

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bulanık Kar. Ver. Bir. Oper. ve Uyg.

Yüksek Lisans Tezi

Hande Günay

2006

R209
278

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BULANIK KARAR VERMEDE BİRLEŞTİRME
OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI**

Matematikçi Hande GÜNAY

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ (Y.T.Ü)

İSTANBUL, 2006

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

D.B. No: 77036

X1-120

BULANIK KARAR VERMEDE BİRLEŞTİRME
OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI

Matematikçi Hande GÜNAY

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ (Y.T.Ü)

Prof. Dr. Mehmet Aktaşoğlu

Prof. Dr. Mustafa Sivri

İ. M. M. M.

AE

İ

İSTANBUL, 2006

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC): R209/278

Kayıt No : 3307
Geldiği Yer : Fen Bilim Enst.
Tarih : 14.11.06
Fiyat : 9.60
Fatura No :
Ayniyat No : 1-14
Ek :

İÇİNDEKİLER	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
2. BULANIK KÜMELER—TEMEL TANIMLAR	6
2.1 Bulanık Kümeler ve Üyelik Dereceleri	6
2.2 Bulanık Kümenin Desteği	9
2.3 Bulanık Kümenin α -keseni	9
2.4 Konveks Bulanık Küme	10
2.5 Bulanık Kümenin Yüksekliği	11
2.6 Normal Bulanık Küme	11
2.7 Teorik Bulanık Küme İşlemleri (Zimmerman, 1993)	11
2.7.1 Bulanık Kümenin Altkümesi	11
2.7.2 Bulanık Kümenin Tümlenyeni	12
2.7.3 İki Bulanık Kümenin Kesişimi	12
2.7.4 İki Bulanık Kümenin Birleşimi	13
2.8 Cebirsel Bulanık Küme İşlemleri (Zimmerman, 1993)	14
2.8.1 Kartezyen Çarpım (Cartesian Product)	14
2.8.2 Cebirsel Toplam (Algebraic Sum)	15
2.8.3 Sınırlı Toplam (Bounded Sum)	15
2.8.4 Cebirsel Çarpım (Algebraic Product)	15
2.8.5 Sınırlı Fark (Bounded Difference)	15
2.9 Bulanık Sayılar	16
2.9.1 Bir Bulanık Sayının Güven Aralığı (Confidence Interval)	16
2.9.2 Üçgensel Bulanık Sayılar (Triangular Fuzzy Numbers)	16
2.9.3 Yamuksal Bulanık Sayılar (Trapezoidal Fuzzy Numbers)	17
2.9.4 Bulanık Sayılarla Aritmetik İşlemler	18
2.9.4.1 Skaler ile Çarpma	18
2.9.4.2 Toplama İşlemi	18
2.9.4.3 Çıkarma İşlemi	19
2.9.4.4 Çarpma İşlemi	20
2.9.4.5 Bölme İşlemi	20

3.	BULANIK KARAR VERME (Zimmerman, 1993; Sakawa, 1993)	21
4.	BİRLEŞTİRME OPERATÖRLERİ (AGGREGATION OPERATORS)	24
4.1	Birleştirme Operatörlerinin Özellikleri (Marichal, 1999; Grabisch vd., 1998; Detyniecki, 2001)	26
4.1.1	Matematiksel Özellikler	26
4.1.1.1	Sınır Koşulları (Zayıf İdempotentlik)	26
4.1.1.2	İdempotentlik (Oy Birliği, Fikir Birliği)	26
4.1.1.3	Süreklilik (Continuity) (Sağlamlık (Robustness))	26
4.1.1.4	Monotonluk	26
4.1.1.5	Değişme Özelliği (Simetri, İsimsizlik (Anonymity))	27
4.1.1.6	<i>Ve'leyicilik</i> (Conjunctiveness)	27
4.1.1.7	<i>Veya'layıcılık</i> (Disjunctiveness)	28
4.1.1.8	Dengeleme (Compensation) Özelliği	28
4.1.1.9	Birleşme Özelliği (Asosiyatiflik)	29
4.1.1.10	Değişmezlik (İnvaryantlık)	29
4.1.1.11	Doğrusallık	30
4.1.1.12	Ayrıştırılabilirlik (Decomposability)	30
4.1.1.13	Etkisiz Eleman (Boş Oy (Neutral Element))	30
4.1.1.14	Yutan Eleman (Absorbent Element)	31
4.1.1.15	Tek Eleman İçin Birim Fonksiyon Olma	31
4.1.1.16	Karşıt Olma (<i>Reciprocal</i>) Özelliği	31
4.1.2	Davranışsal Özellikler	31
4.1.2.1	Bileşenlere Ağırlık Verilmesi	31
4.1.2.2	Karar Davranışı	32
4.1.2.3	Kriterlerin Arasındaki İlişki	33
4.2	Birleştirme Operatörlerine Örnekler	33
4.2.1	Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar	33
4.2.2	Uniform Birleştirme (<i>Uninorm</i>) Operatörleri	42
4.2.3	Simetrik Toplamlar	44
4.2.4	Aritmetik Benzeri Ortalama Operatörleri (<i>Quasi-arithmetic Mean Operators</i>) ...	45
4.2.4.1	Aritmetik Ortalama Operatörü	46
4.2.4.2	Kuadratik Ortalama Operatörü	46
4.2.4.3	Harmonik Ortalama Operatörü	46
4.2.4.4	Geometrik Ortalama Operatörü	47
4.2.5	Medyan Operatörü	47
4.2.6	Ağırlıklı Ortalama Operatörleri	48
4.2.6.1	Ağırlıklı Aritmetik Ortalama Operatörü	48
4.2.6.2	Ağırlıklı Kuadratik Ortalama Operatörü	48
4.2.6.3	Ağırlıklı Geometrik Ortalama Operatörü	49
4.2.6.4	Ağırlıklı Harmonik Ortalama Operatörü	49
4.2.6.5	Ağırlıklı Kök-Kuvvet Ortalama Operatörü	49
4.2.7	Sıralı Ağırlıklı Ortalama (OWA) Operatörü (Yager, 1988)	50
4.2.7.1	OWA Ağırlıklarının Hesabı	56
4.2.8	Dilsel (Linguistik) Birleştirme Operatörleri (Herrera ve Herrera-Viedma, 2000; Xu, 2004a; 2004b; 2004c)	68
4.2.9	Bulanık İntegraller (Grabisch ve Roubens, 2000; Marichal, 2000a; 2000b, 2004) ..	73
4.2.9.1	Sugeno İntegrali	74
4.2.9.2	Choquet İntegrali	75
5.	UYGULAMALAR	82

5.1	Doktora Öğrencisi Seçimi Problemi (Smolikova ve Wachowiak, 2002)	82
5.2	Yurtdışı Kongrelerine Katılım İçin Ödenek Tahsisi Yapılacak Akademisyen Seçimi (Tiryaki ve Günay, 2005)	95
5.3	Çok Amaçlı Lineer Programlama Problemine Minimum ve Maksimum Operatörleriyle Bulanık Bir Yaklaşım (Zimmermann, 1993)	108
6.	SONUÇLAR.....	112
KAYNAKLAR.....		113
EKLER		117
Ek 1 Yurt Dışında Uluslar Arası Bilimsel Toplantılara Katılma İstek Formu		118
ÖZGEÇMİŞ.....		120

SİMGE LİSTESİ

$A^{(n)}$	n değişkenli fonksiyon
$\tilde{A}$	Bulanık küme
$\tilde{A}$	Bulanık kümenin tümleyeni
$\tilde{A}_\alpha$	$\tilde{A}$ bulanık kümesinin α -keseni
$\tilde{C}$	Bulanık kısıt
C_i^a	a adayının C_i kriteri için aldığı puan
$\tilde{D}$	Bulanık karar
E^n	Bileşenleri E aralığından alınan n boyutlu vektör
F_W	Ağırlık vektörü W olan OWA operatörü
$\tilde{G}$	Bulanık amaç fonksiyonu
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	x elemanının bir $\tilde{A}$ bulanık kümesine üyelik derecesi
S_K	K tane kriter sağlandığında elde edilen toplam tatmin
$\text{supp } \tilde{A}$	$\tilde{A}$ bulanık kümesinin desteği
W	Ağırlık vektörü
W'	W matrisinin transpozesi

KISALTMA LİSTESİ

LOWGA	Linguistic Ordered Weighted Geometric Averaging (Linguistik Sıralı Ağırlıklı Geometrik Ortalama)	8
LWGA	Linguistic Weighted Geometric Averaging (Linguistik Ağırlıklı Geometrik Ortalama)	9
OWA	Ordered Weighted Averaging (Sıralı Ağırlıklı Ortalama)	10

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 1'e yakın reel sayılar kümesine ait üyelik fonksiyonu (Fullér, 1996).....	7
Şekil 2.2 Arabalar için bulanık <i>ucuz</i> fiyatlar kümesinin üyelik fonksiyonu.	8
Şekil 2.3 <i>Yaşlı</i> kümesinin üyelik fonksiyonu.	8
Şekil 2.4 Bir otomobilin hız uzayının bulanıklaştırılması (Topuz vd., 2002).....	9
Şekil 2.5 Konveks bulanık küme (Zimmerman, 1993).	10
Şekil 2.6 Konveks olmayan bulanık küme (Zimmerman, 1993).....	10
Şekil 2.7 İki bulanık kümenin kesişimi (Zimmermann, 1993).....	14
Şekil 2.8 İki bulanık kümenin birleşimi (Zimmermann, 1993).....	14
Şekil 2.9 Güven aralığı.	16
Şekil 2.10 Üçgensel bulanık sayı.....	17
Şekil 2.11 Yamuksal bulanık sayı.	18
Şekil 3.1 Bulanık karar (Zimmermann, 1993).....	22
Şekil 4.1 Operatörün $[a, b]$ aralığındaki yeri (Marichal, 1999, Sayfa 14).....	29
Şekil 4.2 $x_i \in [0, 1]$ için OWA operatörünün $[0, 1]$ aralığındaki yeri.	54
Şekil 4.3 Veyalık ölçümüne göre OWA operatörünün $[0, 1]$ aralığındaki yeri.....	55
Şekil 4.4 Bir bulanık küme olarak <i>çoğu</i> dilsel niceleyicisi (Herrera vd., 1997).	60
Şekil 4.5 Bir bulanık küme olarak <i>tümü</i> dilsel niceleyicisi.	60
Şekil 4.6 Bir bulanık küme olarak <i>en az biri</i> dilsel niceleyicisi.	61
Şekil 4.7 Bir bulanık küme olarak <i>en az yarısı</i> dilsel niceleyicisi (Herrera vd., 1997).....	62
Şekil 4.8 Monoton azalmayan niceleyici ($\alpha \in \mathbb{R}, Q(r) = r^\alpha, \alpha > 1$).	62
Şekil 4.9 Monoton azalmayan niceleyici ($\alpha \in \mathbb{R}, Q(r) = r^\alpha, \alpha < 1$).	62
Şekil 4.10 Monoton azalmayan niceleyici ($Q(r) = r$).	63
Şekil 4.11 Monoton azalmayan dilsel niceleyici eğrisinin altında kalan alanın bulunması.	65
Şekil 4.12 9 elemanlı bir linguistik terim kümesi (Herrera ve Herrera-Viedma, 2000).....	70
Şekil 4.13 Bulanık integrallerle çeşitli birleştirme operatörlerinin küme ilişkileri (Grabisch, 1996).	76

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 4.1 Çok kriterli karar probleminin matris temsili (Marichal, 1999).....	25
Çizelge 4.2 Parametrelenmiş üçgensel normlar ve üçgensel konormlar (Detyniecki, 2001)...	41
Çizelge 4.3 Aritmetik benzeri ortalamalara örnekler (Marichal, 1999).	47
Çizelge 4.4 Ağırlıklı ortalama operatörlerine örnekler (Marichal,1999).	50
Çizelge 4.5 Örnek karar problemi.	78
Çizelge 4.6 Başarı ve sınav notları.	80
Çizelge 4.7 Choquet integrali ile hesaplanan başarı notları.	81
Çizelge 5.1 Değerlendirme formu.	83
Çizelge 5.2 Belirli bir adaya ait uzman değerlendirmeleri.	85
Çizelge 5.3 Sıralı puanlar.	86
Çizelge 5.4 Aritmetik benzeri ortalamalarla hesaplanan genel puanlar.	87
Çizelge 5.5 Adayın farklı ortalamalara göre en iyi dört puanı ve final puanları.....	88
Çizelge 5.6 $\alpha = 0.620$ alındığında bulunan sonuçlar.	89
Çizelge 5.7 Genelleştirilmiş α -ortalaması ile hesaplanmış en iyi dört puan ve final puanı. ..	90
Çizelge 5.8 OWA operatörleri ile elde edilen genel puanlar.....	91
Çizelge 5.9 OWA operatörleri ile elde edilen en iyi dört puan ve final puanı.	92
Çizelge 5.10 Sugeno integrali ile elde edilen en iyi dört puan ve final puanı.	93
Çizelge 5.11 $OWMAX_{\omega}$ operatörü ile elde edilen en iyi dört puan ve final puanı.	94
Çizelge 5.12 $OWMIN_{\omega}$ operatörü ile elde edilen en iyi dört puan ve final puanı.....	94
Çizelge 5.13 Bölümlere göre her bir öğretim üyesine düşen ders saati sayısı.	96
Çizelge 5.14 Karar vericilerin aday için verdiği puanlar.....	97
Çizelge 5.15 Sıralı puanlar.	98
Çizelge 5.16 Aritmetik benzeri ortalamalarla hesaplanan genel puanlar.	98
Çizelge 5.17 Adayın final puanları.....	99
Çizelge 5.18 Adayların final puanları.	99
Çizelge 5.19 $\alpha = 2.2$ alınarak hesaplanan genel puanlar.....	101
Çizelge 5.20 $\alpha = 0.88$ alınarak hesaplanan final puanları.	102
Çizelge 5.21 Adayın OWA operatörleriyle birleştirilmiş genel puanları.....	105
Çizelge 5.22 OWA operatörleriyle bulunan final puanları.....	107

ÖNSÖZ

Bulanık Karar Vermede Birleştirme Operatörleri ve Uygulamaları adlı bu çalışma altı ana bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünün ardında yer alan *Bulanık Kümeler—Temel Tanımlar* isimli bölümde, çalışmada yararlanılan bazı temel bulanık kavramlardan bahsedilmektedir. Ardından gelen *Bulanık Karar Verme* isimli bölümde bulanık karar kavramına değinilmiştir. Daha sonra, çalışmanın merkezi olan *Birleştirme Operatörleri* aynı isimli bölümde anlatılmıştır. Bu bölümde ilk önce birleştirme operatörlerinin matematiksel ve davranışsal özellikleri, ardından mevcut operatörler verilmiştir. Sonraki bölümde ise operatörlerin bazı bulanık karar verme uygulamaları ele alınmıştır. Son bölüm ise sonuçlara ayrılmıştır.

Bu çalışmanın ortaya çıkışındaki çok değerli katkılarından ötürü danışmanım sayın Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ'ye, sayın hocam Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU'na, Araştırma Görevlisi arkadaşlarım Hale GONCE, Tuba OYLUMLU ve Beyza AHLATÇIOĞLU'na minnettarım. Son olarak, beni hep destekledikleri için aileme ve dostlarıma teşekkür ederim.

ÖZET

Sonlu sayıda aday (alternatif) arasından, adayların birçok niteliğine bakılarak en iyisinin seçilmesine Çok Nitelikli Karar Verme denir. Gerçek hayat problemleri kararsızdır, belirsizlik içerir ve çoğu zaman bilgi, tam veya kesin değildir. Bu tür problemleri çözmek için bulanık küme teorisi iyi bir araçtır. Bulanık küme teorisinde bir eleman, bir kümeye belli derecede aittir. Bir elemanın bir kümeye üyeliği ne kadar yüksekse, bu eleman bu kümenin karakteristik özelliğiyle o kadar eşleşir. Alternatifin bir kriteri ne derece iyi sağladığını temsil eden skarlardan genel bir skor elde edip, karara ulaşmak için bir sayı kümesini anlamlı bir sayıya indirgeyen bir fonksiyon olan birleştirme operatörü kullanılır. Çok nitelikli karar problemleri için literatürde birçok birleştirme operatörü mevcuttur. Karar vericiler karar alırken kötümser, iyimser ya da nötr bir davranış sergileyebilirler. Bu davranış şekilleri sırasıyla t-norm, t-konorm ve ortalama operatörleriyle birleştirme yapılarak karara yansıtılır. Nümerik bilginin birleştirilmesinde en çok bilinen ve yaygın olarak kullanılan birleştirme operatörü ağırlıklı aritmetik ortalamadır. Bu operatör verilen değerlerin lineer kombinasyonunu hesaplar. Hesaplama yapılırken, değerlerin alındığı kaynakların önemini ya da güvenilirliğini temsil eden ağırlıklar kullanılır. Ayrıca bilgi kaynakları birbirinden bağımsız olduğunda yani kaynaklar arasında etkileşim olmadığında iyi sonuçlar verir. Böyle bir etkileşimin varlığında ise gereksiz kaynakların etkilerinin azaltılması için bulanık integraller ile birleştirme daha uygundur. Hem bir ağırlıklı aritmetik ortalama operatörü hem de bir bulanık integral olan OWA operatörünün en temel özelliği t-norm ve t-konorm operatörleri arasında bir köprü kurmasıdır. Böyle örneklendirebileceğimiz birleştirme operatörleri, bu çalışmamızda ayrıntılarıyla ve çok nitelikli karar problemlerine uygulamalarıyla ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Birleştirme Operatörleri, Çok Kriterli Karar Verme, Bulanık Küme Teorisi.

ABSTRACT

Multiple Attribute Decision Making refers to select the most desirable option among a finite number of options (alternatives) using attributes to evaluate the alternatives. Real life situations are not stable and generally data is uncertain, incomplete or imprecise. Fuzzy set theory is a good tool to deal with such problems. In fuzzy set theory, an element belongs to a set with a certain degree of membership. The degree of membership specifies the extent to which a given element belongs to a set or is related to a concept. Aggregation operators reduce a set of numbers into a unique, representative or meaningful number. In order to provide an overall score from scores which represent degrees of satisfaction, aggregation operators are used. A large number of aggregation operators exist in literature. When making a decision, decision makers may have a behavior such as pessimistic, optimistic or neutral. There are different aggregation operators representative of the different behaviors. These behaviors reflect the decision by aggregating with t-norm, t-conorm and average operators respectively. The best known and more extensively used aggregation operator is weighted arithmetic mean which computes a linear combination of values according to the set of weights which account for the importance or reliability of the information sources. This function behaves well when the information sources are independent; there are no interactions between them. When interaction exists, using fuzzy integrals is much appropriate to reduce the effect of having redundant sources. An OWA operator is both a weighted arithmetic mean and a fuzzy integral. The main feature of this operator is to give a bridge between t-norm and t-conorm operators. In this thesis, aggregation operators which we can give such examples, their properties and applications to multiple attribute decision making problems are given.

Keywords: Aggregation Operators, Multiple Criteria Decision Making, Fuzzy Set Theory.

1. GİRİŞ

Karar verme, birçok alternatif arasından beklenti ve gereksinimleri karşılayan, en uygun alternatifi seçmek için düşünme, kavrama, analiz etme ve değerlendirme sürecidir. Her karar verme süreci nihai bir seçim üretir. Bu bir eylem ya da bir fikir olabilir. Karar verme problemleri Pareto, Von Neumann, Morgenstern gibi uygulamalı matematikçi ve ekonomistler tarafından 19. yüzyılda modellenmeye başlandı. İlk yaklaşımlar tek kriterli (tek amaçlı) karar problemleri üzerine geliştirildi. Daha sonraları 1951'de iki çalışma grubu (Koopmans ve Kuhn-Tucker) tarafından çok kriterli karar problemleri literatüre kazandırıldı. Bu problemler en iyi alternatifin seçilmesinde, birbiriyle çelişen birden fazla kriterin (amacın) göz önüne alındığı problemlerdir. Çok kriterli karar problemlerinin çözümü genellikle tüm kriterler için optimal çözüm değildir. Karar vericiler bazı amaçlarda kazanmak için bazı amaçlardan belli ölçülerde ödün vermek (*trade-off*) durumundadırlar (Valls, 2003).

Çok kriterli karar verme iki ana alana ayrılır: Çok Amaçlı Karar Verme (Multiple Objective Decision Making) ve Çok Nitelikli Karar Verme (Multiple Attribute Decision Making). Bu iki alan arasındaki temel fark şudur: İlk alan sürekli karar uzaylarında çok amaçlı matematik programlama problemlerine, ikinci alan ise sonlu bir karar uzayının göz önüne alındığı karar problemlerine odaklanır (Zimmermann, 1993; Valls, 2003). Bu çalışmada çok nitelikli karar verme problemleri üzerinde durulacaktır.

Geleneksel çok kriterli karar verme, belirlilik (certainty) altında kararlarla ilgilenir. Yani gerekli parametre ve değerler kesin bir şekilde bilinir. Daha sonraları çok kriterli karar verme üzerine çalışanlar, belirli olmayan bilgiyi ele alabilen metotlar geliştirme ihtiyacının farkına vardılar. Böylece risk altında kararı, açık bir şekilde ifade edilememe (vagueness) anlamındaki belirsizlik (uncertainty) altında karardan ayırmak gerekir. Risk altında karar vermede bilgi eksikliği, durumların oluşmasıyla ilgilidir. Bu problemler genellikle Stokastik Programlama veya Bayesian Analizi ile ele alınır, çünkü durumların oluşma olasılıkları bilinmektedir. Diğer taraftan, bileşenleri hakikaten açık bir şekilde ifade edilemeyen, yani belirsiz diyebileceğimiz durumlar olabilir. Özellikle belirsizliğin yönetimi, alternatiflerin kriterlere göre değerlendirmesinde ve kriterlerin göreceli önemini (ağırlıklarını) tayin etmede önem kazanır. Bu tezde, riskli durumlardan ziyade, açık bir şekilde ifade edilememe (vagueness) olarak belirsizlikle ilgilenilecektir. Bu belirsizlik farklı nedenlerden dolayı ortaya çıkabilir. Bunlar:

- Sayısal olmayan bilgi: Bazı özellikler sayılarla değil de sözlerle tanımlanabilir. Bir

araba rahatlık kriterine göre değerlendirilirken *iyi*, *orta* ya da *zayıf* gibi sözel (linguistik) terimler kullanılır. Kriterlerin bu tipine kalitatif kriter denir.

- Tam olmayan bilgi: Bazı ölçümleri kesin sayısal bir değerle ifade etmek güçtür. Bunun nedeni ölçüm aletlerinin yeterince duyarlı olmamasıdır. Örnek olarak bir aracın hızını ölçen aletin hassas çalışmaması verilebilir.
- Elde edilemeyen bilgi: Bir ölçümde kullanılan metot karmaşık olabilir ve bu durumda değerleri elde etmek çok zaman alır. Böyle durumlarda yaklaşık değerler kullanılır.
- Kısmen göz ardı etme: Verileri sağlayan karar vericiler, tüm alternatifler için tüm kriterlerin tam detaylarını, her zaman bilemeyebilirler. Bazı kriterler veya bazı alternatiflerle ilgili bu doğal ihmal, karar prosesinde kesin olmayan bir sonuç ortaya çıkarır (Valls, 2003).

Tam veya kesin bilginin olmadığı kararsız bir durumda karmaşık bir problemi modellemek oldukça güçtür. Zadeh'e göre, gerçek dünya problemleri ne kadar yakından incelenirse çözüm o kadar bulanıklaşır (Ayyıldız, 2003). Bu tür problemleri çözmek için bulanık küme teorisi iyi bir araçtır.

Klasik küme teorisinde, bir x elemanı bir A kümesine ya aittir ya da ait değildir. Buna karşılık, bulanık küme teorisinde bir elemanın, bir kümeye *aitlik (üyelik) derecesi* vardır, yani bir eleman bir kümeye belli derecede aittir. Bir elemanın bir kümeye üyelik derecesi ne kadar yüksekse, bu eleman bu kümenin karakteristik özelliğiyle o kadar eşleşir (Vanegas ve Labib, 2001).

Bulanık küme teorisini karar verme problemlerine ilk kez 1970'de Bellman ve Zadeh uygulamıştır. Bunun ardından, 1978'de Orlovsky, 1980 ve 1984'de Tong ve Bonisonne, 1981'de Yager, 1986'da Kacprzyk, 1990'da Kacprzyk ve Fedrizzi, 1992'de Chen ve Hwang gibi araştırmacılar karar verme problemlerini bulanık küme teorisi yardımıyla modellemişlerdir (Huynh ve Nakamori, 2005).

Bulanık çok nitelikli karar verme için skarlama teknikleri kullanıldığında, çözüm birleştirme operatörleri ile yapılır. Bu tür problemlerde alternatiflerin birçok kritere göre, uzmanlar tarafından yapılmış değerlendirmelerini temsil eden değerler bir skor tablosunda bir araya getirilir. Mevcut kriterler göz önüne alınarak, her bir alternatif için genel bir skor değeri elde etme amacıyla birleştirme operatörleri kullanılır. Daha sonra genel skorlar bir karara ulaşmak üzere değerlendirilir (Marichal, 1999).

Birleştirme operatörü, bir sayı kümesini tek bir temsilciye veya anlamlı bir sayıya indirgeyen bir fonksiyondur. Birleştirme operatörü, elemanları belli bir kümeden alınan n bileşenli bir vektörü, bu kümeden bir elemana götürür. Elde edilen bu değer bir tür ortalama değerdir. Değerler sayısal veya sözel bir skalaya ait olabilir. Çok nitelikli karar verme tekniklerinin çoğunda bir birleştirme adımı vardır. Ancak birleştirilecek değerler (örneğin skorlar, tatmin dereceleri veya tercihler) yöntemden yönteme farklılık gösterebilir (Marichal, 1999).

Literatürde birçok birleştirme operatörü mevcuttur. Ortalama kavramı ve çoğu ortalamanın (medyan, aritmetik ortalama, geometrik ortalama, harmonik ortalama ve kök-kuvvet ortalaması) özellikleri 19. yüzyılda tanımlanmaya başlandı.

Cauchy 1821'de n bağımsız değişkenin ortalaması olarak,

$$\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq M(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1.1)$$

eşitsizliğini sağlayan $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunu verdi. Bu fonksiyon literatürde *dengeleyici (compensatory) fonksiyon* olarak bilinir.

Chisini 1929'da ortalama kavramını bir *nümerik eşitleyici (numeric equalizer)* olarak şu şekilde tanımlamıştır: $y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, homojen miktarları temsil eden n bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olsun. Eğer her bir değişkenin yerine fonksiyonda bir m sayısı yazıldığında fonksiyonun değeri değişmiyorsa, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sayılarının g fonksiyonuna göre ortalaması m sayısıdır, yani $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(m, m, \dots, m) = m$ 'dir.

Ricci 1915'te dengeleme özelliğini sağlamayan bir örnekle, Chisini'nin görüşüne bir eleştiri getirdi.

Şöyle ki; $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(m, m, \dots, m) = m$ eşitliğini sağlayan

$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n + (x_n - x_1) + (x_n - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})$ fonksiyonunda $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} < x_n$ alındığında,

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n + (x_n - x_1) + (x_n - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) > x_n = \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

olur ve dolayısıyla dengeleme özelliği sağlanmaz.

1930'da Kolmogoroff ve yine 1930'da Nagumo, ortalama kavramını *Cauchy ortalamasından* ya da Chisini'nin *nümerik eşitleyici* tanımından çok daha detaylı olarak tanımlamışlardır. Bu

çalışmalarda yazarlar *bir ortalama değer* kavramını, sürekli, simetrik, her bir değişkenine göre kuvvetli artan reel fonksiyonların sonsuz dizisi

$M^{(1)}(x_1) = x_1, M^{(2)}(x_1, x_2), \dots, M^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olarak tanımlamıştır. Bu dizi $\forall x$ ve $\forall n$ için $M^{(n)}(x, x, \dots, x) = x$ idempotentlik özelliğini, ayrıca $\forall k \leq n$ tamsayısı için belli bir tür birleşme özelliği

$$M^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = x \Rightarrow M^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_k, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}_{k \text{ tane}}) = M^{(n)}(x, x, \dots, x, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

ni sağlamalıdır.

Bir başka ortalama tanımı, 1995'te Grabisch tarafından verildi. Grabisch'e göre bir ortalama operatörü simetrik, artan ve idempotent bir reel fonksiyondur. Sonuç olarak, ortalama değer birleştirilen değerlerin minimumu ile maksimumu arasında kalır (Marichal, 1999).

Birleştirme operatörlerinin bir sınıfı olan *Aritmetik benzeri ortalamalar* (*quasi-arithmetic means*), 1930'da Kolmogoroff ve yine 1930'da Nagumo tarafından karakterize edildi. Genel olarak, f sürekli ve monoton bir fonksiyon olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right)$$

şeklinde tanımlanan operatöre *aritmetik benzeri ortalama operatörü* denir. Aritmetik, geometrik, harmonik ve kuadratik ortalamalar bu sınıfa dâhildir (Fodor vd., 1995).

Karar vericiler karar alırken kötümser (pessimistic), iyimser (optimistic) ya da nötr bir davranış sergileyebilirler. Bu davranış şekilleri sırasıyla *bulanık kesişim* (*üçgensel norm* veya kısaca *t-norm*), *bulanık birleşim* (*üçgensel konorm* veya kısaca *t-konorm*) ve *bulanık ortalama* operatörleriyle karara yansıtılır.

Üçgensel norm operatörleri, probabilistik metrik uzaylarında uzaklığı modellemek için, 1942'de Menger tarafından tanımlandı. Ardından 1963'de, Schweizer ve Sklar tarafından bu operatörlerin aksiyomatik tanımı verildi. 1980'de Alsina, Trillas ve Valverde *t-norm* operatörleri ve bunların dual notasyonu olan *t-konorm* operatörlerini bulanık mantıktaki ve veya bağlaçlarını modellemek için kullandılar. Bundan sonra, bu operatörler oyun teorisi, bulanık küme teorisi, karar analizi ve yapay zekâ dâhil olmak üzere birçok matematiksel disipline uygulandı (Jenei, 2001; Bedregal ve Takahashi, 2005).

Nümerik bilginin birleştirilmesinde en çok bilinen ve yaygın olarak kullanılan birleştirme

operatörü ağırlıklı aritmetik ortalamadır. Ağırlıklı aritmetik ortalama operatörü ilk kez Aczel tarafından 1984 yılında karakterize edildi. Bu operatörler verilen değerlerin lineer kombinezonunu hesaplar. Bu hesaplama yapılırken, değerlerin alındığı kaynakların önemini ya da güvenilirliğini temsil eden ağırlıklar kümesi kullanılır. Bu operatör bilgi kaynakları birbirinden bağımsız olduğunda, yani kaynaklar arasında etkileşim olmadığında iyi sonuçlar verir. Böyle bir etkileşimin varlığında, birleştirme işleminde *bulanık integralleri* kullanmak daha uygundur (Godo ve Torra, 2000). *Choquet ve Sugeno İntegralleri*, bulanık integrallerin iki temel sınıfıdır. Bu sınıflarda ağırlıklar, kaynaklar arasındaki etkileşimi biçimlendirmeye olanak sağlayan *bulanık metrikler* ile hesaplanır (Marichal, 2004). Bu sayede gereksiz (*redundant*) kaynakların etkilerinin azaltılması sağlanır. Bulanık metrik ve bulanık integral kavramları 1974 yılında Sugeno tarafından tanımlandı (Grabisch ve Roubens, 2000).

1988 yılında yaptığı çalışmasıyla R. R. Yager, *OWA operatörlerini* literatüre kazandırdı. OWA operatörleri, sıralı değerlerin ağırlıklı aritmetik ortalamasını hesaplar, yani azalan sırada dizilmiş puanların bulunduğu pozisyonlara ağırlık atayarak birleştirme yapar. Dolayısıyla ağırlıklar, belirli bir bileşene değil belirli bir pozisyona aittir. Tanımlandığı yıldan itibaren bu operatörler sinir ağları, bilgi tabanlı sistemler, bulanık mantık kontrolörleri ve grup karar verme gibi birçok alana uygulandı. Bu operatörlerin en temel özelliği, *t-norm* ve *t-konorm* operatörleri arasında bir köprü kurarak, karar davranışını şekillendirmesidir. Çok kriterli karar problemlerinde karar vericiler birleştirme tipinin, ne *t-norm* ile tam bir *ve'leme* ne de *t-konorm* ile tam bir *veya'lama* olmasını ister. Birçok durumda birleştirme operatörünün bu iki sınır durum arasında bir yerde olması istenir. OWA operatörleri, *ve'leme* veya *veya'lama* derecesini ayarlamamıza imkân sağlar (Yager, 1988). Dengeleyici olması nedeniyle bir ortalama operatörü olan OWA operatörü, kriterler arasındaki etkileşimi biçimlendirme özelliğiyle aynı zamanda da bir bulanık integraldir.

Bazı çok kriterli karar problemlerinde karar vericiler, iyi bir alternatifin sağlaması gereken kriter sayısını ya da oranını belirtir. Kriterlerin sağlanma miktarları *tümü* ile *en az biri* arasında *en çoğu*, *birçoğu*, *en az yarısı*, *dörtten fazlası* vb. olabilir. Böyle bir durumda Zadeh'in 1983'te tanımladığı bulanık mantık tabanlı *dilsel niceleyiciler (linguistic quantifiers)* ile OWA ağırlıkları hesaplanır. Bu sayede *risk üstlenen*, *riskten kaçınan* ve *riske nötr* gibi karar davranışları da incelenebilir (Yager, 1988; 2004).

Çalışmamızın bundan sonraki kısımlarında literatürdeki mevcut birleştirme operatörleri, onların özellikleri ve çok nitelikli karar problemlerine bazı uygulamaları ele alınacaktır.

