılığı sonludur.
3. Her $\varepsilon > 0$ için $[-\varepsilon, \varepsilon]$ aralığına ait olmayan özdeğerlerin sayısı sonludur.

koşullarını sağlıyorsa tam sürekli dir.

Teorem 2.3.21: H bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ bir tam sürekli operatör olsun. Eğer bir $\lambda \neq 0$ sayısı A 'nın özdeğeri ise $\bar{\lambda}$ sayısı A^* operatörünün bir özdeğeri dir.

Tanım 2.3.6: H bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ bir lineer operatör olsun. A operatörü sınırlı ve $\dim R(A) < \infty$ ise A 'ya sonlu boyutlu operatör denir. $\square$

Teorem 2.3.4. gereğince her sonlu boyutlu operatör tam sürekli dir.

Her sonlu boyutlu $A: H \rightarrow H$ operatörü

$$Ax = \sum_{i=1}^n (x, f_i) g_i \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklindedir. Burada $f_1, f_2, \dots, f_n$ ve $g_1, g_2, \dots, g_n$ H uzayının elemanlarıdır.

Teorem 2.3.22: H bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$

$$\dim R(A) = \infty$$

koşulunu sağlayan bir tam sürekli operatör olsun. O takdirde aşağıdaki koşulları sağlayan $\{e_i\}_1^\infty$ ve $\{g_i\}_1^\infty$ ortonormal dizilere ve limiti sıfır olan artmayan bir $\{\alpha_n\}_1^\infty$ pozitif sayı dizisi vardır:

1. Her $x \in H$ için $x = x_0 + (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 + \dots$ ($x_0 \in \text{Ker} A$) dır.
2. Her $x \in H$ için $Ax = \alpha_1(x, e_1)g_1 + \alpha_2(x, e_2)g_2 + \dots$ dir. $\square$

Teorem 2.3.9. ve Teorem 2.3.22.'den yararlanarak aşağıdaki teorem ispatlanır:

Teorem 2.3.23: H bir Hilbert uzayı ve $A \in B(H, H)$ olsun. A operatörünün tam sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için

$$\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde sonlu boyutlu bir $A_\varepsilon: H \rightarrow H$ operatörünün var olmasıdır.

Teorem 2.3.24(Smirnov, 1964) : H bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ $A \neq 0$ tam sürekli kendine eş bir operatör olsun. A 'nın hem pozitif ve hem de negatif özdeğerlere sahip olduğunu varsayalım. $\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq \dots$ A 'nın pozitif özdeğerleri ve $\lambda_1^- \leq \lambda_2^- \leq \dots$ de negatif özdeğerleri olsun. Ayrıca $e_1^+, e_2^+, \dots$ A 'nın sırasıyla $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleri ve $e_1^-, e_2^-, \dots$ de sırasıyla $\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörler olsun. O takdirde

$$\lambda_1^+ = \max_{x \in H, \|x\|=1} (Ax, x)$$

$$\lambda_{n+1}^+ = \max_{\substack{x \in H, \|x\|=1 \\ x \perp e_i^+ (i=1,2,\dots,n)}} (Ax, x) = \min_{X \in X_n} \max_{x \in X^\perp} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\lambda_1^- = \min_{x \in H, \|x\|=1} (Ax, x)$$

$$\lambda_{n+1}^+ = \min_{\substack{x \in H, \|x\|=1 \\ X \perp e_i^- (i=1,2,\dots,n)}} (Ax, x) = \max_{X \in X_n} \min_{x \in X^\perp} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad (n=1,2,\dots)$$

dir. Burada X_n ile H uzayının n boyutlu tüm alt uzaylarının topluluğu gösterilmiştir.

Teorem 2.3.24.'e tam sürekli kendine eş operatörün özdeğerlerinin minimax özelliği hakkında teorem denir.

Tanım 2.3.7: $A: H \rightarrow H$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Bir $\varphi \in H, \varphi \neq 0$ vektörü ve λ sayısı için

$$(A - \lambda I)^n \varphi = 0$$

olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa φ 'ye A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen esas vektörü denir.

Tanım 2.3.8: Sınırlı lineer bir $A: H \rightarrow H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen tüm esas vektörlerin ve $0 \in H$ elemanının oluşturduğu K_λ lineer manifolduna söz konusu operatörün λ özdeğerine karşılık gelen esas lineer manifoldu denir.

Tanım 2.3.9: Sınırlı lineer bir $A: H \rightarrow H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen K_λ esas lineer manifoldunun boyutuna λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir.

Tanım 2.3.10: Bir A lineer operatörünün $R(A) = \{Ax : x \in D(A)\}$ görüntü kümasının boyutuna A operatörünün boyutu denir. $\square$

A lineer operatörünün boyutunu $r(A)$ ile göstereceğiz. Ayrıca tam sürekli bir $A: H \rightarrow H$ operatörünün tüm sıfırdan farklı özdeğerlerinin cebirsel katlılıklarının toplamını $\nu(A)$ ile göstereceğiz. Her tam sürekli $A: H \rightarrow H$ operatörü için

$$\nu(A) \leq r(A)$$

olduğu bilinmektedir (Cohberg ve Krein (1969)).

2.4. Üniter Operatörler

Tanım 2.4.1: H bir Hilbert uzayı olsun. Bir $U : H \rightarrow H$ lineer operatörü

1. $U : H \rightarrow H$ operatörü örtendir ($U(H) = H$)
2. Her $x \in H$ için $\|Ux\| = \|x\|$

koşullarını sağlıyorsa U 'ya üniter operatör denir. $\square$

Tanımdan $\|U\| = 1$ olduğu görülmektedir.

Her $U : H \rightarrow H$ üniter operatörünün aşağıdaki özellikleri vardır:

1. $U : H \rightarrow H$ operatörü bire birdir ve dolayısıyla U 'nun U^{-1} tersi vardır.
2. $U^*U = UU^* = I$ dır. Yani $U^* = U^{-1}$ dır.
3. $U^{-1} : H \rightarrow H$ operatörü de üniterdir. $\square$

Sınırlı lineer $U : H \rightarrow H$ operatörü

$$U^*U = UU^* = I$$

koşullarını sağlıyorsa U operatörü üniterdir.

$U : H \rightarrow H$ bir üniter operatör ise $U^*U = I$ özelliğinden her $x, y \in H$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

elde edilir.

Üniter operatörlere örnekler verelim:

Örnek 2.4.1: $U : l_2 \rightarrow l_2$,

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_2, \xi_1, \xi_3, \dots) \quad ((\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in l_2)$$

operatörü üniterdir. Gerçekten U operatörü lineerdir, örtendir ve her $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in l_2$ için

$$\|U(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)\| = \sqrt{|\xi_2|^2 + |\xi_1|^2 + |\xi_3|^2 + \dots} = \|(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)\|$$

dır.

Örnek 2.4.2: $A : L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$,

$$(Ax)(t) = e^{ict} x(t) \quad (x(t) \in L_2(a, b))$$

operatörünü gözönüne alalım. Burada c reel bir sabittir. A operatörü lineer, örten ve her

$x \in L_2(a, b)$ için

$$\|Ax\| = \sqrt{\int_a^b |e^{ict} x(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} = \|x\|$$

dır. Dolayısıyla A bir üniter operatördür.

Örnek 2.4.3: $c \in (-\infty, \infty)$ bir sabit olmak üzere $A : L_2(-\infty, \infty) \rightarrow L_2(-\infty, \infty)$,

$$(Tx)(t) = x(t + c)$$

operatörü üniterdir. Çünkü T operatörü lineer, örten ve her $x = x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ için

$$\|Tx\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t + c)|^2 dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \|x\|$$

dır.

Teorem 2.4.1: Bir $U : H \rightarrow H$ operatörü

1. $U : H \rightarrow H$ operatörü örtendir ($U(H) = H$)
2. Her $f, g \in H$ için $(Uf, Ug) = (f, g)$

koşullarını sağlıyorsa üniterdir.

2.5. İzometrik ve Kısmen İzometrik Operatörler

Tanım 2.5.1: H_1 ve H_2 herhangi iki Hilbert uzayı ve $V : H_1 \rightarrow H_2$ bir lineer operatör olsun.

Eğer V operatörü

- 1) $V(H_1) = H_2$
- 2) Her $f \in H_1$ için $\|Vf\|_{H_2} = \|f\|_{H_1}$

koşullarını sağlıyorsa V 'ye izometrik operatör denir. $\square$

Bu tanımdan görülüyor ki üniter operatör izometrik operatörün özel halidir ($H_1 = H_2 = H$).

İzometrik operatörün aşağıdaki özellikleri vardır:

1. Her izometrik operatörün tersi vardır ve bu ters operatör de izometriktir.
2. Bir $V : H_1 \rightarrow H_2$ operatörü örten ($V(H_1) = H_2$) ve her $f, g \in H_1$ için

$$(Vf, Vg)_{H_2} = (f, g)_{H_1}$$

ise V operatörü izometriktir.

Tanım 2.5.2: H bir Hilbert uzayı olsun. Bir $U \in B(H)$ operatörü

$$\|Ux\| = \|x\| \quad (\forall x \in (Ker U)^\perp)$$

koşulunu sağlıyorsa U 'ya kısmen izometrik operatör denir. $\square$

Bu tanımdan $U((Ker U)^\perp) = R(U)$ olduğu görülmektedir.

