

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK AMAÇLI LİNEER PROGRAMLAMADA DUALİTE TEORİSİ

İlknur KUŞBEYZİ

FBE Matematik Anabilim Dalı Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abbas Y. Azimli

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. MATEMATİKSEL ALTYAPI	5
2.1 Konveks kombinasyon ve lineer bağımlılık.....	5
2.2 Açık küre ve sınır noktaları	6
2.3 Afin fonksiyon ve çokyüzlü	9
2.4 Konveks koniler.....	10
3. KONVEKS ANALİZE GİRİŞ	12
3.1 Konveks kümeler	12
3.2 Konveks örten ve Carathéodory teoremi	13
3.3 Ayırma teoremi.....	16
3.4 Konveks fonksiyon	18
3.5 Subgradyent kavramı	19
3.6 Eşlenik fonksiyonlar	20
4. KLASİK LİNEER PROGRAMLAMA İÇİN DUALİTE TEOREMİ	23
4.1 Klasik lineer programlamaya giriş	23
4.2 Perturbasyon Yöntemi	25
4.3 Lagrange Yöntemi	27
5. ÇOK AMAÇLI LİNEER PROGRAMLAMAYA GİRİŞ	30
6. GALE, KUHN VE TUCKER'IN DUALİTE YÖNTEMLERİ	32
7. ISERMANN'IN DUALİTE YÖNTEMİ	34
8. KORNBLUTH'UN DUALİTE YÖNTEMİ	36
9. AZİMOV'UN DUALİTESİ.....	37

9.1	Eşlenik çok değerli fonksiyonlar	37
9.2	Çok amaçlı problemlerin dualitesi.....	38
9.3	Özel hal I.....	41
9.4	Özel hal II.....	42
10.	ÇOK AMAÇLI LİNEER PROGRAMLAMA İÇİN PERTURBASYON YÖNTEMİ	45
	KAYNAKLAR.....	47
	ÖZGEÇMİŞ.....	49

SİMGE LİSTESİ

R	Reel sayılar kümesi
R^n	Aritmetik n boyutlu uzay
E_n	Öklid uzayı
R_+	Kesin pozitif reel sayılar kümesi
R_0	Pozitif sayılar kümesi
H	Hiperdüzlem
A^0	A kümesinin iç noktalarının kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$co(S)$	S kümesinin konveks örteni
clS	S kümesinin kapanışı
∂S	S kümesinin sınır noktaları kümesi
$intS$	S kümesinin iç noktaları kümesi
$epif$	f fonksiyonunun epigrafiği
$hypf$	f fonksiyonunun hipografiği
f^*	f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu
f^{**}	f fonksiyonunun ikincil eşlenik fonksiyonu
∂f	f fonksiyonunun subgradyanı
(P)	Primal problem
(P^*)	Dual problem
Φ	Perturbasyon fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

ÇALP	Çok Amaçlı Lineer Programlama
LP	Lineer Programlama
LPP	Lineer Programlama Problemi
LVO	Lineer Vektör Optimizasyonu

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 İç noktaları olmayan kapalı küme (sınırlı)	8
Şekil 2.2 İç noktaları olan sınırlı (hiperküre içine alınabilir) ne açık ne kapalı	8
Şekil 2.3 Kapalı sınırsız küme.....	8
Şekil 2.4 Açık sınırsız küme.....	8
Şekil 2.5 Çokyüzlü.....	9
Şekil 2.6 Çokyüzlü: kapalı sınırlı (kompakt) küme.....	10
Şekil 2.7 Orijinden çıkan yarı ışın	10
Şekil 2.8 Genel koni.....	10
Şekil 2.9 Konveks olmayan bir koni.....	11
Şekil 2.10 Açık yarıuzay (koni değil)	11
Şekil 3.1 Konveks bir küme	12
Şekil 3.2 Konveks olmayan bir küme	12
Şekil 3.3 Teorem 3.2.2	14
Şekil 3.4 Teorem 3.2.2'ye bir aksi örnek	14
Şekil 3.5 Teorem 3.2.2'ye diğer bir aksi örnek	14
Şekil 3.6 Kapalı konveks bir kümeye minimum uzaklık	15
Şekil 3.7 Ayırma teoremi	16
Şekil 3.8 İki konveks kümenin ayrılması	16
Şekil 3.9 Destek hiperdüzlemi.....	17
Şekil 3.10 Konveks fonksiyon.....	18
Şekil 3.11 Konveks bir fonksiyonun epigraf ve hipografiği	19
Şekil 3.12 Konveks bir fonksiyon için subgradyentin geometrik yorumu	19
Şekil 3.13 İkincil eşlenik fonksiyonu.....	20
Şekil 5.1 Pareto optimum	31