2. BULANIK KÜMELER—TEMEL TANIMLAR

Klasik ikili mantığa göre bir insan, ya kısa ya da uzun boyludur. Klasik mantığın bir genişlemesi olan çok değerli bulanık mantığa göre ise insanlar, belli derecede uzun boyludur. Önergelerin doğrulukları açısından bakıldığında, klasik mantıkta bir önermenin ya doğru ya da yanlış olduğu kabul edilir. Yani önermelerin doğruluk değeri ya 0 ya da 1'dir. Bulanık mantıkta ise önermeler doğru, yanlış, yaklaşık olarak doğru, yaklaşık olarak yanlış vb. olabilir. Yani önermenin doğruluk değeri, $[0,1]$ aralığına ait bir reel sayıdır.

Bulanık analiz, belirsiz olan veya kesinlik içermeyen değişkenler, deyimler ve değerlendirmelerin temsili için matematiksel bir yoldur (Vanegas ve Labib, 2001). Düşünme ve akıl yürütme gibi insan algısına dayalı süreçlerdeki belirsizlikleri korumak için bulanık mantık iyi bir araçtır (Fullér, 1996).

2.1 Bulanık Kümeler ve Üyelik Dereceleri

Bulanık küme kavramı ilk olarak Lütü A. Zadeh tarafından 1965'de ortaya atılmıştır. Bulanık küme kuramı, belirsizlik ifade eden kavramlara belirlilik getirme ihtiyacından doğmuştur. Bulanık kümeler klasik kümelerin genelleştirilmiş şeklidir. Klasik küme teorisinde, bir x elemanı, bir A kümesine ya aittir ya da ait değildir. Buna karşılık, bulanık küme teorisinde bir elemanın, bir kümeye *aitlik (üyelik) derecesi* vardır, yani bir eleman bir kümeye belli derecede aittir. Bir elemanın bir kümeye üyelik derecesi ne kadar yüksekse, bu eleman bu kümenin karakteristik özelliğiyle o kadar eşleşir. Eğer üyelik derecesi 0 ise, eleman kümeye ait değildir. Benzer şekilde üyelik derecesi 1 ise, eleman kümeye aittir (Vanegas ve Labib, 2001).

Bir x elemanının bir A kümesine üyelik derecesi, $\mu_A(x)$ ile gösterilecektir. $[0,1]$ aralığında bir değer olan üyelik derecesi, *üyelik fonksiyonu (karakteristik fonksiyon)* adı verilen bir fonksiyon yardımıyla hesaplanır.

Klasik kümelerin üyelik fonksiyonları, $\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$ şeklindedir.

Tanım 2.1: X evrensel küme ve $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu olmak üzere, $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ ile tanımlanan $\tilde{A}$ kümesi *bulanık küme* adını alır.

$X \subseteq \mathbb{R}$ ise $\tilde{A}$ bulanık kümesine, *bulanık çokluk (fuzzy quantity)* denir (Fullér, 1996).

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için x_i elemanının üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ olmak üzere, sonlu evrensel küme

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ üzerinde bulanık $\tilde{A}$ kümesi

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}$$

notasyonu ile gösterilebilir. Bu notasyonda verilen toplama ve bölme işlemleri adi toplama ve bölme değildir, sadece gösteriliş için kullanılmıştır.

X evrensel kümesi sonsuz elemanlı olduğunda ise bulanık $\tilde{A}$ kümesi,

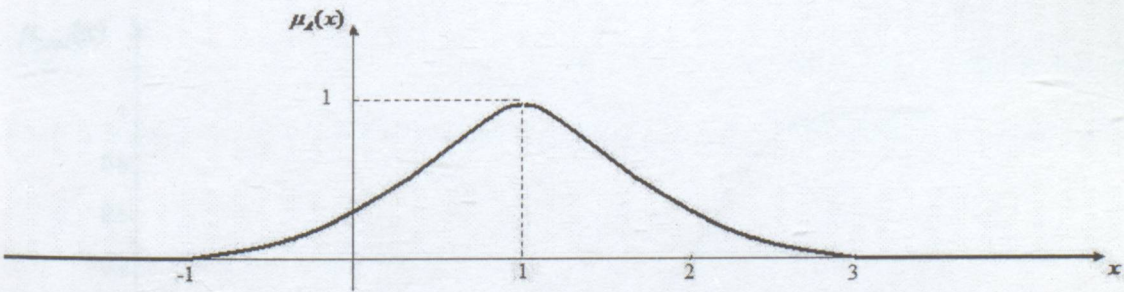
$$\tilde{A} = \int_X \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

notasyonu ile gösterilebilir.

Örnek 2.1: $\tilde{A} = "1'e \text{ yakın tam sayılar}"$ ise $\tilde{A} = \{(-1, 0.3), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.6), (3, 0.3)\}$ ile verilebilir (Fullér, 1996).

Kolaylık açısından, üyeliği 0 olan elemanlar gösterilmez.

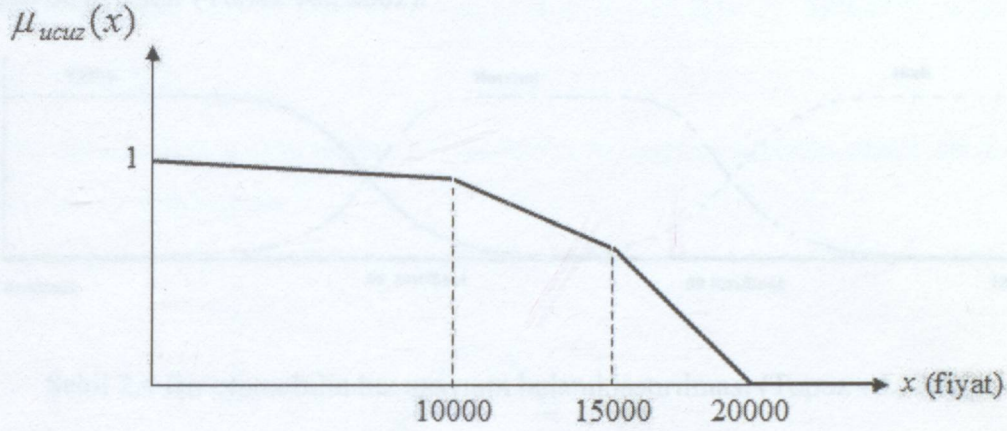
Örnek 2.2: $\tilde{A} = "1'e \text{ yakın reel sayılar}"$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu Şekil 2.1'deki eğri ile verilebilir (Fullér, 1996).



Şekil 2.1 1'e yakın reel sayılar kümesine ait üyelik fonksiyonu (Fullér, 1996).

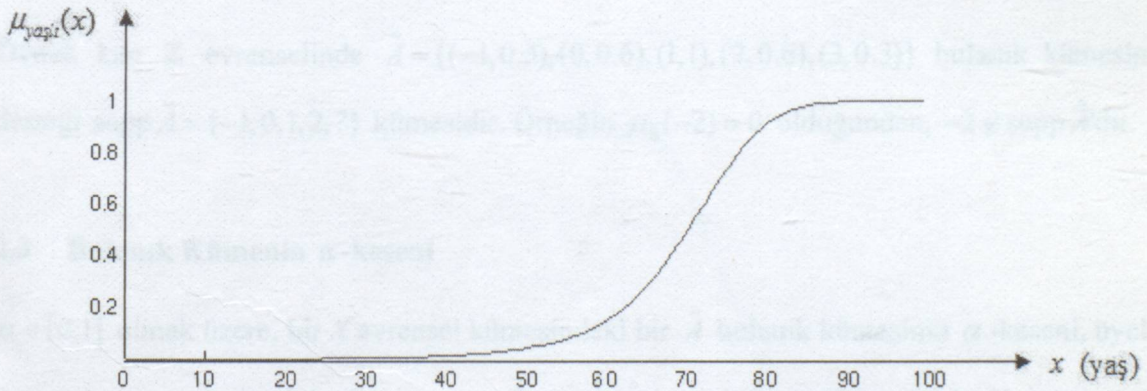
Örnek 2.3: Ucuz bir araba satın almak isteyen bir kişi, 10000 para birimi ve altındaki fiyatları ucuz olarak değerlendirmektedir. 10000 para biriminin altındaki fiyatlar, bu kişiye göre çok

farklı değildir. 10000 ve 15000 para birimi arasındaki fiyatlarda, fiyatı arttıkça arabanın tercih edilme olasılığı doğrusal olarak zayıfça azalmaktadır. 15000 ve 20000 para birimi arasındaki fiyatlarda ise arabanın tercih edilme olasılığı doğrusal olarak kuvvetlice azalmaktadır. 20000 para birimi ve üzerindeki fiyatlar ise çok yüksektir ve bu fiyatlardaki arabalar tercih edilmemektedir. O halde, arabalar için bulanık *ucuz* fiyatlar kümesinin üyelik fonksiyonu Şekil 2.2'deki gibidir.



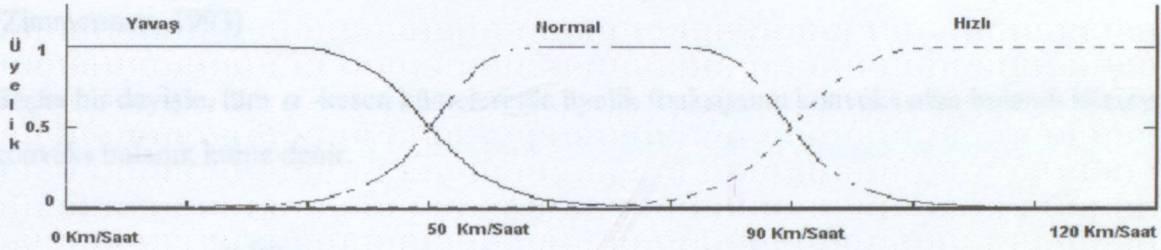
Şekil 2.2 Arabalar için bulanık *ucuz* fiyatlar kümesinin üyelik fonksiyonu.

Örnek 2.4: 40 yaş üzerindeki bir kişinin *yaşlı* olarak nitelendirildiğini kabul edelim. x apsisi kişinin yaşını belirtmek üzere, Şekil 2.3'te verilen üyelik fonksiyonu ile bir kişinin ne derece *yaşlı* olduğu belirlenebilir.



Şekil 2.3 Yaşlı kümesinin üyelik fonksiyonu.

Örnek 2.5: Bir otomobilin otoyol üzerinde yapabileceği hızın, 0 ile 120 km/saat arasında olabileceğini varsayalım. Bu hız uzayını *Yavaş* (0 ile 40 km/saat), *Normal Hızda* (60 ile 80 km/saat) ve *Hızlı* (100 ile 120 Km/saat) olarak üç ayrı kümeye ayıralım. Bu otoyolda 70 km/saat hızında giden bir otomobil, *Normal* kümesine; 90 km/saat hızında giden bir otomobil ise belli bir üyelik derecesinde *Normal* ve belli bir üyelik derecesinde *Hızlı* kümesine girer. Bu örneğe göre otomobil, $\mu_{Hızlı}(90) = 0.5$ ve $\mu_{Normal}(90) = 0.5$ üyelik değerlerinde, her iki kümenin de üyesidir (Topuz vd., 2002).



Şekil 2.4 Bir otomobilin hız uzayının bulanıklaştırılması (Topuz vd., 2002).

2.2 Bulanık Kümenin Desteği

Bir X evrensel kümesindeki bir $\tilde{A}$ bulanık kümesinin desteği, $\tilde{A}$ kümesinin üyelik derecesi pozitif, bir başka deyişle üyelik derecesi 0 olmayan tüm elemanlarını içeren kesin (*crisp*) bir kümedir ve $\text{supp } \tilde{A}$ ile gösterilir (Zimmerman, 1993).

$$\text{supp } \tilde{A} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (2.1)$$

Örnek 2.6: $\mathbb{Z}$ evrenselinde $\tilde{A} = \{(-1, 0.3), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.6), (3, 0.3)\}$ bulanık kümesinin desteği $\text{supp } \tilde{A} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesidir. Örneğin $\mu_{\tilde{A}}(-2) = 0$ olduğundan, $-2 \notin \text{supp } \tilde{A}$ 'dır.

2.3 Bulanık Kümenin α -keseni

$\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere, bir X evrensel kümesindeki bir $\tilde{A}$ bulanık kümesinin α -keseni, üyelik derecesi α sayısından büyük veya eşit olan tüm $\tilde{A}$ elemanlarını içeren kesin bir kümedir ve $\tilde{A}_{\alpha}$ ile gösterilir (Zimmerman, 1993).

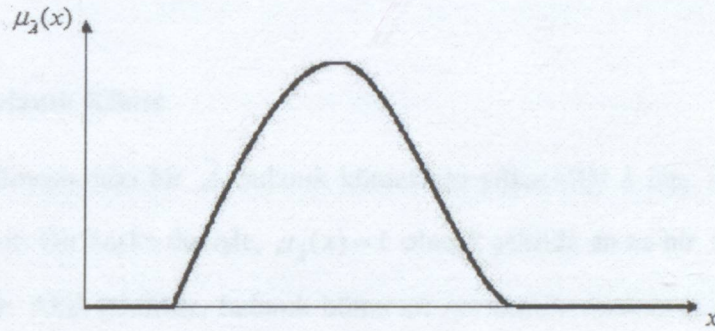
$$\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad (2.2)$$

Örnek 2.7: $\tilde{A} = \{(-1, 0.3), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.6), (3, 0.3)\}$ bulanık kümesinin bazı α -kesenleri şöyledir: $\tilde{A}_{0.3} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $\tilde{A}_{0.5} = \{0, 1, 2\}$, $\tilde{A}_{0.6} = \{0, 1, 2\}$, $\tilde{A}_{0.8} = \{1\}$

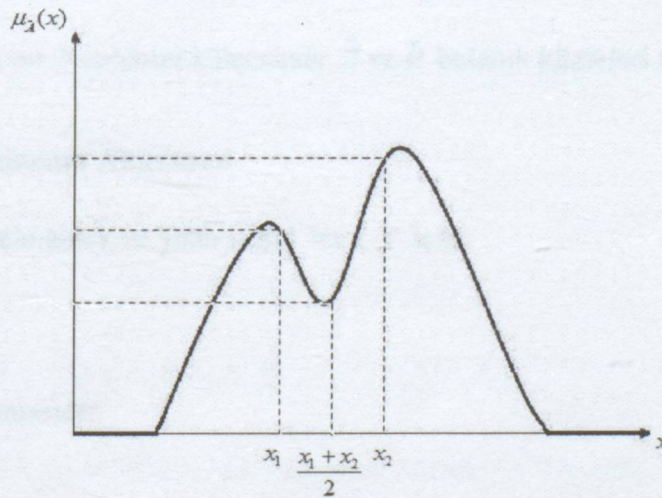
2.4 Konveks Bulanık Küme

$x_1, x_2 \in X$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere, bir X evrensel kümesindeki bir $\tilde{A}$ bulanık kümesinin konveks olabilmesi için $\mu_{\tilde{A}}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ eşitsizliği sağlanmalıdır (Zimmerman, 1993).

Başka bir deyişle, tüm α -kesen kümelerinde üyelik fonksiyonu konveks olan bulanık kümeye konveks bulanık küme denir.



Şekil 2.5 Konveks bulanık küme (Zimmerman, 1993).



Şekil 2.6 Konveks olmayan bulanık küme (Zimmerman, 1993).

2.5 Bulanık Kümenin Yüksekliği

Bir X evrensel kümesindeki bir $\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği, $\mu_{\tilde{A}}$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değerdir. Başka bir deyişle, $\mu_{\tilde{A}}$ fonksiyonunun üst sınırlarının en küçüğüne $\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği denir. $\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliğini $h_{\tilde{A}}$ ile gösterelim. O halde,

$$h_{\tilde{A}} = \sup_X \mu_{\tilde{A}}(x)$$

olur.

Örnek 2.8: $\tilde{A} = \{(a, 0), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0.7), (e, 0.6), (f, 0.2)\}$ bulanık kümesinin yüksekliği $h_{\tilde{A}} = 0.7$ 'dir.

2.6 Normal Bulanık Küme

Bir X evrensel kümesindeki bir $\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği 1 ise, $\tilde{A}$ kümesine *normal bulanık küme* denir. Bir başka deyişle, $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ mevcut ise $\tilde{A}$ kümesi *normaldir*. Aksi takdirde, bulanık küme *alt normaldir* (*subnormal*). Boş olmayan alt normal bulanık kümeye ait üyelik dereceleri kümenin yüksekliğine bölünürse, küme normalize edilmiş olur.*

2.7 Teorik Bulanık Küme İşlemleri (Zimmerman, 1993)

Boş kümeden farklı bir X evrensel kümesinde $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümeleri tanımlanmış olsun.

2.7.1 Bulanık Kümenin Altkümesi

$\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall x \in X$ için

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (2.3)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

* $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ ise $\tilde{A}$ bulanık kümesi boşdur.

Örnek 2.9: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere,

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right\} \text{ ve } \tilde{B} = \left\{ \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right\} \text{ bulanık kümeleri için (2.3) eşitsizliği}$$

sağlandığından $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ olur.

2.7.2 Bulanık Kümenin Tümleyeni

Klasik mantıkta *değilleme* (önermenin tümleyenini alma), karşıt anlamlı olmaya karşılık gelir. Yani doğru olmayan bir önerme yanlıştır. Bulanık mantıkta ise doğru olmayan bir önermenin tamamıyla yanlış olduğu söylenemez.

Bulanık $\tilde{A}$ kümesinin tümleyeni olan bulanık küme $\bar{\tilde{A}}$ ile gösterilir. $x \in X$ olmak üzere, tümleyen kümenin üyelik fonksiyonu $\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.10: Evrensel küme $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere,

$$\tilde{A} = \{(-1, 0.3), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.6), (3, 0.3)\} \text{ bulanık kümesinin tümleyeni olan küme,}$$

$$\bar{\tilde{A}} = \{(-3, 1), (-2, 1), (-1, 0.7), (0, 0.4), (2, 0.4), (3, 0.7), (4, 1), (5, 1)\} \text{ bulanık kümesidir.}$$

2.7.3 İki Bulanık Kümenin Kesişimi

$x \in X$ olmak üzere, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin kesişimi olan $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.11: Evrensel küme $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, bulanık $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümeleri şu şekilde verilsin.

$$\tilde{A} = \{(-1, 0.3), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.6), (3, 0.3)\}$$

$$\tilde{B} = \{(-3, 0.1), (-2, 0.1), (-1, 0.4), (0, 0.5), (1, 0.6), (2, 0.7)\}$$

Bu durumda $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(-1, 0.3), (0, 0.5), (1, 0.6), (2, 0.6)\}$ olur.

Örnek 2.12: $X = \{\text{Ali, Cem, Hasan, Kemal}\}$ olmak üzere, $\tilde{A}$ yakışıklı erkeklerin kümesi, $\tilde{B}$ zeki erkeklerin kümesi olsun.

$$\tilde{A} = \frac{0.7}{\text{Ali}} + \frac{0.8}{\text{Cem}} + \frac{0.3}{\text{Hasan}} + \frac{0.4}{\text{Kemal}}$$

$$\tilde{B} = \frac{0.1}{\text{Ali}} + \frac{0.3}{\text{Cem}} + \frac{0.7}{\text{Hasan}} + \frac{0.4}{\text{Kemal}}$$

Bu durumda zeki ve yakışıklı erkeklerin kümesi $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \frac{0.1}{\text{Ali}} + \frac{0.3}{\text{Cem}} + \frac{0.3}{\text{Hasan}} + \frac{0.4}{\text{Kemal}}$ olur (Atin, 1999).

2.7.4 İki Bulanık Kümenin Birleşimi

$x \in X$ olmak üzere, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin birleşimi olan $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.13: Evrensel küme $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, Örnek 2.11'de verilen bulanık $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümelerini göz önüne alalım.

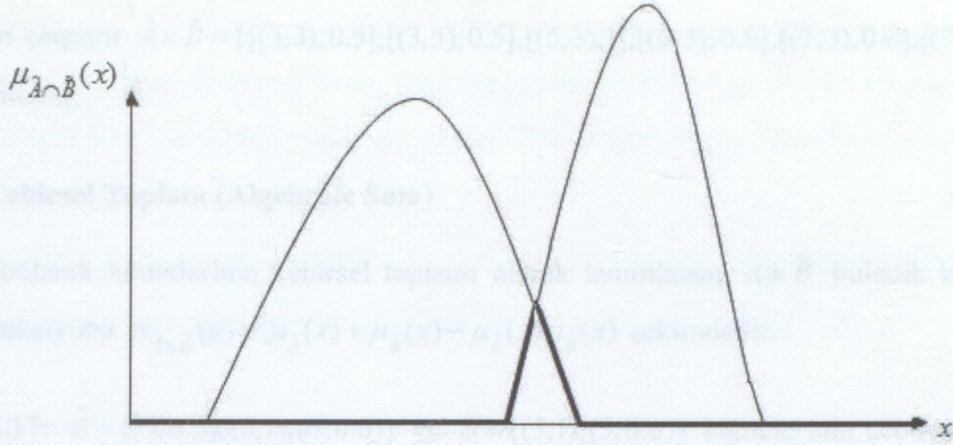
$$\tilde{A} = \{(-1, 0.3), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.6), (3, 0.3)\}$$

$$\tilde{B} = \{(-3, 0.1), (-2, 0.1), (-1, 0.4), (0, 0.5), (1, 0.6), (2, 0.7)\}$$

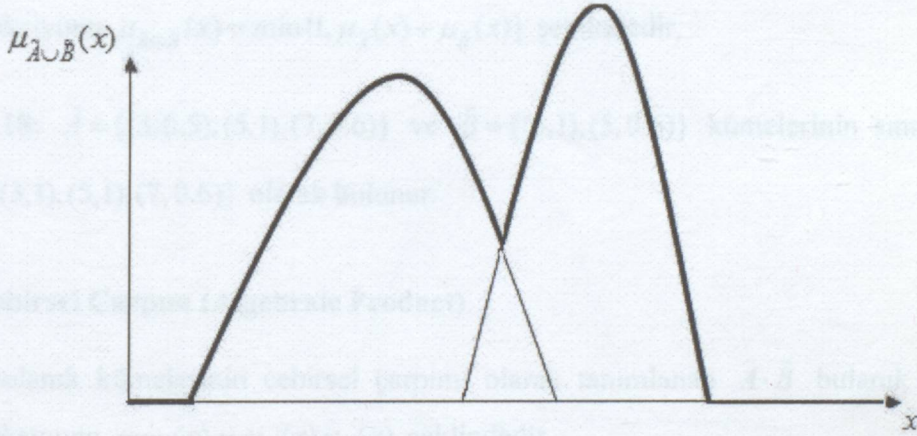
Bu durumda $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(-3, 0.1), (-2, 0.1), (-1, 0.4), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.7), (3, 0.3)\}$ olur.

Örnek 2.14: Örnek 2.12'de verilen bulanık $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümeleri için, zeki veya yakışıklı erkeklerin kümesi $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \frac{0.7}{\text{Ali}} + \frac{0.8}{\text{Cem}} + \frac{0.7}{\text{Hasan}} + \frac{0.4}{\text{Kemal}}$ olur (Atin, 1999).

Örnek 2.15: İki bulanık kümenin kesişimi ve birleşimi olan bulanık kümeler, sırasıyla Şekil 2.7 ve Şekil 2.8'de koyu çizgiler ile belirtilmiştir.



Şekil 2.7 İki bulanık kümenin kesişimi (Zimmermann, 1993).



Şekil 2.8 İki bulanık kümenin birleşimi (Zimmermann, 1993).

2.8 Cebirsel Bulanık Küme İşlemleri (Zimmerman, 1993)

2.8.1 Kartezyen Çarpım (Cartesian Product)

$a \in \tilde{A}$ ve $b \in \tilde{B}$ olmak üzere, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin kartezyen çarpımı olarak tanımlanan $\tilde{A} \times \tilde{B}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A} \times \tilde{B}}((a, b)) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b)\}$ şeklindedir.

Örnek 2.16: $\tilde{A} = \{(3, 0.5), (5, 1), (7, 0.6)\}$ ve $\tilde{B} = \{(3, 1), (5, 0.6)\}$ olmak üzere, bu kümelerin kartezyen çarpımı $\tilde{A} \times \tilde{B} = \{(3, 3), 0.5\}, \{(3, 5), 0.5\}, \{(5, 3), 1\}, \{(5, 5), 0.6\}, \{(7, 3), 0.6\}, \{(7, 5), 0.6\}\}$ olarak bulunur.

2.8.2 Cebirsel Toplam (Algebraic Sum)

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin cebirsel toplamı olarak tanımlanan $\tilde{A} + \tilde{B}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$ şeklindedir.

Örnek 2.17: $\tilde{A} = \{(3, 0.5), (5, 1), (7, 0.6)\}$ ve $\tilde{B} = \{(3, 1), (5, 0.6)\}$ kümelerinin cebirsel toplamı $\tilde{A} + \tilde{B} = \{(3, 1), (5, 1), (7, 0.6)\}$ olarak bulunur.

2.8.3 Sınırlı Toplam (Bounded Sum)

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin sınırlı toplamı olarak tanımlanan $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ şeklindedir.

Örnek 2.18: $\tilde{A} = \{(3, 0.5), (5, 1), (7, 0.6)\}$ ve $\tilde{B} = \{(3, 1), (5, 0.6)\}$ kümelerinin sınırlı toplamı $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(3, 1), (5, 1), (7, 0.6)\}$ olarak bulunur.

2.8.4 Cebirsel Çarpım (Algebraic Product)

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin cebirsel çarpımı olarak tanımlanan $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$ şeklindedir.

Örnek 2.19: $\tilde{A} = \{(3, 0.5), (5, 1), (7, 0.6)\}$ ve $\tilde{B} = \{(3, 1), (5, 0.6)\}$ kümelerinin cebirsel çarpımı $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(3, 0.5), (5, 0.6)\}$ olarak bulunur.

2.8.5 Sınırlı Fark (Bounded Difference)

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin sınırlı farkı olarak tanımlanan $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{B}}(x) = \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1\}$ şeklindedir.

Örnek 2.20: $\tilde{A} = \{(3, 0.5), (5, 1), (7, 0.6)\}$ ve $\tilde{B} = \{(3, 1), (5, 0.6)\}$ kümelerinin sınırlı farkı $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \{(3, 0.5), (5, 0.6)\}$ olarak bulunur.

2.9 Bulanık Sayılar

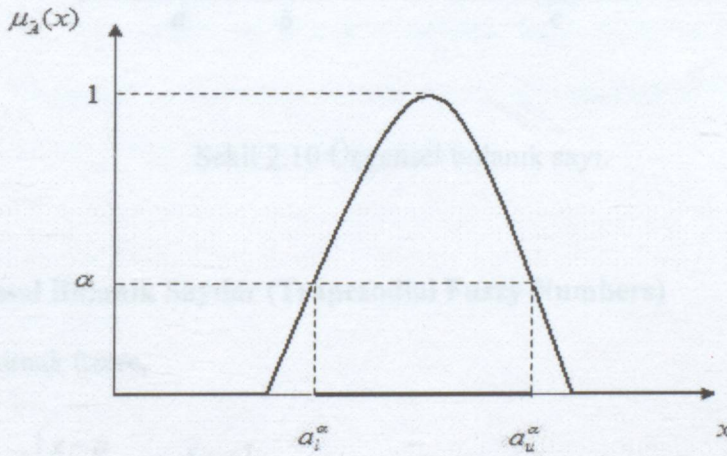
Çoğu zaman sayısal verileri kesin olarak belirtmek mümkün olmayabilir. Örneğin kalabalık bir konser salonundaki dinleyici sayısı hakkında *yaklaşık 1000 kişi, 750 kişiden fazla, 1500 kişiden az* gibi kesin olmayan yorumlar yapılır. Bunlar gibi kesin olmayan sayılara *bulanık sayılar* denir.

Tanım 2.2: Üyelik fonksiyonu parçalı sürekli, normal ve konveks olan reel sayıların bulanık kümesine (bulanık çokluğa) *bulanık sayı* denir (Zimmerman, 1993, Sayfa 57).

2.9.1 Bir Bulanık Sayının Güven Aralığı (Confidence Interval)

$\alpha \in [0,1]$ olmak üzere, üyelik derecesi α sayısından büyük veya eşit olan tüm reel sayıların oluşturduğu aralığa *güven aralığı* (α -keseni) denir.

$$\tilde{A}_\alpha = \{x : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [a_l^\alpha, a_u^\alpha] \quad (2.4)$$



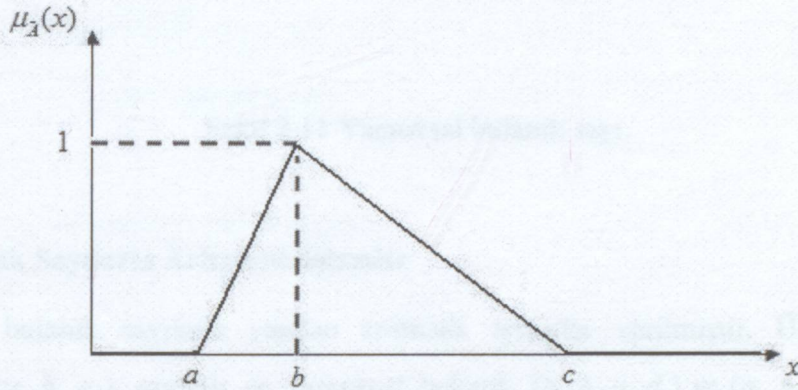
Şekil 2.9 Güven aralığı.

2.9.2 Üçgensel Bulanık Sayılar (Triangular Fuzzy Numbers)

$a < b < c$ olmak üzere,

$$\mu_A(x, a, b, c) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ \frac{c-x}{c-b}, & x \in [b, c] \\ 0, & x \notin [a, c] \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bulanık sayıya *üçgensel bulanık sayı* denir. Üçgensel bulanık sayılar kısaca (a, b, c) sıralı üçlülere ile gösterilir.



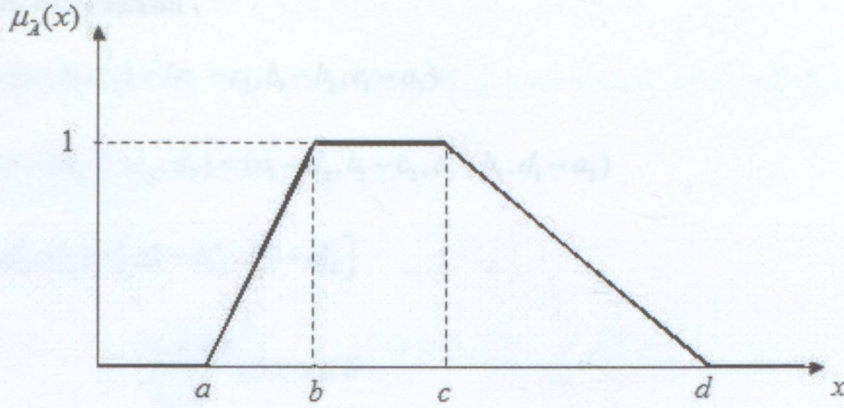
Şekil 2.10 Üçgensel bulanık sayı.

2.9.3 Yamuksal Bulanık Sayılar (Trapezoidal Fuzzy Numbers)

$a < b < c < d$ olmak üzere,

$$\mu_A(x, a, b, c, d) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x \in [b, c] \\ \frac{d-x}{d-b}, & x \in [c, d] \\ 0, & x \notin [a, d] \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bulanık sayıya *yamuksal bulanık sayı* denir. Yamuksal bulanık sayılar kısaca (a, b, c, d) sıralı dörtlülere ile gösterilir.



Şekil 2.11 Yamuksal bulanık sayı.

2.9.4 Bulanık Sayılarla Aritmetik İşlemler

Bu kısımda bulanık sayılarla yapılan aritmetik işlemler verilmiştir. Üçgensel bulanık (a_1, b_1, c_1) ve (a_2, b_2, c_2) sayıları ve yamuksal bulanık (a_1, b_1, c_1, d_1) ve (a_2, b_2, c_2, d_2) sayıları verilmiş olsun. Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar için aşağıda verilecek işlemler, aralık aritmetiği kullanılarak güven aralıkları ile de yapılır.

2.9.4.1 Skaler ile Çarpma

k bir skaler olmak üzere,

$$k \cdot (a_1, b_1, c_1) = (ka_1, kb_1, kc_1) \quad (2.5)$$

$$k \cdot (a_1, b_1, c_1, d_1) = (ka_1, kb_1, kc_1, kd_1) \quad (2.6)$$

$$k \cdot [a_l^\alpha, a_u^\alpha] = [ka_l^\alpha, ka_u^\alpha] \quad (2.7)$$

2.9.4.2 Toplama İşlemi

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \quad (2.8)$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \quad (2.9)$$

$$[a_{l1}^\alpha, a_{u1}^\alpha] + [a_{l2}^\alpha, a_{u2}^\alpha] = [a_{l1}^\alpha + a_{l2}^\alpha, a_{u1}^\alpha + a_{u2}^\alpha] \quad (2.10)$$

2.9.4.3 Çıkarma İşlemi

$$(a_1, b_1, c_1) - (a_2, b_2, c_2) = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2) \quad (2.11)$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) - (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2) \quad (2.12)$$

$$[a_{l1}^\alpha, a_{u1}^\alpha] - [a_{l2}^\alpha, a_{u2}^\alpha] = [a_{l1}^\alpha - a_{u2}^\alpha, a_{u1}^\alpha - a_{l2}^\alpha] \quad (2.13)$$

Örnek 2.21: $(3, 5, 8) = \begin{cases} \frac{x-3}{2}, & 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{8-x}{3}, & 5 \leq x \leq 8 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$

üçgensel bulanık sayısının α güven aralığı

$$[2\alpha + 3, 8 - 3\alpha]$$

ve

$$(2, 7, 10) = \begin{cases} \frac{x-2}{5}, & 2 \leq x \leq 7 \\ \frac{10-x}{3}, & 7 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

üçgensel bulanık sayısının α güven aralığı

$$[5\alpha + 2, 10 - 3\alpha]$$

olduğundan, bu iki üçgensel bulanık sayının toplamı ve farkı, α güven aralığı cinsinden

$$[2\alpha + 3, 8 - 3\alpha] + [5\alpha + 2, 10 - 3\alpha] = [7\alpha + 5, 18 - 6\alpha]$$

ve

$$[2\alpha + 3, 8 - 3\alpha] - [5\alpha + 2, 10 - 3\alpha] = [2\alpha + 3, 8 - 3\alpha] + [3\alpha - 10, -5\alpha - 2] = [5\alpha - 7, 6 - 8\alpha]$$

dır.