Örnek 2.5.1: $U : l_2 \rightarrow l_2$,

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots) = (0, \xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, \dots) \quad ((\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in l_2)$$

Sınırlı lineer operatörünü gözönüne alalım.

$$U(0, \xi_2, 0, \xi_4, 0, \xi_6, \dots) = (0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

dır. Dolayısıyla

$$Ker U = \{(0, \xi_2, 0, \xi_4, 0, \xi_6, \dots)\}$$

dır. O halde

$$(Ker U)^\perp = \{(\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \dots)\}$$

dır. Her $(\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \dots) \in (Ker U)^\perp$ için

$$U(\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \dots) = (0, \xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, \dots)$$

dır ve

$$\|U(\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \dots)\|^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_3|^2 + |\xi_5|^2 + \dots = \|(\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \dots)\|^2$$

dır. Tanım gereği $U \in B(l_2)$ operatörü kısmen izometriktir.

Teorem 2.5.1: U kısmen izometrik operatör ise $R(U)$ kapalıdır.

İspat. $\{y_n\} \subset R(U)$ yakınsak bir dizi, $Ux_n = y_n$ ($\{x_n\} \subset (Ker U)^\perp$) ve $\lim_{n \rightarrow \infty} Ux_n = y$ olsun.

$$\|Ux_n - Ux_m\| = \|U(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\|$$

bağıntısından $\{x_n\}$ 'nin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. H uzayı tam olduğundan $\{x_n\}$

dizisi yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olsun. $(Ker U)^\perp$ kapalı olduğundan $x \in (Ker U)^\perp$ dir. Öte

yandan U operatörü sürekli olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} Ux_n = Ux$, yani $y = Ux$ dir. Böylece her yakınsak

$\{y_n\} \subset R(U)$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in R(U)$ olduğunu gösterdik. Sonuç olarak $R(U)$ kapalıdır. $\square$

U kısmen izometrik bir operatör ise U^* da kısmen izometrik bir operatördür. Dolayısıyla

$$R(U) = \overline{R(U)}, \quad R(U^*) = \overline{R(U^*)}$$

dır. Öte yandan her $A \in B(H)$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$Ker(A - \lambda I) = (R(A^* - \lambda I))^\perp$$

dır. Buradan

$$Ker A = (R(A^*))^\perp \Rightarrow (Ker A)^\perp = \overline{R(A^*)}$$

bulunur. U kısmen izometrik operatör ise

$$(Ker U)^\perp = R(U^*)$$

dır. Dolayısıyla

$$U(R(U^*)) = R(U)$$

dır. $A \in B(H)$ herhangi bir operatör olsun. Bu durumda

$$\overline{R((A^* A)^{1/2})} = \overline{R(A^* A)} = \overline{R(A^*)}$$

olduğu bilinmektedir (Cohberg ve Krein, 1969). Her $x \in H$ için

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= (Ax, Ax) = (x, A^* Ax) = (A^* Ax, x) \\ &= \left(\left[(A^* A)^{1/2} \right]^2 x, x \right) \\ &= \left((A^* A)^{1/2} x, (A^* A)^{1/2} x \right) \\ &= \left\| (A^* A)^{1/2} x \right\|^2 \quad (\forall x \in H) \end{aligned} \tag{2.28}$$

dir. Aşağıdaki lineer operatörü gözönüne alalım. Her $y = (A^* A)^{1/2} x \in R((A^* A)^{1/2})$ için

$$Uy = U(A^* A)^{1/2} x = Ax$$

ve her $y \in [R((A^* A)^{1/2})]'$ için

$$Uy = \lim_{n \rightarrow \infty} U(A^* A)^{1/2} x_n \tag{2.29}$$

olsun. Burada $\{y_n\} \subset D((A^* A)^{1/2})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A^* A)^{1/2} x_n = y$$

koşulunu sağlayan bi dizidir. U lineer operatörünün $R((A^* A)^{1/2})$ lineer manifoldunda sınırlı

ve H uzayının tam olmasından (2.29) limitinin varlığı elde edilir. Ayrıca (2.29) limiti (2.30)

koşulunu sağlayan $\{x_n\} \subset D((A^*A)^{1/2})$ dizisinin seçimine bağlı değildir.

Her $y \in [R((A^*A)^{1/2})]^\perp$ için $Uy = 0$ olsun.

(2.28)'den görüldüğü gibi her $(A^*A)^{1/2}x \in R((A^*A)^{1/2})$ için

$$\|U(A^*A)^{1/2}x\| = \|Ax\| = \|(A^*A)^{1/2}x\|$$

dir. $y \in [R((A^*A)^{1/2})]'$ ise

$$\|Uy\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} U(A^*A)^{1/2}x_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A^*A)^{1/2}x_n\| = \|y\|$$

dir. Böylece U bir lineer operator ve her $y \in \overline{R((A^*A)^{1/2})}$ için

$$\|Uy\| = \|y\| ,$$

her $y \in [R((A^*A)^{1/2})]^\perp = [R((A^*A)^{1/2})]^\perp$ için $Uy = 0$ dır. Sonuç olarak U , $R((A^*A)^{1/2})$ lineer

manifoldunu $R(A)$ lineer manifolduna izometrik dönüştüren kısmen izometrik bir operatördür.

$$Ax = U(A^*A)^{1/2}x \quad (\forall x \in D((A^*A)^{1/2}))$$

formülüne $A \in B(H)$ operatörünün kutupsal temsili denir.

3. TAM SÜREKLİ OPERATÖRLERİN S-SAYILARI

3.1. Kendine Eş Tam Sürekli Operatörlerin Özdeğerlerinin Minimax Özellikleri

Tam sürekli operatörlerin s-sayılarının incelenmesinde tam sürekli operatörlerin özdeğerlerinin iyi bilinen minimax özelliklerinden sıkça yararlanılmıştır. Bu tezde bu özellikleri tanımlayan bir teoremden ispatsız olarak bahsedip onun çeşitli sonuçlarını belirteceğiz.

A herhangi bir kendine eş lineer tam sürekli operatör olsun. O zaman iyi bilindiği gibi tüm özdeğerleri reeldir ve A operatörünün her esas vektörü A'nın bir özvektörüdür. A operatörü

$$A = \sum_{j=1}^{v(A)} \lambda_j(A) (\cdot, \varphi_j) \varphi_j \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A operatörü düzgün yakınsaktır ve φ_j ($j = 1, 2, \dots, v(A)$) A'nın $R(A)$ 'da tam olan özvektörlerinin ortonormal bir sistemidir, öyle ki

$$A\varphi_j = \lambda_j(A)\varphi_j \quad (j = 1, 2, \dots, v(A)).$$

A sınırlı lineer operatör olduğu takdirde eğer her $f \in H$ için

$$(Af, f) \geq 0$$

ise A'nın negatif olmayan bir operatör olduğunu söyleyeceğiz ve $A \geq 0$ şeklinde yazacağız.

Kendine eş tam sürekli bir operatör ancak ve ancak tüm özdeğerleri negatif değil ise negatif olmayan bir operatör olacaktır.

Teorem 3.1.1. (Riesz ve Nagy, 1965) A ($\neq 0$) negatif olmayan tam sürekli bir operatör ve φ_j ($j = 1, 2, \dots, v(A)$) de A'nın $R(A)$ 'da tam olan özvektörlerinin ortonormal bir sistemi olsun, yani

$$A\varphi_j = \lambda_j(A)\varphi_j \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Burada $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots$ dir. Bu durumda A 'nın özdeğerleri aşağıdaki minimax özelliklerine sahiptir.

$$1) \lambda_1(A) = \max_{\varphi \in H} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \quad (3.2)$$

(1,2) deki maximum A operatörünün sadece $\lambda_1(A)$ 'e karşılık gelen özvektörleri için elde edilmiştir.

$$2) \lambda_{j+1}(A) = \min_{X \in Y_j} \max_{\varphi \in X^\perp} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

Burada Y_j ($1 \leq j < v(A)$) H uzayının tüm j -boyutlu alt uzaylarının kümesidir ve X_j $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j$ özvektörlerinin gerdiği lineer manifold olmak üzere

$$\lambda_{j+1}(A) = \max_{\varphi \in X_j^\perp} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}. \quad (3.4)$$

$\lambda_{j+1} < \lambda_j$ olduğu durumda bile (3,3)' teki minimumun $X \neq X_j$ için de elde edilebileceğini belirtelim (M.D.Dol'berg).

1) deki açıklamaya dayanarak kolayca söylenebilir ki (3,4) teki maximum A operatörünün sadece $\lambda_1(A)$ 'e karşılık gelen özvektörleri için elde edilmiştir.

(3,2)-(3,4) eşitliklerinin yardımı ile aşağıdaki yardımcı teorem kolayca ispatlanabilir.