ÖNSÖZ

Dualite, optimizasyonda çok kullanışlı bir yöntemdir. Birçok konuya (polar kümeler, eşlenik fonksiyonlar, lineer programlama, çok amaçlı lineer programlama,...) uygulanabilen bu yöntem temelinde konveks kümeler için destek hiperdüzlemler özelliğine dayanır.

Lineer programlamada ise dualite herhangi bir optimizasyon problemine karşılık belli bir kurala göre bir dual problem bulunması ve bu problemlerin çift olarak incelenmesidir. Bu sayede dual çiftin incelenmesi verilen ilk problemin daha geniş incelenmesine olanak tanır.

Çok amaçlı lineer programlama problemlerine aynı zamanda lineer vektör optimizasyonu problemi de denir. (ÇALP=LVO)

ÖZET

Bu yüksek lisans tezinde klasik (tek amaçlı) lineer programlamada hem Lagrange'ın minmax yöntemi hem de perturbasyon yöntemiyle dual problem ve dual teoremlerin nasıl alındığına dair bir özet verilmiştir. Daha sonra çok amaçlı lineer programlama için mevcut dualite teoremlerinin özeti verilmiştir. Son olarak çok amaçlı lineer programlama için Azimov'un verdiği dualite teorisi çerçevesinde dualite teoremi yazılmış ve ispat edilmiştir.

Anahtar kelimeler: konveks analiz, eşlenik fonksiyon, dualite, çok amaçlı lineer programlama.

ABSTRACT

In this MS thesis is a brief summary of how dual problem and duality concepts are obtained in both Lagrange's minmax method and perturbation method in single objective linear programming. Then a summary of some duality theorems for multiple objective linear programming is given. Finally, duality theorem for multiple objective linear programming is given and proven according to Azimov's duality theory.

Keywords: convex analysis, conjugate function, duality, multiple objective linear programming.

1. GİRİŞ

Çok amaçlı lineer programlamada dualite yöntemleri ilk kez Gale, Kuhn ve Tucker tarafından 1951’de geliştirilmiştir. Lineer programlamanın amaç fonksiyonları matris olan bir çiftini incelemiş ve bazı dualite teoremlerini göstermişlerdir. Lineer programlamanın matris problemleri amaç fonksiyonu vektör ve skaler değerli lineer programlama problemlerini de özel haller olarak içerdiğinden geliştirilen bu teori lineer programlamanın vektör problemleri ve klasik lineer programlamaya uygulanabilir. Schönfeld’in 1964’te bu dualite yöntemine katkıları olmuştur.

Kornbluth 1974’te “Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming” isimli makalesinde lineer programlamanın lineer homojen parametrik vektör problemlerinin bir dual çiftini incelemiştir. Kornbluth’un dualite ifadelerine 1977’de Rödder tarafından katkıda bulunulmuş ve genelleştirilmiş bir eyer noktası teorisine uygulanmıştır. Daha ileri bir dualite yöntemi 1977’de Isermann tarafından geliştirilmiştir.

Birçok algoritma ve simpleks yöntemin çok amaçlı duruma uygulanması çalışılmıştır (Evans ve Steuer (1973), Isermann (1977), Steuer (1985), Yu ve Zeleny(1975), Yu (1976), Zeleny (1974)). Daha yakın zamanlarda karar uzayındaki Pareto optimal kümesi yerine görüntü uzayındaki etkin kümenin türetilmesi üzerine yoğunlaşan yöntemler ilgi konusu olmuştur (Benson (1997)). Ayrıca çok amaçlı lineer programlama için dualite teorisi çalışılmıştır (Corley (1984), Isermann (1978)).