2.9.4.4 Çarpma İşlemi

$$[a_{l1}^{\alpha}, a_{u1}^{\alpha}] \times [a_{l2}^{\alpha}, a_{u2}^{\alpha}] = \left[\min\{a_{l1}^{\alpha}a_{l2}^{\alpha}, a_{l1}^{\alpha}a_{u2}^{\alpha}, a_{u1}^{\alpha}a_{l2}^{\alpha}, a_{u1}^{\alpha}a_{u2}^{\alpha}\}, \max\{a_{l1}^{\alpha}a_{l2}^{\alpha}, a_{l1}^{\alpha}a_{u2}^{\alpha}, a_{u1}^{\alpha}a_{l2}^{\alpha}, a_{u1}^{\alpha}a_{u2}^{\alpha}\} \right] \quad (2.14)$$

2.9.4.5 Bölme İşlemi

$a_{l2}^{\alpha}, a_{u2}^{\alpha} \neq 0$ olmak üzere,

$$[a_{l1}^{\alpha}, a_{u1}^{\alpha}] : [a_{l2}^{\alpha}, a_{u2}^{\alpha}] = \left[\min\left\{\frac{a_{l1}^{\alpha}}{a_{l2}^{\alpha}}, \frac{a_{l1}^{\alpha}}{a_{u2}^{\alpha}}, \frac{a_{u1}^{\alpha}}{a_{l2}^{\alpha}}, \frac{a_{u1}^{\alpha}}{a_{u2}^{\alpha}}\right\}, \max\left\{\frac{a_{l1}^{\alpha}}{a_{l2}^{\alpha}}, \frac{a_{l1}^{\alpha}}{a_{u2}^{\alpha}}, \frac{a_{u1}^{\alpha}}{a_{l2}^{\alpha}}, \frac{a_{u1}^{\alpha}}{a_{u2}^{\alpha}}\right\} \right] \quad (2.15)$$

3. BULANIK KARAR VERME (Zimmerman, 1993; Sakawa, 1993)

Karar verme, birçok alternatif arasından beklenti ve gereksinimleri karşılayan, en uygun alternatifi seçmek için düşünme, kavrama, analiz etme ve değerlendirme sürecidir. Her karar verme süreci nihai bir seçim üretir. Bu bir eylem ya da bir fikir olabilir. Klasik karar teorisinde bir karar, karar seçenekleri kümesi (karar uzayı), durumlar uzayı, karar ve durum ikililerini bir sonuca götüren bir bağıntı ve bu sonuçları istenilirliklerine göre sıralayan fayda fonksiyonu ile karakterize edilir. Karar uzayının sınırları kısıtlarla belirlenir.

Gerçek dünyadaki karar problemleri amaçların, kısıtların ve mevcut alternatifleri seçmenin sonuçlarının tam olarak bilinmediği bir çevrede yer alır. Bellman ve Zadeh (1970), gerçek hayat problemlerindeki bu belirsizlikleri sayısal yöntemlerle çözebilmek için bu bakış açısından yola çıkarak üç temel kavram tanımlamıştır: Bulanık amaç, bulanık kısıt ve bulanık karar.

Bulanık karar probleminde X mevcut seçeneklerin kümesi olmak üzere, bir bulanık küme olarak $\tilde{G}$ amacı $\mu_{\tilde{G}} : X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ve $\tilde{C}$ bulanık kısıtı da $\mu_{\tilde{C}} : X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilsin. Bu durumda karar uzayı, bu amacın ve bu kısıtın sağlandığı, bu iki bulanık kümenin kesişimi olan bulanık kümedir.

$x \in X$ olmak üzere, bu bulanık kümenin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{G}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)\}$$

olur.

x^* optimal seçeneği, bulanık kararın maksimizasyonu

$$\mu_{\tilde{D}}(x^*) = \max_{x \in X} \{\min\{\mu_{\tilde{G}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)\}\}$$

ile bulunur.

Örnek 3.1: Amaç fonksiyonu “ x sayısı 10’dan *oldukça* büyük olsun.” olarak verilsin. Bu bulanık amaca ait üyelik fonksiyonu

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, & x > 10 \end{cases}$$

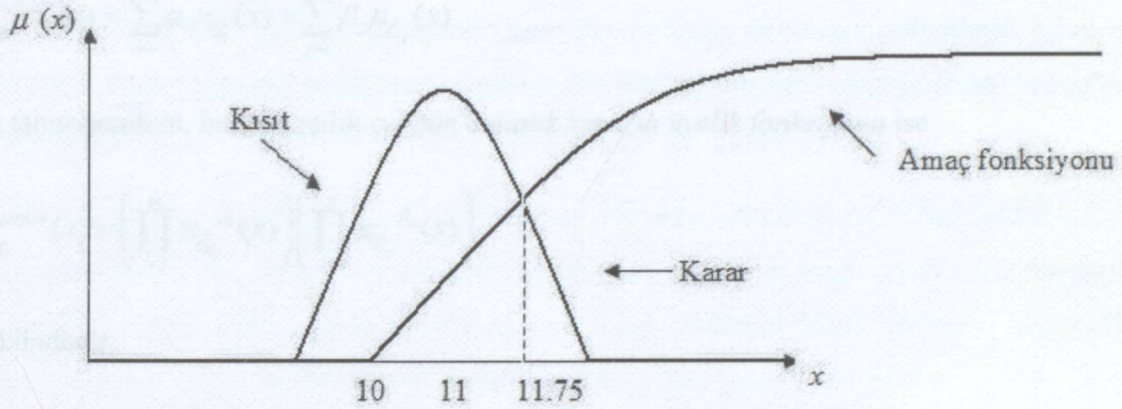
olarak alınabilir.

Bununla beraber, "x sayısı 11 civarında olsun." şeklinde verilen bir kısıt

$$\mu_C(x) = \frac{1}{1+(x-11)^4}$$

üyelik fonksiyonu ile temsil edilebilir.

Bu durumda, bu kısıtı sağlayan ve amacı en iyi şekilde gerçekleyen x sayısı 11.75 olur. Birer bulanık küme olan bulanık kısıt, bulanık amaç ve bulanık karar Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Bulanık karar (Zimmermann, 1993).

Daha genel olarak, amaç ve kısıt sayısı birden fazla ise, yani m amaç ve n kısıt olduğunda ise karar uzayı

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \dots \cap \tilde{G}_m \cap \tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \dots \cap \tilde{C}_n$$

iken, üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{D}} = \min\{\mu_{\tilde{G}_1}, \mu_{\tilde{G}_2}, \dots, \mu_{\tilde{G}_m}, \mu_{\tilde{C}_1}, \mu_{\tilde{C}_2}, \dots, \mu_{\tilde{C}_n}\}$$

olur.

x^* optimal seçeneği, bulanık kararın maksimizasyonu

$$\mu_{\tilde{D}}(x^*) = \max_{x \in X} \left\{ \min\{\mu_{\tilde{G}_1}(x), \mu_{\tilde{G}_2}(x), \dots, \mu_{\tilde{G}_m}(x), \mu_{\tilde{C}_1}(x), \mu_{\tilde{C}_2}(x), \dots, \mu_{\tilde{C}_n}(x)\} \right\}$$

ile bulunur.

Bellman ve Zadeh'in bu yaklaşımında bulanık amaçlarla bulanık kısıtlar arasında fark yoktur. Amaçlar ve kısıtlar *minimum operatörüyle* birleştirilmiştir. Amaçların ve kısıtların farklı öneme sahip olduğu durumlarda farklı birleştirme yolları gereklidir. Bunun için Bellman ve Zadeh (1970) *konveks bulanık karar ve çarpım bulanık karar* kavramlarını tanımlamıştır.

$\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$ eşitliğini sağlayan, amaçların ve kısıtların göreceli önemlerini temsil eden pozitif α_i, β_j ağırlık katsayıları için *konveks bulanık kararın üyelik fonksiyonu*,

$$\mu_{\tilde{D}}^{\text{konveks}}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_{\tilde{G}_i}(x) + \sum_{j=1}^n \beta_j \mu_{\tilde{C}_j}(x)$$

ile tanımlanırken, buna karşılık *çarpım bulanık kararın üyelik fonksiyonu* ise

$$\mu_{\tilde{D}}^{\text{çarpım}}(x) = \left(\prod_{i=1}^m \mu_{\tilde{G}_i}^{\alpha_i}(x) \right) \left(\prod_{j=1}^n \mu_{\tilde{C}_j}^{\beta_j}(x) \right)$$

şeklinde dir.

Benzer şekilde, x^* optimal seçeneği kararın maksimize edilmesiyle bulunur.

$$\mu_{\tilde{D}}^{\text{konveks}}(x^*) = \max_{x \in X} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_{\tilde{G}_i}(x) + \sum_{j=1}^n \beta_j \mu_{\tilde{C}_j}(x) \right\}$$

$$\mu_{\tilde{D}}^{\text{çarpım}}(x^*) = \max_{x \in X} \left\{ \left(\prod_{i=1}^m \mu_{\tilde{G}_i}^{\alpha_i}(x) \right) \left(\prod_{j=1}^n \mu_{\tilde{C}_j}^{\beta_j}(x) \right) \right\}$$

Bu üç bulanık kararın üyelik fonksiyonları arasında $\mu_{\tilde{D}}^{\text{çarpım}}(x) \leq \mu_{\tilde{D}}(x) \leq \mu_{\tilde{D}}^{\text{konveks}}(x)$ bağıntısı vardır (Sakawa, 1993).

4. BİRLEŞTİRME OPERATÖRLERİ (AGGREGATION OPERATORS)

Birleştirme operatörü, bir sayı kümesini tek bir temsilciye veya anlamlı bir sayıya indirgeyen bir fonksiyondur. Birleştirme operatörü, bileşenleri belli bir kümeden alınan n boyutlu bir vektörü, bu kümeden bir elemana götürür. Böylelikle, birçok kaynaktan alınan bilgi parçaları aynı anda kullanılmış olur (Detyniecki, 2001^{*}).

Örneğin bir nesnenin ağırlığı, genişliği veya uzunluğu gibi özellikleri ile ilgili birçok sayısal değerlendirme yapılmış olsun. Ya da bu nesnenin başka bir nesneden ne kadar daha ağır, geniş veya uzun olduğu hakkında birçok oran verilmiş olsun. Bu özelliklerinden birisi ile ilgili ortak veya genel bir görüş elde etmek üzere, bu özelliğe ait sayısal değerlerin aritmetik, geometrik veya harmonik ortalaması alınabilir. Bu gibi bir ortalama alma işlemine birleştirme işlemi denir.

Karar problemlerinde, karar verici ya da karar vericiler, alternatifleri belirli kriterlere göre karşılaştırarak en çok arzu edilen alternatif ya da alternatifleri bulmayı amaçlarlar. Birleştirme operatörleri, karar süreçlerinde önemli bir yer tutar. Örneğin karar vericiler, alternatifleri değerlendirmek için alternatiflere kriterler üzerinden puan verebilirler. Bu puanlar birleştirildiğinde alternatiflerin genel puanları bulunur. Daha sonra bu genel puanlar, bir karara ulaşmak üzere değerlendirilir. Çoğu karar sürecinde bir birleştirme adımı vardır. Ancak birleştirilen değerler, yöntemden yönteme farklılık gösterir. Örneğin birleştirilen değerler, *tercih derecesi* veya *tatmin derecesi* olabilir. Tercih derecesi, bir adayın başka bir adaya ne derece tercih edilebileceğinin göreceli değeridir. Tatmin derecesi ise bir adayın bir kriteri ne derece sağladığının kesin değeridir. Tercih veya tatmin derece değerleri $[0,1]$ aralığındadır (Marichal, 1999).

Değerlendirmeler sayısal bir ölçekten olduğu kadar, sayısal olmayan bir ölçekten de seçilebilir. $\{Kötü, Orta, İyi\}$ ve $\{Uygun Değil, Kabul Edilebilir, Ortalama, İyi, Mükemmel\}$ ölçekleri dilsel ölçeklere örnek olarak verilebilir (Grabisch vd., 1998).

Boş olmayan, sonlu $B = \{a, b, c, \dots\}$ kümesi, karar verici ya da karar vericilerin, aralarından birini ya da birkaçını seçmek zorunda olduğu alternatifler veya eylemler kümesi olsun. Kriter kümesi $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ olmak üzere, a adayının C_i kriterini sağlama derecesinin C_i^a

^{*} <http://www.spatial.maine.edu/~worboys/SIE565/papers/aggregation%20operators.pdf>

olduğunu varsayalım. Bu durumda, A bir birleştirme operatörü olmak üzere, a adayının genel puanı $A(C_1^a, C_2^a, \dots, C_n^a)$ ile hesaplanır. Tüm adaylar için genel puanlar hesaplandıktan sonra bu puanlar, alternatifleri sıralamak ya da verilen kriterleri en iyi şekilde sağlayan alternatifi seçmek için kullanılabilir. Örneğin, a^* optimal alternatifi

$$A(C_1^{a^*}, C_2^{a^*}, \dots, C_n^{a^*}) = \max\{A(C_1^a, C_2^a, \dots, C_n^a), A(C_1^b, C_2^b, \dots, C_n^b), \dots\}$$

ile seçilebilir.

Çizelge 4.1 Çok kriterli karar probleminin matris temsili (Marichal, 1999).

Alternatifler	Kriter 1	Kriter 2	...	Kriter n	Genel Puan
a	C_1^a	C_2^a	...	C_n^a	$A(C_1^a, C_2^a, \dots, C_n^a)$
b	C_1^b	C_2^b	...	C_n^b	$A(C_1^b, C_2^b, \dots, C_n^b)$
$\vdots$					

Tanım 4.1: E ve F herhangi iki reel aralık olmak üzere, A fonksiyonu

$$A : E^n \rightarrow F, A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$$

şeklinde tanımlanıyorsa *birleştirme operatörü* adını alır.

Böylece A fonksiyonu, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sayı kümesini tek bir x sayısına dönüştürmüştür. Eğer anlamlı veya tatmin edici bir birleştirme elde etmek isteniliyorsa herhangi bir birleştirme fonksiyonu kullanılmamalıdır. Örneğin bir öğrencinin yılsonu notu, yıl içinde aldığı en yüksek nottan daha yüksek veya en düşük nottan daha düşük olmamalıdır. Ya da oylama işlemlerinde kullanılacak birleştirme operatörü, seçiciler isimsiz olduklarından simetrik olmalıdır. İstenmeyen fonksiyonları elemek için aksiyomatik bir yaklaşım benimsenmelidir, yani birleştirme fonksiyonunun bazı özellikleri tamamen sağlaması gerekmektedir (Marichal, 1999).

Bir sonraki bölümde, bir birleştirme operatörünün anlamlı sonuçlar vermesi için sağlaması gereken bazı aksiyomatik özellikler ele alınmıştır. Bu özellikler iki ana başlıkta incelenmiştir. İlk olarak matematiksel özellikler, ikinci olarak ise davranışsal özellikler verilmiştir.

4.1 Birleştirme Operatörlerinin Özellikleri (Marichal, 1999; Grabisch vd., 1998; Detyniecki, 2001*)

4.1.1 Matematiksel Özellikler

4.1.1.1 Sınır Koşulları (Zayıf İdempotentlik)

$A:[a,b]^n \rightarrow [a,b]$ bir birleştirme operatörü olmak üzere, (4.1) eşitliklerine sınır koşulları denir.

$$A(a,a,\dots,a) = a \text{ (alt sınır koşulu)}$$

$$A(b,b,\dots,b) = b \text{ (üst sınır koşulu)}$$

(4.1)

Eğer aday, karar vericilerin tamamından en düşük puanı almış ise genel puan olarak da en düşük puanı almalıdır. Benzer şekilde eğer aday, karar vericilerin tamamından en yüksek puanı almış ise genel puan olarak da en yüksek puanı almalıdır. Bu nedenle, karar problemlerinde kullanılacak birleştirme operatörleri sınır koşullarını sağlamalıdır.

4.1.1.2 İdempotentlik (Oy Birliği, Fikir Birliği)

$A:E^n \rightarrow F$ bir birleştirme operatörü olmak üzere, $\forall x \in E$ için $A(x,x,\dots,x) = x$ oluyorsa A operatörü idempotenttir (yansıyandır).

4.1.1.3 Süreklilik (Continuity) (Sağlamlık (Robustness))

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ olmak üzere, $A(X)$ fonksiyonu her bir x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) değişkenine göre sürekli ise $A:E^n \rightarrow F$ fonksiyonu süreklidir.

4.1.1.4 Monotonluk

$A:E^n \rightarrow F$ bir birleştirme operatörü olmak üzere, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $x_i \leq y_i$ iken $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq A(y_1, y_2, \dots, y_n)$ oluyorsa A operatörü monotondur.

Bileşenlerden en az bir tanesinin değeri yükseltildiğinde, bileşenlerin birleştirilmiş değeri eskisine göre daha düşük olmamalıdır. Aynı şekilde, bileşenlerden en az bir tanesinin değeri düşürüldüğünde, bileşenlerin birleştirilmiş değeri eskisine göre daha yüksek olmamalıdır. Bu

* <http://www.spatial.maine.edu/~worboys/SIE565/papers/aggregation%20operators.pdf>

nedenle, karar problemlerinde kullanılacak birleştirme operatörleri monoton olmalıdır.

4.1.1.5 Değişme Özelliği (Simetri, İsimsizlik (Anonymity))

$A : E^n \rightarrow F$ bir birleştirme operatörü ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinin herhangi bir permütasyonu $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$$

ise A operatörü değişmelidir.

Eğer operatör değişmeli ise, bileşenlerin sıralanışı ne şekilde olursa olsun, sonuç değişmez. İsimsiz karar vericilerden gelen puanlar veya aynı öneme sahip bilgiler birleştirildiğinde değişme özelliğinin sağlanması zorunludur.

Önerme 4.1: $A : E^n \rightarrow F$ birleştirme operatörünün değişmeli olması için gerek ve yeter şart

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(x_2, x_1, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(x_2, \dots, x_n, x_1) \quad (4.3)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Marichal, 1999).

Birleştirme operatörleri, her biri farklı yapıda olan üç sınıfa ayrılabilir: *ve'leyici operatörler*, *veya'layıcı operatörler* ve *dengeleyici operatörler*. Bu sınıflara ait operatörlerin tanımları sırasıyla 4.1.1.6, 4.1.1.7 ve 4.1.1.8 özelliklerinde verilmektedir.

4.1.1.6 Ve'leyicilik (Conjunctiveness)

$A : [a, b]^n \rightarrow [a, b]$ bir birleştirme operatörü olmak üzere, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [a, b]^n$ için

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} x_i$$

ise A operatörü *ve'leyici* bir operatördür.

Ve'leyici operatörler, birleştirilecek değerleri klasik mantıktaki *ve* bağlacı gibi birleştirirler. Ancak tüm puanlar iyi ise sonuç iyidir, yani bir tane dahi kötü puan varsa genel puan kötüdür. Kısım 4.2.1'de verilecek t-norm fonksiyonları *ve'leyici* birleştirme yapmak için uygun fonksiyonlardır. Bununla birlikte bu fonksiyonlar çok kriterli birleştirmede sıklıkla sağlanması istenen idempotentlik, dengeleme, ölçeğe göre değişmezlik, vb. özellikleri

genellikle sağlamazlar. Şekil 4.1'de ve'leyici operatörlerin $[a, b]$ aralığındaki yeri görülmektedir (Marichal, 1999).

4.1.1.7 Veya'layıcılık (Disjunctiveness)

$A : [a, b]^n \rightarrow [a, b]$ bir birleştirme operatörü olmak üzere, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [a, b]^n$ için

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} x_i$$

ise A operatörü veya'layıcı bir operatördür.

Veya'layıcı operatörler, birleştirilecek değerleri klasik mantıktaki veya bağlacı gibi birleştirirler. Ancak tüm puanlar kötü ise sonuç kötüdür, yani bir tane dahi iyi puan varsa genel puan iyidir. Kısım 4.2.1'de verilecek t-konorm fonksiyonları veya'layıcı birleştirme yapmak için uygun fonksiyonlardır. T-norm fonksiyonlarında olduğu gibi, t-konorm fonksiyonları da kriterleri birleştirme için uygun özelliklere sahip değildirler. Şekil 4.1'de veya'layıcı operatörlerin $[a, b]$ aralığındaki yeri görülmektedir (Marichal, 1999).

4.1.1.8 Dengeleme (Compensation) Özelliği

Ve'leyici ve veya'layıcı operatörler arasında dengeleyici (compensative) veya uzlaşık (compromise) birleştirme operatörleri adı verilen üçüncü bir sınıf mevcuttur. Kısım 4.2.1'de açıklanacağı üzere, bu operatörler t-norm operatörlerine üst sınır oluşturan minimum ile t-konorm operatörlerine alt sınır oluşturan maksimum operatörünün arasında yer alır. Dengeleyici operatörler bir kriter için kötü (iyi) bir puanı başka bir kriterdeki iyi (kötü) bir puanla dengeler, öyle ki, birleştirilmiş değer ortalama bir değer olur. Şekil 4.1'de dengeleyici operatörlerin $[a, b]$ aralığındaki yeri görülmektedir. Kısım 4.2.4'te verilecek ortalama operatörleri ailesi dengeleyicidir. Ancak sınır fonksiyonları olan minimum ve maksimum operatörleri genellikle bu aileden hariç tutulur (Marichal, 1999, Sayfa 13).

Matematiksel olarak,

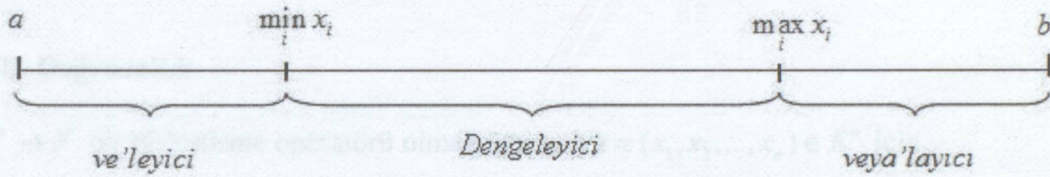
$A : [a, b]^n \rightarrow [a, b]$ bir birleştirme operatörü olmak üzere, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [a, b]^n$ için

$$\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (4.4)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa operatör dengeleyicidir.

Bu özellik Pareto özelliği olarak da bilinir. Operatör dengeleyici ise birleştirmenin sonucu, puanların en düşüğü ile en yükseği arasındadır.

Dengeleme özelliğinin yanı sıra literatürde *tersine dengeleme* (counterbalancement) özelliği kavramı da vardır. Ancak bu iki kavram birbirine karıştırılmamalıdır (Detyniecki, 2001). Bazı bileşenlerdeki artışa karşılık diğer bazı bileşenlerdeki azalma ile birleştirilmiş değer değişmiyorsa, “birleştirme operatörü, tersine dengeleme özelliğine sahiptir” denir. Tersine dengeleme özelliği bazı yazarlar tarafından yine dengeleme tanımıyla kullanılmaktadır (Zimmermann, 1993, Sayfa 42).



Şekil 4.1 Operatörün $[a, b]$ aralığındaki yeri (Marichal, 1999, Sayfa 14).

4.1.1.9 Birleşme Özelliği (Asosiyatiflik)

$A : E^2 \rightarrow F$ bir birleştirme operatörü olmak üzere,

$$\forall a, b, c \text{ için } A(a, b, c) = A(A(a, b), c) = A(a, A(b, c))$$

eşitliği sağlanıyorsa operatör birleşmelidir.

Bu özellik, iki değişkenli fonksiyonlar için tanımlansa da sonlu sayıda bileşen için genişletilebilir.

$$A(x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = A(x_1, x_2, \dots, x_j, A(x_{j+1}, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

4.1.1.10 Değişmezlik (İnvaryantlık)

f bire-bir örten bir fonksiyon ve $A : E^n \rightarrow F$ bir birleştirme operatörü olmak üzere,

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \text{ için}$$

$$A(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = f(A(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörü invaryanttır.

Bu özellik gerçekleşiyorsa, ölçek değiştirildiğinde alternatiflerin sıralanışı değişmez. Karar problemlerinde kullanılacak birleştirme operatörleri invaryant olmalıdır.

Örnek 4.1: $[1, 5]$ ölçeğinden $[0, 1]$ ölçeğine geçilmek istendiğini varsayalım. $[1, 5]$ ölçeğinin alt ve üst sınırı olan 1 ve 5 sayıları sırasıyla, $[0, 1]$ ölçeğinin alt ve üst sınırı olan 0 ve 1 sayılarına karşılık gelir. $(1, 0)$ ve $(5, 1)$ noktalarından geçen bir fonksiyon olarak $f(x) = \frac{x-1}{4}$ doğrusal fonksiyonu, ölçek dönüşümünü sağlamak üzere alınabilir.

4.1.1.11 Doğrusallık

$A : E^n \rightarrow F$ bir birleştirme operatörü olmak üzere, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için

$$A(ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b) = a A(x_1, x_2, \dots, x_n) + b$$

eşitliği sağlanıyorsa operatör doğrusaldır.

4.1.1.12 Ayrıştırılabilirlik (Decomposability)

$A : E^n \rightarrow F$ bir birleştirme operatörü ve $x = A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = A(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_k}_{k \text{ tane}}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

eşitliği sağlanıyorsa operatör ayrıştırılabilir.

4.1.1.13 Etkisiz Eleman (Boş Oy (Neutral Element))

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için

$$A^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, e, x_{k+1}, \dots, x_n) = A^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

eşitliği sağlanıyorsa e elemanına, A operatörünün etkisiz elemanı denir. Buradaki (n) ile $(n-1)$ üst indisleri, birleştirilecek bileşen sayısını göstermektedir.

4.1.1.14 Yutan Eleman (Absorbent Element)

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için

$$A(x_1, \dots, a, \dots, x_n) = a$$

eşitliği sağlanıyorsa a elemanına, A operatörünün yutan elemanı denir.

4.1.1.15 Tek Eleman İçin Birim Fonksiyon Olma

Sadece tek bir eleman birleştirildiğinde sonuç bu elemanın kendisidir, yani $\forall x \in E$ için

$$A(x) = x$$

olmalıdır.

4.1.1.16 Karşıt Olma (*Reciprocal*) Özelliği

$a, b > 0$ olmak üzere, $\forall x \in [a, b]$ için $\frac{1}{x} \in [a, b]$ olsun. $A : [a, b]^n \rightarrow [a, b]$ fonksiyonu

$$A\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{A(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

eşitliğini sağlıyorsa karşıt (ters) olma özelliğini sağlar.

n_1 nesnesinin, n_2 nesnesinden ne kadar ağır olduğu hakkında birçok değerlendirme yapıldığını varsayalım. Eğer n_1 nesnesiyle n_2 nesnesinin yerleri değiştirilirse, bu değerlendirmeler çarpmaya göre tersleri ile yer değiştirir. Örneğin, n_1 'in n_2 'den iki kat ağır yorumunu yapan bir kişiye göre n_2 , n_1 'in yarısı kadar ağırdır. Karşıt olma özelliği sağlanıyorsa, bu yer değişimi sonucu değerlendirmelerin birleştirilmiş değeri yerine de bu değer çarpmaya göre tersi gelir.

4.1.2 Davranışsal Özellikler

4.1.2.1 Bileşenlere Ağırlık Verilmesi

Birleştirme sürecinde, bazı bileşenler (örneğin kriterler, karar vericiler, vs) diğerlerine göre daha az veya daha çok öneme sahip olabilir. Bu durumda göreceli önemler bileşenlere ağırlık verilerek probleme yansıtılır.

4.1.2.2 Karar Davranışı

Karar vericinin davranışının, özellikle de eğiliminin belirtilmesine imkân sağlanır. Örneğin bir karar verici, bazı kriterlerin alternatifler tarafından sağlanmasını özellikle isteyebilir veya bazılarının sağlanmamasına da müsaade edebilir. Bu kriterlere sırasıyla *veto kriterleri* ve *kabul kriterleri* denir. Toleranslı bir karar verici için sadece en az bir kriterin alternatifler tarafından sağlanması yeterlidir. Toleranssız bir karar verici ise tüm kriterlerin alternatifler tarafından sağlanmasını ister. Bu davranışlara sırasıyla *veya'layıcı davranış* ve *ve'leyici davranış* denir.

Veto ve Kabul (Favor) Etkisi (Grabisch vd., 1998; Grabisch ve Roubens, 2000)

Bir kriter için alınan düşük bir puan genel sonucu da düşürüyorsa bu kritere *veto kriteri* denir.

C_i veto kriteri ise

$$A(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \min\{x_i, B(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)\}$$

olacak şekilde $\exists B$ operatörü bulunabilir. Eğer karar verici, bir kriterin (*veto kriteri*) mutlaka sağlanmasını istiyorsa *ve'leyici* bir davranış sergiler.

Başka bir deyişle, i . kriter veto kriteri ise

$$A(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq x_i$$

olur. Yani i . kritere ait skorun yüksek olması birleştirilmiş değeri etkilemez, ancak bu skorun düşük olması değerlendirme sonucunu da düşürür.

Tersine bir durum olarak, bir kriter için alınan yüksek bir puan genel sonucu da yükseltiyorsa bu kritere *kabul kriteri* denir.

C_i kabul kriteri ise

$$A(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \max\{x_i, B(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)\}$$

olacak şekilde $\exists B$ operatörü bulunabilir. Eğer karar verici, bir kriterin (*kabul kriteri*) sağlanmasını şart koşmuyorsa *veya'layıcı* bir davranış sergiler.

Başka bir deyişle, i . kriter kabul kriteri ise

$$A(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \geq x_i$$

olur. Yani i . kritere ait skorun düşük olması birleştirilmiş değeri etkilemez, ancak bu skorun

yüksek olması değerlendirme sonucunu da yükseltir.

4.1.2.3 Kriterlerin Arasındaki İlişki

Karar vericiler kriterleri birbirinden bağımsız şekilde yapılandıramayabilirler. Bu durumda, gereksizlik (negatif etkileşim) ve sinerji (pozitif etkileşim) arasında derecelenen bir etkileşimden bahsedilebilir. Örneğin iki kriter neredeyse aynı ise bu kriterlerden biri gereksizdir, yani kriterler birbiri yerine geçebilir. Böyle kriterlere negatif ilişkili (tümleyen (complementary)) kriterler denir. Tersine, kriterler tek başlarına az öneme sahipken bir arada ele alındıklarında kriterlerin önemi artıyorsa böyle kriterlere pozitif ilişkili (rekabetçi (competitive)) kriterler denir. Aralarında böyle bir etkileşim olmayan kriterlere bağımsız kriterler denir (Grabisch, 1998). Kriterler arasındaki bu ilişki Bulanık İntegraller başlığı altında ayrıntılı açıklanacaktır.

- 1) $\text{Önem}(\{C_1, C_2\}) = \text{Önem}(\{C_1\}) + \text{Önem}(\{C_2\})$ ise kriterler bağımsızdır.
- 2) $\text{Önem}(\{C_1, C_2\}) > \text{Önem}(\{C_1\}) + \text{Önem}(\{C_2\})$ ise kriterler arasında pozitif sinerji vardır.
- 3) $\text{Önem}(\{C_1, C_2\}) < \text{Önem}(\{C_1\}) + \text{Önem}(\{C_2\})$ ise kriterler arasında negatif sinerji vardır.

4.2 Birleştirme Operatörlerine Örnekler

4.2.1 Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar

Tanım 4.2 (Üçgensel Norm, T-norm): $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu değişmeli, monoton, birleşmeli bir operatör ve etkisiz elemanı 1 ise *üçgensel norm* (veya kısaca *t-norm*) adını alır. Bu özellikleri sırasıyla aşağıdaki aksiyomlarla gösterelim.

$\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için,

- 1) $T(a, b) = T(b, a)$
- 2) $a \leq c$ ve $b \leq d$ ise $T(a, b) \leq T(c, d)$ 'dir.
- 3) $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$
- 4) $T(a, 1) = a$ (Etkisiz eleman 1'dir.)

Teorem 4.1: $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ üçgensel norm fonksiyonu alt sınır koşulunu sağlar.

$$T(0,0) = 0$$

İspat 4.1: Üçgensel norm fonksiyonu monoton olduğundan, $\forall a, b \in [0,1]$ için $T(0,0) \leq T(a,b)$ 'dir. Bu eşitsizliğin tüm (a,b) ikilileri için sağlanması ancak ve ancak $T(0,0) = 0$ olması ile mümkündür.

Teorem 4.2: $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ üçgensel norm fonksiyonu üst sınır koşulunu sağlar.
 $T(1,1) = 1$

İspat 4.2: $\forall a \in [0,1]$ için $T(a,1) = a$ olduğundan $a=1$ alınırsa, $T(1,1) = 1$ olduğu açıkça görülür.

Teorem 4.1 ve Teorem 4.2, üçgensel norm fonksiyonlarının sınır koşullarını sağladığını gösterir.

Teorem 4.3: $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ bir üçgensel norm fonksiyonu olmak üzere, $\forall b \in [0,1]$ için $T(0,b) = 0$ dır. (Yutan eleman 0'dır.)

İspat 4.3: Üçgensel norm fonksiyonu alt sınır koşulunu sağladığından ve monoton olduğundan, $\forall b \in [0,1]$ için $0 = T(0,0) \leq T(0,b)$ 'dir. Yine T operatörü monoton olduğundan, $T(0,b) \leq T(0,1)$ 'dir. Etkisiz eleman 1 olduğundan, $T(a,1) = a$ eşitliğinde $a=0$ alınırsa $T(0,1) = 0$ olur. Bu sonuçlar birleştirilirse $0 = T(0,0) \leq T(0,b) \leq T(0,1) = 0$ olduğundan ancak ve ancak $T(0,b) = 0$ olabilir.