Yardımcı Teorem 3.1.1: $A, B \in G_\infty$ ve $0 \leq A \leq B$ olsun. O zaman

$$\lambda_j(A) \leq \lambda_j(B) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Tüm bu bağıntılarda eşitliğin varolabilmesi için gerek ve yeter koşul $A=B$ olmasıdır. Yardımcı Teorem 1.1.' den $0 \leq A \leq B$ ise $v(A) \leq v(B)$ olduğu açıkça görülmektedir. A , (1,1) spektral açılımına sahip kendine eş tam sürekli bir operatör olsun. Negatif olmayan A_+ ve A_- operatörlerini

$$A_+ = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(A) (\cdot, \varphi_j) \varphi_j; \quad A_- = - \sum_{\lambda_j < 0} \lambda_j(A) (\cdot, \varphi_j) \varphi_j;$$

şeklinde oluşturuyoruz. $A = A_+ - A_-$ olduğu açıktır.

Yardımcı Teorem 3.1.2: Kendine eş $A \in G_\infty$ operatörünün negatif olmayan $H_1, H_2 \in G_\infty$ operatörlerinin farkı şeklinde gösterilebildiğini varsayalım.

$$A = H_1 - H_2$$

Bu durumda

$$\lambda_j(A_+) \leq \lambda_j(H_1) \text{ ve } \lambda_j(A_-) \leq \lambda_j(H_2) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.5)$$

İspat. Gerçekten

$$(H_1 f, f) = (A f, f) + (H_2 f, f) \geq (A f, f) \quad (f \in H)$$

ve

$$(H_2 f, f) \geq -(A f, f) \quad (f \in H).$$

Özdeğerlerinin minimax özelliklerinin temeline dayanarak buradan (1,5) bağıntısı elde edilir (teoremle ilgili dipnota bkz.).

3.2. Tam Sürekli Operatörlerin s-Sayıları ve Onların En Basit Özellikleri

3.2.1. Tam Sürekli Operatörlerin s-Sayıları. $A \in G_\infty$ olsun. O halde A^*A negatif olmayan kendine eş olmayan bir operatördür. Teorem 2.1.3. gereğince A^*A operatörünün bir tek negatif olmayan $(A^*A)^{1/2}$ karekökü vardır. Ayrıca Teorem 2.3.6.'dan A^*A 'nın bir tam sürekli operatör olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.1: $A: H \rightarrow H$ negatif olmayan tam sürekli operatör ise $A^{1/2}: H \rightarrow H$ operatörü de tam süreklidir.

İspat. Teorem 2.3.17. gereğince A operatörünün sıfırdan farklı her noktasının katlılığı sonlu olan ayrık bir özdeğerdir. A operatörlerinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. O halde

$$\sigma(A^{1/2}) = \sqrt{\sigma(A)} = \{0, \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}, \dots\} \quad (3.6)$$

olduğu bilinmektedir (Kantorovich ve Akilov, 1982).

Öte yandan her kendine eş $B: D(B) \rightarrow H$ ($\overline{D(B)} = H$) operatörü için

$$\sigma_c(B) = \{\lambda \in C : R(B - \lambda I) \neq \overline{R(B - \lambda I)}\}$$

kümesinin $\sigma(B)$ 'nin tüm ayrık olmayan noktalarının kümesi olduğu bilinmektedir (Birman ve Solomyak, 1980).teorem 2.2.2.'den B 'nin spektrumunun sürekli kısmının $\sigma_c(B)$ 'nin bir alt kümesi olduğu elde edilir. $\lambda_0, \sigma(B)$ 'nin ayrık bir noktası ise $\lambda_0 \notin \sigma_c(B)$ olduğundan λ_0, B 'nin spektrumunun sürekli kısmına ait değildir. Dolayısıyla $\sigma(B)$ 'nin her ayrık noktası B 'nin bir özdeğeridir. Bu açıklamalardan ve (3.6)'dan $\sigma(A^{1/2}) \setminus \{0\}$ kümesinin her noktasının katlılığı sonlu olan ayrık bir özdeğer olduğu elde edilir. O halde Teorem 2.3.17. gereğince $A^{1/2}$ operatörü de tam süreklidir. $\square$

O zaman $T = (A^*A)^{1/2} \in \sigma_\infty$.

s-sayılarının ilk tanımı olarak aşağıdakini verelim.

T operatörünün özdeğerlerine A operatörünün s-sayıları denir.

Katlılıklarını göz önüne almak koşuluyla sıfırdan farklı s-sayılarını azalan sırada aşağıdaki şekilde yazacağız:

$$s_j(A) = \lambda_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots, r(T)).$$

Eğer $r(T) < \infty$ ise $j = r(T) + 1, \dots$ için $s_j(A) = 0$ olarak alacağız.

$$s_1(A) = \|A\|$$

olduğunu belirtelim.

Eğer $A \in G_\infty$ operatörü kendine eş veya en azından normal ise (A ve A^* nın yerleri değişirse), o zaman

$$s_j(A) = \|\lambda_j(A)\| \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Aynı zamanda herhangi bir c sayısı için

$$s_j(cA) = \|c\| s_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

olduğu oldukça açıktır.

Tam sürekli operatörlerin s-sayılarının iki önemli özelliğini aşağıda belirtelim.

$$I) \quad s_j(A) = s_j(A^*) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.7)$$

II) Herhangi sınırlı bir B operatörü için

$$s_j(BA) \leq \|B\| s_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.8)$$

$$s_j(AB) \leq \|B\| s_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

Birinci özelliğin nasıl elde edildiği 3.2.2. de gösterilecektir. İkincisini ispatlayalım. Tanımdan

$$s_j^2(BA) = \lambda_j(A^* B^* BA), \quad s_j^2(A) = \lambda_j(A^* A) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Diğer taraftan

$$(A^* B^* BA f, f) = \|BA f\|^2 \leq \|B\|^2 \|A f\|^2 = \|B\|^2 (A^* A f, f) \quad (f \in H)$$

Bu nedenle $A^* B^* BA \leq \|B\|^2 A^* A$ dır. Buradan da Yardımcı Teorem 3.1.1. gereğince (3.8) bağıntısı elde edilir.

(3.7)'den dolayı $s_j(AB) = s_j(B^* A^*)$ ve az önce ispatlanan (3.8)'den elde edilen $s_j(B^* A^*) \leq \|B^*\| s_j(A^*) = \|B\| s_j(A)$ eşitsizliğine göre aynı zamanda (3.9) bağıntısı da elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.1.'i kullanarak kolayca gösterilebilir ki aynı zamanda tüm $j = 1, 2, \dots$ için (3.8)'de (ve (3.9)'da) eşitliğin varolabilmesi için gerek ve yeter koşul $B/\|B\| (B^*/\|B^*\|)$ operatörünün $R(A) \cup R(A^*)$ kümesi üzerinde izometrik olmasıdır.

3.2.2. Tam Sürekli Operatörün Schmidt Açılımı. A tam sürekli bir operator ve $A = UT$ de onun kutupsal ifadesi olsun.

$\varphi_j (j = 1, 2, \dots, r(T))$ ile T operatörünün $R(T)$ 'de tam olan özvektörlerinin ortonormal bir sistemini gösterelim. O halde

$$T = \sum_{j=1}^{r(T)} s_j(A) (., \varphi_j) \varphi_j. \quad (3.10)$$

Burada sağ taraftaki seri operatorler normuna göre düzgün yakınsaktır. U operatörünü (3.10)'un her iki tarafına uygularsak

$$A = \sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A) (., \varphi_j) U \varphi_j$$

elde ederiz.

$\varphi_j \in R(T)$ olduğundan $U \varphi_j$ ($j = 1, 2, \dots, r(A)$) sistemi ortonormaldir.

Böylece her lineer tam sürekli A operatörü

$$A = \sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A) (., \varphi_j) \psi_j \quad (3.11)$$

Schmidt açılımı şeklinde gösterilir. Burada $\{\varphi_j\}$ ve $\{\psi_j\}$ ortonormal sistemlerdir ve (3.11)'deki seri (3.10)'da olduğu gibi operatörler normuna göre düzgün yakınsaktır.

(3.11)'den

$$A^* = \sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A) (., \psi_j) \varphi_j, \quad (3.12)$$

(3.11) ve (3.12)'den de

$$A^* A \varphi_j = s_j^2(A) \varphi_j \quad \text{ve} \quad A A^* \psi_j = s_j^2(A) \psi_j \quad (j = 1, 2, \dots, r(A))$$

elde edilir. Buradan

$$s_j(A) = s_j(A^*) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

sonucu, yani (3.7) bağıntısı elde edilir.

3.2.3. s-Sayılarının Yaklaşım Özelliği ve Ondan Elde Edilen Eşitsizlikler. Bundan sonara $\mathfrak{R}_n$ ($n = 0,1,2,\dots$) ile $\leq n$ boyutlu tüm sonlu boyutlu operatörlerin kümesini göstereceğiz.