Tek amaçlı klasik lineer programlamada ise dualite ilk kez John von Neumann tarafından tasarlanmıştır. İlk yazılı kanıtı George Dantzig’in yazdığı bir Hava Kuvvetleri raporudur. 1947’de George B. Dantzig, John von Neumann’a ilk kez lineer programlama probleminden bahsettiğinde von Neumann hemen bir matris oyuncu için optimal strateji bulmanın (sıfır-toplamlı iki-kişili oyun) bir lineer programlama problemi olduğunu görmüştü. Matris oyununda iki oyuncu olduğundan von Neumann lineer programlama problemlerin çiftler halinde varolduğunu öne sürdü. Bu varsayımı, David Gale, Harold W. Kuhn ve Albert W. Tucker tarafından 1948’de ispatlandı. (Nevind & Tucker, 1993, pp.260)

Öte yandan Dantzig bağımsız olarak Hava Kuvvetleri’nin yayınlanmamış bir iç yazışmasında von Neumann ile 1947’deki ilk tartışmasına dayanarak dualiteyi 1948’de ifade ve ispat ettiğini söyler. Fakat Dantzig’in dediği gibi: “Bugün herkes dualite teoreminin yaratıcısı olarak von Neumann’ı sayar ve ilk kesin kanıtı yayınlayanlar olarak Tucker, Kuhn ve Gale’i bilir.”

Albert Tucker ile Princeton Üniversitesi'nde iken yapılan röportajdan alıntı yapmak bu noktada daha gerçekçi bir yaklaşım sağlayacaktır; "O zamanlar Pentagon'daki Hava Kuvvetleri'nde istatistikçi olarak çalışan George Dantzig, Princeton'a John von Neumann'ı görmeye gelmişti. Daha önce Kasım 1947'de simpleks yöntemden bahsetmek için John von Neumann'ı ziyaret etmişti. O zaman von Neumann dualiteyi önceden görmüştü. Von Neumann'ın cesaretlendirmesi ile Dantzig lineer programlamanın matematiği ve bununla ilgili konular üzerine bir üniversite bazlı projeye Hava Kuvvetleri bursu alabilmek için başvuruda bulunmuştu. Dantzig von Neumann'ı görmeye 1948 Bahar'ında tekrar geldi, o zaman tesadüf eseri onunla tanıştım. Lineer programlamanın ne olduğunu sordum, bir taşıma problemi örneği vererek lineer programlamaya 5 dakikalık bir giriş yaptı.

1948'de benimle çalışan iki üniversite öğrencisi vardı. Biri David Gale diğeri Harold Kuhn idi. Bir matris oyunu ile lineer programla arasında bir ilişki kurmaya çalışıyorduk. Dantzig Kasım 1947'de ona lineer programlamadan bahseder bahsetmez von Neumann lineer programlamanın bir matris oyunundaki iki oyuncudan biri demek olabileceğini görmüştü. Lineer programlamada dualiteyi önceden gören de von Neumann'dı.

Yaz sonunda lineer programlama ile matris oyunları arasındaki ilişkiyi kesin olarak sağlayabildik ve dualiteyi tanımladık. Lineer programlar ikililer olarak varlardı, her maksimizasyon programına karşılık onunla ilişkili bir minimizasyon programı bulunuyordu."

1948'de Gale& Kuhn lineer programlamanın bir maksimizasyon probleminde Lagrange çarpanları yöntemi uygulanırsa Lagrange çarpanlarının dual değişkenler olduğunu gösterdi.

Tek amaçlı lineer programlama problemi $x \in R^n$, c n -boyutlu vektör, A $n \times n$ matris olmak üzere:

$$\begin{aligned} \max \langle c, x \rangle \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

yapısındaki bir problemidir. Burada lineer programlama probleminin amacı $x \geq 0$ kısıtı altında $\langle c, x \rangle$ fonksiyonunun alacağı maksimum değeri bulmaktır.