Teorem 4.3 gösterir ki, birleştirme operatörü t-norm olduğunda bir tane dahi kötü tatmin varsa genel tatmin kötüdür, dengeleme yoktur. Üçgensel norm tanımındaki dördüncü aksiyomdan, yani $T(a,1) = a$ 'den dolayı herhangi bir t-norm operatörü "tümü" gerektirmesini sağlar. Yani ancak ve ancak $T(1,1) = 1$ olabilir.

Tanım 4.3 (Minimum (Ve) Operatörü): $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $T(a,b) = \min\{a,b\}$ ile tanımlanan fonksiyon üçgensel normdur. Bu fonksiyona *minimum (ve) operatörü* denir.

Bu operatörün üçgensel norm olma şartlarını sağladığını gösterelim.

1) $T(a,b) = \min\{a,b\} = \min\{b,a\} = T(b,a)$ olduğundan minimum operatörü değişmelidir.

2) $a \leq c$ ve $b \leq d$ ayrıca $T(a, b) = \min\{a, b\} = a$ olsun.

Kabullerden $T(a, b) = a \leq b \leq d$ ve $a \leq c$ 'dir. Yani a sayısı, hem c hem de d sayısından küçük olduğundan $T(a, b) = a \leq \min\{c, d\} = T(c, d)$ 'dir. Böylece minimum operatörü monotondur.

3) $T(T(a, b), c) = \min\{a, b, c\}$ ve $T(a, T(b, c)) = \min\{a, b, c\}$ olduğundan ve dolayısıyla $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$ eşitliği gerçekleştiğinden minimum operatörü birleşmelidir.

4) $a \leq 1$ olduğundan $T(a, 1) = \min\{a, 1\} = a$ dır. Dolayısıyla etkisiz eleman 1'dir.

Teorem 4.4: Üçgensel norm operatörlerinin bir üst sınırı minimum operatörüdür, yani T fonksiyonu bir t-norm olmak üzere, $\forall a, b \in [0, 1]$ için $T(a, b) \leq \min\{a, b\}$ dir. Başka bir deyişle, t-norm operatörleri ve 'leyicidir.

İspat 4.4: $\min\{a, b\} = a$ yani $a \leq b$ olsun. Bu durumda, monoton olma ve etkisiz elemanın varlığı özelliklerinden $T(a, b) \leq T(a, 1) = a = \min\{a, b\}$ olduğu kolayca görülür.

Birleşme özelliği kullanılarak, minimum operatörü iki elemandan n elemana genişletilebilir.

Tanım 4.4: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $x_i \in [0, 1]$ olmak üzere, $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ operatörü bir t-normdur.

Tanım 4.5 (Olasılıksal Ve Operatörü): $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ olmak üzere, $T(a, b) = ab$ ile tanımlanan fonksiyon üçgensel normdur. Bu fonksiyona *olasılıksal ve operatörü* denir (Carlsson vd., 1997).

Bu operatörün üçgensel norm olma şartlarını sağladığını gösterelim.

1) $T(a, b) = ab = ba = T(b, a)$ olduğundan olasılıksal ve operatörü değişmelidir.

2) $a \leq c$ ve $b \leq d$ olsun.

$T(a, b) = ab \leq cd = T(c, d)$ olduğundan olasılıksal ve operatörü monotondur.

3) $T(T(a, b), c) = T(ab, c) = (ab)c = a(bc) = T(a, bc) = T(a, T(b, c))$

oldüğundan olasılıksal ve operatörü birleşmelidir.

4) $T(a, 1) = a1 = a$ olduğundan etkisiz eleman 1'dir.

Tanım 4.6 (Lucasiewicz Ve Operatörü): $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $T(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$ ile tanımlanan fonksiyon üçgensel normdur. Bu fonksiyona *Lucasiewicz ve operatörü* denir (Carlsson vd., 1997).

Bu operatörün üçgensel norm olma şartlarını sağladığını gösterelim.

1) $T(a,b) = \max\{0, a+b-1\} = \max\{0, b+a-1\} = T(b,a)$ olduğundan Lucasiewicz ve operatörü değişmelidir.

2) $a \leq c$ ve $b \leq d$ olsun.

$T(a,b) = \max\{0, a+b-1\} \leq \max\{0, c+d-1\} = T(c,d)$ olduğunu gösterelim.

$$T(a,b) = \max\{0, a+b-1\} = \begin{cases} 0, a+b < 1 \\ a+b-1, a+b \geq 1 \end{cases} \text{ fonksiyonu ile temsil edilebilir.}$$

$a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğundan $a+b \leq c+d$ olacaktır.

$a+b \leq 1$ ise iki durum gerçekleşebilir.

İlk olarak $a+b \leq 1 \leq c+d$ ise $T(c,d) = c+d-1 \geq 0 = T(a,b)$ 'dir.

İkinci olarak $a+b \leq c+d \leq 1$ ise $T(c,d) = 0 = T(a,b)$ olur.

$a+b \geq 1$ yani $1 \leq a+b \leq c+d$ ise $T(c,d) = c+d-1 \geq a+b-1 = T(a,b)$ 'dir.

Dolayısıyla bu operatör monotondur.

$$3) T(a,b) = \max\{0, a+b-1\} = \begin{cases} 0, a+b < 1 \\ a+b-1, a+b \geq 1 \end{cases} \text{ olarak alalım.}$$

$$T(T(a,b), c) = \begin{cases} 0, T(a,b)+c < 1 \\ T(a,b)+c-1, T(a,b)+c \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, a+b+c < 2 \\ a+b+c-2, a+b+c \geq 2 \end{cases} \text{ olacaktır.}$$

$$\text{Benzer şekilde } T(b,c) = \max\{0, b+c-1\} = \begin{cases} 0, b+c < 1 \\ b+c-1, b+c \geq 1 \end{cases} \text{ alınır,}$$

$$T(a, T(b,c)) = \begin{cases} 0, a+T(b,c) < 1 \\ a+T(b,c)-1, a+T(b,c) \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, a+b+c < 2 \\ a+b+c-2, a+b+c \geq 2 \end{cases} \text{ olduğundan,}$$

$T(T(a,b), c) = T(a, T(b,c))$ 'dir. Yani birleşme özelliği sağlanır.

4) $a \geq 0$ ve $T(a,1) = \max\{0, a+1-1\} = a$ olduğundan etkisiz eleman 1'dir.

Tanım 4.7 (Üçgensel Konorm, T-konorm): $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu değişmeli, monoton, birleşmeli bir operatör ve etkisiz elemanı 0 ise *üçgensel konorm* (veya kısaca *t-konorm*) adını alır. Bu özellikleri sırasıyla aşağıdaki aksiyomlarla göstereyim.

$\forall a,b,c,d \in [0,1]$ için,

$$1) S(a,b) = S(b,a)$$

$$2) a \leq c \text{ ve } b \leq d \text{ ise } S(a,b) \leq S(c,d) \text{ 'dir.}$$

$$3) S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$$

$$4) S(a,0) = a \text{ (Etkisiz eleman 0'dır.)}$$

Teorem 4.5: $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ üçgensel konorm fonksiyonu alt sınır koşulunu sağlar.

$$S(0,0) = 0$$

İspat 4.5: $\forall a \in [0,1]$ için $S(a,0) = a$ olduğundan, $a = 0$ alınırsa $S(0,0) = 0$ olduğu açıkça görülür.

Teorem 4.6: $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ üçgensel konorm fonksiyonu üst sınır koşulunu sağlar.

$$S(1,1) = 1$$

İspat 4.6: Üçgensel konorm fonksiyonu monoton olduğundan, $\forall a,b \in [0,1]$ için $S(a,b) \leq S(1,1)$ 'dir. Bu eşitsizliğinin tüm (a,b) ikilileri için gerçekleşmesi ancak ve ancak $S(1,1) = 1$ olması ile mümkündür.

Teorem 4.5 ve Teorem 4.6, üçgensel konorm fonksiyonlarının sınır koşullarını sağladığını gösterir.

Teorem 4.7: $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ bir üçgensel konorm fonksiyonu olmak üzere, $\forall a \in [0,1]$ için $S(a,1) = 1$ dir.(Yutan eleman 1'dir.)

İspat 4.7: Üçgensel konorm fonksiyonu üst sınır koşulunu sağladığından ve monoton olduğundan $\forall a \in [0,1]$ için, $S(a,1) \leq S(1,1) = 1$ 'dir. Yine S operatörü monoton olduğundan

$S(0,1) \leq S(a,1)$ 'dir. Etkisiz eleman 0 olduğundan, $S(a,0) = a$ eşitliğinde $a=1$ alınır ve $S(1,0) = 1$ olur ve operatörün değişmeli olmasından dolayı $S(1,0) = S(0,1) = 1$ 'dir. Bu sonuçlar birleştirilirse $1 = S(0,1) \leq S(a,1) \leq S(1,1) = 1$ olduğundan ancak ve ancak $S(a,1) = 1$ olabilir.

Teorem 4.7 gösterir ki, birleştirme operatörü t-konorm olduğunda bir tane dahi iyi tatmin varsa genel tatmin iyidir. Üçgensel konorm tanımındaki dördüncü aksiyomdan, yani $S(a,0) = a$ 'dan dolayı herhangi bir t-konorm operatörü "en az bir" gerektirmesini sağlar. Yani ancak ve ancak $S(0,0) = 0$ olabilir.

Tanım 4.8 (Maksimum (Veya) Operatörü): $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $S(a,b) = \max\{a,b\}$ ile tanımlanan fonksiyon üçgensel konormdur. Bu fonksiyona *maksimum (veya) operatörü* denir.

Bu operatörün üçgensel konorm olma şartlarını sağladığını gösterelim.

1) $S(a,b) = \max\{a,b\} = \max\{b,a\} = S(b,a)$ olduğundan maksimum operatörü değişmelidir.

2) $a \leq c$ ve $b \leq d$ ayrıca $S(c,d) = \max\{c,d\} = c$ olsun.

Kabullerden $S(c,d) = c \geq d \geq b$ ve $c \geq a$ 'dır. Yani c sayısı, hem a hem de b sayısından büyüktür olduğundan $S(c,d) = c \geq \max\{a,b\} = S(a,b)$ 'dir. Böylece, maksimum operatörü monotondur.

3) $S(S(a,b),c) = \max\{a,b,c\}$ ve $S(a,S(b,c)) = \max\{a,b,c\}$ olduğundan ve dolayısıyla $S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$ eşitliği gerçekleştiğinden maksimum operatörü birleşmelidir.

4) $a \geq 0$ olduğundan $S(a,0) = \max\{a,0\} = a$ 'dır. Dolayısıyla etkisiz eleman 0'dır.

Birleşme özelliği kullanılarak, maksimum operatörü iki elemandan n elemana genişletilebilir.

Tanım 4.9: $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ için $x_i \in [0,1]$ olmak üzere, $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ operatörü bir t-konormdur.

Teorem 4.8: Üçgensel konorm operatörlerinin bir alt sınırı maksimum operatörüdür, yani S fonksiyonu bir t-konorm olmak üzere, $\forall a,b \in [0,1]$ için $\max\{a,b\} \leq S(a,b)$ 'dir. Başka bir deyişle, t-konorm operatörleri *veya'layıcıdır*.

İspat 4.8: $\max\{a,b\} = a$ yani $b \leq a$ olsun. Bu durumda, monotonluk ve etkisiz elemanın varlığı özelliklerinden $S(a,b) \geq S(a,0) = a = \max\{a,b\}$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 4.10 (Olasılıksal Veya Operatörü): $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $S(a,b) = a + b - ab$ ile tanımlanan fonksiyon üçgensel konormdur. Bu fonksiyona *olasılıksal veya operatörü* denir (Carlsson vd., 1997).

Bu operatörün üçgensel konorm olma şartlarını sağladığını gösterelim.

1) $S(a,b) = a + b - ab = b + a - ba = S(b,a)$ olduğundan olasılıksal veya operatörü değişmelidir.

2) $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0,1]$ olmak üzere, $a \leq a + \varepsilon_1 = c$ ve $b \leq b + \varepsilon_2 = d$ olsun.

$$S(c,d) = S(a + \varepsilon_1, b + \varepsilon_2) = (a + \varepsilon_1) + (b + \varepsilon_2) - (a + \varepsilon_1)(b + \varepsilon_2)$$

$$= a + b - ab + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - a\varepsilon_2 - b\varepsilon_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 = S(a,b) + \varepsilon_1(1 - b - \frac{\varepsilon_2}{2}) + \varepsilon_2(1 - a - \frac{\varepsilon_1}{2})$$

$$= S(a,b) + \varepsilon_1(1 - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} - \frac{\varepsilon_2}{2}) + \varepsilon_2(1 - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2}) = S(a,b) + \underbrace{\varepsilon_1(1 - \frac{b}{2} - \frac{d}{2}) + \varepsilon_2(1 - \frac{a}{2} - \frac{c}{2})}_{\geq 0}$$

olduğundan $S(c,d) \geq S(a,b)$ 'dir. Dolayısıyla olasılıksal veya operatörü monotondur.

$$3) S(S(a,b),c) = S(a + b - ab, c) = a + b - ab + c - (a + b - ab)c = a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

$$= a + b + c - bc - a(b + c - bc) = S(a, b + c - bc) = S(a, S(b,c))$$

olduğundan olasılıksal veya operatörü birleşmelidir.

$$4) S(a,0) = a + 0 - a0 = a \text{ olduğundan etkisiz eleman } 0 \text{ 'dır.}$$

Tanım 4.11 (Lucasiewicz Veya Operatörü): $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $S(a,b) = \min\{1, a + b\}$ ile tanımlanan fonksiyon üçgensel konormdur. Bu fonksiyona *Lucasiewicz veya operatörü* denir (Carlsson vd., 1997).

Bu operatörün üçgensel konorm olma şartlarını sağladığını gösterelim.

1) $S(a,b) = \min\{1, a + b\} = \min\{1, b + a\} = S(b,a)$ olduğundan Lucasiewicz veya operatörü değişmelidir.

2) $a \leq c$ ve $b \leq d$ olsun.

$$S(a,b) = \min\{1, a + b\} \leq \min\{1, c + d\} = S(c,d) \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$S(a,b) = \min\{1, a+b\} = \begin{cases} a+b, & a+b < 1 \\ 1, & a+b \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonu ile temsil edilebilir.

$a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğundan $a+b \leq c+d$ olacaktır.

$a+b \leq 1$ ise iki durum gerçekleşebilir.

İlk olarak $a+b \leq 1 \leq c+d$ ise $S(a,b) = a+b \leq 1 = S(c,d)$ 'dir.

İkinci olarak $a+b \leq c+d \leq 1$ ise $S(a,b) = a+b \leq c+d = S(c,d)$ olur.

$a+b \geq 1$ yani $1 \leq a+b \leq c+d$ ise $S(a,b) = 1 = S(c,d)$ 'dir.

Dolayısıyla bu operatör monotondur.

3) $S(a,b) = \min\{1, a+b\} = \begin{cases} a+b, & a+b < 1 \\ 1, & a+b \geq 1 \end{cases}$ olarak alalım.

$$S(S(a,b),c) = \begin{cases} S(a,b)+c, & S(a,b)+c < 1 \\ 1, & S(a,b)+c \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} a+b+c, & a+b+c < 1 \\ 1, & a+b+c \geq 1 \end{cases}$$

Benzer şekilde $S(b,c) = \min\{1, b+c\} = \begin{cases} 1, & b+c \geq 1 \\ b+c, & b+c < 1 \end{cases}$ alınırsa,

$$S(a, S(b,c)) = \begin{cases} a+S(b,c), & a+S(b,c) < 1 \\ 1, & a+S(b,c) \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} a+b+c, & a+b+c < 1 \\ 1, & a+b+c \geq 1 \end{cases} \text{ olduğundan,}$$

$S(S(a,b),c) = S(a, S(b,c))$ 'dir. Yani birleşme özelliği sağlanır.

4) $a \leq 1$ ve $S(a,0) = \min\{1, a+0\} = a$ olduğundan etkisiz eleman 0'dır.

Eğer T bir t-norm ise $S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$ eşitliğindeki S fonksiyonu bir t-konormdur.

S 'ye, T 'den türetilmiştir denir (Fullér, 1996).

Tanım 4.12 (Doğrusal Konveks T-S Operatörü): T bir t-norm, S de bir t-konorm operatörü

ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere, $D_{T,S,\lambda} : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ operatörü

$$D_{T,S,\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1-\lambda)T(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda S(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

şeklinde tanımlanıyorsa *doğrusal konveks T-S operatörü* adını alır (Pradera vd., 2002).

Doğrusal konveks T-S operatörlerine örnek olarak,

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 - \lambda) \min(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ya da

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 - \lambda) \left[\prod_{i=1}^n x_i \right] + \lambda \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \right]$$

operatörleri verilebilir. $\lambda \in (0, 1)$ olduğunda, bu operatörler dengeleyicidir.

Tanım 4.13 (Üstel Konveks T-S Operatörü): T bir t-norm, S de bir t-konorm operatörü ve

$\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere, $E_{T,S,\lambda} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ operatörü

$$E_{T,S,\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_n) = [T(x_1, x_2, \dots, x_n)]^{1-\lambda} [S(x_1, x_2, \dots, x_n)]^\lambda$$

şeklinde tanımlanıyorsa *üstel konveks T-S operatörü* adını alır (Pradera vd., 2002).

Üstel konveks T-S operatörlerine örnek olarak, *dengeleyici ve operatörü*

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\prod_{i=1}^n x_i \right]^{1-\lambda} \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \right]^\lambda, \quad \lambda \in (0, 1)$$

verilebilir (Zimmermann, 1993).

Çizelge 4.2 Parametrelenmiş üçgensel normlar ve üçgensel konormlar (Detyniecki, 2001).

	<i>t-norm</i>	<i>t-konorm</i>
Hamacher ($\gamma \geq 0$)	$\frac{xy}{\gamma + (1 - \gamma)(x + y - xy)}$	$\frac{x + y - xy - (1 - \gamma)xy}{1 - (1 - \gamma)xy}$
Weber-Sugeno ($\lambda_T, \lambda_S > -1$)	$\max\{0, \frac{x + y - 1 + \lambda_T xy}{1 + \lambda_T}\}$	$\min\{1, x + y + \lambda_S xy\}$
Schweizer-Sklar ($q > 0$)	$1 - [(1 - x)^q + (1 - y)^q - (1 - x)^q (1 - y)^q]^{\frac{1}{q}}$	$[x^q + y^q - x^q y^q]^{\frac{1}{q}}$
Frank ($s > 0, s \neq 1$)	$\log_s \left[1 + \frac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s - 1} \right]$	$1 - \log_s \left[1 + \frac{(s^{1-x} - 1)(s^{1-y} - 1)}{s - 1} \right]$
Yager ($p > 0$)	$1 - \min \left\{ 1, \left((1 - x)^p + (1 - y)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$	$\min \left\{ 1, \left(x^p + y^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$

4.2.2 Uniform Birleştirme (*Uninorm*) Operatörleri

T-norm ve t-konorm operatörleri bulanık mantık teorisinde önemli bir rol oynarlar. Ancak bu operatörler dengeleme özelliğine sahip değildirler. Aslında, t-norm operatörleri düşük değerleri yüksek değerler ile dengelemezler. Benzer şekilde, t-konorm operatörleri de yüksek değerleri düşük değerler ile dengelemezler. Bu nedenle, Yager ve Rybalov 1996 senesinde t-norm ve t-konorm operatörlerinin genelleştirilmiş şekli olan *uniform birleştirme operatör* (*uninorm*) ailesini tanımlanmışlardır (Detyniecki, 2001).

Tanım 4.14: $U : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu değişmeli, monoton, birleşmeli ve etkisiz elemana sahip ise *uninorm* adını alır. Bu özellikleri sırasıyla aşağıdaki aksiyomlarla gösterelim.

$\forall a, b, c \in [0,1]$ için,

$$1) U(a, b) = U(b, a)$$

$$2) a \leq c \text{ ve } b \leq d \text{ ise } U(a, b) \leq U(c, d) \text{ 'dir.}$$

$$3) U(U(a, b), c) = U(a, U(b, c))$$

$$4) U(a, e) = a \text{ olacak şekilde } \exists e \in [0,1] \text{ mevcuttur.}$$

$e = 1$ alındığında t-norm operatörleri, $e = 0$ alındığında t-konorm operatörleri elde edildiğinden uninorm operatörleri bu operatörlerin genelleştirilmiş şeklidir.

Örnek 4.2: Uninorm operatörlerine örnek olarak

$$U_*(a, b) = \begin{cases} \max\{a, b\}, & a, b \geq e \\ \min\{a, b\}, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ve

$$U^*(a, b) = \begin{cases} \min\{a, b\}, & a, b \leq e \\ \max\{a, b\}, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

fonksiyonları verilebilir (Fernandez Salido ve Murakami, 2003).

Dengeleme özelliğini sağlamayan t-norm ve t-konorm operatörlerinin genelleştirilmiş hali olan uninorm operatörleri, ancak bazı şartlar eklendiğinde dengeleyici olurlar. Bu özellik

Teorem 4.9 ile verilmiştir.

Teorem 4.9: $U : [0, e] \times (e, 1] \rightarrow [0, 1]$ ve $V : (e, 1] \times [0, e] \rightarrow [0, 1]$ uninorm operatörleri dengeleyicidir.

İspat 4.9: Öncelikle $0 \leq x < e < y \leq 1$ olsun. Etkisiz elemanın varlığı ve monoton olma özelliklerinden

$$x = \min\{x, y\} = U(\min\{x, y\}, e) \leq U(\min\{x, y\}, y) = U(x, y)$$

$$y = \max\{x, y\} = U(e, \max\{x, y\}) \geq U(x, \max\{x, y\}) = U(x, y) \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$$\min\{x, y\} \leq U(x, y) \leq \max\{x, y\}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da U operatörünün dengeleyici olduğunu gösterir.

Şimdi ise $0 \leq y < e < x \leq 1$ olsun. Etkisiz elemanın varlığı ve monoton olma özelliklerinden

$$y = \min\{x, y\} = V(e, \min\{x, y\}) \leq V(x, \min\{x, y\}) = V(x, y)$$

$$x = \max\{x, y\} = V(\max\{x, y\}, e) \geq V(\max\{x, y\}, y) = V(x, y) \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$$\min\{x, y\} \leq V(x, y) \leq \max\{x, y\}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da V operatörünün dengeleyici olduğunu gösterir.

Teorem 4.10: $\forall a, b \in [0, e], e \in (0, 1)$ ve T bir t-norm operatörü olmak üzere,

$$U(a, b) = e T\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right)$$

operatörü bir uninormdur.

İspat 4.10: $U(a, b) = e T\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right)$ operatörünün uninorm olma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

T bir t-norm operatörü olduğundan değişmelidir, monotondur, birleşmelidir ve etkisiz elemanı 1'dir.

$$1) \quad U(a, b) = e T\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right) = e T\left(\frac{b}{e}, \frac{a}{e}\right) = U(b, a)$$

2) $a \leq c$ ve $b \leq d$ olsun.

$$U(a, b) = e T\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right) \leq e T\left(\frac{c}{e}, \frac{d}{e}\right) = U(c, d)$$

$$3) \quad U(U(a, b), c) = U\left(e T\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right), c\right) = e T\left(\frac{e T\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right)}{e}, \frac{c}{e}\right) = e T\left(T\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right), \frac{c}{e}\right)$$

$$= e T\left(\frac{a}{e}, T\left(\frac{b}{e}, \frac{c}{e}\right)\right) = e T\left(\frac{a}{e}, \frac{1}{e} U(b, c)\right) = U(a, U(b, c))$$

$$4) \quad U(a, e) = e T\left(\frac{a}{e}, \frac{e}{e}\right) = e T\left(\frac{a}{e}, 1\right) = e1 = e$$

Teorem 4.11: $\forall a, b \in [e, 1]$, $e \in (0, 1)$ ve S bir t -konorm operatörü olmak üzere,

$$U(a, b) = e + (1-e)S\left(\frac{a-e}{1-e}, \frac{b-e}{1-e}\right)$$

operatörü bir uninormdur.

4.2.3 Simetrik Toplamlar

Simetrik toplam operatörü (symmetric summation), ilk kez 1979 yılında Silvert tarafından tanımlanmıştır (Grabisch vd, 1998).

Tanım 4.15 (Simetrik toplam operatörü): $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu

$$1) \quad A(0, 0) = 0$$

$$2) \quad A(1, 1) = 1$$

$$3) \quad A(x_1, x_2) = 1 - A(1 - x_1, 1 - x_2)$$

aksiyomlarını sağlıyorsa *simetrik toplam operatörü* adını alır.

Örnek 4.3: Simetrik toplam operatörlerine örnek olarak

$$A_1(x, y) = \frac{\max\{x, y\}}{1 + |x - y|},$$

$$A_2(x, y) = \frac{\min\{x, y\}}{1 + |x - y|}, \quad (4.6)$$

$$A_3(x, y) = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$$

ve

$$A_4(x, y) = \frac{x + y - xy}{1 + x + y - 2xy}$$

fonksiyonları verilebilir (Petrou ve Sasikala, 1999).

4.2.4 Aritmetik Benzeri Ortalama Operatörleri (*Quasi-arithmetic Mean Operators*)

Tanım 4.16 (Ortalama Operatörü): $A : E^n \rightarrow F$ fonksiyonu sürekli, değişmeli, monoton ve idempotent ise *ortalama operatörü* adını alır.

Teorem 4.12: Ortalama operatörleri dengeleme özelliğini sağlar.

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

İspat 4.12: A fonksiyonu idempotent ve monoton olduğundan

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = A(\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \dots, \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \leq A(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = A(\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \dots, \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \geq A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu iki eşitsizlikten, A fonksiyonunun dengeleyici olduğu görülür.

Tanım 4.17 (Aritmetik Benzeri Ortalama Operatörü): $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve monoton bir fonksiyon olmak üzere,

$$A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1], \quad A(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)\right) \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanan operatöre, *aritmetik benzeri ortalama operatörü* (*quasi-arithmetic mean operator*) denir.

Bu tanımdaki $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A birleştirme operatörünün üretici denir. $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = x^\alpha$ alındığında,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.6)$$

elde edilir. Bu operatöre *genelleştirilmiş α -ortalaması (generalized α -mean)* denir. α parametresine verilen farklı değerlere karşılık, farklı birleştirme operatörleri elde edilir.

4.2.4.1 Aritmetik Ortalama Operatörü

Birleştirme için en basit ve en çok kullanılan yol aritmetik ortalama almaktır. Bu operatörün etkisiz ve yutan elemanı yoktur. Davranışsal özellikler göstermez. Ortalama operatörlerinden sadece aritmetik ortalama operatörü doğrusaldır.

Tanım 4.18 (Aritmetik Ortalama Operatörü): (4.6) eşitliğinde $\alpha = 1$ yani $f(x) = x$ alındığında,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

elde edilir. Bu operatöre *aritmetik ortalama operatörü* denir.

4.2.4.2 Kuadratik Ortalama Operatörü

Tanım 4.19: (4.6) eşitliğinde $\alpha = 2$ yani $f(x) = x^2$ alındığında,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

elde edilir. Bu operatöre *kuadratik ortalama operatörü* denir.

4.2.4.3 Harmonik Ortalama Operatörü

Tanım 4.20: (4.6) eşitliğinde $\alpha = -1$ yani $f(x) = \frac{1}{x}$ alındığında,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

elde edilir. Bu operatöre *harmonik ortalama operatörü* denir.

4.2.4.4 Geometrik Ortalama Operatörü

Tanım 4.21: (4.5) eşitliğinde $f(x) = \log x$ alındığında,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

elde edilir. Bu operatöre *geometrik ortalama operatörü* denir.

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = 10^{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i)\right)} = 10^{\frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n)} = 10^{\frac{1}{n}(\log(x_1 x_2 \dots x_n))} = 10^{\log(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n})}$$

$$= \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Çizelge 4.3 Aritmetik benzeri ortalamalara örnekler (Marichal, 1999).

$f(x)$	$A(x_1, x_2, \dots, x_n)$	İsim
x	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	Aritmetik
x^2	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$	Kuadratik
$\log x$	$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$	Geometrik
x^{-1}	$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$	Harmonik
x^α	$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$	Kök-Kuvvet

4.2.5 Medyan Operatörü

Tanım 4.22: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \dots \geq x_{(n)}$ eşitsizliğini sağlayan bir permütasyonu $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & n \text{ tek} \\ \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

ile tanımlanan operatöre *medyan operatörü* denir.

4.2.6 Ağırlıklı Ortalama Operatörleri

Bu operatörler bileşenlere ağırlık vermemize imkân sağlar. Ancak sıralı ağırlıklı ortalama (OWA) operatörü dışında bu operatörlerin değişme özellikleri yoktur.

Tanım 4.23 (Ağırlıklı Ortalama Operatörü): f sürekli ve monoton bir fonksiyon,

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) \right)$$

şeklinde tanımlanan operatöre *ağırlıklı ortalama operatörü* denir.

4.2.6.1 Ağırlıklı Aritmetik Ortalama Operatörü

Tanım 4.24: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$$

şeklinde tanımlanan operatöre *ağırlıklı aritmetik ortalama operatörü* denir.

Bileşenler ve ağırlıklar, üçgensel ya da yamuksal bulanık sayı olarak da alınabilir. Bu durumda operatör, *bulanık ağırlıklı aritmetik ortalama operatörü* adını alır (Xu ve Da, 2003).

4.2.6.2 Ağırlıklı Kuadratik Ortalama Operatörü

Tanım 4.25: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^2}$$

şeklinde tanımlanan operatöre *ağırlıklı kuadratik ortalama operatörü* denir.

Örnek 4.4 Ağırlıklı ortalama operatörüne örnekler (Matlab, 1999)

4.2.6.3 Ağırlıklı Geometrik Ortalama Operatörü

Tanım 4.26: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}$$

şeklinde tanımlanan operatöre *ağırlıklı geometrik ortalama operatörü* denir.

4.2.6.4 Ağırlıklı Harmonik Ortalama Operatörü

Tanım 4.27: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{x_i}}$$

şeklinde tanımlanan operatöre *ağırlıklı harmonik ortalama operatörü* denir.

4.2.6.5 Ağırlıklı Kök-Kuvvet Ortalama Operatörü

Tanım 4.28: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ve α bir reel sayı olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

şeklinde tanımlanan operatöre *ağırlıklı kök-kuvvet ortalama operatörü* denir.

Çizelge 4.4 Ağırlıklı ortalama operatörlerine örnekler (Marichal,1999).

$f(x)$	$A(x_1, x_2, \dots, x_n)$	İsim
x	$\sum_{i=1}^n \omega_i x_i$	Aritmetik
x^2	$(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$	Kuadratik
$\log x$	$\prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}$	Geometrik
x^{-1}	$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{x_i}}$	Harmonik
x^α	$(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$	Kök-Kuvvet

4.2.7 Sıralı Ağırlıklı Ortalama (OWA) Operatörü (Yager, 1988)

Tanım 4.29: $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olsun.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ vektörünün en büyük i . elemanına $x_{(i)}$ diyelim.

$$F_W(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_{(i)}$$

şeklinde tanımlanan $F: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ operatörüne *sıralı ağırlıklı ortalama (OWA-Ordered Weighted Averaging) operatörü* denir.

Birleştirilecek $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün bileşenlerinin büyükten küçüğe (azalan sırada) sıralanmasıyla oluşturulan vektöre sıralı argüman vektörü denir.

Yani $\forall x_{(i)} \in X$ ve $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \dots \geq x_{(n)}$ olmak üzere, sıralı argüman vektörü $B = \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{bmatrix}$ olsun.

Bu durumda $F_W(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_{(i)} = W'B$ olarak vektörlerin iç çarpımı ile hesaplanabilir.

Örnek 4.4: $W = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ ve $X = (0.6, 1.0, 0.3, 0.5)$ için $F_W(X)$ değerini hesaplayalım.

Birleştirilecek $X = (0.6, 1.0, 0.3, 0.5)$ vektörünün sıralı argüman vektörü, $B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ olur.

$$F_W(0.6, 1.0, 0.3, 0.5) = W'B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} = 0.2 + 0.18 + 0.05 + 0.12 = 0.55$$

bulunur.

Teorem 4.13: F_W bir OWA operatörü, A ve B sıralı argüman vektörleri olmak üzere,

$\forall j$ için $a_j \geq b_j$ ise $F_W(A) \geq F_W(B)$ 'dir.

İspat 4.13: $\forall j$ için $a_j \geq b_j$ olduğundan $F_W(A) - F_W(B) = W'A - W'B = W'(A - B) \geq 0$ olur.

Dolayısıyla $F_W(A) \geq F_W(B)$ 'dir.

Teorem 4.14: F_W bir OWA operatörü olmak üzere, $\forall j$ için $c_j \geq d_j$ ise

$$F_W(c_1, c_2, \dots, c_n) \geq F_W(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 4.14: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sırasıyla $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ve $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ vektörlerinin sıralı argüman vektörleri ve $\max\{c_1, c_2, \dots, c_n\} = c_k$ ve $\max\{d_1, d_2, \dots, d_n\} = d_l$

olsun. O halde $a_1 = c_k$ ve $b_1 = d_i$ dir. $\max\{c_1, c_2, \dots, c_n\} = c_k$ olduğundan $c_k \geq c_i$ ve teoremin kabulünden $c_i \geq d_i$ olur. O halde $c_k \geq c_i \geq d_i$ ve dolayısıyla $a_1 \geq b_1$ bulunur. Bu şekilde devam edilerek $\forall j$ için $a_j \geq b_j$ olduğu gösterilir. Bu durumda Teorem 4.13'den ispat tamamlanır.

Teorem 4.14, OWA operatörlerinin monoton olduğunu gösterir.

Teorem 4.15: F_W bir OWA operatörü ve $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektörünün herhangi bir permütasyonu $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ ise $F_W(a_1, a_2, \dots, a_n) = F_W(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ olur.

İspat 4.15: A ve A' vektörleri sırasıyla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ vektörlerinin sıralı argüman vektörleri olsun. $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ vektörü $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektörünün bir permütasyonu olduğundan $A = A'$ dür. Dolayısıyla $F_W(A) = F_W(A')$ olur.

Teorem 4.15, OWA operatörlerinin değişmeli (simetrik) olduğunu gösterir.