Teorem 3.2.2 (Dz.E.Allahverdiev). A bir lineer tam sürekli operatör olsun. O zaman her $n = 0,1,2,\dots$ için

$$s_{n+1}(A) = \min_{K \in \mathfrak{R}_n} \|A - K\|. \quad (3.13)$$

İspat. K , n boyutlu lineer bir operatör olsun. $(Ker K)^\perp$ alt uzayının da n boyutlu olduğu açıktır. O halde özdeğerlerin minimax özelliklerinden dolayı

$$s_{n+1}(A) \leq \max_{\varphi \in Ker K} \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Tüm $\varphi \in Ker K$ için

$$\|A\varphi\| = \|(A - K)\varphi\| \leq \|A - K\| \|\varphi\|$$

olduğundan

$$s_{n+1}(A) \leq \|A - K\|.$$

İspatı tamamlamak için son olarak

$$\|A - K_n\| = s_{n+1}(A)$$

olduğunu belirtmeliyiz. Burada

$$K_n = \sum_{j=1}^n s_j(A) (\cdot, \varphi_j) \psi_j \quad (3.14)$$

A operatörünün (3.11) Schmidt açılımının n . kısmi toplamıdır. $\square$

(3.13) formülünden $s_{n+1}(A)$ 'nın A operatöründen $\mathfrak{R}_n$ kümesine olan uzaklığı ifade ettiği görülmektedir. Bu sonuç s -sayılarının yeni, eşdeğer bir tanımı olarak alınabilir. Bir çok problem için bu tanım orjinal olanından daha uygundur.

SONUÇ 3.2.1: $A \in G_\infty$ ve T herhangi bir r -boyutlu operatör olsun. O zaman

$$s_{n+r}(A) = s_n(A+T) \leq s_{n-r}(A) . \quad (3.15)$$

Gerçekten , K_n (3.14) ile tanımlanmış bir operator olsun ; o zaman Teorem 3.2.2. gereğince

$$s_{n+1}(A) = \|(A+T)-(T+K_n)\| \geq s_{n+r+1}(A+T) \quad (n = 0,1,\dots). \quad (3.16)$$

A ve $A+T$ operatörlerinin yerlerini değiştirerek

$$s_{n+1}(A+T) \geq s_{n+r+1}(A) \quad (n = 0,1,\dots). \quad (3.17)$$

elde ederiz.

(3.16) ve (3.17) bağıntılarından (3.15) bağıntısı elde edilir.

SONUÇ 3.2.2 (K.Fan): $A, B \in G_\infty$ ise

$$s_{m+n-1}(A+B) \leq s_m(A) + s_n(B) \quad (m, n = 1,2,\dots) \quad (3.18)$$

ve

$$s_{m+n-1}(AB) \leq s_m(A) s_n(B) \quad (m, n = 1,2,\dots). \quad (3.19)$$

Gerçekten , $(m-1)$ -boyutlu K_1 operatörü ve $(n-1)$ -boyutlu K_2 operatörü

$$s_m(A) = \|A - K_1\| \quad \text{ve} \quad s_n(B) = \|B - K_2\|$$

şeklinde ifade edilsin. O zaman

$$s_{m+n-1}(A+B) \leq \|A+B-(K_1+K_2)\| \leq \|A-K_1\| + \|B-K_2\| \leq s_m(A) + s_n(B).$$

Bununla beraber, $AK_2 + K_1(B-K_2)$ operatörünün boyutu $(m+n-2)$ 'yi aşmadığından ve $(A-K_1)(B-K_2) = AB - AK_2 - K_1(B-K_2)$ olduğundan

$$s_{m+n-1}(AB) \leq \|A-K_1\| \|B-K_2\|.$$

Bu son eşitsizlikten (3.19) elde edilir. (3.18) ve (3.19) bağıntılarının özel halleri, negatif olmayan tam sürekli H_1 ve H_2 operatörleri için iyi bilinen Weyl eşitsizlikleridir:

$$\lambda_{n+m-1}(H_1 + H_2) \leq \lambda_n(H_1) + \lambda_m(H_2).$$

Bu eşitsizlikler σ_∞ 'a ait olan herhangi kendine eş operatörler için genelleştirilebilir.

SONUÇ 3.2.3: Herhangi $A, B \in G_\infty$ operatörleri için

$$\|s_n(A) - s_n(B)\| \leq \|A - B\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Gerçekten ,

$$s_{n+1}(A) = \min_{K \in \mathfrak{K}_n} \|A - K\| = \min_{K \in \mathfrak{K}_n} \|B - K + A - B\| \leq \min_{K \in \mathfrak{K}_n} \|B - K\| + \|A - B\| = s_{n+1}(B) + \|A - B\|.$$

A ve B operatörlerinin yerlerini değiştirerek

$$s_{n+1}(B) \leq s_{n+1}(A) + \|A - B\|.$$

elde ederiz. Buradan da sonuca ulaşılır.

3.2.4. s-Sayıları İle İlgili Asimtotik Teorem

Teorem 3.2.3 (Fan, 1951): $A, B \in G_\infty$ ve bir $r > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r s_n(A) = a \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^r s_n(B) = 0 \quad (3.20)$$

olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r s_n(A + B) = a . \quad (3.21)$$

İspat. (3.18)'den

$$s_{(k+1)m+j}(A + B) \leq s_{km+j}(A) + s_{m+1}(B) \quad (m = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, k) .$$

Herhangi bir n tam sayısı $n = (k + 1)m + j$ şeklinde gösterilebileceğinden

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^r s_n(A + B) \leq ((k + 1) / k)^r a ,$$

ve k keyfi olduğundan

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^r s_n(A + B) \leq a . \quad (3.22)$$

Diğer taraftan, $A = (A + B) - B$ şeklinde gösterilebileceğinden

$$s_{(k+1)m+j}(A) \leq s_{km+j}(A + B) + s_{m+1}(B)$$

veya

$$s_{km+j}(A + B) \geq s_{(k+1)m+j}(A) - s_{m+1}(B) .$$

$n = km + j$ olarak alıp n'yi sonsuza götürürsek

$$\liminf n^r s_n(A+B) \geq (k/(k+1))^r a$$

veya k keyfi olduğundan

$$\liminf n^r s_n(A+B) \geq a. \quad (3.23)$$

(3.22) ve (3.23) bağıntılarından (3.21) bağıntısı elde edilir. $\square$

(3.20) ve (3.21)'deki n^r fonksiyonunun yerine $\varphi_r(n) = n^r L(n)$ fonksiyonunu koyarak bu teorem genelleştirilebilir. Burada $L(v)$, b ($0 < b < \infty$)'nin her seçimi ve $v_1 \rightarrow \infty$, $v_2 \rightarrow \infty$, $v_2/v_1 \rightarrow b$ için

$$\lim L(v_2)/L(v_1) = 1$$

olacak şekilde pozitif, keyfi bir fonksiyondur.

3.3. Tam Sürekli Operatörlerin s-Sayıları, Özdeğerleri ve Köşegen Elemanları Arasındaki İlişkileri Gösteren Eşitsizlikler

1. Bu alt bölümde H.Weyl'in elde ettiği sonuçlar, onların ispatlarında bazı değişiklikler yapılarak verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.3.1 (Weyl, 1949; Horn, 1950): A tam sürekli lineer bir operatör ve $s_j = s_j(A)$ ($j = 1, 2, \dots$) olsun. O zaman $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ vektörlerinin herhangi bir sistemi için

$$\det \left[(A\varphi_j, A\varphi_k) \right]_1^n \leq s_1^2 s_2^2 \dots s_n^2 \det \left[(\varphi_j, \varphi_k) \right]_1^n. \quad (3.24)$$

İspat. e_j ($j = 1, 2, \dots$) ile A^*A operatörünün özvektörlerinin tam ortonormal bir sistemini gösterelim. O zaman

$$(A\varphi_j, A\varphi_k) = (A^* A\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{l=1}^{\infty} s_l^2 (\varphi_j, e_l) (e_l, \varphi_k).$$

dır. Bu nedenle $A = [(A\varphi_j, A\varphi_k)]_{j,k=1}^n$ kare matrisi $A = B.B^*$ şeklinde gösterilebilir. Burada B bir dikdörtgen matristir.

$$B = [s_r (\varphi_j, e_r)]_{\substack{j=1,2,\dots,n \\ r=1,2,\dots}}$$

Determinantlar Teorisinden Binet-Cauchy teoremi gereğince

$$\det A = \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_n < \infty} \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \mathcal{B}^* \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

dir. Burada $\mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$ 1 2 ... n satırlarının $r_1 r_2 \dots r_n$ sütunları ile kesişiminden oluşan

B matrisinin minörünü belirtmektedir.

$$\|(\varphi_j, e_r)\|_{\substack{j=1,2,\dots,n \\ r=1,2,\dots}}$$

matrisini $\wp$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} = s_{r_1} s_{r_2} \dots s_{r_n} \wp \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

olacağı açıktır ve (3.25)'ten dolayı

$$\det A \leq s_1^2 s_2^2 \dots s_n^2 \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n} \wp \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \wp^* \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

dir.

$$\sum_{r_1, r_2, \dots, r_n} \wp \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \wp^* \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \det \left[\sum_{r=1}^{\infty} (\varphi_j, e_r)(e_r, \varphi_k) \right]_1^n = \det [(\varphi_j, \varphi_k)]$$

olduğundan (3.24) bağıntısının geçerli olduğunu görüyoruz.

Yardımcı Teorem 3.3.2. A herhangi bir lineer tam sürekli operatör ve φ_j ($j = 1, 2, \dots, r(A)$) ortonormal sistem olsun. Eğer

$$|(A\varphi_j, \varphi_j)| = s_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots, r(A)) \quad (3.26)$$

eşitliği gerçekleşirse o zaman A operatörü normaldir ve φ_j ($j = 1, 2, \dots, r(A)$) $\overline{R(A)}$ 'da özvektörlerinin bir tam sistemini oluşturmaktadır.