Gerçek hayat problemleri ise çoğunlukla birden çok amaç içerir. Bu yüzden tek amaçlı lineer programlama için bilinen yöntemlerin çok amaçlı lineer programlama problemleri için genişletilmesi gerekliliği doğmuştur. Çok amaçlı lineer programlama problemi:

$$\begin{aligned}
& \max \langle c_1, x \rangle \\
& \max \langle c_2, x \rangle \\
& \vdots \\
& \max \langle c_n, x \rangle \\
& Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

yapısındadır.

Çok amaçlı lineer programlamaya gerçek hayattan bazı örnekler:

Portföy Seçimi

$\max \{ \text{kar} \}$

$\min \{ \text{risk} \}$

$\max \{ \text{hisse kar payı} \}$

$\min \{ \text{Çeşitlendirme hedeflerinden sapma} \}$

Üretim Planlaması

$\max \{ \text{toplam net gelir} \}$

$\max \{ \text{herhangi zamanda minimum net gelir} \}$

$\min \{ \text{fazla mesai} \}$

$\min \{ \text{son ürün envanteri} \}$

Taşıma

$\min \{ \text{maliyet} \}$

$\min \{ \text{öncelikli müşterilere ortalama nakliye süresi} \}$

$\max \{ \text{verilen bir yöntemle göre taşıma} \}$

$\min \{ \text{yakıt tüketimi} \}$

Sermaye Yönetimi

$\max \{ \text{şimdiki net değer} \}$

$\min \{ \text{sermaye yatırım gereksinimleri} \}$

$\min\{\text{yıllık işletim giderleri}\}$

$\max\{\text{çevresel korumalarla ilgili proje yatırımı}\}$

$\max\{\text{verilen coğrafi bölgelerde proje yatırımı}\}$

$\max\{\text{verilen bir üretim çizgisine ait proje yatırımı}\}$

2. MATEMATİKSEL ALTYAPI

2.1 Konveks kombinasyon ve lineer bağımlılık

Tanım 2.1.1

Her biri reel sayı olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi n tane değişkenin sırayla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklinde yazılmasına *sıralı n 'liler* denir ve bunların oluşturduğu küme

$$R^n = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \forall i = \overline{1, n} \text{ için } x_i \in R\}$$

'dir ve bu kümeye *aritmetik n boyutlu uzay* denir.

Tanım 2.1.2

$x^1, x^2, \dots, x^n \in R^m$ vektörleri ve $\lambda_i \in R$ ($1 \leq i \leq n$) skalerleri için

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n$$

toplamına $x^1, x^2, \dots, x^n$ vektörlerinin bir *lineer kombinasyonu* denir.

Tanım 2.1.3

$x^1, x^2, \dots, x^n \in R^m$ vektörleri ve $\lambda_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$), $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ skalerleri için

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n$$

toplamına $x^1, x^2, \dots, x^n$ vektörlerinin bir *konveks kombinasyonu* denir.

Tanım 2.1.4

Her i için $x^i \in R^m$ olmak üzere $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ vektörler kümesinin *lineer bağımsız* olması demek

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n = 0$$

eşitliğini sağlayan tek $\{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n\}$ skalerler kümesinin $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^n = 0$ olmasıdır. Aksi halde hepsi birden 0 olmayan $\lambda_i \in R$ mevcut ise $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ vektörleri *lineer bağımlı*dır

denir. $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ vektörleri lineer bağımlı ise en az bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Lineer bağımsız vektörlerinin herhangi bir altkümesi lineer bağımsız ve lineer bağımlı vektörlerin herhangi bir üstkümesi lineer bağımlıdır. Sütunları lineer bağımsız vektörlerden oluşan bir $m \times m$ boyutlu A matrisi *tersinir*dir. ($|A| \neq 0$ 'dır.)

Tanım 2.1.5

V bir vektör uzayı $v^1, v^2, \dots, v^m$ de bu uzaydan alınmış m vektör olsun. $\{v^1, v^2, \dots, v^m\}$ kümesinin V 'ye bir *taban* (*baz*) oluşturması için gerek ve yeter şart bu kümenin V uzayını girmesi ve elemanlarının aralarında lineer bağımsız olmasıdır. Vektör uzayının *boyutu* ise uzayı geren lineer bağımsız vektörlerin maksimum sayısıdır.