OWA operatörleri sıralı verilerin ağırlıklı aritmetik ortalamasını hesaplar, yani azalan sırada dizilmiş verilerin bulunduğu pozisyonlara ağırlık atayarak birleştirme yapar. Dolayısıyla ω_i ağırlığı x_i bileşenine değil, bunun yerine i . en büyük bileşene aittir. Bu nedenle OWA operatörü, ağırlıklı aritmetik ortalama operatöründen farklıdır. Ağırlıklı aritmetik ortalama operatörü değişmeli değilken, OWA operatörleri değişmelidir.

Örnek 4.5: Ağırlıklı aritmetik ortalama operatörü $\omega_1 + \omega_2 = 1$ olmak üzere, iki bileşen için $A(a_1, a_2) = \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2$ idi. $(\omega_1, \omega_2) = (0.7, 0.3)$ olarak alındığında, $A(1, 0) = 0.7$ olurken $A(0, 1) = 0.3$ olur, dolayısıyla $A(1, 0) \neq A(0, 1)$ elde edilir. Bu da ağırlıklı aritmetik ortalama operatörünün değişmeli olmadığını gösterir.

Teorem 4.16: F_W bir OWA operatörü olmak üzere, $\forall a \in [0, 1]$ için $F_W(a, a, \dots, a) = a$ 'dır.

Teorem 4.16, OWA operatörlerinin idempotent olduğunu gösterir.

Teorem 4.17: B keyfi bir sıralı argüman vektörü, $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ ağırlık vektörü,

$$\omega_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, W^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } W_* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere, } (W_*)'B \leq W'B \leq (W^*)'B \text{ 'dir.}$$

İspat 4.17: $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ sıralı argüman vektörü olduğundan $\forall j$ için $b_n \leq b_j$ ve $b_j \leq b_1$ 'dir.

$$(W_*)'B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_n,$$

$$(W^*)'B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_1,$$

$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olduğundan,

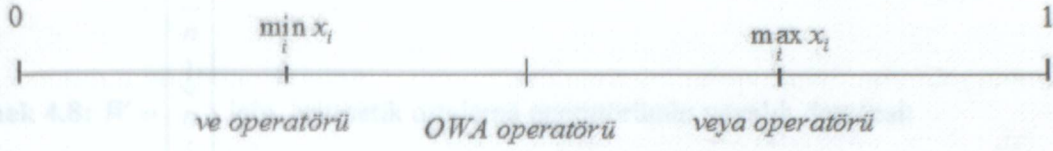
$$W'B = b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + \dots + b_n\omega_n \geq b_n\omega_1 + b_n\omega_2 + \dots + b_n\omega_n = b_n = (W_*)'B,$$

$$W'B = b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + \dots + b_n\omega_n \leq b_1\omega_1 + b_1\omega_2 + \dots + b_1\omega_n = b_1 = (W^*)'B \text{ olur.}$$

Buradan $(W_*)'B \leq W'B \leq (W^*)'B$ olduğu görülür. W_* ve W^* ağırlıklarına sahip OWA operatörlerine sırasıyla F_* ve F^* denilecektir. Bu durumda Teorem 4.17'den $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ olmak üzere, $F_*(A) \leq F(A) \leq F^*(A)$ 'dır yani F_* ve F^* operatörleri, OWA operatörlerine sırasıyla alt ve üst sınır oluşturur.

Teorem 4.18: $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ise $F_*(A) = \min_j (a_j)$ ve $F^*(A) = \max_j (a_j)$ 'dir (Yager, 1988).

Bu iki operatör sırasıyla kötümser ve iyimser karar davranışını temsil eder. Teorem 4.17 ve Teorem 4.18, OWA operatörlerinin dengeleme özelliğini sağladığını gösterir. Dengeleme özelliği sağlandığından, OWA operatörleri ve (minimum) ile veya (maksimum) operatörleri arasında kalır. Şekil 4.2'de OWA operatörünün $[0,1]$ aralığındaki yeri görülmektedir.



Şekil 4.2 $x_i \in [0,1]$ için OWA operatörünün $[0,1]$ aralığındaki yeri.

Bir OWA operatörünün *veyalık derecesi* (iyimserlik derecesi), onun ne kadar maksimum (veya) operatörü veya ne kadar minimum (ve) operatörü gibi davrandığının ölçümüdür. OWA operatörü, *veyalık* 1'e yaklaştıkça veya operatörüne, *veyalık* 0'a yaklaştıkça ve operatörüne yaklaşır. Bu şekilde bir ölçüm yolu Yager (1988) tarafından önerilmiştir.

Veyalık (İyimserlik) Derecesi

$$\text{veyalık}(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i)\omega_i$$

ile hesaplanır.

Örnek 4.6: $W^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ için, maksimum (veya) operatörünün veyalık derecesi:

$$\text{veyalık}(W^*) = \frac{1}{n-1} [(n-1).1 + (n-2).0 + \dots + (n-n).0] = 1 \text{ 'dir.}$$

Örnek 4.7: $W_* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ için, minimum (ve) operatörünün veyalık derecesi:

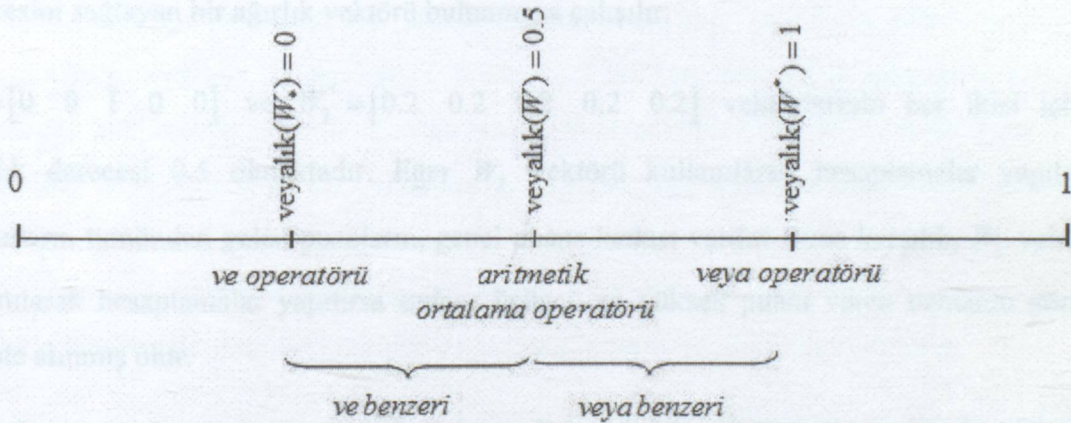
$$\text{veyalık}(W_*) = \frac{1}{n-1} [(n-1).0 + (n-2).0 + \dots + (n-n).1] = 0 \text{ 'dir.}$$

Örnek 4.8: $W = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ için, aritmetik ortalama operatörünün veyalık derecesi:

$$\text{veyalık}(W) = \frac{1}{n-1} \left[\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n} + \frac{n-n}{n} \right] = \frac{(n-1)n}{n(n-1)} = 0.5$$

olarak bulunur.

İlk, yani yüksek skorların bulunduğu pozisyonlara daha büyük ağırlıklar yerleştirdiğimizde operatörümüz *veya benzeri*; son, yani düşük skorların bulunduğu pozisyonlara daha büyük ağırlıklar yerleştirdiğimizde operatörümüz *ve benzeri* olacaktır. Şekil 4.3'de veyalık ölçümüne göre OWA operatörünün $[0,1]$ aralığındaki yeri görülmektedir.



Şekil 4.3 Veyalık ölçümüne göre OWA operatörünün $[0,1]$ aralığındaki yeri.

Örnek 4.9: Medyan operatörünün OWA ağırlıkları:

$$n \text{ tek ise } \omega_i = \begin{cases} 1, & i = \frac{n+1}{2} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases},$$

$$n \text{ çift ise } \omega_i = \begin{cases} 0.5, & i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olduğundan medyan operatörünün veyalık derecesi:

n tek ise

$$\text{veyalık}((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i)\omega_i = \frac{1}{n-1} (0+0+\dots+(n-\frac{n+1}{2})+\dots+0) = 0.5,$$

n çift ise

$$\text{veyalık}((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \frac{1}{n-1} (0+0+\dots+(n-\frac{n}{2})0.5+(n-\frac{n}{2}-1)0.5+\dots+0) = 0.5$$

olarak bulunur.

4.2.7.1 OWA Ağırlıklarının Hesabı

OWA ağırlıklarının nasıl hesaplanacağına dair doğal bir soru ortaya çıkmaktadır. Bunun için iki yöntem kullanılmaktadır. İlk yöntemde, bir veyalık derecesi seçilerek bu veyalık derecesini sağlayan bir ağırlık vektörü bulunmaya çalışılır.

$W_1' = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ ve $W_2' = [0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]$ vektörlerinin her ikisi içinde veyalık derecesi 0.5 olmaktadır. Eğer W_2 vektörü kullanılarak hesaplamalar yapılırsa, uzmanların tümünden gelen puanların, genel puana katkısı vardır. Buna karşılık, W_1 vektörü kullanılarak hesaplamalar yapılırsa sadece üçüncü en yüksek puanı veren uzmanın görüşü dikkate alınmış olur.

Bu bakış açısıyla, karar problemlerinde seçilen ağırlık vektörü ile ne kadar bilginin kullanıldığı da önemlidir. Ne kadar bilginin kullanıldığı, *dağılım* (dispersion) fonksiyonu ile hesaplanabilir.

$$\text{dağılım}(W) = -\sum_{i=1}^n \omega_i \ln \omega_i \geq 0 \quad (4.7)$$

Ağırlıklardan herhangi biri $\omega_k = 1$ için $\ln 1 = 0$ ve $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ için $\omega_i = 0$ olduğundan, $\text{dağılım}(W) = 0$ olur, dolayısıyla en az sayıda bilgi kullanılmıştır (Yager, 1988).

O halde, dağılımı en büyük olacak şekilde, belirli bir α veyalık derecesinde bir ağırlık vektörü matematik programlama teknikleri ile bulunabilir (Yager, 1993). Bu probleme ait model aşağıdaki gibidir.

$$\max z = -\sum_{i=1}^n \omega_i \ln \omega_i$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) \omega_i = \alpha$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

$$\omega_i \in [0,1]$$

İkinci bir yöntem ise *niceleyici yollu birleştirmedir*.

Dilsel Niceleyiciler (Yager, 1988; Chen ve Chen, 2005)

Klasik ikili mantık sadece iki dilsel niceleyici kullanmamıza imkân verir, bunlar $\exists$ (en az bir) ve $\forall$ (her) dir. Gerçek hayatta kullandığımız dilde ise bunların dışında *nereydeyse tümü, birazı, çoğu* gibi birçok dilsel niceleyici kullanılır.

Çok kriterli karar problemleri, en iyi alternatifi seçilmesinde birçok çelişen kriterin (amacın) göz önüne alındığı problemlerdir. Bu problemlerin çözümü genellikle tüm kriterler için optimal çözüm değildir (Valls, 2003). Karar vericiler bazı amaçlarda kazanmak için bazı amaçlardan belli ölçülerde ödün vermek (*trade-off*) durumundadırlar. Bu nedenle, karar verici alternatifler tarafından kriterlerin ne kadarının sağlanmasını istediğini sözlerle ifade edebilir. Karar verici, “Tüm kriterler sağlanmalı.”, “Birçok kriter sağlanmalı.”, “Kriterlerin en az yarısı sağlanmalı.”, “En az bir kriter sağlanmalı.”, “Kriterlerin en az %25 i sağlanmalı.”, vb ifadelerle alternatiflerin kriterleri hangi oranda sağlanmasını istediği bilgisini verir.

Tüm kriterlerin sağlanmasını isteyen bir karar verici seçeceği adayın nitelikleri hakkında dikkatlidir. Seçiminde minimum risk üstlenmektedir. Böyle bir karar vericiye *riskten kaçınan karar verici* denir. Toleranssız veya kötümser bir davranış sergilemektedir.

Buna karşılık, karar verici için en az bir kriterin sağlanması yeterli ise böyle karar vericiye *risk üstlenen karar verici* denir. Bu durumda maksimum risk üstlenilir. Toleranslı veya iyimser bir davranış sergilemektedir. Bunların dışında, karar verici *riske nötr* bir davranış da sergileyebilir.

Kriter kümesi $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ olmak üzere, x adayının C_i kriterini sağlama derecesi $C_i(x)$

olsun. ($C_i(x) \in [0,1]$ dir.)

Karar vericinin, kriterlerin tamamının aday tarafından sağlanmasını istediğini kabul edelim. x adayının kriterlerin tümünü sağlama derecesi $D(x)$ olsun.

O halde Bellman ve Zadeh'e göre, C_1 ve C_2 ve ... ve C_n kriteri sağlanmalıdır.

$$D(x) = \min \{C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)\} \quad (4.8)$$

Benzer şekilde, karar vericinin kriterlerden en az bir tanesinin aday tarafından sağlanmasını istediğini kabul edelim. Bu durumda kriterlerden en az birinin x tarafından sağlanma derecesi,

$$E(x) = \max \{C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)\}$$

ile bulunur ve kriterlerden C_1 veya C_2 veya ... veya C_n sağlanır.

$S_0 = 0$ ve $S_n = 1$ olmak üzere, $S_K = \sum_{j=0}^K \omega_j$ olsun. Bir alternatif tarafından K kriter sağlansın,

geriye kalan $n-K$ kriter sağlanmasın. Sağlanan kriter miktarını $B' = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{K \text{ tane}}, 0, 0, \dots, 0)$ girdi

vektörüyle belirtelim.

Bu durumda,

$$F_W(B) = W'B = \sum_{i=1}^K \omega_i = S_K \quad (4.9)$$

olur.

$F_W(B) = S_K$ olduğundan, alternatifin kriterleri $\frac{K}{n}$ oranında sağlamasından veya alternatifin K tane kriteri sağlamasından karar vericinin duyduğu tatminin S_K olduğu düşünülebilir.

Dahası $S_K = S_{K-1} + \omega_K$ olduğundan $K-1$ kriterin sağlanmasından duyulan tatminden K kriterin sağlanmasından duyulan tatmine geçilirse ω_K marjinal tatmin olarak yorumlanabilir.

Örnek 4.10: Ve operatörü ele alınırsa, hiçbir kriter sağlanmadığında, 1, 2, ... veya $(n-1)$ kriter sağlandığında tatmin yoktur. Kriterlerin tamamı sağlandığında tatmin % 100'dür.

Ve operatörüne ait ağırlık vektörü $W_*' = (0, 0, \dots, 0, 1)$ olduğundan, (4.9) denkleminde S_i

tatmin dereceleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = S_0 + \omega_1 = 0 + 0 = 0$$

$$S_2 = S_1 + \omega_2 = 0$$

$\vdots$

$$S_n = S_{n-1} + \omega_n = 0 + 1 = 1$$

Örnek 4.11: Veya operatörü ele alınırsa, hiçbir kriter sağlanmadığında tatmin yoktur, 1,2,... veya n kriter sağlandığında tatmin % 100'dür.

Veya operatörüne ait ağırlık vektörü $W'' = (1, 0, \dots, 0, 0)$ olduğundan, (4.9) denkleminde S_i tatmin dereceleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = S_0 + \omega_1 = 0 + 1 = 1$$

$$S_2 = S_1 + \omega_2 = 1 + 0 = 1$$

$\vdots$

$$S_n = S_{n-1} + \omega_n = 1 + 0 = 1$$

Örnek 4.12: Aritmetik ortalama operatörü ele alındığında tatmindeki artış doğrusaldır.

Aritmetik ortalama operatörüne ait ağırlık vektörü $W' = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ olduğundan, (4.9)

denkleminde S_i tatmin dereceleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = S_0 + \omega_1 = \frac{1}{n}$$

$$S_2 = S_1 + \omega_2 = \frac{2}{n}$$

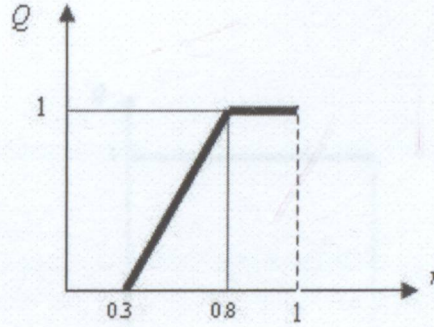
$\vdots$

$$S_n = S_{n-1} + \omega_n = 1$$

Zadeh'e göre niceleyiciler iki türdür. Birinci tür eleman sayısı hakkında bilgi verir, ikinci tür ise elemanlar için bir oran verir. Yine Zadeh'e göre bu niceleyiciler, birim aralığın veya reel sayıların bulanık altkümeleri ile temsil edilebilirler. Bu ayırım niceleyicinin kesin bir ifade veya oran tipli bir ifade olmasıyla ilişkilidir.

Örnek 4.13: Q , çoğu (*most*) gibi göreceli (*relative*) bir niceleyici ise birim aralığın bir bulanık

altkümesi olarak ifade edilir. $\forall r \in I$ için r oranında obje, Q kavramını $Q(r)$ derecesi ile sağlar. Yani kriterlerin Q kadarının sağlanmasını isteyen bir karar vericiye, r oranında kriterin sağlanması $Q(r)$ kadar tatmin sağlar. Kriterlerin çoğunun sağlanmasını isteyen bir karar vericiye kriterlerin % 80'inin ya da daha fazlasının sağlanması tam tatmin sağlar. Şekil 4.4'te verilen *çoğu* dilsel niceleyicisinin apsisi sağlanan kriter oranını temsil ederken, ordinatı da tatmin derecesini temsil eder.

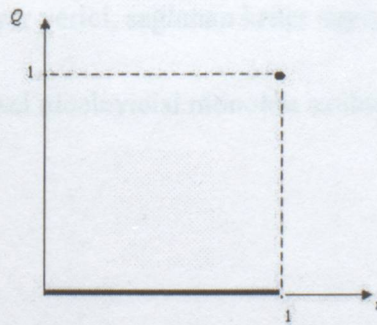


Şekil 4.4 Bir bulanık küme olarak *çoğu* dilsel niceleyicisi (Herrera vd.,1997).

Örnek 4.14: “*Tümü*” (*All*) niceleyicisi birim aralığın bir bulanık alt kümesi olarak gösterilmek istenilirse ancak kriterlerin tamamı sağlandığında tam tatmin olduğundan, sağlanan kriter oranı r olmak üzere,

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & r \neq 1 \\ 1, & r = 1 \end{cases}$$

olur.

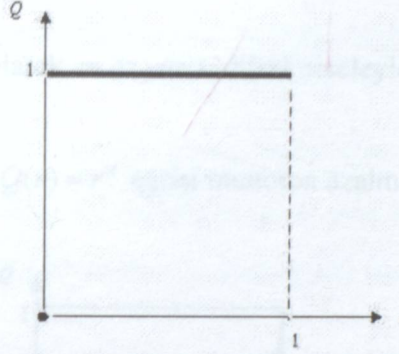


Şekil 4.5 Bir bulanık küme olarak *tümü* dilsel niceleyicisi.

Örnek 4.15: “En az bir” (*There exists*) niceleyicisi birim aralığın bir bulanık alt kümesi olarak gösterilmek istenilirse sadece bir kriter sağlansa dahi tam tatmin olduğundan, sağlanan kriter oranı r olmak üzere,

$$Q(r) = \begin{cases} 1, & r \neq 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

olur.



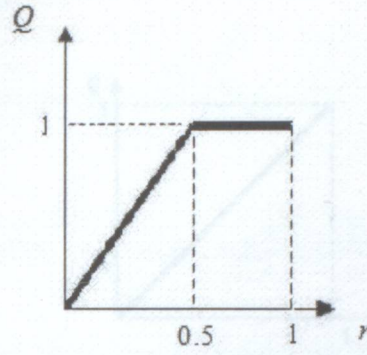
Şekil 4.6 Bir bulanık küme olarak *en az biri* dilsel niceleyicisi.

Tanım 4.30: $Q: [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa *monoton azalmayan niceleyici* adını alır.

- 1) $Q(0) = 0$ (Hiçbir kriter sağlanmadığında tatmin yoktur.)
- 2) $Q(1) = 1$ (Kriterlerin tamamı sağlandığında tam tatmin vardır.)
- 3) $r_1 > r_2 \Rightarrow Q(r_1) \geq Q(r_2)$ (Karar verici, sağlanan kriter sayısı arttıkça daha az tatmin olmaz.)

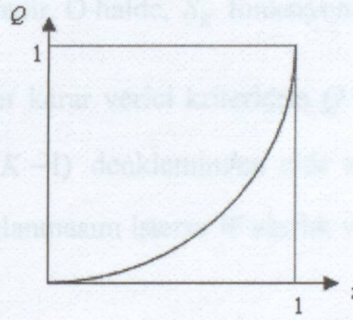
Örnek 4.16: “En az yarısı” dilsel niceleyicisi monoton azalmayan niceleyicidir.

Örnek 4.19: $Q(r) = r$ fonksiyonu monoton azalmayan bir niceleyicidir.



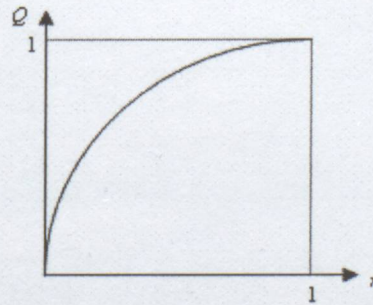
Şekil 4.7 Bir bulanık küme olarak *en az yarıtı* dilsel niceleyicisi (Herrera vd., 1997).

Örnek 4.17: $\alpha > 1$ olmak üzere, $Q(r) = r^\alpha$ eğrisi monoton azalmayan bir niceleyicidir.



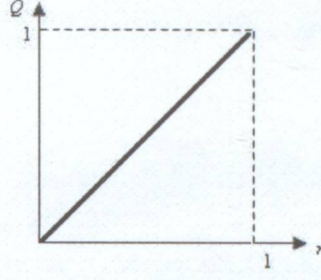
Şekil 4.8 Monoton azalmayan niceleyici ($\alpha \in \mathbb{R}, Q(r) = r^\alpha, \alpha > 1$).

Örnek 4.18: $\alpha < 1$ olmak üzere, $Q(r) = r^\alpha$ eğrisi monoton azalmayan bir niceleyicidir.



Şekil 4.9 Monoton azalmayan niceleyici ($\alpha \in \mathbb{R}, Q(r) = r^\alpha, \alpha < 1$).

Örnek 4.19: $Q(r) = r$ fonksiyonu monoton azalmayan bir niceleyicidir.



Şekil 4.10 Monoton azalmayan niceleyici ($Q(r) = r$).

Q fonksiyonunun daha önce (4.9) eşitliği ile verilmiş olan S_K fonksiyonu ile benzer özelliklere sahip olduğu görülür. Her iki fonksiyon da K tane kriterin sağlanmasından elde edilen tatmin derecesini vermektedir. O halde, S_K fonksiyonu yerine Q fonksiyonu alınabilir.

$S_K = S_{K-1} + \omega_K$ olduğundan, eğer karar verici kriterlerin Q tanesinin sağlanmasını isterse W ağırlık vektörü $\omega_K = Q(K) - Q(K-1)$ denkleminde elde edilir. Benzer şekilde, eğer karar verici kriterlerin Q kadarının sağlanmasını isterse W ağırlık vektörü

$$\omega_K = Q\left(\frac{K}{n}\right) - Q\left(\frac{K-1}{n}\right)$$

denkleminde bulunur.

$Q(0) = 0$ ve $Q(1) = 1$ olduğundan, önem ağırlıkları

$$\omega_1 = Q\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\omega_2 = Q\left(\frac{2}{n}\right) - Q\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\omega_3 = Q\left(\frac{3}{n}\right) - Q\left(\frac{2}{n}\right)$$

$\vdots$

$$\omega_{n-1} = Q\left(\frac{n-1}{n}\right) - Q\left(\frac{n-2}{n}\right)$$

$\omega_n = 1 - Q\left(\frac{n-1}{n}\right)$ olarak bulunur.

Bu eşitliklerin her iki tarafı sırasıyla $(n-1), (n-2), (n-3), \dots, (n-(n-1))$ ve $(n-n)$ sayılarıyla çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$(n-1)\omega_1 + (n-2)\omega_2 + \dots + (n-(n-1))\omega_{n-1} + (n-n)\omega_n = Q\left(\frac{1}{n}\right) + Q\left(\frac{2}{n}\right) + Q\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + Q\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı da $(n-1)$ sayısına bölünürse, eşitliğin sol tarafı daha önceden tanımlanmış veyalık ölçümüne eşit olur. Eşitliğin sağ tarafına da $Q\left(\frac{n}{n}\right) = Q(1) = 1$ eklenip, çıkartılırsa

$$\text{veyalık}((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \frac{1}{n-1} \left\{ Q\left(\frac{1}{n}\right) + Q\left(\frac{2}{n}\right) + Q\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + Q\left(\frac{n-1}{n}\right) + Q\left(\frac{n}{n}\right) - 1 \right\}$$

olarak elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\text{veyalık}((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n Q\left(\frac{i}{n}\right) - 1 \right\} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n Q\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n-1}$$

olur.

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n Q\left(\frac{i}{n}\right)$$

ifadesi n sayısı ile genişletilirse

$$\text{veyalık}((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \frac{n}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n Q\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n-1}$$

olur. Buradan

$$\text{veyalık}(W) = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n-1}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafında $n \rightarrow \infty$ iken limiti alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \text{veyalık}(W) \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n-1} \right\},$$

O halde, bir OWA ünlüğünün veyalık derecesi, bir bulanık küme olarak verilen dilsel veyalık(W) = $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{Q(\frac{i}{n})}{n}$ (4.10) olarak bulunur.

Şekil 4.11'deki eğrinin altında kalan alanı hesaplamak için $[0,1]$ aralığını n eşit parçaya bölelim. Bu durumda, her bir parçanın uzunluğu

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$$

Olur. Oluşan dikdörtgenlerin kısa kenarı $\Delta r_i = \frac{1}{n}$, uzun kenarı $Q(\frac{i}{n}) = Q(r_i)$ olduğundan, bu dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$\sum_{i=1}^n Q(r_i) \Delta r_i$$

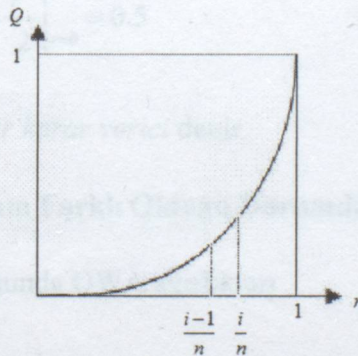
ile bulunur. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa eğrinin altında kalan alan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Q(r_i) \Delta r_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{Q(\frac{i}{n})}{n} = \int_0^1 Q(r) dr$$

bulunur ve sonuç olarak (4.10) denkleminde,

$$\text{veyalık}(W) = \int_0^1 Q(r) dr$$

olur.



Şekil 4.11 Monoton azalmayan dilsel niceleyici eğrisinin altında kalan alanın bulunması.

O halde, bir OWA operatörünün veyalık derecesi, bir bulanık küme olarak verilen dilsel niceleyici eğrisinin altında kalan alana eşittir. Karar verici kriterlerin hangi oranda sağlanmasını istediği bilgisini verdiğinde, bir bulanık küme olan dilsel niceleyici vasıtasıyla OWA ağırlıkları

$$\omega_K = Q\left(\frac{K}{n}\right) - Q\left(\frac{K-1}{n}\right)$$

denkleminde hesaplanır. Buradan, karar vericinin karar davranışı ile ilgili de yorum yapılabilir. Bu yorumlar aşağıda örneklendirilmiştir.

Örnek 4.20: Daha önceden Örnek 4.17’de verilmiş niceleyici için, $\alpha > 1$ olduğundan veyalık ölçümü 0.5’den küçük bulunur.

$$\text{veyalık}(W) = \int_0^1 Q(r) dr = \int_0^1 r^\alpha dr = \left. \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_{r=0}^1 = \frac{1}{\alpha+1} < 0.5$$

Bu durumda operatör *ve benzeridir*. Bu türlü karar vericiye *riskten kaçınan karar verici* denir.

Örnek 4.21: Daha önceden Örnek 4.18’de verilmiş niceleyici için, $\alpha < 1$ olduğundan veyalık ölçümü 0.5’den büyük bulunur.

$$\text{veyalık}(W) = \int_0^1 Q(r) dr = \int_0^1 r^\alpha dr = \left. \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_{r=0}^1 = \frac{1}{\alpha+1} > 0.5$$

Bu durumda operatör *veya benzeridir*. Bu türlü karar vericiye *risk üstlenen karar verici* denir.

Örnek 4.22: Daha önceden Örnek 4.19’da verilmiş niceleyici için, $\alpha = 1$ olduğundan veyalık ölçümü 0.5 bulunur.

$$\text{veyalık}(W) = \int_0^1 Q(r) dr = \int_0^1 r dr = \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^1 = 0.5$$

Bu türlü karar vericiye *riske nötr karar verici* denir.

Kriterlerin Önem Ağırlıklarının Farklı Olduğu Durumda OWA Ağırlıklarının Hesabı

Kriterler eşit öneme sahip olduğunda OWA ağırlıkları

$$\omega_K = Q\left(\frac{K}{n}\right) - Q\left(\frac{K-1}{n}\right)$$

denklemleri ile hesaplanır. Kriterlerin önem ağırlıklarının farklı olduğu bir durumu göz önüne alalım. Bir x alternatifinin C_i kriterini sağlama derecesi $C_i(x)$ ve i kriterinin önem ağırlığı v_i olmak üzere, $(C_i(x), v_i)$ ikilileri verilmiş olsun.

j . en büyük $C_i(x)$ değeri b_j , bu kritere ait önem ağırlığı u_j , $S_j = \sum_{k=1}^j u_k$ ve $T = \sum_{k=1}^n u_k$ olmak üzere, OWA ağırlıkları

$$\omega_j(x) = Q\left(\frac{S_j}{T}\right) - Q\left(\frac{S_{j-1}}{T}\right)$$

ile hesaplanır (Yager, 1995).

Örnek 4.23: x ve y alternatifler, $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ kriter kümesi olarak alınsın. Kriterlerin önem dereceleri sırasıyla $v_1 = 1, v_2 = 0.6, v_3 = 0.5, v_4 = 0.9$ olsun. Alternatiflerin kriterleri sağlama dereceleri ise

$$C_1(x) = 0.7, C_2(x) = 1, C_3(x) = 0.5, C_4(x) = 0.6$$

$$C_1(y) = 0.6, C_2(y) = 0.3, C_3(y) = 0.9, C_4(y) = 1$$

olarak verilsin.

$Q(r) = r^2$ niceleyicisini kullanarak, öncelikle x alternatifi için $b_1 = 1, b_2 = 0.7, b_3 = 0.6, b_4 = 0.5$ ve $u_1 = 0.6, u_2 = 1, u_3 = 0.9, u_4 = 0.5$ bulunur. O halde, OWA ağırlıkları

$$\omega_1(x) = Q\left(\frac{0.6}{3}\right) - Q\left(\frac{0}{3}\right) = (0.2)^2 - 0 = 0.04$$

$$\omega_2(x) = Q\left(\frac{1.6}{3}\right) - Q\left(\frac{0.6}{3}\right) = 0.2844 - 0.04 = 0.2444$$

$$\omega_3(x) = Q\left(\frac{2.5}{3}\right) - Q\left(\frac{1.6}{3}\right) = 0.6944 - 0.2844 = 0.41$$

$$\omega_4(x) = Q\left(\frac{3}{3}\right) - Q\left(\frac{2.5}{3}\right) = 1 - 0.6944 = 0.3056 \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$$F(C_1(x), C_2(x), C_3(x), C_4(x)) = \sum_{i=1}^4 \omega_i b_i = 1 \times 0.04 + 0.7 \times 0.2444 + 0.6 \times 0.41 + 0.5 \times 0.3056 = 0.6099$$

olur.

Aynı işlemler y alternatifi için de yapılırsa $b_1 = 1, b_2 = 0.9, b_3 = 0.6, b_4 = 0.3$ ve $u_1 = 0.9, u_2 = 0.5, u_3 = 1, u_4 = 0.6$ bulunur. OWA ağırlıkları ise,

$$\omega_1(y) = Q\left(\frac{0.9}{3}\right) - Q\left(\frac{0}{3}\right) = (0.3)^2 - 0 = 0.09$$

$$\omega_2(y) = Q\left(\frac{1.4}{3}\right) - Q\left(\frac{0.9}{3}\right) = 0.2178 - 0.09 = 0.1278$$

$$\omega_3(y) = Q\left(\frac{2.4}{3}\right) - Q\left(\frac{1.4}{3}\right) = 0.64 - 0.2178 = 0.4222$$

$$\omega_4(y) = Q\left(\frac{3}{3}\right) - Q\left(\frac{2.4}{3}\right) = 1 - 0.64 = 0.36 \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$$F(C_1(y), C_2(y), C_3(y), C_4(y)) = \sum_{i=1}^4 \omega_i b_i = 1 \times 0.09 + 0.9 \times 0.1278 + 0.6 \times 0.4222 + 0.3 \times 0.36 = 0.5663$$

olur. Bu sonuçlara bakarak x alternatifinin y alternatifinden daha iyi olduğunu söylenebilir (Yager, 1995).

4.2.8 Dilsel (Linguistik) Birleştirme Operatörleri (Herrera ve Herrera-Viedma, 2000; Xu, 2004a; 2004b; 2004c)

Bazı karar problemlerinde değerlendirmeler kesin ve kantitatif bir formda yapılamayabilir. Örneğin insan algısına göre değişen, karmaşık ya da tam olarak tanımlanamayan bir nitelendirme, genellikle sayılarla değil sözlerle yapılır. Bazı durumlarda ise yapısından ötürü bilgi sayılamaz nitelikte olduğundan sözlerle belirtilir. Örneğin bir arabanın rahatlığı veya tasarımı hakkında *iyi*, *orta*, *kötü* gibi değerlendirmeler yapılır. Bazı durumlarda da hesaplamalardaki güçlüklerden ötürü, kesin sayısal veriler yerine yaklaşık değerler kabul edilebilir. Örneğin bir arabanın hızı ile ilgili değerlendirme yapılırken saatte 160 km. yerine *hızlı* değerlendirmesi yeterlidir. Bu gibi durumlarda linguistik yaklaşım gereklidir.