İspat: Gerçekten

$$s_1^2(A) = |(A\varphi_1, \varphi_1)|^2 \leq \|A\varphi_1\|^2 = (A^* A\varphi_1, \varphi_1)$$

ve

$$s_1^2(A) = \max_{\|\varphi\|=1} (A^* A\varphi, \varphi)$$

olduğundan

$$s_1^2(A) = (A^* A\varphi_1, \varphi_1)$$

dır. Özdeğerlerin minimax özelliklerinden son eşitlik

$$A^* A\varphi_1 = s_1^2(A) \varphi_1$$

olduğunu göstermektedir.

$$s_2^2(A) = \left| (A\varphi_2, \varphi_2) \right|^2 \leq \|A\varphi_2\|^2 = (A^* A\varphi_2, \varphi_2)$$

ve

$$s_2^2(A) = \max_{\|\varphi\|=1, (A\varphi, \varphi)=0} (A^* A\varphi, \varphi)$$

bağıntılarından

$$A^* A\varphi_2 = s_2^2(A) \varphi_2$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde devam ederek

$$A^* A\varphi_j = s_j^2(A) \varphi_j \quad (j = 1, 2, \dots, r(A))$$

elde edilir.

Sonuç olarak φ_j ($j = 1, 2, \dots, r(A)$) $A^* A$ operatörünün sıfırdan farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerinin bir tam sistemini oluşturmaktadır.

Burada $A^* A$ operatörünün ve dolayısıyla A operatörünün de, tüm φ_j ($j = 1, 2, \dots, r(A)$) vektörlerine ortogonal olan X alt , özdeş olarak sıfır olduğu anlaşılmaktadır.

Aynı muhakeme sonucunda A^* operatörünün de X alt uzayında özdeş olarak sıfır olduğu gösterilebilir. Öyleyse herhangi bir $f \in \overline{R(A)}$ vektörü

$$f = \sum_{j=1}^{r(A)} (f, \varphi_j) \varphi_j$$

şeklinde gösterilebilir. Özel olarak

$$A\varphi_j = \sum_{k=1}^{r(A)} (A\varphi_j, \varphi_k) \varphi_k . \quad (3.27)$$

Sonuç olarak

$$(A\varphi_j, A\varphi_j) = \sum_{k=1}^{r(A)} |(A\varphi_j, \varphi_k)|^2. \quad (3.28)$$

$$|(A\varphi_j, \varphi_j)|^2 = s_j^2(A) = (A\varphi_j, A\varphi_j)$$

olduğundan (3.28)'den

$$(A\varphi_j, \varphi_k) = 0 \quad j \neq k$$

bulunur.

Böylece (3.27)'den $A\varphi_j = (A\varphi_j, A\varphi_j)\varphi_j$ ($j = 1, 2, \dots, r(A)$) elde edilir ve dolayısıyla A operatörü aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$A = \sum_{j=1}^{r(A)} (A\varphi_j, \varphi_j)(\cdot, \varphi_j)\varphi_j \quad \square$$

Yardımcı Teorem 3.3.3 (Schur): $A: H \rightarrow H$ herhangi bir tam sürekli operator ise

$$Aw_j = a_{j1}w_1 + a_{j2}w_2 + \dots + a_{jj}w_j \quad (j = 1, 2, \dots, \nu(A))$$

olacak şekilde bir $\{w_j\}_{j=1}^{\nu(A)} \subset H$ ortonormal sistemi vardır. Burada

$$a_{jj} = (Aw_j, w_j) = \lambda_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots, \nu(A)) .$$

Yardımcı Teorem 3.3.4 (Weyl, 1949): A herhangi bir tam sürekli lineer operator olsun. O takdirde

$$|\lambda_1(A)\lambda_2(A)\dots\lambda_n(A)| \leq s_1(A)s_2(A)\dots s_n(A) \quad (n = 1, 2, \dots, \nu(A)) \quad (3.29)$$

dır. Eğer $\nu(A) = r(A) (\leq \infty)$ ise, o zaman (3.29) bağıntılarındaki eşitlik ancak ve ancak A operatörü normal ise sağlanır.

İspat. Yardımcı Teorem 3.3.3. gereğince

$$Aw_j = a_{j1}w_1 + a_{j2}w_2 + \dots + a_{jj}w_j \quad (j = 1, 2, \dots, \nu(A))$$

olacak şekilde ortonormal bir $\{w_j\}_{j=1}^{\nu(A)}$ sistemi seçilebilir. Burada

$$a_{jj} = (Aw_j, w_j) = \lambda_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots, \nu(A)) . \quad (3.30)$$

Yardımcı Teorem 3.3.1.'den dolayı

$$\det[(Aw_j, Aw_k)]_1^n \leq s_1^2 \cdot s_2^2 \dots s_n^2 \quad (n \leq \nu(A)) \quad (3.31)$$

$$(Aw_j, Aw_k) = \sum_{q=1}^{\min(j,k)} (Aw_j, w_q) \overline{(Aw_k, w_q)}$$

olduğundan

$$\det[(Aw_j, Aw_k)]_1^n = \det[(Aw_j, w_k)]_1^n \cdot \det[\overline{(Aw_j, w_k)}]_1^n = |\det[(Aw_j, w_k)]_1^n|^2$$

dır.

$$\det[(Aw_j, Aw_k)]_1^n = \lambda_1(A) \lambda_2(A) \dots \lambda_n(A)$$

olduğunu göz önüne alınırsa

$$\det[(Aw_j, Aw_k)]_1^n = |\lambda_1(A)|^2 |\lambda_2(A)|^2 \dots |\lambda_n(A)|^2 \quad (3.32)$$

elde edilir. (3.31) ve (3.32)'yi karşılaştırarak (3.29) bağıntısına ulaşılır.

Şimdi de $\nu(A) = r(A)$ ve (3.29) bağıntılarının tamamında eşitliğin sağlandığı durumu gözönünde bulunduralım. O zaman

$$|\lambda_j(A)| = s_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots, r(A))$$

(3.30)'dan da

$$|(Aw_j, w_j)| = s_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots, r(A))$$

elde edilir. Buradan Yardımcı Teorem 3.3.2.'den A operatörü normaldir. $\square$

Uyarı: Herhangi bir sonlu boyutlu A operatörü için (3.29) bağıntılarının sonuncusu için eşitliğin sağlandığı açıktır.

A.Horn çalışmalarında gösterdi ki (3.29) bağıntıları, onların sonuncusunda eşitlik eşitlik sözkonusu olduğunda, sonlu boyutlu bir operatörün s-sayıları ile özdeğerleri arasındaki ilişkileri tam olarak nitlendirir. Yani

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|; \quad s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n ;$$

$$|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k| \leq s_1 s_2 \dots s_k \quad (k = 1, 2, \dots, (n-1)),$$

$$|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n| \leq s_1 s_2 \dots s_n$$

koşullarını sağlayan herhangi kompleks $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sayıları ve herhangi negatif olmayan $s_1, s_2, \dots, s_n$ sayıları için n-boyutlu uzayda

$$\lambda_j(A) = \lambda_j \quad \text{ve} \quad s_j(A) = s_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

olacak şekilde bir A operatörü bulunabilir.

2.Yardımcı Teorem 3.3.5.(Weyl, 1949 ; Hardy, Littlewood ve Polya, 1948).

$\phi(x) (-\infty \leq x < \infty)$, $\phi(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(-x) = 0$ koşulunu sağlayan yukarı konkav bir fonksiyon

olsun. $\{a_j\}_1^w$ ile $\{b_j\}_1^w$ ($w \leq \infty$)

$$\sum_{j=1}^k a_j \leq \sum_{j=1}^k b_j \quad (k = 1, 2, \dots, w)$$

eşitsizliğini sağlayan artmayan reel sayı dizileri ise

$$\sum_{j=1}^k \phi(a_j) \leq \sum_{j=1}^k \phi(b_j) \quad (k = 1, 2, \dots, w). \quad (3.33)$$

Özel olarak, $w = \infty$ ise $\sum_{j=1}^{\infty} \phi(a_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \phi(b_j)$ dır.

Ayrıca $\phi(x)$ fonksiyonu tam konkav ise o zaman

$$\sum_{j=1}^w \phi(a_j) = \sum_{j=1}^w \phi(b_j) \quad (< \infty) \quad (3.34)$$

eşitliği ancak ve ancak $a_j = b_j$ ($j = 1, 2, \dots, w$) olduğunda sağlanır.

İspat: $\phi'(x) (-\infty < x < \infty)$ ile $\phi(x)$ konkav fonksiyonunun sol türevini gösterelim. Bilindiği gibi $\phi'(x)$ her yerde tanımlı ve negatif olmayan, azalmayan bir fonksiyondur. $\phi(x)$ fonksiyonunun $y_+ = \max(y, 0)$ olmak üzere

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-u)_+ d\phi'(u) \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edildiğini ispatlıyacağız. Gerçekten

$$\int_{-N}^{\infty} (x-u)_+ d\phi'(u) = \int_{-N}^x (x-u)_+ d\phi'(u) = \int_{-N}^x \phi'(u) du - (x+N)\phi'(-N) \quad (\geq 0) \quad (3.36)$$

Burada N herhangi bir pozitif sayıdır. (3.36)'nın sol tarafının pozitifliğinden

$$(x+N)\phi'(-N) \leq \int_{-N}^x \phi'(u) du = \phi(x) - \phi(-N) \leq \phi(x) \quad (x > -N) \quad (3.37)$$

elde edilir. Buradan da

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} N\phi'(-N) < \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \phi'(-N) = 0 \quad (3.38)$$

bulunur. $x \rightarrow \infty$ iken $\phi(x) \rightarrow 0$ olduğundan (3.37) ve (3.38)'den

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (x+N)\phi'(-N) = \lim_{N \rightarrow \infty} N\phi'(-N) = 0$$

sonucuna varılır.

$\phi(x)$ fonksiyonunun (3.35) bağıntısını elde etmek için (3.36)'da $N \rightarrow \infty$ iken limite geçmek kaldı. (3.35)'ten

$$\sum_{j=1}^k \phi(a_j) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k(x) d\phi'(x) \quad (3.39)$$

yazılır. Burada

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^k (a_j - x)_+$$

dır. Benzer şekilde

$$\sum_{j=1}^k \phi(b_j) = \int_{-\infty}^{\infty} B_k(x) d\phi'(x) \quad (3.39')$$

Burada

$$B_k(x) = \sum_{j=1}^k (b_j - x)_+$$

$A_k(x)$ ve $B_k(x)$ fonksiyonları arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$A_k(x) \leq B_k(x) \quad (-\infty < x < \infty; \quad k = 1, 2, \dots) \quad (3.40)$$

Gerçekten $x \leq \min(a_k, b_k)$, $x \geq b_1$ eşitsizliklerinin herhangi bir tanesini sağlayan tüm x 'ler için (3.40) bağıntısı açıktır.

Şimdi $a_{q+1} \leq x < a_q$ ve $b_{p+1} \leq x < b_p$ ($p, q \leq k$) olsun. O zaman $p \geq q$ için

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^q a_j - qx \leq \sum_{j=1}^q b_j - qx + (b_{q+1} - x) + \dots + (b_p - x) = B_k(x)$$

ve $p < q$ için

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^q a_j - qx \leq \sum_{j=1}^q b_j - qx - (b_{p+1} - x) - \dots - (b_q - x) = B_k(x)$$

dir. (3.40) eşitsizliği ve (3.39) ile (3.39') bağıntılarından (3.33) eşitsizliği elde edilir.

(3.34) eşitsizliğinin ne zaman gerçekleştiğini açıklamak için daha zor olan $w = \infty$

durumunu gözönünde bulunduralım. Bu durumda (3.40)'tan

$$A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j - x)_+ \leq B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - x)_+ \quad (-\infty < x < \infty)$$

elde edilir.

(3.33)'ten $\sum_j \varphi(b_j)$ serisi yakınsarsa $\sum_j \varphi(a_j)$ serisi de yakınsar. Ayrıca (3.39) ve

(3.39')'den dolayı

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(a_j) = \int_{-\infty}^{\infty} A(u) d\varphi'(u) \leq \int_{-\infty}^{\infty} B(u) d\varphi'(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(b_j).$$

Son ifadedeki eşitlik ancak ve ancak $A(x) = B(x)$ ($-\infty < x < \infty$) olduğunda sağlanacaktır. Bu da sadece $a_j = b_j$ ($j = 1, 2, \dots$) olduğunda mümkündür.

3. Yukarıdaki sonuçlar bize tam sürekli operatörlerin tam sayıları ile ilgili bir çok önemli sonucu tespit etmeye imkan tanımaktadır.

Teorem 3.3.1 (Weyl, 1949): A tam sürekli bir operatör ve $f(x)$ ($0 \leq x < \infty$; $f(0) = 0$), $x = e^t$ ($-\infty < t < \infty$) dönüşümünden sonra yukarı konkav bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\sum_{j=1}^k f(|\lambda_j|) \leq \sum_{j=1}^k f(s_j) \quad (j = 1, 2, \dots, \nu(A)). \quad (3.41)$$

Burada $\lambda_j = \lambda_j(A)$, $s_j = s_j(A)$ ($j = 1, 2, \dots, \nu(A)$) dir. Özel olarak $\nu(A) = \infty$ ise

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(|\lambda_j|) \leq \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j). \quad (3.42)$$

Eğer $\varphi(t) = f(e^t)$ fonksiyonu tam konkav ise

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j) \quad (< \infty) \quad (3.43)$$

eşitliği sağ tarafın sonlu olması koşuluyla ancak ve ancak A operatörü normal ise sağlanır.

İspat: Bu teorem Yardımcı Teorem 3.3.4. ve Yardımcı Teorem 3.3.5.'in basit bir kombinasyonudur. Gerçekten Yardımcı Teorem 3.3.4.'ten dolayı Yardımcı Teorem 3.3.5.

$$a_j = \ln|\lambda_j|, b_j = \ln s_j \quad (j = 1, 2, \dots, \nu(A))$$

sayılarına ve $\varphi(t) = f(e^t)$ fonksiyonuna uygulanabilir. Buradan da (3.41) ve (3.42) bağıntıları elde edilir.

Şimdi $\varphi(t)$ fonksiyonu tam konkav ve (3.43) ifadesinin sağlandığı durumu gözönüne alalım. Eğer $\nu(A)$ sonlu ise o zaman $k = \nu(A)$ 'yı (3.41)'de yerine koyarak ve (3.43) ile karşılaştırarak

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) = \sum_{j=1}^{\nu(A)} f(s_j)$$

ve $\forall j > \nu(A)$ için $s_j(A) = 0$ elde edilir.

Burada her $x > 0$ için $f(x) > 0$ olduğunu gözönüne aldık. Böylece gözönünde bulundurulan durum için $r(A) = \nu(A)$ ve ayrıca Yardımcı Teorem 3.3.5.'ten

$$|\lambda_j(A)| = s_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots, r(A)). \quad (3.44)$$

Aynı Yardımcı Teorem 3.3.5.'ten dolayı $\nu(A) = \infty$ için, (3.43) eşitliğinden tüm $j = 1, 2, \dots$ için (3.44) eşitliği elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.3.4.'ü hatırlayarak iki durumun her birinde ($\nu(A) < \infty$; $\nu(A) = \infty$) (3.44) eşitliğinin A operatörünün normallliğini gerektirdiği sonucuna varılır.

Karşıt olarak normal A operatörü için $r(A) = \nu(A)$ dır ve (3.44) eşitliği (3.43) eşitliği beraberinde sağlanır. $\square$

SONUÇ 3.3.1: Herhangi bir $A \in \sigma_\infty$ için aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j(A)|^p \leq \sum_{j=1}^n s_j^p(A) \quad (p > 0 ; n = 1, 2, \dots, \nu(A)), \quad (3.45)$$

$$\prod_{j=1}^n (1 + r |\lambda_j(A)|) \leq \prod_{j=1}^n (1 + r s_j(A)) \quad (n = 1, 2, \dots, \nu(A)). \quad (3.46)$$

Burada r herhangi bir pozitif sayıdır.

Gerçekten (3.45) ve (3.46) bağıntıları, (3.41) bağıntısının sırasıyla $f(x) = x^p$ ve $f(x) = \ln(1 + rx)$ için elde edilmiş özel halleridir. $x = e^t$ dönüşümünden sonra bu fonksiyonların yukarı konkav olduğu kolayca gösterilebilir.

SONUÇ 3.3.2: $A \in \sigma_\infty$ olsun. Herhangi bir $\rho > 0$ sabiti için

$$s_n(A) = O(n^{-1/\rho}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.47)$$

veya

$$s_n(A) = o(n^{-1/\rho}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.48)$$

olduğunu varsayalım. O zaman eğer A operatörü sonsuz sayıda özdeğere sahip ise (3.47) durumunda

$$\lambda_n(A) = O(n^{-1/\rho}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.49)$$

ve (3.48) durumunda

$$\lambda_n(A) = o(n^{-1/\rho}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.50)$$

Gerçekten, ilk olarak $\rho < 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$f_s(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + s_n(A)z)$$

tam fonksiyonu fonksiyonlar teorisinin (Levin, 1956) iyi bilinen teoremlerine göre ρ .
dereceden tam bir fonksiyon ve ayrıca

$$(3.47) \text{ durumunda } \ln f_s(r) = O(r^\rho) \quad (r \uparrow \infty),$$

$$(3.48) \text{ durumunda } \ln f_s(r) = o(r^\rho) \quad (r \uparrow \infty)$$

olacaktır.

O zaman aynı ifadeler

$$f_s(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + s_n(A)z)$$

fonksiyonu için geçerlidir ve (3.46)'dan

$$\max_{|z| \leq r} |f_\lambda(z)| \leq f_s(r).$$

Bu nedenle, büyüklüğünün derecesi ve sıfırlarının büyüklüğünün derecesi arasındaki bağlantı ile fonksiyonlar teoreminin ters teoremlerine göre sırasıyla (3.49) ve (3.50) bağlantılarını elde edeceğiz.