Linguistik yaklaşım, değerlendirmelerin sayılarla değil, sözcük ya da söz öbeklerinden oluşan linguistik değişkenlerle yapıldığı yaklaşık bir tekniktir. Her linguistik değişken, bir *etiket* ve bir *anlam değeri* ile karakterize edilir. *Etiket*, linguistik terim kümesine ait bir sözcük ya da söz öbeğidir. *Anlam değeri* ise terimi temsil eden bir bulanık kümedir. Kelimeler sayılara göre

daha esnek olduğundan, linguistik değişken kavramı, karmaşık veya iyi tanımlanmamış bir ifadeye yaklaşık bir sayısal değer verme amacına hizmet eder.

Linguistik karar analizi, linguistik bilginin yer aldığı karar verme problemlerini çözmek üzere linguistik yaklaşımı kullanır. Bu yaklaşım, kesin bir şekilde ifade edilmemiş bilgiyi, esnek bir şekilde belirtmeye imkân sağlar.

Linguistik terim kümesinin seçimi ve elemanları temsil eden anlam değerlerinin belirlenmesi

Bu aşama, linguistik ifadeler uzayının kurulmasını içerir. Alternatiflerin çeşitli kriterlere göre linguistik performans değerleri bu kümeden seçilir. Linguistik terim kümesini seçmek üzere, öncelikle kümenin eleman sayısı, kümedeki *etiketler* ve *anlam değerleri* belirlenmelidir. Genellikle bu kümenin eleman sayısı 7, 9 ya da 11 gibi tek bir sayıdır. Eleman sayısı 13'ü geçmez. Kümenin elemanları küçükten büyüğe sıralanabilmelidir. Eleman sayısının tek olmasının nedeni, sıralı terimlerden ortadakinin *yaklaşık 0.5* sayısal değerini temsil etmesi gerekliliğindendir. Ortadaki terimin sağına ve soluna simetrik olarak diğer terimler yerleştirilir.

Linguistik terim kümesinde kullanılan temel unsurlar şunlardır: Birincil terimler (Örneğin; *düşük, orta, yüksek*), tamlamalar (Örneğin; *yüksek değil, çok yüksek, daha yüksek, ne yüksek ne düşük*), ilişkiler (Örneğin; *-den daha yüksek, -den daha düşük*) ve bağlaçlar (Örneğin; *ve, veya*).

Linguistik terim kümelerine örnek olarak, 9 elemanlı {*oldukça zayıf, çok zayıf, zayıf, daha az zayıf, ortalama, daha az iyi, iyi, çok iyi, oldukça iyi*} kümesi ve 7 elemanlı {*çok yaşlı, yaşlı, yaşlı değil, ne yaşlı ne genç, genç değil, genç, çok genç*} kümesi verilebilir.

Her linguistik terimin *anlam değeri*, bir bulanık küme olarak verilebilir. Örneğin lineer yamuksal bir bulanık sayı belirsizliğin temsili için kullanılabilir. Bu durumda, aşağıda verilen 9 elemanlı linguistik terim kümesinin *anlam değerleri* şöyledir:

$$K = Kesin = (1, 1, 1, 1)$$

$$SDO = Son Derece Olası = (0.93, 0.98, 0.99, 1)$$

$$ÇO = Çok Olası = (0.72, 0.78, 0.92, 0.97)$$

$$ŞV = Şansı Var = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86)$$

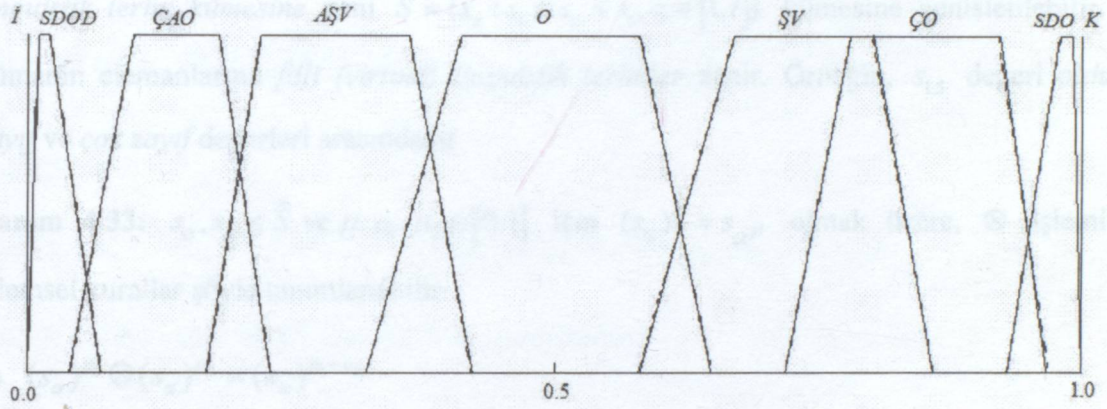
$O = Olabilir = (0.32, 0.41, 0.58, 0.65)$

$A\mathcal{S}V = Az \mathcal{S}ansı Var = (0.17, 0.22, 0.36, 0.42)$

$\mathcal{C}AO = Çok Az Olası = (0.04, 0.10, 0.18, 0.23)$

$SDOD = Son Derece Olasılık Dışı = (0, 0.01, 0.02, 0.07)$

$\mathcal{I} = İmkânsız = (0, 0, 0, 0)$



Şekil 4.12 9 elemanlı bir linguistik terim kümesi (Herrera ve Herrera-Viedma, 2000).

Tanım 4.33: s_i linguistik bir değişkeni temsil eden mümkün değer olmak üzere, sonlu $S = \{s_i : i = 1, 2, \dots, t\}$ kümesi aşağıdaki karakteristiklere sahip ise *sıralı ayrık terim kümesi* adını alır.

1) Küme sıralıdır.

$$i \geq j \Rightarrow s_i \geq s_j$$

2) Değilleme Fonksiyonu

$$\text{neg}(s_i) = s_{t+1-i}$$

3) Maksimum Operatörü

$$s_i \geq s_j \Rightarrow \max\{s_i, s_j\} = s_i$$

4) Minimum Operatörü

$$s_i \geq s_j \Rightarrow \min\{s_i, s_j\} = s_j$$

Örnek 4.24: $S = \{s_1 = \text{oldukça zayıf}, s_2 = \text{çok zayıf}, s_3 = \text{zayıf}, s_4 = \text{daha az zayıf}, s_5 = \text{ortalama}, s_6 = \text{daha az iyi}, s_7 = \text{iyi}, s_8 = \text{çok iyi}, s_9 = \text{oldukça iyi}\}$ kümesi sıralı ayırık terim kümesidir. Örneğin, $\text{neg}(s_1) = s_{9+1-1} = s_9$ yani *oldukça zayıf* teriminin değil *oldukça iyi* terimidir.

Verilen tüm bilginin kayba uğramadan kullanılması için sıralı ayırık terim kümesi, sürekli linguistik terim kümesine yani $\bar{S} = \{s_\alpha : s_i \leq s_\alpha \leq s_t, \alpha \in [1, t]\}$ kümesine genişletilebilir. Bu kümenin elemanlarına *fiili (virtual) linguistik terimler* denir. Örneğin, $s_{1.5}$ değeri *oldukça zayıf* ve *çok zayıf* değerleri arasındadır.

Tanım 4.33: $s_\alpha, s_\beta \in \bar{S}$ ve $\mu, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$ için $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$ olmak üzere, $\otimes$ işlemi ile işlemsel kurallar şöyle tanımlanabilir.

$$1) (s_\alpha)^{\mu_1} \otimes (s_\alpha)^{\mu_2} = (s_\alpha)^{\mu_1 + \mu_2}$$

$$2) (s_\alpha \otimes s_\beta)^\mu = (s_\alpha)^\mu \otimes (s_\beta)^\mu$$

$$3) s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$$

Tanım 4.34: $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olsun.

$\alpha = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\omega_i}$ ve $s_{\alpha_i} \in \bar{S}$ olmak üzere, $\text{LWGA}_W : \bar{S}^n \rightarrow \bar{S}$ fonksiyonu

$$\text{LWGA}_W(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) = (s_{\alpha_1})^{\omega_1} \otimes (s_{\alpha_2})^{\omega_2} \otimes \dots \otimes (s_{\alpha_n})^{\omega_n} = s_\alpha$$

şeklinde tanımlanıyorsa *linguistik ağırlıklı geometrik ortalama (LWGA) operatörü* adını alır.

Örnek 4.25: $W = (0.3, 0.1, 0.4, 0.2)$ alınırsa, $\text{LWGA}_W(s_4, s_7, s_3, s_1)$ değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\text{LWGA}_W(s_4, s_7, s_3, s_1) = (s_4)^{0.3} \otimes (s_7)^{0.1} \otimes (s_3)^{0.4} \otimes (s_1)^{0.2} = s_{4^{0.3}} \otimes s_{7^{0.1}} \otimes s_{3^{0.4}} \otimes s_{1^{0.2}}$$

$$= s_{1.516} \otimes s_{1.215} \otimes s_{1.552} \otimes s_1 = s_{2.859}$$

Teorem 4.19: LWGA operatörü dengeleyicidir.

İspat 4.19: $\min\{s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}\} = s_{\alpha}$ ve $\max\{s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}\} = s_{\beta}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \text{LWGA}_W(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) &= (s_{\alpha_1})^{\omega_1} \otimes (s_{\alpha_2})^{\omega_2} \otimes \dots \otimes (s_{\alpha_n})^{\omega_n} \\ &\leq (s_{\beta})^{\omega_1} \otimes (s_{\beta})^{\omega_2} \otimes \dots \otimes (s_{\beta})^{\omega_n} = s_{\beta}^{\omega_1} s_{\beta}^{\omega_2} \dots s_{\beta}^{\omega_n} = s_{\beta^{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}} = s_{\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LWGA}_W(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) &= (s_{\alpha_1})^{\omega_1} \otimes (s_{\alpha_2})^{\omega_2} \otimes \dots \otimes (s_{\alpha_n})^{\omega_n} \\ &\geq (s_{\alpha})^{\omega_1} \otimes (s_{\alpha})^{\omega_2} \otimes \dots \otimes (s_{\alpha})^{\omega_n} = s_{\alpha}^{\omega_1} s_{\alpha}^{\omega_2} \dots s_{\alpha}^{\omega_n} = s_{\alpha^{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}} = s_{\alpha} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\min\{s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}\} \leq \text{LWGA}_W(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) \leq \max\{s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}\}$$

olur ve dolayısıyla LWGA operatörü dengeleyicidir.

Tanım 4.35: $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olsun. $s_{\alpha_j} \in \bar{S}$,

s_{α_j} elemanlarının i . en büyük elemanı β_i ve $\beta = \prod_{i=1}^n \beta_i^{\omega_i}$ olmak üzere, $\text{LOWGA} : \bar{S}^n \rightarrow \bar{S}$

fonksiyonu

$$\text{LOWGA}_W(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) = (s_{\beta_1})^{\omega_1} \otimes (s_{\beta_2})^{\omega_2} \otimes \dots \otimes (s_{\beta_n})^{\omega_n} = s_{\beta}$$

şeklinde tanımlanıyorsa *linguistik sıralı ağırlıklı geometrik ortalama (LOWGA) operatörü* adını alır.

Örnek 4.26: $W = (0.3, 0.1, 0.4, 0.2)$ alınırsa $\text{LOWGA}_W(s_4, s_7, s_3, s_1)$ değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \text{LOWGA}_W(s_4, s_7, s_3, s_1) &= (s_7)^{0.3} \otimes (s_4)^{0.1} \otimes (s_3)^{0.4} \otimes (s_1)^{0.2} = s_{7^{0.3}} \otimes s_{4^{0.1}} \otimes s_{3^{0.4}} \otimes s_{1^{0.2}} \\ &= s_{1.793} \otimes s_{1.149} \otimes s_{1.552} \otimes s_1 = s_{3.197} \end{aligned}$$

LOWGA fonksiyonu değişmeli, idempotent, monoton ve dengeleyicidir.

Tanım 4.36: $\omega_i, x_i \in S$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_i \{ \min \{ \omega_i, x_i \} \}$$

şeklinde tanımlanan A operatörüne *linguistik max-min operatörü* denir (Xu ve Da, 2003).

Tanım 4.37: $\omega_i, x_i \in S$ olmak üzere,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min_i \{ \max \{ \omega_i, x_i \} \}$$

şeklinde tanımlanan A operatörüne *linguistik min-max operatörü* denir (Xu ve Da, 2003).

4.2.9 Bulanık İntegraller (Grabisch ve Roubens, 2000; Marichal, 2000a; 2000b, 2004)

Aritmetik benzeri ortalamalar ve ağırlıklı ortalamalar, kriterler bağımsız olduğunda, yani kriterler arasında etkileşim olmadığında kullanılabilir. Bunun nedeni, kriterler arasındaki etkileşimin (pozitif veya negatif sinerji) bu ortalamalar ile modellenmesine imkân sağlayan bir yöntemin olmamasıdır. Kriterler arasında etkileşim olduğunda, ağırlıklar, toplamsal olmayan bir küme fonksiyonu yardımıyla hesaplanır. Bu durumda her bir kriterin yanı sıra, tüm kriter alt kümeleri de ağırlıklandırılmış olur. Bu ağırlıkların hesabı için, öncelikle *bulanık metrik* (fuzzy measure) kavramı tanımlanmıştır.

Kriter kümesi $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ olsun.

Tanım 4.38: C kümesinin kuvvet kümesi, yani tüm altkümelerinden oluşan küme $P(C)$ olmak üzere, $g: P(C) \rightarrow [0, 1]$ küme fonksiyonu

- 1) $g(\emptyset) = 0$
- 2) $g(C) = 1$
- 3) $A, B \subseteq C$ olmak üzere, $A \subseteq B$ ise $g(A) \leq g(B)$ 'dir.

aksiyomlarını sağlıyorsa C kümesi üzerinde *bulanık metrik* adını alır.

A kümesi kriterlerin bir kombinasyonu olmak üzere, $g(A)$ bu kriter kümesinin önem ağırlığı olarak yorumlanabilir.

$A \cap B = \emptyset$ olmak üzere, g bulanık metriği $g(A \cup B) = g(A) + g(B)$ eşitliğini sağlıyorsa *toplamsal (additive) bulanık metrik* adını alır. Benzer şekilde, $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere, g bulanık metriği $g(A \cup B) \geq g(A) + g(B)$ eşitsizliğini sağlıyorsa *süper toplamsal*

(superadditive) bulanık metrik, $g(A \cup B) \leq g(A) + g(B)$ eşitsizliğini sağlıyorsa alt toplamsal (subadditive) bulanık metrik adını alır. Eğer bulanık metrik toplamsal değilse, kriterler etkileşimlidir.

Tanım 4.39: $\lambda > -1$ ve $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere, alt toplamsal g bulanık metriği

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B) + \lambda g(A)g(B) \quad (4.10)$$

eşitliğini sağlıyorsa Sugeno metriği (λ metriği) adını alır.

Önerme 4.2: $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ olmak üzere, $\lambda > -1$ parametresi

$$1 + \lambda = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda g(C_i)) \quad (4.11)$$

denklemini ile hesaplanır.

Örnek 4.27: $C = \{1, 2, 3\}$ olarak alınsın. (4.10) denkleminde,

$$g(\{1, 2\}) = g(\{1\}) + g(\{2\}) + \lambda g(\{1\})g(\{2\}) \text{ ve}$$

$$g(\{1, 2, 3\}) = g(\{1, 2\}) + g(\{3\}) + \lambda g(\{1, 2\})g(\{3\}) \text{ olarak bulunur. Buradan,}$$

$$g(\{1, 2, 3\}) = g(\{1\}) + g(\{2\}) + \lambda g(\{1\})g(\{2\}) + g(\{3\}) + \lambda g(\{3\})(g(\{1\}) + g(\{2\}) + \lambda g(\{1\})g(\{2\}))$$

$$g(\{1, 2, 3\}) = g(\{1\}) + g(\{2\}) + g(\{3\}) + \lambda g(\{1\})g(\{2\}) + \lambda g(\{1\})g(\{3\}) + \lambda g(\{2\})g(\{3\})$$

$$+ \lambda^2 g(\{1\})g(\{2\})g(\{3\})$$

elde edilir. İkinci bulanık metrik olma aksiyomu gereği $g(\{1, 2, 3\}) = 1$ olduğundan,

$$g(\{1\}) + g(\{2\}) + g(\{3\}) + \lambda g(\{1\})g(\{2\}) + \lambda g(\{1\})g(\{3\}) + \lambda g(\{2\})g(\{3\}) + \lambda^2 g(\{1\})g(\{2\})g(\{3\}) = 1$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını da önce λ ile çarpıp, sonra her iki tarafa da 1 eklersek,

$$1 + \lambda = \prod_{i=1}^3 (1 + \lambda g(\{i\})) \text{ olduğu bulunur.}$$

4.2.9.1 Sugeno İntegrali

Tanım 4.40: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinin $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ eşitsizliğini sağlayan permütasyonu $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$ ve g bir bulanık metrik olmak üzere,

$$S_g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^n [x_{(i)} \wedge g(\{(i), \dots, (n)\})] \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanan $S_g : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna *ayrık Sugeno integrali* denir.

Tanım 4.41: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinin $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ eşitsizliğini sağlayan permütasyonu $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$ ve $1 = \omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_n$ olmak üzere,

$$OWMAX_{\omega}((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \bigvee_{i=1}^n (\omega_i \wedge x_{(i)})$$

şeklinde tanımlanan $OWMAX_{\omega} : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ operatörüne, *sıralı ağırlıklı maksimum operatörü* denir (Smolikova ve Wachowiak, 2002).

Tanım 4.42: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinin $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ eşitsizliğini sağlayan permütasyonu $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$ ve $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_n = 0$ olmak üzere,

$$OWMIN_{\omega}((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \bigwedge_{i=1}^n (\omega_i \vee x_{(i)})$$

şeklinde tanımlanan $OWMIN_{\omega} : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ operatörüne, *sıralı ağırlıklı minimum operatörü* denir (Smolikova ve Wachowiak, 2002).

Sıralı ağırlıklı maksimum operatörü ve dual sınıfı olan sıralı ağırlıklı minimum operatörü bir tür Sugeno integralidir. Bu operatörler, Dubois ve Prade tarafından 1986 yılında tanımlanmıştır.

4.2.9.2 Choquet İntegrali

Tanım 4.43: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinin $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ eşitsizliğini sağlayan permütasyonu $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$, g bir bulanık metrik ve $g(\{(n+1)\}) = 0$ olmak üzere,

$$C_g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [g(\{(i), \dots, (n)\}) - g(\{(i+1), \dots, (n)\})] \quad (4.13)$$

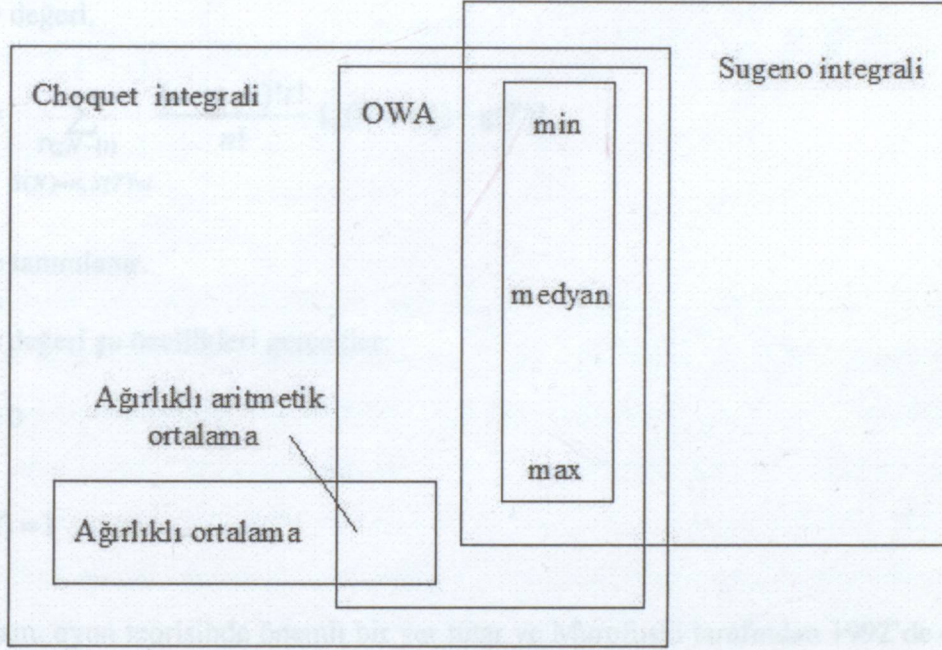
şeklinde tanımlanan $C_g : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna *Choquet integrali* denir.

Sugeno ve Choquet integralleri idempotent, sürekli, dengeleyici ve monoton azalmayan operatörlerdir.

Choquet integrali, $S \subseteq C$ kriter kümesinin önem ağırlığı $g(S)$ olmak üzere, $g(S) = \sum_{i \in S} \omega_i$

alınırsa ağırlıklı aritmetik ortalama operatörüne, $g(S) = \sum_{i=n-|S|+1}^n \omega_i$ alınırsa OWA operatörüne

indirgenir. Şekil 4.13'te çeşitli birleştirme operatörlerinin bulanık integrallerle olan küme ilişkileri gösterilmiştir.



Şekil 4.13 Bulanık integrallerle çeşitli birleştirme operatörlerinin küme ilişkileri (Grabisch, 1996).

Önem İndeksi

Kriterler arasında etkileşim olduğunda, bir C_i ($C_i \in C$) kriterinin önemi sadece $g(C_i)$ değeri ile değil, $C_i \in A$ olmak üzere, $\forall g(A)$ değeri kullanılarak hesaplanır. Yani $g(C_i) = 0$ ise C_i kriteri önemsizdir denilemez. Bunun nedeni, $T \subseteq C - \{C_i\}$ için $g(T \cup \{C_i\})$ değerinin $g(T)$ değerinden çok daha büyük olabilmesidir. Bu durumda C_i kriteri karar sürecinde aslında önemlidir.

Çok kriterli karar problemlerindeki kriter kümesi, ortaklı oyunlardaki oyuncular kümesi gibi görülürse bazı kavramlar benzerlik gösterir. Bu durumda, bir kriter altkümesi: bir koalisyonla eşleşirken, bulanık metrik: oyun oynandığında koalisyonun kazancını veren oyunun

karakteristik fonksiyonuyla eşleşir.

i oyuncusunun T koalisyonuna marjinal katkısı $g(T \cup i) - g(T) > 0$ ise, bu oyuncu koalisyon için iyi bir oyuncudur ve ödüllendirilmelidir. Shapley, 1953'te *Shapley değeri* (önem indeksi) kavramını tanımlamıştır. Shapley değeri, tek başına i oyuncusunun tüm koalisyonlara yaptığı katkılarının beklenen değeri (i oyuncusunun önemi) olarak görülür. Bu değer sayesinde oyundan elde edilen toplam kazancın adil dağıtımını sağlanır.

Shapley değeri,

$$\phi(g, i) = \sum_{\substack{T \subseteq N - \{i\} \\ S(N)=n, S(T)=t}} \frac{(n-t-1)!t!}{n!} [g(T \cup \{i\}) - g(T)] \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlanır.

Shapley değeri şu özellikleri gerçekler:

$$\phi(g, i) \geq 0 \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^n \phi(g, i) = 1 \quad (4.16)$$

Bu kavram, oyun teorisinde önemli bir yer tutar ve Murofushi tarafından 1992'de çok kriterli karar problemlerine uygulanmıştır. Shapley değeri, tek başına C_i kriterinin karardaki etkisi (C_i kriterinin önemi) olarak görülür.

Etkileşim İndeksi (Grabisch ve Roubens, 2000)

Karar vericiler kriterleri birbirinden bağımsız şekilde yapılandıramadıklarında, gereksizlik (negatif etkileşim) ve sinerji (pozitif etkileşim) arasında derecelenen bir etkileşimden bahsedildiğini Kısım 4.1.2.3'te ifade etmiştik. Örneğin iki kriter neredeyse aynı ise bu kriterlerden biri gereksizdir, yani kriterler birbiri yerine geçebilir. Böyle kriterlere negatif ilişkili (tümleyen (complementary)) kriterler denir. Tersine, kriterler tek başlarına az öneme sahipken bir arada ele alındıklarında kriterlerin önemi artıyorsa böyle kriterlere pozitif ilişkili (rekabetçi (competitive)) kriterler denir. Aralarında böyle bir etkileşim olmayan kriterlere bağımsız kriterler denir (Grabisch, 1998).

Örnek 4.28: Eşit öneme sahip iki kriterin göz önüne alındığı bir karar problemi için alternatifler A, B, C ve D olsun. Alternatiflerin bu kriterleri sağlayıp sağlamadığı (0 için

sağlamaz, 1 için sağlar.) ve karar vericilerin tercihleri Çizelge 4.5’de verilmektedir.

Çizelge 4.5 Örnek karar problemi.

	Kriter 1	Kriter 2	Karar Verici 1	Karar Verici 2	Karar Verici 3
A	0	0	A=B=D<C	A<B=D=C	A<B=D<C
B	0	1			
C	1	1			
D	1	0			

Alternatiflerin mümkün olduğunca çok kriteri sağlaması istendiğinden karar vericiler, kesinlikle C alternatifini A alternatifine tercih ederler. Ancak B ve D alternatifleri, her bir karar verici tarafından farklı şekilde değerlendirilmiştir. Karar verici 1, her iki kriteri değil de sadece bir kriteri sağladığından B ve D alternatiflerini, A kadar kötü olarak değerlendirmektedir, yani karar verici 1 ve’leyici davranış sergilemektedir. Karar verici 1 için, her iki kriter de sağlanması gerektiğinden, kriterler arasında pozitif etkileşim veya pozitif sinerji vardır. Yani tek başlarına kriterlerin karardaki önemi, iki kriterin bir aradaki öneminden daha azdır, dolayısıyla

$$g(\{C_1, C_2\}) > g(\{C_1\}) + g(\{C_2\})$$

olur.

Karar verici 2, bir kriteri sağladığından B ve D alternatiflerini, C kadar iyi olarak değerlendirmektedir, yani karar verici 2 veya’layıcı davranış sergilemektedir.. Karar verici 2 için sadece bir kriterin sağlanması yeterli olduğundan, kriterler arasında negatif etkileşim veya negatif sinerji vardır. C_1 (C_2) kriteri sağlanıyorken, C_2 (C_1) nin de sağlanması fark yaratmaz (gereksizlik). Yani kriterlerin tek başlarına karardaki önemi, iki kriterin bir aradaki önemine eşittir, dolayısıyla

$$g(\{C_1, C_2\}) < g(\{C_1\}) + g(\{C_2\})$$

olur.

Karar verici 3, sadece bir kriteri sağlayan B ve D alternatiflerini, hiçbir kriteri sağlamayan A'dan iyi ve her iki kriteri de sağlayan C'den kötü olarak değerlendirmektedir. Yani kriterler etkileşimli değil bağımsızdır, dolayısıyla

$$g(\{C_1, C_2\}) = g(\{C_1\}) + g(\{C_2\})$$

olur.

Sonuç olarak etkileşim $g(\{C_1, C_2\}) - g(\{C_1\}) - g(\{C_2\})$ ile hesaplanır. Ancak koalisyonlar göz önüne alınırsa, etkileşim $g(T \cup \{C_i, C_j\}) - g(T \cup C_i) - g(T \cup C_j) + g(T)$ ile hesaplanır.

C_j kriterinin, C_i kriterini içeren tüm koalisyonlara olan marjinal katkısı

$$g(T \cup \{C_i, C_j\}) - g(T \cup C_i),$$

C_j kriterinin, C_i kriterini içermeyen tüm koalisyonlara olan marjinal katkısı

$$g(T \cup C_j) - g(T) \text{ den daha az (fazla) ise etkileşim negatiftir (pozitiftir).}$$

Bu durumda etkileşim indeksi

$$I(g, C_i, C_j) = \sum_{\substack{T \subset C - \{C_i, C_j\} \\ S(T)=t}} \frac{(n-t-2)!t!}{(n-1)!} [g(T \cup \{C_i, C_j\}) - g(T \cup C_i) - g(T \cup C_j) + g(T)] \quad (4.15)$$

denklemleri ile hesaplanır. Bu değer $[-1, 1]$ aralığındadır. (Grabisch ve Roubens, 2000).

Örnek 4.29: Üç lise öğrencisinin matematik (M), fizik (F) ve edebiyat (E) derslerinden aldığı sınav notlarına göre başarılarının değerlendirilmesi problemini göz önüne alalım. Öğrencilerin okuduğu bu lisenin fen ağırlıklı bir eğitim verdiğini varsayalım. Bu nedenle, başarı notunun hesaplanmasında matematik, fizik ve edebiyat derslerinin ağırlıklarının farklı olduğunu ve sırasıyla 3, 3 ve 2 olarak alındığını farz edelim. Öğrencilerin sınav notları ve ağırlıklı aritmetik ortalama ile hesaplanan başarı notları Çizelge 4.6'da verilmiştir. Notlar 100 üzerindedir. Ağırlıklar normalize edildiğinde sırasıyla 0.375, 0.375, 0.250 olarak bulunur.

Çizelge 4.6 Başarı ve sınav notları.

	Matematik	Fizik	Edebiyat	Başarı
	Notu	Notu	Notu	Notu
A öğrencisi	90	80	50	76.250
B öğrencisi	50	60	90	63.750
C öğrencisi	70	75	75	73.125

A öğrencisi Edebiyat dersinden zayıf olmasına rağmen tüm derslerinde iyi olan C öğrencisinden daha iyi bir başarı notu elde etmiştir. Okul yönetimi böyle durumlara engel olmak istemektedir. Bu durumun nedeni matematikte (tersine fizikte) başarılı olan bir öğrencinin, fizikte de (tersine matematikte de) başarılı olma ihtimalinin yüksek olmasıdır. Bu iki derse verilen önem, olması gerekenden fazla olmaktadır. Bu problemi bir birleştirme operatörü olan Choquet integrali ile çözelim.

Edebiyat dersine göre sayısal dersler daha önemli olduğundan, derslerin tek başına önem ağırlıklarını $([3,3,2])$ değiştirmeden,

$$g(M) = 0.45$$

$$g(F) = 0.45$$

$$g(E) = 0.30$$

olarak alalım.

Matematik ve fizik dersleri arasında *pozitif sinerji* olduğundan, yönetimin bu duruma engel olmak istemesinden dolayı $\{M,F\}$ kümesinin ağırlığı, bu derslerin ağırlıkları toplamından daha az alınmalıdır, yani

$$g(\{M,F\}) = 0.50 < g(M) + g(F) = 0.45 + 0.45$$

olmalıdır.

Sayısal derslerde olduğu kadar edebiyatta da başarılı olan öğrencilerin yönetimce desteklenmek istenmesinden ötürü, $\{E,M\}$ ve $\{E,F\}$ kümelerinin ağırlıklarının, sırasıyla edebiyat ile matematik ve edebiyat ile fizik derslerinin ağırlıklarının toplamından daha fazla

olmalıdır, yani

$$g(\{E,M\}) = 0.90 > g(E) + g(M) = 0.30 + 0.45$$

$$g(\{E,F\}) = 0.90 > g(E) + g(F) = 0.30 + 0.45$$

alınmalıdır.

(4.13) eşitliğiyle verilen Choquet integrali ile A öğrencisinin $C_g(90,80,50)$ değerinin hesabında $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq x_{(3)}$ olması gerektiğinden, $x_{(1)} = 50$, $x_{(2)} = 80$ ve $x_{(3)} = 90$ olur. Buna bağlı olarak (1) indisi E dersini, (2) indisi F dersini ve (3) indisi M dersini temsil eder ve

$$C_g(90,80,50) = x_{(1)}[g(\{(1),(2),(3)\}) - g(\{(2),(3)\})] + x_{(2)}[g(\{(2),(3)\}) - g(\{(3)\})] + x_{(3)}[g(\{(3)\}) - 0],$$

$$C_g(90,80,50) = 50[1 - g(\{M,F\})] + 80[g(\{M,F\}) - g(\{M\})] + 90[g(\{M\}) - 0],$$

$$C_g(90,80,50) = 50[1 - 0.5] + 80[0.5 - 0.45] + 90[0.45 - 0] = 69.5$$

bulunur. Benzer şekilde her öğrenci için hesaplanan başarı notları Çizelge 4.7’de verilmiştir. Bu hesaplamalarla yönetim beklenen sonuçları elde etmiştir.

Çizelge 4.7 Choquet integrali ile hesaplanan başarı notları.

	Matematik Notu	Fizik Notu	Edebiyat Notu	Başarı Notu
A öğrencisi	90	80	50	69.5
B öğrencisi	50	60	90	68.0
C öğrencisi	70	75	75	74.5

5. UYGULAMALAR

Birleştirme operatörlerinin çok nitelikli karar verme problemlerinde kullanılışı, ilk iki uygulamada gösterilmiştir. Üçüncü uygulamada ise çok amaçlı bir lineer programlama problemine, minimum ve maksimum operatörleri ile bulanık bir yaklaşım verilmiştir. Böylece çok kriterli karar vermede kullanılan birleştirme operatörlerine genel bir bakış sağlanmıştır.