Şimdi de $\rho > 1$ olduğu durumu gözönüne alalım. $\nu > \rho$ şeklinde bir tamsayı seçerek $\lambda_n^\nu(A)$ ve $s_n^\nu(A)$ sayılarını oluşturalım. Bu sayılar için yeniden

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^\nu(A)z) \right| \leq \prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j^\nu(A)|z|)$$

bağıntısı sağlanacaktır. Bundan dolayı $\lambda_n^v(A)$ sayılarının $s_n^v(A)$ sayıları ile aynı azalma derecesine sahip olacağı kanısına varabiliriz. $\square$

3.4. Tam Sürekli Operatörlerin Toplam ve Çarpımlarının s-Sayıları için Eşitsizlikler

Bu bölümde Weyl'in araştırmaları ile yakından ilgili olan K.Fan ve A.Horn inceleyeceğiz.

1. Aşağıdaki basit yardımcı teorem oldukça yararlıdır.

Yardımcı Teorem 3.4.1. (Fan, 1951). $A \in \sigma_\infty$ olsun bu durumda herhangi bir n pozitif sayısı için

$$\max \left| \sum_{j=1}^n (UA\phi_j, \phi_j) \right| = \sum_{j=1}^n s_j(A) \quad (3.51)$$

dir. Burada maksimum tüm üniter U operatörleri ve $\{\phi_j\}_1^n$, ortonormal sistemleri üzerinde alınmıştır. Özel olarak

$$\sum_{j=1}^n |A\phi_j, \phi_j| \leq \sum_{j=1}^n s_j(A) \quad (3.52)$$

dir.

İspat: P ile ϕ_j ($j=1,2,\dots,n$) tabanına sahip olan alt uzaya izdüşüm operatörünü gösterelim. O zaman $A_1 = PUAP$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^n (UA\phi_j, \phi_j) = \sum_{j=1}^n (A_1\phi_j, \phi_j)$$

dir. Lineer cebirden iyi bilindiği gibi

$$sp A_1 = \sum_{j=1}^n (A_1\phi_j, \phi_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(A_1).$$

Sonuç 3.3.1.'den dolayı

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j(A_1)| \leq \sum_{j=1}^n s_j(A_1)$$

Diğer taraftan, (3.8) ve (3.9) eşitsizliklerine göre

$$s_j(A_1) = s_j(PUAP) \leq S_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Bu nedenle

$$\left| \sum_{j=1}^n (UA\varphi_j, \varphi_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n s_j(A).$$

Burada eşitliğin k halinin de olduğunu gösterelim. Bunu yapmak için A operatörünü $A = VT$ kutupsal biçimde tanımlayıp e_j ($j = 1, 2, \dots, n$) ile de T operatörünün özvektörlerinin bir tam ortonormal sistemini gösterelim.

$$UAe_j = V * Ae_j \quad (= Te_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

olacak şekilde bir üniter U operatörünün var olduğu açıktır. Bu operatör için

$$\sum_{j=1}^n (UAe_j, e_j) = \sum_{j=1}^n (He_j, e_j) = \sum_{j=1}^n S_j(A).$$

Böylece (3.51) bağıntısı elde edilir. Buradan da (3.52) bağıntısı elde edilir. Gerçekten, U_0

$$U_0 * \varphi_j = e^{i\theta_j} \varphi_j, \quad \varphi_j = \arg(A\varphi_j, \varphi_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

olacak şekilde herhangi bir üniter operatör ise

$$\sum_{j=1}^n |(A\varphi_j, \varphi_j)| = \sum_{j=1}^n |(U_0 A\varphi_j, \varphi_j)| \leq \sum_{j=1}^n s_j(A).$$

Yardımcı Teorem 3.4.2 (Horn, 1950; Fan, 1951). Herhangi $A, B \in \sigma_\infty$ operatörleri için

$$\prod_{j=1}^n s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^n s_j(A) \cdot \prod_{j=1}^n s_j(B), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.53)$$

$$\prod_{j=1}^n s_j(A+B) \leq \prod_{j=1}^n s_j(A) + \prod_{j=1}^n s_j(B), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.54)$$

bağıntıları vardır.

İspat: Yardımcı Teorem 3.3.1.'den her tam ortonormal e_j ($j = 1, 2, \dots, n$) vektörler sistemi için

$$\det \left[(ABe_j, ABe_k) \right]_1^n \leq \prod_{j=1}^n s_j^2(A) \cdot \det \left[(Be_j, Be_k) \right]_1^n \leq \prod_{j=1}^n s_j^2(A) \cdot \prod_{j=1}^n s_j^2(B) \quad (3.55)$$

dir. Burada e_j olarak $B^* A^* AB$ operatörünün özvektörlerinin bir tam sistemi seçilirse

$$\det \left[(ABe_j, ABe_k) \right]_1^n = \prod_{j=1}^n s_j^2(AB)$$

eşitliği yazılır. Dolayısıyla (3.55)'ten (3.53) elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.4.1.'den yararlanarak φ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) vektörlerinin bir ortonormal sistemini ve

$$\sum_{j=1}^n (U(A+B)\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^n s_j(A+B) \quad (3.56)$$

olacak şekilde bir U üniter operatörü seçebiliriz.

Bu nedenle, aynı Yardımcı Teorem 3.4.1. temeline dayanarak

$$\sum_{j=1}^n s_j(A+B) \leq \left| \sum_{j=1}^n (UA\varphi_j, \varphi_j) \right| + \left| \sum_{j=1}^n (UB\varphi_j, \varphi_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n s_j(A) + \sum_{j=1}^n s_j(B)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\square$

(3.53) eşitsizliği Horn, 1950 ve (3.54) eşitsizliği de Fan, 1951 tarafından gösterilmiştir.

2. Yardımcı teorem 3.4.1 ve Yardımcı teorem 3.4.2.'den yararlanarak aşağıdaki teoremler ve sonuçlar ispatlanır.

Teorem 3.4.1. (Fan, 1951). A ve B tam sınırlı lineer operatörler ve $f(x)$ $0 \leq x < \infty$ $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan, yukarı konkav bir fonksiyon olsun. O takdirde

$$\sum_{j=1}^k f(s_j(A+B)) \leq \sum_{j=1}^k f(s_j(A) + s_j(B)) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.57)$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A+B)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A) + s_j(B)). \quad (3.58)$$

İspat: Gerçekten (3.57) ve (3.58) bağıntıları doğrudan Yardımcı Teorem 3.4.2. ve Yardımcı Teorem 3.3.3.'ten elde edilir. Eğer

$$\begin{aligned} a_j &= S_j(A+B) \\ b_j &= S_j(A) + S_j(B) \end{aligned}$$

ve

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < \infty \\ 0 & -\infty \leq x < 0 \end{cases}$$

ifadelerini Yardımcı Teorem 3.3.5.'te yerine koyarsak (3.57) ve (3.58) elde edilir.

Teorem 3.4.2 (Horn, 1950): Eğer $f(x)$ ($0 \leq x < \infty$; $f(0)=0$) fonksiyonu $x = e^t$ ($-\infty < t < \infty$) dönüşümü ile yukarı konkav oluyorsa o zaman herhangi lineer tam sürekli A ve B operatörleri için

$$\sum_{j=1}^k f(s_j(AB)) \leq \sum_{j=1}^k f(s_j(A).s_j(B)) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.59)$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(AB)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A).s_j(B)). \quad (3.60)$$

İspat: Gerçekten Yardımcı Teorem 3.4.2 ve Yardımcı Teorem 3.3.5. gereğince (3.33) ve (3.34) bağıntılarında a_j ve b_j yerine sırasıyla $\ln(s_j(AB))$ ve $\ln(s_j(A).s_j(B))$ yazmak koşuluyla (3.59) ve (3.60) bağıntıları elde edilir.

SONUÇ 3.4.1: Herhangi lineer tam sınırlı A ve B operatörleri için

$$\sum_{j=1}^k (s_j(AB)) \leq \sum_{j=1}^k (s_j(A).s_j(B)) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.61)$$

Gerçekten (3.61) bağıntısı $f(t) = t$ için (3.59)'dan elde edilmiştir.

(3.57) - (3.61) eşitsizlikleri n tane $A_1, A_2, \dots, A_n$ operatörlerinin durumuna doğal olarak genelleştirilebilir.

SONUÇ 3.4.2: Herhangi bir lineer tam sürekli A operatörü ve herhangi $n=1, 2, \dots$; $p>0$ sayıları için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\sum_{j=1}^k (s_j^{p/n}(A^n)) \leq \sum_{j=1}^k (s_j^p(A)) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.62)$$

(3.62) bağıntıları n tane $A_j = A$ ($j=1,2,\dots,n$) operatörü ve $f(t) = t^{p/n}$ fonksiyonu için yazılmış (3.59) bağıntılarından elde edilir.