5.1 Doktora Öğrencisi Seçimi Problemi (Smolikova ve Wachowiak, 2002)

Lisansüstü eğitim veren bir üniversitenin *Bilgisayar Bilimleri ve Enformasyon Sistemleri* alanında doktora programı açılmıştır. Bu doktora programının eğitim dili İngilizcedir. Başvuracak adaylar için önkoşul *Bilgisayar Bilimleri*'nde ya da *Bilgisayar Bilimleri* ile yakından ilgili bir alanda lisans veya yüksek lisans derecesine sahip olmaktır. Eğitim süresi lisans mezunu adaylar için 6 sene, yüksek lisans mezunu adaylar için 4 senedir. Okul, eğitim süresince *Bilgisayar Bilimleri* alanında ileri seviyede dersler vermeyi ve öğrencilerin katılacağı araştırma projeleri için danışmanlık yapmayı önermektedir. Temel araştırma alanları şunlardır: *Algoritmalar*, *Ayrık Matematik*, *Gömülü (Embedded) Sistemler*, *Enformasyon Sistemleri* ve *Yazılım Mühendisliği*. Öğrencilerin bu alanların en az ikisinden ders almaları beklenmektedir. Öğrencilere bu alanlardan birinden bir danışman atanacaktır. Belirli bir başvuru formu yoktur. Adaylar, okul yönetimine yazılacak bir mektupla başvuracaklardır. Bu mektuba eklenecek belgeler şunlardır: Özgeçmiş, çalışmalar için finansal plan, istenirse burs başvurusu, iki adet tavsiye mektubu, İngilizce bilgisini belgeleyen sertifika (Örneğin TOEFL sınavından minimum 550 aldığını gösteren belge) ve ilgili olduğu araştırma alanını anlatan kısa yazı. Dağıtılacak burs sayısı 6 civarındadır ve 20 ile 40 arasında başvuru beklenmektedir. Dağıtılacak bursun aday sayısına göre çok az olmasından dolayı okul yönetiminin adayları performanslarına göre sıralaması gerekmektedir. Eğer iyi adaylar az sayıda olursa bursun bir kısmı dağıtılmayabilir.

Doktora öğrencisi seçimi probleminin üç bileşeni vardır. İlk bileşen doktora programı için başvuran adaylar kümesidir.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \quad (5.1)$$

İkinci bileşen sıralama süreci için ilgili olduğu düşünülen, her biri eşit öneme sahip 6 kriterden oluşan kriter kümesidir.

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \quad (5.2)$$

Üçüncü bileşen 11 adet uzmandan (karar vericiden) oluşan bir seçici kuruldur. Bu uzmanlar 9 farklı araştırma grubundan seçilmiştir. Bu araştırma grupları şunlardır:

- 1) Algoritmik Grup
- 2) Kodlama Teorisi Grubu
- 3) Ekonomi için Hesaplamaya Dayalı Zekâ Grubu
- 4) Enformasyon Sistemleri Araştırma Grubu
- 5) İleri Yönetim Sistemleri Araştırma Grubu
- 6) Olasılıksal Algoritmalar ve Yazılım Kalitesi Grubu
- 7) Yöntem Programlama Grubu
- 8) Stratejik Enformasyon Sistemleri Planlaması Grubu
- 9) Teorik Grup: Bilgisayar Bilimlerinde Matematiksel Yapılar

Uzmanların adayları değerlendirirken göz önünde bulunduracağı kriterler Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1 Değerlendirme formu.

Araştırma Alanı ile İlgili	Mükemmel	Orta	Zayıf
Araştırma Gruplarına Uygunluk	○	○	○
Araştırma Alanı	○	○	○
Yayınları	○	○	○
Akademik Geçmiş			
Bitirdiği Üniversite	○	○	○
Not Ortalaması	○	○	○
Bitirme Süresi	○	○	○
Tavsiye Mektubu	Var ○	Yok ○	
İngilizce Bilgisi	Var ○	Yok ○	

Araştırma geçmişleri olmadığından lisans derecesine sahip adaylar için ilk üç kriter (Araştırma Gruplarına Uygunluk, Araştırma Alanı ve Yayınları) anlamsızdır. Lisans derecesine sahip veya yüksek lisans programından çok yeni mezun olmuş adayların diğer adaylarla yarışabilmeleri için mükemmel birer üniversite sicilleri olmalıdır.

Bu problem bir *Çok Uzmanlı-Çok Kriterli Karar Verme* problemidir. Sıralama sistemi iki aşamalı bir süreç olarak tanımlanmıştır. İlk aşamada, öncelikle uzmanlardan alternatifleri değerlendirilmeleri istenir. Alternatifler her bir uzman tarafından, her bir kriter üzerinden $\{1,2,3\}$ ölçeğinden seçilen bir puanla değerlendirilir. Burada

1 puan zayıf performansı,

2 puan ortalama performansı ve

3 puan mükemmel performansı

temsil eder.

Her bir uzman, her bir aday için 6 bileşenli $(a_1, a_2, \dots, a_6)$ değerlendirme vektörünü verir. (Burada $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ için $a_i \in \{1, 2, 3\}$ olmalıdır.)

Bu aşamadaki bir sonraki adım, her bir aday için uzmanlara ait genel değerlendirme değerleri bulmaktır. Mevcut problemde 11 uzman olduğundan belirli bir aday için 11 tane genel değerlendirme değeri olacaktır.

İkinci aşamada ise bu genel değerlendirme değerlerinden her bir aday için bir final puanı elde edilir. Belirli bir aday için uzmanlar tarafından verilen puanlar Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Kriterler eşit öneme sahip olduğunda, bu puanlar hangi kriterin getirdiği puanın büyüklüğüne sıralanmıştır. Sıralı puanlar Çizelge 5.3'de gösterilmiştir. Sıralama değeri ve OWA operatörünün uygulamasında kullanılır.

Çizelge 5.2 Belirli bir adaya ait uzman değerlendirmeleri.

Kriterler Uzmanlar	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
1. Uzman	3	2	3	2	3	1
2. Uzman	2	3	3	2	3	2
3. Uzman	2	2	3	2	2	1
4. Uzman	3	2	3	3	3	2
5. Uzman	2	2	3	2	3	1
6. Uzman	3	2	3	2	3	1
7. Uzman	1	2	3	2	3	2
8. Uzman	1	2	3	2	3	1
9. Uzman	1	2	2	2	3	2
10. Uzman	1	2	2	3	3	1
11. Uzman	1	2	2	2	2	1

Kriterler eşit öneme sahip olduğundan, bu puanlar hangi kriterden geldiği göz ardı edilerek büyükten küçüğe sıralanmıştır. Sıralı puanlar Çizelge 5.3’de gösterilmiştir. Sıralama *medyan* ve OWA operatörünün uygulanışında önemlidir.

Çizelge 5.3 Sıralı puanlar.

1. Uzman	3	3	3	2	2	1
2. Uzman	3	3	3	2	2	2
3. Uzman	3	2	2	2	2	1
4. Uzman	3	3	3	3	2	2
5. Uzman	3	3	2	2	2	1
6. Uzman	3	3	3	2	2	1
7. Uzman	3	3	2	2	2	1
8. Uzman	3	3	2	2	1	1
9. Uzman	3	2	2	2	2	1
10. Uzman	3	3	2	2	1	1
11. Uzman	2	2	2	2	1	1

Dördüncü bölümde verilen aritmetik ortalama, harmonik ortalama, geometrik ortalama ve medyan operatörlerini kullanarak adayın her bir uzmandan aldığı genel puan hesaplanmıştır ve sonuçlar Çizelge 5.4’de gösterilmiştir. Tüm ortalamalarda virgülden sonra üç basamak alınmıştır.

Çizelge 5.4 Aritmetik benzeri ortalamalarla hesaplanan genel puanlar.

Uzmanlar	Aritmetik Ortalama	Geometrik Ortalama	Harmonik Ortalama	Medyan
1. Uzman	2.333	2.182	2.000	2.500
2. Uzman	2.500	2.450	2.400	2.500
3. Uzman	2.000	1.906	1.800	2.000
4. Uzman	2.667	2.621	2.571	3.000
5. Uzman	2.167	2.040	1.895	2.000
6. Uzman	2.333	2.182	1.636	2.500
7. Uzman	2.167	2.040	1.800	2.000
8. Uzman	2.000	1.817	1.636	2.000
9. Uzman	2.000	1.906	1.800	2.000
10. Uzman	2.000	1.817	1.636	2.000
11. Uzman	1.667	1.587	1.500	2.000

İkinci aşamada, adayın verilen ortalamalarla hesaplanan genel puanları yine aynı operatörler kullanılarak birleştirilecek ve bu yolla adayın final puanı bulunacaktır. Uzmanlar 9 farklı araştırma grubundan seçilmiş olduklarından, herhangi bir aday için ilk üç kriterde (Araştırma Gruplarına Uygunluk, Araştırma Alanı ve Yayınları) aynı fikirde olamayacaklardır. Yani belirli bir aday, bir araştırma alanında mükemmel görülürken başka bir araştırma alanında zayıf bulunabilir. Bunun için adayın en iyi 4 puanı göz önüne alınacaktır. Verilen ortalamalarla hesaplanan en iyi 4 puan ve bu puanların aynı ortalamalarla birleştirilmiş değerleri Çizelge 5.5’de verilmiştir.

Çizelge 5.5 Adayın farklı ortalamalara göre en iyi dört puanı ve final puanları.

Uzmanlar	Aritmetik Ortalama	Geometrik Ortalama	Harmonik Ortalama	Medyan
4. Uzman	2.667	2.621	2.571	3.000
2. Uzman	2.500	2.450	2.400	2.500
1. Uzman	2.333	2.182	2.000	2.500
6. Uzman	2.333	2.182	2.000	2.500
Final Puanı	2.458	2.351	2.215	2.500

Okul yönetimine göre genel puanı 2'nin altında olan bir aday programa kabul edilmeyecek, genel puanı en az 2.5 ise kabul edilecek ve burs kazanacaktır. Eğer programda boş kontenjan kalırsa genel puanı 2 ile 2.5 arasında olan adaylar puan sırasına göre bu kontenjanlara yerleştirilecektir. İyi puanlar alan bu aday, programa yerleştirilebilir ancak ilk üç ortalama operatörüne göre burs alma şansı yoktur. Eğer uzmanlar tarafından mevcut burs bütünüyle dağıtılmak istenilirse, fazladan bazı kriterler (amaçlar) eklenerek adayın puanı yükseltilebilir. Bir dizi görüşmeler sonucu aşağıdaki kriterler üzerinde anlaşma sağlanmıştır. Üçüncü veya dördüncü kritere uyan bir durum olduğunda öncelikli olarak bu kriterlerin sağlanması istenmektedir.

- 1) Eğer aday iki defadan fazla 1 puan almışsa genel puanı 2'nin altında olsun.
- 2) Eğer aday en fazla iki kez 1 puan almışsa genel puanı 2'nin üstünde olsun.
- 3) Eğer adayın bir tanesi hariç tüm puanları 3 ise genel puanı yaklaşık 2.75 olsun.
- 4) Eğer aday üç kez 1 puan almışsa ve bunlardan biri *Araştırma Alanı* kriteri için ise genel puanı 1.5'in üstünde olmasın.

İkinci aşama için ise

- 5) Eğer adayın bir tanesi hariç tüm puanları 3 ise final puanı yaklaşık 2.75 olsun.

$\alpha \in R$ ve n kriter sayısı olmak üzere, dördüncü bölümde verilen genelleştirilmiş α -ortalaması operatörü: $F_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \in R$ parametresine bağlı olduğundan, bu parametre uygun seçildiğinde bu kriterler sağlatılabilir. Kriterleri temsil eden bazı örneklerle parametrenin nasıl seçilmesi gerektiği bulunur.

1) Eğer aday iki defadan fazla 1 puan almışsa genel puanı 2'nin altında olsun.

$F_\alpha(3,3,3,1,1,1) < 2$ olmalıdır.

$$F_\alpha(3,3,3,1,1,1) = \left(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{3 \cdot 3^\alpha + 3}{6} \right)^{\frac{1}{\alpha}} < 2 \text{ olabilmesi için } \alpha < 1 \text{ olmalıdır.}$$

2) Eğer aday en fazla iki kez 1 puan almışsa genel puanı 2'nin üstünde olsun.

$F_\alpha(3,3,3,2,1,1) > 2$ olmalıdır. Bu kriterin sağlanması için $\alpha > 0,239$ olması gerekir.

3) Eğer adayın bir tanesi hariç tüm puanları 3 ise genel puanı yaklaşık 2.75 olsun.

$F_\alpha(3,3,3,3,3,1) \cong 2.75$ olabilmesi için $\alpha \cong 1.732$ olması gerekir.

4) Eğer aday üç kez 1 puan almışsa ve bunlardan biri *Araştırma Alanı* kriteri için ise genel puanı 1.5'in üstünde olmasın.

$F_\alpha(3,3,3,1,1,1) < 1.5$ olabilmesi için $\alpha < -1$ olması gerekir.

O halde,

$$\alpha = \frac{0,239 + 1}{2} = 0,620$$

alınırsa ilk iki kriter sağlanır. Hesaplanan değerler Çizelge 5.6'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.6 $\alpha = 0.620$ alındığında bulunan sonuçlar.

Uzman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_{0.620}$	2.280	2.481	1.966	2.650	2.121	2.280	2.121	1.932	1.966	1.932	1.638

İkinci aşamada adayın genel puanını bulmak için en iyi dört puanı birleştirilecektir. Genelleştirilmiş α -ortalamasına ait α parametresi beşinci kriteri sağlayacak şekilde bulunmalıdır.

5) Eğer adayın bir tanesi hariç tüm puanları 3 ise final puanı yaklaşık 2.75 olsun.

$F_\alpha(3,3,3,1) \cong 2.75$ olması için $\alpha \cong 3.192$ olmalıdır. $\alpha = 3.192$ alındığında, en iyi dört puanın genelleştirilmiş α -ortalaması ile birleştirilmiş değeri 2.434 olur.

Çizelge 5.7 Genelleştirilmiş α -ortalaması ile hesaplanmış en iyi dört puan ve final puanı.

Uzman	4	2	1	6	Final Puanı
$\alpha \cong 3,192$	2.650	2.481	2.280	2.280	2.434

Aynı birleştirme işlemleri OWA operatörleri ile yapılmak istenilirse, bu seferde mümkün olduğunca karar vericilerin tercihlerini yansıtan OWA ağırlıkları hesaplanmalıdır.

$\alpha \in R$ olmak üzere, $Q(r) = r^\alpha$ alarak $\omega_i = Q(\frac{i}{n}) - Q(\frac{i-1}{n})$ ile

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha$$

$$\omega_2 = \left(\frac{2}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha$$

$$\omega_3 = \left(\frac{3}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{6}\right)^\alpha$$

$$\omega_4 = \left(\frac{4}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{6}\right)^\alpha$$

$$\omega_5 = \left(\frac{5}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{6}\right)^\alpha$$

$$\omega_6 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^\alpha$$

1) Eğer aday iki defadan fazla 1 puan almışsa genel puanı 2'nin altında olsun.

$F_\alpha(3,3,3,1,1,1) < 2$ olmalıdır.

$$\sum_{i=1}^6 \omega_i x_{(i)} = 3. \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha + 3. \left(\left(\frac{2}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha\right) + 3. \left(\left(\frac{3}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{6}\right)^\alpha\right) + \left(\frac{4}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{6}\right)^\alpha + \left(\frac{5}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{6}\right)^\alpha + 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^\alpha$$

$$= 2. \left(\frac{3}{6}\right)^\alpha + 1 < 2$$

$$2^{1-\alpha} < 1$$

$$1 - \alpha < 0$$

$$\alpha > 1$$

2) Eğer aday en fazla iki kez 1 puan almışsa genel puanı 2'nin üstünde olsun.

$F_\alpha(3,3,3,2,1,1) > 2$ olabilmesi için $\alpha < 1.293$ olmalıdır.

İlk iki kriterin sağlanabilmesi için $1 < \alpha < 1.293$ olmalıdır. $\alpha = 1.2$ alınırsa OWA ağırlıkları $\omega = (0.116, 0.152, 0.167, 0.180, 0.188, 0.197)$ bulunur. Bu ağırlıklarla hesaplanan puanlar Çizelge 5.8'de verilmiştir.

Çizelge 5.8 OWA operatörleri ile elde edilen genel puanlar.

Uzman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_ω	2.239	2.435	1.920	2.615	2.071	2.239	2.071	1.882	1.920	1.882	1.615

5) Eğer adayın bir tanesi hariç tüm puanları 3 ise final puanı yaklaşık 2.75 olsun.

$$F\omega_\alpha(3,3,3,1) \cong 2,75$$

$$\sum_{i=1}^4 \omega_i x_{(i)} = 3. \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + 3. \left(\left(\frac{2}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha\right) + 3. \left(\left(\frac{3}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{4}\right)^\alpha\right) + 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^\alpha \cong 2,75$$

$$2. \left(\frac{3}{4}\right)^\alpha + 1 \cong 2,75$$

$$0,75^\alpha = 0,875$$

$$\alpha = \frac{\log 0,875}{\log 0,75} = \frac{-0,058}{-0,125} = 0,464$$

Buradan da $\omega = (0.526, 0.199, 0.150, 0.125)$ bulunur. Bu ağırlıklarla hesaplanan final puanı

Çizelge 5.9'da verilmiştir.

Çizelge 5.9 OWA operatörleri ile elde edilen en iyi dört puan ve final puanı.

Uzman	4	2	1	6	Final Puanı
F_{ω}	2.615	2.435	2.239	2.239	2.475

Aynı birleştirme işlemleri Sugeno integrali ile yapılmak istenilirse, birinci aşamada kriterleri en iyi şekilde sağlayan $g(\{C_i\})$ değerleri $(0.1, 0.2, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5)$ olarak alınır. $\lambda > -1$

katsayısı $1 + \lambda = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda g(\{C_i\}))$ bağıntısıyla bulunur.

$1 + \lambda = (1 + 0.1\lambda)(1 + 0.2\lambda)(1 + 0.25\lambda)^2(1 + 0.5\lambda)^2$ denklemini çözülürse $\lambda = 0$ ve $\lambda = -0.840$ bulunur. $\lambda > -1$ olduğundan $\lambda = -0.840$ alınır.

Kriterler kümesi $C = \{1, 2, \dots, 6\}$ olduğundan,

$g\{1\} = 0.1, g\{2\} = 0.2, g\{3\} = 0.25, g\{4\} = 0.25, g\{5\} = 0.5$ ve $g\{6\} = 0.5$ alınmıştır.

$g(A \cup B) = g(A) + g(B) + \lambda g(A)g(B)$ denkleminde,

$$g\{1, 2\} = g\{1\} + g\{2\} + \lambda g\{1\}g\{2\} = 0.1 + 0.2 - 0.84 \times 0.1 \times 0.2 = 0.283$$

$$g\{1, 2, 3\} = 0.474$$

$$g\{1, 2, 3, 4\} = 0.624$$

$$g\{1, 2, 3, 4, 5\} = 0.862$$

$$g\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 1.000 \text{ olarak bulunur.}$$

Bulunan bu değerlerle 1. uzmanın adaya verdiği puanı yani $S_g(3, 3, 3, 2, 2, 1)$ değerini bulalım.

Önce kriter puanlarını $[0, 1]$ aralığında derecelendirelim. $1 \leq x \leq 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ olmak üzere,

$y = \frac{1}{2}(x - 1)$ ile $\{1, 2, 3\}$ skalasından $[0, 1]$ skalasına geçilir. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ olduğundan,

$x_{(1)} = x_6, x_{(2)} = x_5, \dots, x_{(6)} = x_1$, yani $(1) \rightarrow 6, (2) \rightarrow 5, \dots, (6) \rightarrow 1$ olur. Buradan,

$$S_g(1,1,1,0.5,0.5,0) = \bigvee_{i=1}^n [x_{(i)} \wedge g\{(i), \dots, (n)\}]$$

$$S_g(x) = \max \{ \min \{x_{(1)}, g\{(1), (2), \dots, (6)\}\}, \min \{x_{(2)}, g\{(2), \dots, (6)\}\}, \dots, \min \{x_{(6)}, g\{(6)\}\} \}$$

$$= \max \{ \min \{x_6, g\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \dots, \min \{x_1, g\{1\}\} \}$$

$$= \max \{ \min \{0, 1\}, \min \{0.5, 0.862\}, \min \{0.5, 0.624\}, \min \{1, 0.474\}, \min \{1, 0.283\}, \min \{1, 0.1\} \}$$

$$= \max \{0, 0.5, 0.5, 0.474, 0.283, 0.1\} = 0.5 \rightarrow 2.000 \text{ olarak bulunur.}$$

Adayın genel puanını bulmak için benzer işlemler yapılır. İkinci aşama kriterini sağlanması için $g(\{C_i\})$ değerleri sırasıyla 0.5, 0.35, 0.33 ve 0.33 alınır ve $\lambda = -0.724$ bulunur. Buradan,

$$g\{1, 2\} = g\{1\} + g\{2\} + \lambda g\{1\}g\{2\} = 0.723$$

$$g\{1, 2, 3\} = 0.880$$

$$g\{1, 2, 3, 4\} = 1.000 \text{ olarak hesaplanır. Hesaplanan değerler Çizelge 5.10'da verilmiştir.}$$

Çizelge 5.10 Sugeno integrali ile elde edilen en iyi dört puan ve final puanı.

Uzman	4	2	1	6	Final Puanı
S_g	2.248	2.000	2.000	2.000	2.000

Aynı birleştirme işlemleri Sıralı ağırlıklı maksimum operatörü ile yapılmak istenilirse, birinci aşamada kriterleri en iyi şekilde sağlayan ağırlık vektörü

$$\omega = (1, 0.868, 0.790, 0.435, 0.339, 0.023) \text{ olarak alınır.}$$

Örneğin 1. uzman için,

$$OWMAX_{\omega}(3, 3, 3, 2, 2, 1) \rightarrow OWMAX_{\omega}(1, 1, 1, 0.5, 0.5, 0)$$

$$= \max \{ \min \{0, 1\}, \min \{0.5, 0.868\}, \min \{0.5, 0.790\}, \min \{1, 0.435\}, \min \{1, 0.339\}, \min \{1, 0.023\} \}$$

$$= \max \{0, 0.5, 0.5, 0.435, 0.339, 0.023\} = 0.5 \rightarrow 2.000$$

İkinci aşama kriterini sağlanması için ağırlıklar sırasıyla 1,0.884,0.682 ve 0.453 alınır. Hesaplanan değerler Çizelge 5.11'de verilmiştir.

Çizelge 5.11 OWMAX_w operatörü ile elde edilen en iyi dört puan ve final puanı.

Uzmanlar	4	2	1	6	Final Puanı
OWMAX _w	2.249	2.000	2.000	2.000	2.000

Aynı birleştirme işlemleri Sıralı ağırlıklı minimum operatörü ile yapılmak istenilirse, birinci aşamada kriterleri en iyi şekilde sağlayan ağırlık vektörü,

$$w' = (0.887, 0.882, 0.451, 0.401, 0.129, 0) \text{ olarak alınır.}$$

Örneğin 4. uzman için,

$$OWMIN_{w'}(3, 3, 3, 3, 2, 2) \rightarrow OWMIN_{w'}(1, 1, 1, 1, 0.5, 0.5)$$

$$= \min\{\max\{0.5, 0.887\}, \max\{0.5, 0.882\}, \max\{1, 0.451\}, \max\{1, 0.401\}, \max\{1, 0.129\}, \max\{1, 0\}\}$$

$$= \min\{0.887, 0.882, 1, 1, 1\} = 0.882 \rightarrow 2.674$$

İkinci aşama kriterini sağlanması için ağırlıklar 0.882,0.682,0.022 ve 0 alınır. Hesaplanan değerler Çizelge 5.12'de verilmiştir.

Çizelge 5.12 OWMIN_w operatörü ile elde edilen en iyi dört puan ve final puanı.

Uzmanlar	4	2	1	6	Final Puanı
OWMIN _w	2.674	2.000	2.000	2.000	2.000

5.2 Yurtdışı Kongrelerine Katılım İçin Ödenek Tahsisi Yapılacak Akademisyen Seçimi (Tiryaki ve Günay, 2005)

Bu örnekte birleştirme operatörlerinin, yurtdışı kongrelerine katılım amacıyla üniversitelere ödenek tahsisi için başvuran adayların seçimi problemine nasıl uygulanabileceği gösterilmiştir. Bilindiği gibi üniversiteler kısıtlı bütçelerini optimum düzeyde kullanmak zorundadırlar. Bu amaçla, yurt dışına bildiri sunmak üzere başvuran öğretim üyeleri ve yardımcıları çeşitli kriterlere göre değerlendirilerek ödenek tahsisi yapılmaktadır. Fakülte yönetim kurullarında ortaya çıkan bu karar probleminin daha sağlam matematiksel temellere oturtulabilmesi için bu çalışma yapılmıştır.

Çalışmada yurt dışı kongrelerine katılım için başvuru yapan adayları görevlendirmek amacıyla fakülte yönetim kurulunca aşağıdaki sekiz kriter göz önüne alınabilir.

C₁ kriteri: *Adayın unvanı*

Fakülte yönetim kurullarında genel görüş olarak öncelikle unvanı daha düşük olan akademisyenler daha çok desteklenmektedir.

C₂ kriteri: *Adayın daha önceki yıllarda katıldığı kongrelerde üniversite tarafından desteklenme durumu*

Adaylar yurt dışına ilk defa, bir yıl önce, iki yıl önce, vs çıkma durumuna göre sırasıyla daha öncelikli olarak desteklenmektedir. Bu, diğer adayların da adil bir şekilde yurt dışına çıkmalarına imkân sağlar.

C₃ kriteri: *Adayın üniversiteye hizmeti*

Aday genel olarak gerek ders yükü, gerek idari görevler, gerekse de bölüm tarafından verilen diğer görevlere bakılarak üniversiteye yaptığı katkı ölçüsünde daha çok desteklenmelidir.

C₄ kriteri: *Adayın bağlı bulunduğu bölümün desteklenme önceliği*

Bazı bölümlerde öğretim üyesi başına düşen ders saati diğer bölümlere oranla daha fazla olduğundan böyle bölümler bilimsel çalışmaları teşvik açısından öncelikli olarak desteklenmelidir. Bu çalışmada dikkate alınacak, bölümlere göre her bir öğretim üyesine düşen ders saati sayısı Çizelge 5.13'de verilmiştir.

Çizelge 5.13 Bölümlere göre her bir öğretim üyesine düşen ders saati sayısı.

Bölüm	Öğretim Üyesine İsabet Eden Ders Saati
Fizik	24
Kimya	14
Matematik	22
İstatistik	18
Bilgisayar ve Ö.Teknolojileri	35
Batı Dilleri ve Edebiyatı	13

C₅ kriteri: Adayın yurt dışına çıkışında birden fazla bildiri sunması veya ilave görevle gitmesi

Aday tek bir yurt dışı çıkışıyla birden fazla görevi yerine getiriyorsa daha çok desteklenmelidir.

C₆ kriteri: Yayınla ilgili değerlendirme

Sunulacak bildirinin poster, sözlü sunum, çağrılı bildiri olması; tek yazarlı veya çok yazarlı olması; sempozyum programında ismen yer alması, özet kitapçığında özetinin basılması, sempozyum kitabında tam metnin yayımlanması durumlarına göre değerlendirilmelidir.

C₇ kriteri: Sempozyumla ilgili değerlendirme

Sempozyumun sürekliliği yani her yıl düzenleniyor olması ve büyüklüğü ölçüsünde aday desteklenmelidir.

C₈ kriteri: Kongre maliyeti

Aday, kongre yerinin Uzak (Amerika–1000 USD), Orta (Avrupa–750 USD) veya Yakın (Komşu ülkeler–500 USD) olması durumuna bağlı olarak yakınlığı dolayısıyla maliyetinin azlığı ölçüsünde desteklenmelidir.

Adayların değerlendirilmesinde Fakülte Yönetim Kurulu üyeleri (Fakülte Dekanı, 3 Profesör Temsilcisi, 2 Doçent Temsilcisi, 1 Yardımcı Doçent Temsilcisi olarak 7 kişi) karar vericiler

durumundadır. Karar vericilerin adayları $C_1, C_2, \dots, C_8$ kriterlerine göre aşağıda verilen ölçekle değerlendirdiğini ve bu değerlendirmelerden her aday için bir final puanı hesaplandığını kabul edelim.

- 1) Zayıf: 1 puan
- 2) Orta: 2 puan
- 3) İyi: 3 puan

Fakülte Yönetim Kurulunun dağıtacağı ödeneğin toplam 6000\$ olduğunu ve kurulun final puanı 2'nin altında olan bir adaya ödenek tahsis etmek istemediğini kabul edelim.

Bu puanlama adayın başvuru dilekçesinde doldurduğu beyanlarına bakılarak yapılır. Bir adayın başvuru dilekçesi örneği Ek 1'de verilmiştir.

Birinci Safha: Bu problem bir *Çok Uzmanlı Çok Kriterli Karar Verme* problemidir. Karar vericiler, adayı kriterlerin her birine göre $\{1,2,3\}$ ölçeğinden seçtiği bir puanla değerlendirir. $i \in \{1,2,\dots,8\}$ için $x_i \in \{1,2,3\}$ olmak üzere, her bir uzman, her bir aday için sekiz bileşenli $(x_1, x_2, \dots, x_8)$ vektörünü verir. Birleştirme operatörleri kullanılarak adayın genel değerlendirme puanları hesaplanır. Yedi karar vericinin her birinden elde edilen sekiz bileşenli vektörler dilekçe örneği verilen aday için Çizelge 5.14'de verilmiştir.

Çizelge 5.14 Karar vericilerin aday için verdiği puanlar.

		Kriterler							
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
Karar Vericiler	1	2	2	3	3	3	2	3	1
	2	2	3	3	3	2	2	3	2
	3	2	3	3	2	3	2	2	1
	4	3	1	2	3	2	2	2	1
	5	1	1	2	2	3	3	3	1
	6	1	1	3	3	3	2	2	2
	7	1	2	2	3	3	2	2	2

Kriterler eşit öneme sahip olduklarından, bu puanlar hangi kriterden geldiği göz ardı edilerek büyükten küçüğe sıralanmıştır. Sıralı puanlar Çizelge 5.15'de gösterilmiştir. Sıralama medyan

ve OWA operatörünün uygulanışında önemlidir.

Çizelge 5.15 Sıralı puanlar.

Karar Vericiler	1	3	3	3	3	2	2	2	1
	2	3	3	3	3	2	2	2	2
	3	3	3	3	2	2	2	2	1
	4	3	3	2	2	2	2	1	1
	5	3	3	3	2	2	1	1	1
	6	3	3	3	2	2	2	1	1
	7	3	3	2	2	2	2	2	1

Dördüncü bölümde verilen bazı birleştirme operatörlerini kullanarak her bir uzmandan adayın aldığı genel puan hesaplanmıştır ve Çizelge 5.16'da sonuçlar gösterilmiştir. Tüm ortalamalarda virgülden sonra üç basamak alınmıştır.

Çizelge 5.16 Aritmetik benzeri ortalamalarla hesaplanan genel puanlar.

Karar Vericiler	Aritmetik Ortalama	Harmonik Ortalama	Geometrik Ortalama	Medyan
1	2.375	2.087	2.246	2.500
2	2.500	2.400	2.449	2.500
3	2.250	2.000	2.135	2.000
4	2.000	1.714	1.861	2.000
5	2.000	1.600	1.795	2.000
6	2.125	1.778	1.958	2.000
7	2.125	1.920	2.030	2.000

İkinci Safha: İkinci safhada amaç adayın final puanını bulmaktır. Final puanı, ilk safhada kullanılan birleştirme operatörü ile uzmanlardan gelen tüm genel puanların birleştirilmesiyle hesaplanmaktadır. Elde edilen bu final puanı tüm adayları sıralamak için kullanılacak puandır. Dilekçe örneği verilen adaya ait hesaplanan değerler Çizelge 5.17'de verilmiştir.

Çizelge 5.17 Adayın final puanları.

Aritmetik Ortalama	Harmonik Ortalama	Geometrik Ortalama	Medyan
2.196	1.898	2.057	2.000

Aynı işlemler diğer adaylar için de yapılmıştır. Elde edilen puanlar Çizelge 5.18’de verilmiştir.

Çizelge 5.18 Adayların final puanları.

Adaylar	Aritmetik Ortalama	Harmonik Ortalama	Geometrik Ortalama	Medyan
1	2.196	1.898	2.057	2.000
2	1.839	1.548	1.691	2.000
3	1.786	1.513	1.646	2.000
4	1.732	1.493	1.611	2.000
5	1.857	1.500	1.668	2.000
6	2.125	1.816	1.978	2.000
7	2.125	1.778	1.958	2.000
8	2.000	1.714	1.861	2.000
9	1.625	1.455	1.542	2.000
10	1.750	1.600	1.682	2.000

Fakülte Yönetim Kurulu final puanı 2’nin altında olan adaylara ödenek vermeme kararı aldığından adayların final puanları yükseltilmeye çalışılmalıdır. Aritmetik ortalamaya göre sadece dört aday, geometrik ortalamaya göre bir aday ödenek tahsisine hak kazanırken harmonik ortalamaya göre hiçbir aday ödenek alamamıştır. Medyan ortalaması ile adaylar sıralanamamıştır. Bu nedenle eşik seviyesi düşürülmelidir ki ödeneğin tamamı dağıtılabilsin.

Karar vericilerin tümünün aşağıdaki prensipler üzerinde anlaşma sağladığını kabul edelim.

- 1) Eğer adayın en az üç tane 3 puanı varsa genel puanı 2’nin altında olmasın.
- 2) Adayın yalnızca bir tane 3 puanı var ve 2 puanı yoksa genel puanı 1.5’in altında olsun.

3) Adayın sadece bir tane 3 puanı varsa genel puanı 2.125'in altında olsun.

4) İkinci safha için adayın bir tanesi hariç tüm puanları 3 ise final puanı yaklaşık 2.7 olsun.

$\alpha \in R$ ve n kriter sayısı olmak üzere, dördüncü bölümde verilen genelleştirilmiş α -ortalaması operatörü $\alpha \in R$ parametresine bağlı olduğundan, bu parametre uygun seçildiğinde bu kriterler sağlatılabilir.

Birinci Safha: Bu parametre kriterleri temsil eden bazı özel puanlamalar ele alınarak hesaplanabilir. Dolayısıyla problemde, mümkün olduğunca karar vericilerin tercihlerini yansıtan bir $\alpha \geq 0$ parametresi aranmaktadır.

1) Eğer adayın en az üç tane 3 puanı varsa genel puanı 2'nin altında olmasın.

$$A(3,3,3,1,1,1,1) > 2 \text{ olmalı.}$$

$$\left(\frac{3 \cdot 3^\alpha + 5}{8} \right)^{\frac{1}{\alpha}} > 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ için } A(3,3,3,1,1,1,1) = 1.750 \\ \alpha = 2 \text{ için } A(3,3,3,1,1,1,1) = 2.000 \\ \alpha = 3 \text{ için } A(3,3,3,1,1,1,1) = 2.207 \end{array} \right\} \alpha > 2 \text{ olmalı.}$$

2) Adayın yalnızca bir tane 3 puanı var ve 2 puanı yoksa genel puanı 1.5'in altında olsun.

$$A(3,1,1,1,1,1,1) < 1.5 \text{ olmalı.}$$

$$\left(\frac{3^\alpha + 7}{8} \right)^{\frac{1}{\alpha}} < 1.5$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ için } A(3,1,1,1,1,1,1) = 1.250 \\ \alpha = 2 \text{ için } A(3,1,1,1,1,1,1) = 1.414 \\ \alpha = 2.40 \text{ için } A(3,1,1,1,1,1,1) = 1.494 \\ \alpha = 2.41 \text{ için } A(3,1,1,1,1,1,1) = 1.496 \\ \alpha = 2.42 \text{ için } A(3,1,1,1,1,1,1) = 1.498 \\ \alpha = 2.43 \text{ için } A(3,1,1,1,1,1,1) = 1.500 \end{array} \right\} \alpha < 2.43 \text{ olmalı.}$$

3) Adayın sadece bir tane 3 puanı varsa genel puanı 2.125'in altında olsun.

$$A(3,2,2,2,2,2,2) < 2.125 \text{ olmalı.}$$

$$\left(\frac{3^\alpha + 7 \cdot 2^\alpha}{8} \right)^{\frac{1}{\alpha}} < 2.125$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ için } A(3, 2, 2, 2, 2, 2, 2) = 2.125 \\ \alpha = 0.9 \text{ için } A(3, 2, 2, 2) = 2.123 \end{array} \right\} \alpha < 1 \text{ olmalı.}$$

Birinci safhada kriterlerin üçü birden aynı anda sağlanamaz.

1) $\alpha > 2$

2) $\alpha < 2.43$

3) $\alpha < 1$

Bu durumda, kurul ilk iki kriteri sağlanmasını yeterli görmektedir. İlk iki kriterin sağlanması için $\alpha = 2.2$ seçelim. Hesaplanan ortalamalar Çizelge 5.19'da verilmiştir.

Çizelge 5.19 $\alpha = 2.2$ alınarak hesaplanan genel puanlar.

Karar Vericiler	1	2.492
	2	2.559
	3	2.362
	4	2.143
	5	2.211
	6	2.288
	7	2.223

İkinci safha: Bu safhada bu yedi puan birleştirilerek adayın final puanı hesaplanacaktır. Bunun için uzmanların kararlaştırdığı dördüncü puanlama kriterini en iyi şekilde sağlayan $\alpha \geq 0$ parametresi bulunmalıdır.

4) Adayın bir tanesi hariç tüm puanları 3 ise final puanı yaklaşık 2.7 olsun.

$$A(3, 3, 3, 3, 3, 1) \cong 2.7 \text{ olmalı.}$$

$$\left(\frac{6 \cdot 3^\alpha + 1}{7} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cong 2.7$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \alpha = 1 \text{ için } A(3,3,3,3,3,3,1) = 2.714 \\
 \alpha = 0.9 \text{ için } A(3,3,3,3,3,3,1) = 2.703 \\
 \alpha = 0.8 \text{ için } A(3,3,3,3,3,3,1) = 2.690 \\
 \alpha = 0.85 \text{ için } A(3,3,3,3,3,3,1) = 2.696 \\
 \alpha = 0.86 \text{ için } A(3,3,3,3,3,3,1) = 2.698 \\
 \alpha = 0.87 \text{ için } A(3,3,3,3,3,3,1) = 2.699 \\
 \alpha = 0.88 \text{ için } A(3,3,3,3,3,3,1) = 2.700
 \end{array} \right\} \alpha \cong 0.88 \text{ olmalı.}$$

Adayların $\alpha = 0.88$ alarak hesaplanan final puanları Çizelge 5.20'de verilmiştir. Final puanları 2'nin üstünde olduğundan en çok sekiz adaya yeterli olduğu takdirde ödenek tahsis edilebilir.

Çizelge 5.20 $\alpha = 0.88$ alınarak hesaplanan final puanları.

Adaylar	$\alpha = 0.88$
1	2.325
2	2.117
3	2.055
4	1.995
5	2.151
6	2.265
7	2.288
8	2.143
9	1.875
10	2.305

Aynı birleştirme işlemleri OWA operatörleri ile yapılmak istenilirse, bu seferde mümkün olduğunca karar vericilerin tercihlerini yansıtan ağırlıklar hesaplanmalıdır.

$\alpha \in R$ olmak üzere, $Q(r) = r^\alpha$ olarak $\omega_i = Q(\frac{i}{n}) - Q(\frac{i-1}{n})$ ile $\omega_i \in [0,1]$ OWA ağırlıklarını hesaplayalım.

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha, \quad \omega_2 = \left(\frac{2}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha, \quad \omega_3 = \left(\frac{3}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{8}\right)^\alpha, \quad \omega_4 = \left(\frac{4}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{8}\right)^\alpha, \quad \omega_5 = \left(\frac{5}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{8}\right)^\alpha,$$

$$\omega_6 = \left(\frac{6}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{5}{8}\right)^\alpha, \quad \omega_7 = \left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{6}{8}\right)^\alpha, \quad \omega_8 = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^\alpha$$

Buradaki $\alpha \in R$ parametresi puanlama kriterlerini yani karar vericilerin tercihlerini en iyi sağlayacak şekilde seçilecektir.

1) Eğer adayın en az üç tane 3 puanı varsa genel puanı 2'nin altında olmasın.

$$A(3,3,3,1,1,1,1) > 2 \text{ olmalı.}$$

$$A_w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_{(i)}$$

$$3\left(\frac{1}{8}\right)^\alpha + 3\left(\left(\frac{2}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha\right) + 3\left(\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(\left(\frac{4}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(\left(\frac{5}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(\left(\frac{6}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{5}{8}\right)^\alpha\right) +$$

$$1\left(\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{6}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^\alpha\right) > 2$$

$$2\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha + 1 > 2$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha > 0.5$$

$$\ln 0.375^\alpha > \ln 0.5$$

$$\alpha \ln 0.375 > \ln 0.5$$

$$\alpha \cdot (-0.981) > -0.693$$

$$\alpha < 0.707$$

2) Adayın yalnızca bir tane 3 puanı var ve 2 puanı yoksa genel puanı 1.5'in altında olsun.

$$A(3,1,1,1,1,1,1) < 1.5 \text{ olmalı.}$$

$$3\left(\frac{1}{8}\right)^\alpha + 1\left(\left(\frac{2}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(\left(\frac{4}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(\left(\frac{5}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(\left(\frac{6}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{5}{8}\right)^\alpha\right) +$$

$$1\left(\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{6}{8}\right)^\alpha\right) + 1\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^\alpha\right) < 1.5$$

$$2\left(\frac{1}{8}\right)^\alpha + 1 < 1.5$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^\alpha < 0.25$$

$$\ln 0.125^\alpha < \ln 0.25$$

$$\alpha \ln 0.125 < \ln 0.25$$

$$\alpha(-2.079) < -1.386$$

$$\alpha > 0.667$$

3) Adayın sadece bir tane 3 puanı varsa genel puanı 2.125'in altında olsun.

$$A(3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) < 2.125 \text{ olmalı.}$$

$$3\left(\frac{1}{8}\right)^\alpha + 2\left(\left(\frac{2}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha\right) + 2\left(\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{8}\right)^\alpha\right) + 2\left(\left(\frac{4}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{8}\right)^\alpha\right) + 2\left(\left(\frac{5}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{8}\right)^\alpha\right) + 2\left(\left(\frac{6}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{5}{8}\right)^\alpha\right) + 2\left(\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{6}{8}\right)^\alpha\right) + 2\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^\alpha\right) < 2.125$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^\alpha + 2 < 2.125$$

$$\ln 0.125^\alpha < \ln 0.125$$

$$\alpha > 1$$

Eğer $\alpha = 0.68$ seçilirse 1. ve 2. kriter sağlanır. Hesaplanan ağırlıklar aşağıda ve adayın genel puanları Çizelge 5.21'de verilmiştir.

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha = 0.243$$

$$\omega_2 = \left(\frac{2}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha = 0.147$$

$$\omega_3 = \left(\frac{3}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{8}\right)^\alpha = 0.123$$

$$\omega_4 = \left(\frac{4}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{8}\right)^\alpha = 0.111$$

$$\omega_5 = \left(\frac{5}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{8}\right)^\alpha = 0.102$$

$$\omega_6 = \left(\frac{6}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{5}{8}\right)^\alpha = 0.096$$

$$\omega_7 = \left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - \left(\frac{6}{8}\right)^\alpha = 0.091$$

$$\omega_8 = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^\alpha = 0.087$$

Çizelge 5.21 Adayın OWA operatörleriyle birleştirilmiş genel puanları.

Karar Vericiler	1	2.537
	2	2.624
	3	2.426
	4	2.212
	5	2.239
	6	2.335
	7	2.303

İkinci safha: Adayın bir tanesi hariç tüm puanları 3 ise final puanı yaklaşık 2.7 olmalı.

$$A(3,3,3,3,3,3,1) \cong 2.7 \text{ olmalı.}$$

$Q(r) = r^\alpha$ alırsak OWA ağırlıkları $\omega_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right)$ denklemi ile aşağıdaki gibidir.

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{7}\right)^\alpha, \omega_2 = \left(\frac{2}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{7}\right)^\alpha, \omega_3 = \left(\frac{3}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{7}\right)^\alpha, \omega_4 = \left(\frac{4}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{7}\right)^\alpha, \omega_5 = \left(\frac{5}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{7}\right)^\alpha,$$

$$\omega_6 = \left(\frac{6}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{5}{7}\right)^\alpha, \omega_7 = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^\alpha$$

$$3\left(\frac{1}{7}\right)^\alpha + 3\left(\left(\frac{2}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{7}\right)^\alpha\right) + 3\left(\left(\frac{3}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{7}\right)^\alpha\right) + 3\left(\left(\frac{4}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{7}\right)^\alpha\right) + 3\left(\left(\frac{5}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{7}\right)^\alpha\right) +$$

$$3\left(\left(\frac{6}{7}\right)^\alpha - \left(\frac{5}{7}\right)^\alpha\right) + 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^\alpha \cong 2.7$$

$$2\left(\frac{6}{7}\right)^\alpha + 1 \cong 2.7$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{\alpha} \cong 0.85$$

$$\alpha \cong 1.058$$

Bu durumda OWA ağırlıkları,

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{7}\right)^{\alpha} = 0.128$$

$$\omega_2 = \left(\frac{2}{7}\right)^{\alpha} - \left(\frac{1}{7}\right)^{\alpha} = 0.266 - 0.128 = 0.138$$

$$\omega_3 = \left(\frac{3}{7}\right)^{\alpha} - \left(\frac{2}{7}\right)^{\alpha} = 0.408 - 0.266 = 0.142$$

$$\omega_4 = \left(\frac{4}{7}\right)^{\alpha} - \left(\frac{3}{7}\right)^{\alpha} = 0.553 - 0.408 = 0.145$$

$$\omega_5 = \left(\frac{5}{7}\right)^{\alpha} - \left(\frac{4}{7}\right)^{\alpha} = 0.700 - 0.553 = 0.147$$

$$\omega_6 = \left(\frac{6}{7}\right)^{\alpha} - \left(\frac{5}{7}\right)^{\alpha} = 0.850 - 0.700 = 0.150$$

$$\omega_7 = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{\alpha} = 1 - 0.850 = 0.150 \text{ olur.}$$

Bu durumda adayın final puanı;

$$\sum_{i=1}^7 \omega_i x_{(i)} = 2.624 \times 0.128 + 2.537 \times 0.138 + 2.426 \times 0.142 + 2.335 \times 0.145$$

$$+ 2.303 \times 0.147 + 2.239 \times 0.150 + 2.212 \times 0.150 = 2.375$$

Aynı ağırlıklar kullanılarak elde edilen diğer adayların final puanları Çizelge 5.22'de verilmiştir.

Çizelge 5.22 OWA operatörüyle bulunan final puanları

Adaylar	Final Puanları
1	2.375
2	1.725
3	1.681
4	1.644
5	2.079
6	2.318
7	2.334
8	2.212
9	1.569
10	1.897

Çizelge 5.22 OWA operatörleriyle bulunan final puanları.

Adaylar	Final Puanları
1	2.375
2	1.728
3	1.681
4	1.644
5	2.099
6	2.318
7	2.335
8	2.212
9	1.569
10	1.897

Birinci safhada veyalık derecesi:

$$\text{veyalık}(\omega) = \frac{1}{\alpha + 1} = \frac{1}{1 + 0.68} = 0.595$$

Birinci safhada veyalık derecesi %50'nin üstünde olduğundan kullanılan OWA operatörü *veya benzeridir*. Karar vericiler *risk üstlenen* bir davranış içerisinde.

İkinci safhada veyalık derecesi:

$$\text{veyalık}(\omega) = \frac{1}{\alpha + 1} = \frac{1}{1 + 1.058} = 0.486$$

İkinci safhada veyalık derecesi %50'nin altında olduğundan kullanılan OWA operatörü *ve benzeridir*. Karar vericiler *riskten kaçınan* bir davranış içerisinde.

OWA operatörleriyle birleştirilen puanlara dayanarak ödenek tahsisi yapılırsa beş (1., 5., 6., 7. ve 8.) adayın puanı 2'nin üstündedir ve bu adaylar ödeneği almaya hak kazanmışlardır. Daha sonraki dönemlerde kullanılmak üzere bir miktar ödenek kurulun elinde kalır.

5.3 Çok Amaçlı Lineer Programlama Problemine Minimum ve Maksimum Operatörleriyle Bulanık Bir Yaklaşım (Zimmermann, 1993)

Lineer programlama problemi, özel bir tür karar problemi olarak görülür. Lineer programlama probleminde karar uzayı, kısıtlar vasıtasıyla belirlenirken, hedef (fayda fonksiyonu) ise amaç fonksiyonu ile tanımlanır. Bu durumda, karar bir tip belirlilik altında karardır.

$c, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ ve $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olmak üzere, klasik lineer programlama problemi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\max z(x) = c^T x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Bir lineer programlama probleminde birden fazla amaç varsa, bu çok amaçlı karar verme problemi *vektör-maksimum problemi* adını alır. Bu kavram ilk kez 1951'de Kuhn ve Tucker tarafından verilmiştir.

$i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $c_i, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $Z(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x))$ şeklinde bir vektör fonksiyonu olmak üzere, vektör-maksimum problemi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\max z_i(x) = c_i^T x, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $z_i(x) \geq z_i(\bar{x})$ ve $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $z_i(x) > z_i(\bar{x})$ eşitsizliklerini sağlayan, yani $Z(x) \geq Z(\bar{x})$ ve $Z(x) \neq Z(\bar{x})$ olan x çözümü bulunamıyorsa, $\bar{x}$ çözümüne *etkin çözüm* denir. Problemin tüm amaçlarını optimize eden bir $\bar{x}$ çözümü, bazen bulunmayabilir. Bu durumda, karar verici tarafından diğer tüm çözümlere tercih edilen çözüme, *optimal uzlaşık çözüm* denir.

Örnek olarak verilen çok amaçlı lineer programlama problemini göz önüne alalım.

$$\max z_1 = -x_1 + 2x_2$$

$$\max z_2 = 2x_1 + x_2$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 21$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 27$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 45$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Mevcut kısıtlar altında z_1 amacını maksimize eden çözüm $X^1 = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 7 \end{bmatrix}$ iken, amaç

fonksiyon değeri $\max z_1 = 14$ olmaktadır. Benzer şekilde, mevcut kısıtlar altında z_2 amacını

maksimize eden çözüm $X^2 = \begin{bmatrix} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{bmatrix}$ iken, amaç fonksiyon değeri $\max z_2 = 21$ olmaktadır.

$X^1 = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 7 \end{bmatrix}$ çözümü için $z_2 = 7$ olurken, $X^2 = \begin{bmatrix} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{bmatrix}$ çözümü için $z_1 = -3$ olmaktadır.

$(z_1(X^1), z_2(X^1)) = (14, 7)$ ve $(z_1(X^2), z_2(X^2)) = (-3, 21)$ olduğundan etkin çözüm yoktur, bu durumda optimal uzlaşık çözüm aranır.

Bu amaç fonksiyonlarını, üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_1(x)$ ve $\mu_2(x)$ olan bulanık kümelerle karakterize edelim. Üyeliklerin 0'dan 1'e doğrusal olarak arttığını ve sırasıyla $z_1(x) = 14$ ve $z_2(x) = 21$ için, 1 değerini aldığını farz edelim. Bu durumda, üyelikler tatmin seviyeleri olarak görülebilir. Dolayısıyla, amaç fonksiyon değerleri arttıkça tatmin aratacak ve fonksiyonlar optimal değerlerini aldığı anda tatmin seviyeleri 1'e eşit olacaktır.

$X^1 = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 7 \end{bmatrix}$ çözümü için $z_2 = 7$ olurken, $X^2 = \begin{bmatrix} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{bmatrix}$ çözümü için $z_1 = -3$ olmaktadır.

Yani, z_1 amacı en iyi 14 değerini alırken, en kötü -3 değerini alır. Benzer şekilde, z_2 amacı en iyi 21 değerini alırken, en kötü 7 değerini alır. O halde, üyelik fonksiyonları şöyledir:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0, & z_1(x) \leq -3 \\ \frac{z_1(x) + 3}{17}, & -3 < z_1(x) \leq 14 \\ 1, & z_1(x) > 14 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0, & z_2(x) \leq 7 \\ \frac{z_2(x)-7}{14}, & 7 < z_2(x) \leq 21 \\ 1, & z_2(x) > 21 \end{cases}$$

Örneğin, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ için $z_1(x) = 14$ ve $\mu_1(x) = 1$ olurken, $z_2(x) = 7$ ve $\mu_2(x) = 0$ olur. Benzer şekilde, $x = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ için $z_2(x) = 21$ ve $\mu_2(x) = 1$ olurken, $z_1(x) = -3$ ve $\mu_1(x) = 0$ olur.

Karar uzayı bu iki bulanık kümenin kesişimi olduğundan, karar uzayının üyelik fonksiyonu şu şekildedir:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_x \{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$$

$\mu_{\tilde{D}}(x) = \lambda$ alınırsa $\lambda = \min_x \{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ olur ve dolayısıyla $\lambda \leq \mu_1(x)$ ve $\lambda \leq \mu_2(x)$ 'dir.

$$\lambda \leq \frac{-x_1 + 2x_2 + 3}{17}$$

$$\lambda \leq \frac{2x_1 + x_2 - 7}{14}$$

denklemleri düzenlenirse,

$$17\lambda \leq -x_1 + 2x_2 + 3$$

$$14\lambda \leq 2x_1 + x_2 - 7$$

$$x_1 - 2x_2 + 17\lambda \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 - 14\lambda \geq 7$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler birer kısıt olarak probleme eklenir.

Bu durumda $\lambda \in [0,1]$ kararın maksimize edilmesiyle bulunur. Problemin son şekli şöyledir.

$$\max \lambda$$

$$\lambda \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 17\lambda \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 - 14\lambda \geq 7$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 21$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 27$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 45$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2, \lambda \geq 0$$

Problem WINQSB paket programı ile çözülürse, problemin optimal çözümü $X^3 = \begin{bmatrix} 5.0323 \\ 7.3226 \end{bmatrix}$;

amaç fonksiyon değerleri $z_1(X^3) = 9.6129$ ve $z_2(X^3) = 17.3872$; tatmin seviyesi $\lambda = 0.7419$ olarak bulunur.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, çok kriterli karar verme proseslerinde kullanılan birleştirme operatörleri incelenmiştir. Çok kriterli karar problemlerinde, en iyi alternatifin seçilmesinde amaçlar (kriterler) birbiriyle çelişebildiğinden, alınan karar tüm amaçlar için optimal olmayabilir. Karar vericiler, bazı amaçlarda kazanmak için bazı amaçlardan belli ölçülerde ödün vermek durumundadırlar. Tüm kriterlerin sağlanmasını isteyen bir karar verici, kötümser (riskten kaçınan) bir davranış sergileyerek, bir tür t-norm olan minimum operatörü ile birleştirme yapar. Bunun aksine, sadece bir kriterin sağlanmasını yeterli gören bir karar verici, iyimser (risk üstlenen) bir davranış sergiler ve bir tür t-konorm olan maksimum operatörü ile birleştirme yapar. Çoğu kararda, ne tam iyimser bir davranış ne de tam bir kötümser davranış sergilenmelidir. Bu nedenle, dengeleyici olmayan t-norm ve t-konorm operatörleri yerine, birleştirilen değerlerin minimumu ve maksimumu arasında sonuçlar veren (dengeleyici) operatörler kullanılmalıdır. Ortalama operatörleri dengeleyicidir. Ancak, uygulamalarda aritmetik benzeri ortalamaların, karar vericilerin tercihlerini yansıtmakta yetersiz kaldığı görülmüştür. Örneğin, Kısım 5.2'de verilen uygulamada karar vericiler (3,2,2,2,2,2,2) değerlendirmesine sahip bir adayın genel puanının 2.125'den düşük olmasını istemektedir. Ancak, bu adayın genel puanı aritmetik ortalama operatörü ile hesaplandığında sonuç 2.125 etmektedir. Mevcut problemlerde medyan operatörü ile adaylar sıralanamamıştır. Genelleştirilmiş α -ortalamalarının ve OWA operatörlerinin ise karar vericilerin tercihlerini en iyi şekilde yansıttığı görülmüştür. OWA operatörü bir tür bulanık integraldir. Bulanık integraller, kriterler birbirinden bağımsız değilse, yani kriterler arasında etkileşim varsa, bu etkileşimi şekillendirmeye imkân sağlar. Bunun yanı sıra, OWA operatörü bir ortalama operatörü olduğundan dengeleyicidir. Bu nedenle, karar vericiler sayısal skorlarla değerlendirme yapıyorsa, bu operatör ile birleştirme doğru olur. Ancak, değerlendirmeler sözlerle yapılıyorsa belirsizlikler ortaya çıkar ve linguistik yaklaşım gereklidir.

KAYNAKLAR

- Aksoy, Y., Özkan, E.M. ve Karanfil, S. (2003), *Bulanık Mantığa Giriş*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 4, İstanbul.
- Atin, M. H. (1999), *Bulanık Lineer Programlama*, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ayyıldız, G. (2003), *CIM Yatırımlarının Bulanık AHP Yöntemi ile Değerlendirilmesi*, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Bedregal, B.R.C. ve Takahashi A. (2005), "Interval T-norms as Interval Representations of T-norms" IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 22-25 May 2005, Reno, Nevada, USA.
- Bordogna, G., Fedrizzi, M. ve Pasi G. (1997), "A Linguistic Modeling of Consensus in Group Decision Making Based on OWA Operators", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 27(1):126-132.
- Canfora, G. ve Troiano, L. (2001), "An Extensive Comparison between OWA and OFNWA Aggregation", In Proc. of VIII Sigef Congress, Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, July 2001, ISBN 88-495-0317-2.
- Carlsson, C., Fullér, R. ve Fullér, S. (1997a), "Possibility and Necessity in Weighted Aggregation", in R.R.Yager and J.Kacprzyk eds., *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publisher, Boston, 18-28.
- Carlsson, C., Fullér, R. ve Fullér, S. (1997b), "OWA Operators for Doctoral Student Selection Problem", in R.R.Yager and J.Kacprzyk eds., *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory, Methodology, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 167-178.
- Chen, S. J. ve Hwang, C. L. (2005), "Aggregating Fuzzy Opinions in the Heterogeneous Group Decision-Making Environment", *Cybernetics and Systems: An International Journal*, 36: 309-338.
- Chiclana, F., Herrera-Viedma, E., Herrera, F. ve Alonso, S. (2004), "Some Induced Ordered Weighted Averaging Operators and Their Use for Solving Group Decision Making Problems Based on Fuzzy Preference Relations", Technical Report SCI2S-2004-01, Research Group on Soft Computing and Intelligent Information Systems. University of Granada, 2004.
- Delgado, M., Herrera, F., Herrera-Viedma, E. ve Martinez L. (1998), "Combining Numerical and Linguistic Information in Group Decision Making", *Journal of Information Sciences*, 107: 177-194.
- Detyniecki, M. (2001), "Fundamentals on Aggregation Operators", (<http://www.spatial.maine.edu/~worboys/SIE565/papers/aggregation%20operators.pdf>).
- Domingo-Ferrer, J. ve Torra V. (2003), "Median-Based Aggregation Operators For Prototype Construction In Ordinal Scales", *International Journal of Intelligent Systems*, 6:633-655.
- Fernandez Salido, J.M. ve Murakami, S. (2003), "Extending Yager's Orness Concept for the OWA Aggregators to Other Mean Operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 139:515-542.
- Fodor, J.C., Marichal, J. L. ve Roubens M. (1995), "Characterization of Some Aggregation Functions Arising From MCDM Problems", in: B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager and L.A.

Zadeh, Eds., *Fuzzy Logic and Soft Computing* (World Scientific, Singapore, 1995) 194-201, [ISBN 981-02-2345-5].

Fullér, R. (1995), "Neural Fuzzy Systems", Abo Akademis Tryckeri, Abo, ESF Series A:443, 249 pages. [ISBN 951-650-624-0, ISSN 0358-5654].

Fullér, R. (1996), "OWA Operators in Decision Making", in C. Carlsson ed. *Exploring the Limits of Support Systems*, TUCS General Publications, 3: 85-104.

Godo, L. ve Torra, V. (2000), "Extending Choquet Integrals for Aggregation of Ordinal Values", Invited Session on Aggregation Operators (organized by T. Calvo, R. Mesiar, B. De Baets), Proc. of the Eighth Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU 2000) (ISBN 84-95479-02-8), 410-417, Madrid, Spain.

Grabisch, M. (1996), "The Application of Fuzzy Integrals in Multicriteria Decision Making", *European Journal of Operational Research*, 89:445-456.

Grabisch, M., Orlovski S.A. ve Yager R.R. (1998), "Fuzzy Aggregation of Numerical Preferences", in R. Slowinski editor, *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 31-68.

Grabisch, M. ve Roubens, M. (2000), "Application of the Choquet Integral in Multicriteria Decision Making", in Grabisch, M., Murofushi, T., and Sugeno, M. (eds.), *Studies in Fuzziness*, Physica Verlag, Heidelberg, 348-374.

Herrera, F., Herrera-Viedma, E. ve Vergeday, J.L. (1997), "Linguistic Measures Based on Fuzzy Coincidence for Reaching Consensus in Group Decision Making", *International Journal of Approximate Reasoning*, 16:309-334.

Herrera, F. ve Herrera-Viedma, E. (2000), "Linguistic Decision Analysis: Steps for Solving Decision Problems under Linguistic Information", *Fuzzy Sets and Systems*, 115:67-82.

Huynh, V. N. ve Nakamori Y. (2005), "Multi-Expert Decision-Making with Linguistic Information: A Probabilistic-Based Model", 38th Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS-38), IEEE Computer Society, 2005/01.

Jenei, S. (2001), "Continuity of Left-continuous Triangular Norms with Strong Induced Negations and Their Boundary Condition", *Fuzzy Sets and Systems*, 124:35-41.

Marichal, J. L. (1999), "Aggregation Operators for Multi-criteria Decision Aid", PhD Dissertation, Faculte des Sciences, Universite de Liege, Liege, Belgium.

Marichal, J. L. (2000a), "Behavioral Analysis of Aggregation in Multicriteria Decision Aid", in: J. Fodor B. De Baets, and P. Perny (eds.), *Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge. Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing Vol. 51* (Physica Verlag, Heidelberg, 2000) pp. 153-178 [ISBN 3790813036].

Marichal, J. L. (2000b), "On Choquet and Sugeno Integrals as Aggregation Functions", M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno (eds.), *Fuzzy Measures and Integrals - Theory and Applications. Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing Vol.40* (Physica Verlag, Heidelberg, pp. 247-272 [ISBN 3790812587].

Marichal, J. L. (2004), "Tolerant or Intolerant Character of Interacting Criteria in Aggregation by the Choquet Integral", *European Journal of Operational Research*, 155:771-791.

Petrou, M. ve Sasikala, K. R. (1999), "Generalized Fuzzy Aggregation Operators", Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition (MLDM) 1999, First International Workshop, September 16–18 1999, Leipzig, Germany.

Pradera, A., Trillas, E. ve Calvo, T. (2002), "A General Class of Triangular Norm-based Aggregation Operators: Quasi-Linear T–S Operators", *International Journal of Approximate Reasoning*, 30:57-72.

Prodanovic, P. (2001), "Fuzzy Set Ranking Methods and Multiple Expert Decision Making", Research Report, FIDS, The University of Western Ontario, Canada.

Roubens, M. (1997), "Fuzzy Sets and Decision Analysis", *Fuzzy Sets and Systems*, 90:199–206.

Sakawa, M., (1993), *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, Newyork.

Smolikova, R. ve Wachowiak, M. P. (2002), "Aggregation Operators for Selection Problems", *Fuzzy Sets and Systems*, 131:23–34.

Tiryaki, F. ve Günay, H. (2005), "Birleştirme Operatörleri ve Dilsel Niceleyiciler: Yurtdışı Kongrelerine Katılım İçin Ödenek Tahsisi Yapılacak Akademisyen Seçimine Bir Uygulama", YA/EM 2005 25. Ulusal Kongresi, 04–06 Temmuz, Koç Üniversitesi Rumeli Feneri Kampüsü, Sarıyer, İstanbul.

Topuz, V., Akbaş A. ve Tektaş M. (2002), "Boğaz Köprüsü Yoluna Katılım Noktalarında Trafik Akımlarının Bulanık Mantık Yaklaşımı ile Kontrolü ve Bir Uygulama Örneği", Uluslararası Trafik ve Yol Güvenliği Kongresi ve Fuarı, Ankara, Ağustos -2002.

Torra, V. (1998), "On Some Relationships between the WOWA Operator and the Choquet Integral", *Proc. of the Seventh Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'98)* (ISBN 2-84254-013-1), 818-824, (trabajo invitado en la sesión Aggregation operators organizada por Bernard De Baets), París, Francia, Junio 6-10, 1998.

Torra, V. (2001), "Empirical Analysis to Determine Weighted OWA Orness", *Proc. of the 5th Int. Conference on Information Fusion (Fusion 2001)* (ISBN: 0-9695628-3-7), ThB3-11-16, Montreal, Quebec, Canada, 2001.

Xu, Z. S. ve Da Q. L. (2003), "An Overview of Operators for Aggregating Information", *International Journal of Intelligent Systems*, 18: 953–969.

Xu, Z. (2004a), "A Method Based on Linguistic Aggregation Operators for Group Decision Making with Linguistic Preference Relations", *Information Sciences*, 166:19-30.

Xu, Z. (2004b), "Uncertain Linguistic Aggregation Operators Based Approach to Multiple Attribute Group Decision Making Under Uncertain Linguistic Environment", *Information Sciences*, 168:171-184.

Xu, Z. (2006), "An Approach Based on the Uncertain LOWG and Induced Uncertain LOWG Operators to Group Decision Making with Uncertain Multiplicative Linguistic Preference Relations", *Decision Support Systems*, 41(2): 488-499.

Valls, A. (2003), "ClusDM: A Multiple Criteria Decision Making Method for Heterogeneous Data Sets", *Monografies de l'Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial, CSIC*. Num.17.

Vanegas, L.V. ve Labib W. (2001), "Application of New Fuzzy-Weighted Average (NFWA) Method to Engineering Design Evaluation", *International Journal of Production Research*, 39-6:1147-1162.

Yager, R.R. (1988), "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18:183-190.

Yager, R.R. (1995), "Multicriteria Decision Making Using Fuzzy Quantifiers", *Proceedings of the IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering*, New York, 42-47.

Yager, R.R. (2002), "Defending Against Strategic Manipulation in Uninorm-based Multi-agent Decision Making", *European Journal of Operational Research*, 141:217-232.

Yager, R. R. (2004), "Constraint Satisfaction Using Soft Quantifiers", *International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 12:177-186.

Zimmermann, H. J. (1993), *Fuzzy Set Theory-and Its Applications*, Second, Revised Edition, Sixth Printing, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London.

İNTERNET KAYNAKLARI

[1]<http://science.ankara.edu.tr/~ozbek/bulanik-1.htm>

[2]<http://ieeexplore.ieee.org/iel5/9620/30397/01397620.pdf?tp=&arnumber=1397620&isnumber=30397>

[3]<http://www.spatial.maine.edu/~worboys/SIE565/papers/aggregation%20operators.pdf>

Ek 1 Yurt Dışında Uluslar Arası Bilimsel Toplantılara Katılma İstek Formu

Toplantıya Katılmak İsteyenin

Adı Soyadı: Fatma TİRYAKİ

Unvanı: Doç. Dr.

Çalıştığı Bölüm: Matematik

I. ve II. Dönemde Verdiği Haftalık Ortalama Ders Saati Sayısı: 20

(Varsa) İdari Görevleri: Fakülte Yönetim Kurulu Üyesi

Katılmak İsteddiği Toplantının

Adı: IFORS-2005 Conference

Konusu: Yöneylem Araştırması, Yönetim Bilimleri

Yapılacağı Ülke: Amerika

Tarihi: 11-15 Temmuz 2005

Toplantıda Sunulacak Bildiri Veya Bildirilerin

Sayısı: 2

Bildiri 1:

Adı: Fuzzy Stock Selection Using Fuzzy Analytic Hierarchy Process

Yazarları: Fatma TİRYAKİ, Beyza AHLATÇIOĞLU

Sunucusu: Fatma TİRYAKİ

Türü:

Poster ☐

Sözlü ☒

Çağrılı ☐

Yayın Türü:

Bildiri Özetleri Kitapçığı ☒

Toplantı Raporu ☐

Tam Metin ☐