3. Eğer $A \in \sigma_\infty$ ve $\{\varphi_j\}_1^w$ ($w \leq \infty$) herhangi bir ortonormal system ise o zaman (3.52)'den dolayı

$$\sum_{j=1}^k |(A\varphi_j, \varphi_j)| \leq \sum_{j=1}^k s_j(A). \quad (k = 1, 2, \dots, w)$$

Yardımcı Teorem 3.3.5.'ten yararlanarak her azalmayan, yukarı konkav $f(x)$ ($0 \leq x \leq \infty$; $f(0) = 0$) fonksiyonu için

$$\sum_{j=1}^k f(t_j) \leq \sum_{j=1}^k f(s_j) \quad (k = 1, 2, \dots, w) \quad (3.63)$$

olduğu söylenebilir. Burada

$$t_j = |(A\varphi_j, \varphi_j)|, \quad s_j = s_j(A) \quad (j = 1, 2, \dots, w)$$

Özel olarak eğer $w = \infty$ ise

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(t_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j) \quad (3.64)$$

Eğer $f(x)$ kesin yukarı konkav fonksiyon ve (3.63) bağıntısının sağ tarafı sonlu ise eşitlik durumu ancak ve ancak

$$A = \sum_{j=1}^w (A\varphi_j, \varphi_j) (\cdot, \varphi_j) \varphi_j \quad (3.65)$$

olduğunda sözkonusudur.

Genelliği kaybetmeden her j için $t_j > 0$ ve $t_1 \geq t_2 \geq \dots$ olduğunu varsayabiliriz. Aksi takdirde $\{\varphi_j\}_1^w$ sisteminden $(A\varphi_j, \varphi_j) = 0$ olacak şekilde φ_j vektörlerini atıp sözkonusu olan sistemi yeniden numaralandırabilirdik. Bunu Kabul ederek ve Yardımcı Teorem 3.3.5.'in timeline dayanarak (3.64) bağıntılarındaki eşitliğin ancak ve ancak

$$(A\varphi_j, \varphi_j) = s_j(A)$$

olduğunda sağlandığını gösterebiliriz.

Yardımcı Teorem 3.3.2.'den yararlanarak A operatörünün normal ve $\{\varphi_j\}_1^w$ özvektörler sisteminin $\overline{R(A)}$ 'da tam olduğu, yani (3.65) eşitliğinin sağlandığı sonucuna varılır.

3.5. Örnek:

Bu kısımda tam sürekli bir integral operatörünün s-sayıları ile ilgili bir örnek vereceğiz.

$D(L)$ ile $L_2[0, \pi]$ uzayının

1. $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında mutlak sürekli.
2. $y(0) = y(\pi) = 0$
3. $y''(x) \in L_2[0, \pi]$

koşullarını sağlayan tüm $y = y(x)$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim.

$$L : D(L) \rightarrow L_2[0, \pi]$$

$$(Ly)(x) = -y''(x)$$

lineer operatörünü gözönüne alalım. L operatörünün özdeğerleri

$$\lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ve özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları da sırasıyla

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

şeklindedir.

Sıfır sayısı L operatörünün bir özdeğeri olmadığından L operatörünün L^{-1} tersi vardır. Bu ters operatörü bulalım. Bunun için $f = f(x), L_2[0, \pi]$ uzayının herhangi bir elemanı olmak üzere

$$(Ly)(x) = f(x) \quad (3.66)$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklem

$$-y''(x) = f(x) \quad (3.67)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (3.68)$$

şeklinde yazılabilir. Önce (3.67) denkleminin genel çözümünü bulalım.

$$y'(x) = c_1 - \int_0^x f(t)dt ;$$

$$y(x) = c_1 x + c_2 - \int_0^x \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt = c_1 x + c_2 - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt ;$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(\pi) = c_1 \pi - \pi \int_0^\pi f(t)dt + \int_0^\pi t f(t)dt = 0 \Rightarrow c_1 = \int_0^\pi f(t)dt - \pi^{-1} \int_0^\pi t f(t)dt$$

dir. Görüldüğü gibi (3.66) denkleminin ya da (3.67), (3.68) probleminin her $f = f(t) \in L_2[0, \pi]$ için bir tek çözümüm vardır ve bu çözüm

$$y(x) = \left[\int_0^\pi f(t)dt - \pi^{-1} \int_0^\pi t f(t)dt \right] x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$y(x) = x \int_x^\pi f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt - \pi^{-1} x \int_0^\pi t f(t) dt$$

dir. Bu integral operator

$$G(x, t) = \begin{cases} \pi^{-1} x(\pi - t), & x \leq t \\ \pi^{-1} t(\pi - x), & x \geq t \end{cases}$$

olmak üzere

$$(L^{-1} f)(x) = \int_0^\pi G(x, t) f(t) dt$$

şeklinde yazılabilir.

$G(x, t), [0, \pi] \times [0, \pi]$ karesinde tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyondur. Ayrıca $G(x, t) = G(t, x)$ dir. Dolayısıyla $L^{-1} : L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi]$ kendine eş bir operatördür. L operatörünün özdeğerleri $\lambda_n = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) olduğundan L^{-1} operatörünün özdeğerleri

$$\mu_n = n^{-2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dir.

Gerçekten $f(x) = \sin nx$ için

$$\begin{aligned} (L^{-1} f)(x) &= x \int_x^\pi \sin nt \, dt + \int_0^x t \sin nt \, dt - \pi^{-1} x \int_0^\pi t \sin nt \, dt \\ &= -x \frac{\cos nt}{n} \Big|_x^\pi + \left(-t \frac{\cos nt}{n} \Big|_0^x + \frac{1}{n} \int_0^x \cos nt \, dt \right) - \pi^{-1} x \left(-t \frac{\cos nt}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nt \, dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x}{n} \cos n\pi + \frac{x}{n} \cos nx - \frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nt \Big|_0^x + \pi^{-1} x \frac{\pi}{n} \cos n\pi - \pi^{-1} x \frac{1}{n^2} \sin nt \Big|_0^\pi \\
&= -\frac{x}{n} (-1)^n + \frac{x}{n} \cos nx - \frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx + \pi^{-1} x \frac{\pi}{n} (-1)^n \\
&= -\frac{x}{n} (-1)^n + \frac{x}{n} \cos nx - \frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx + \frac{x}{n} (-1)^n \\
&= \frac{1}{n^2} \sin nx
\end{aligned}$$

ya da

$$L^{-1}(\sin nx) = n^{-2} \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dir.

Teorem 2.3.22.'den L^{-1} 'in tam sürekli operator olduğu elde edilir. L^{-1} operatörü kendine eş olduğundan

$$S_n(L^{-1}) = |\mu_n| = \mu_n$$

yani

$$S_n(L^{-1}) = n^{-2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dir.

4.SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında tam sürekli operatörlerin Schmidt açılımı, s-sayıların yaklaşık ve asimtotik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca s-sayılar, özdeğerler ve tam sürekli operatörlerin köşegen elemanları arasındaki ilişkiler, tam sürekli operatörlerin toplam ve çarpımlarının s-sayıları için eşitsizlikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Allahverdiyev, C.E., (1957), “Tam Sürekli Operatörlerin Sonlu Boyutlu Operatörlere Yaklaşım Hızı Hakkında”, Azərbaycan Universitetinin eserleri, no:2., 27-35

Birman, M.Ş., Solomyak M.Z., (1980) “Spektralnaya teoriya samosopryajennik operatorov v gilbertovom prostranstve”, İzdatelstvo Leningradskogo Universiteta. Leningrad.

Cohberg, I.C. and Krein, M.G., (1969), Introduction to the theory of Linear Non-selfadjoint Operators”, translation of Mathematical Monographs vol.18, Amer. Math. Sos. Providence, R.I.

Dunford, N. And Schwartz, J.T., (1957), “Linear Operators-I. General Theory”, Interscience Publishers, Inc., New York.

Fan, K., (1951), “Maximum Properties and Inequalities for the Eigenvalues of Completely Continuous Operators”, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 760-766.

Hardi, G., Litlvud, Dj. and Poya, D., (1948), “eşitsizlikler”, M.İL.

Horn, A., (1950), “On the Singular Values of a Product of Completely Continuous Operators”, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 36, 374-375.

Kantorovich, L.Y. and Alcilov, G.P., (1982), “functional Analysis”, 2.Ed., Pergamon Press, Oxford. (Rusçadan Çeviri)

Levin, B.Y., (1956), “Tam Fonksiyonların Sıfırlarının Dağılımı”, Gostekizdat.

Lysternik, L.A. and Sobolev, V.I., (1955), “Elements of Functional Analysis”, (English Translation), Frederic Ungar Publishing Co., New York.

Naimark, M.A., (1968), “Linear Differential Operators”, Part I, II, London.

Riesz, F. and B. Sz...-Nagi (1965), “Functional Analysis”, Frederic Ungar Publishing Co., New York.

Smirnov, V.I., (1964), “A Course of Higher Mathematics”, vol.5, Neew York, Pergamon Press.

Weyl, H., (1949), “Inequalities Between the Two Kinds of Eigenvalues of a Linear Transformation”, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 35, 408-411.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	02.04.1980	
Doğum yeri	Bulgaristan / Kırcalı	
Lise	1994-1997	Sağmalcılar Lisesi
Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2004-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurumlar

04/2001-07/2001	Otakçılar Lisesi
09/2001-06/2002	Mareşal Fevzi Çakmak Lisesi
09/2002-06/2003	Plevne Lisesi
09/2003-	Bahçeşehir Üniversitesi