Tanım 2.1.6

Bir matrisin *rankı* matristeki maksimum lineer bağımsız satır sayısıdır. Matriste maksimum lineer bağımsız satır sayısı maksimum lineer bağımsız sütun sayısına eşittir. Bu yüzden matrisin minimum boyutu rank için bir üst sınırdır.

2.2 Açık küre ve sınır noktaları

Tanım 2.2.1

$d : (R^n \times R^n) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in R^n$

- i. $d(x, y) \geq 0$
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$
- iii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iv. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d 'ye *uzaklık fonksiyonu* denir.

Tanım 2.2.2

$x \in R^n$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere x merkezli ve ε yarıçaplı, $H \subset R^n$ *açık küresi* aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H = \{y \in R^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

kümesidir.

Özel olarak bu hiperküre R^n 'de bir açık aralık, R^2 'de çevresi olmayan bir daire, R^3 'de ise yüzeyi olmayan bir küre gösterir.

Tanım 2.2.3

$x \in R^n$ 'de bir nokta ve $Y \subset R^n$ olmak üzere Y x 'i içeren herhangi bir açık kümeyi kapsıyorsa Y kümesine x 'in komşuluğu denir.

Tanım 2.2.4

$x \in R^n$ ve $A \subseteq R^n$ olmak üzere x 'in A 'nın kapsadığı bir komşuluğu bulunabiliyorsa $x \in A$ kümesinin bir iç noktasıdır denir.

Bir kümenin tüm iç noktaları kümesi $\text{int}S$ şeklinde gösterilir.

Kümenin bütün elemanları iç nokta ise kümeye *açık küme* denir. Yani $S = \text{int}S$ ise S açık kümedir.

Diğer bir deyişle R^n 'in altkümeleri olan bir küme R^n 'deki açık kürelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa açık kümedir.

Eğer S kümesi bir açık küme ise tümleyeni *kapalı küme*dir ve tersi de doğrudur. Kapalı bir küme sınır noktalarının tümünü içerir.

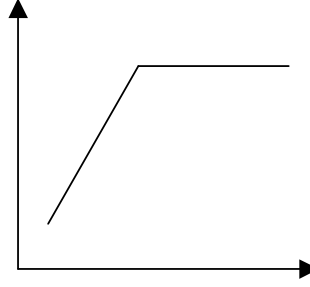
Tanım 2.2.5

$x \in S \subset E_n$ elemanı eğer her $\varepsilon > 0$ için $S \cap N_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ ise S kümesinin kapanışının elemanıdır. Bu şekilde tüm x elemanlarının kümesine S kümesinin *kapanışı* denir. Eğer $S = \text{cl}S$ ise S kapalıdır.

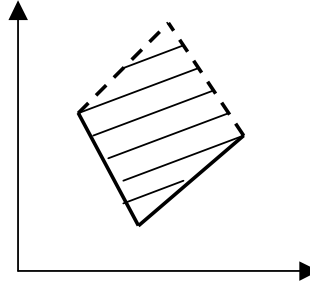
Tanım 2.2.6

$S \subset R^n$ kümesinin *sınırlı küme* olması için gerek ve yeter şart S 'yi içeren n boyutlu kürenin mevcut olmasıdır.

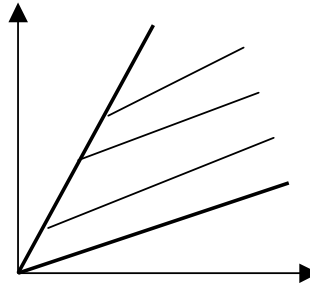
Diğer bir deyişle S 'deki tüm x 'ler için $|x| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ sonlu reel sayısı mevcut ise S kümesi sınırlıdır. Küme sınırlı değilse sınırsız kümedir.



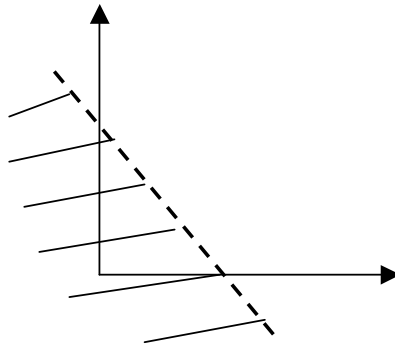
Şekil 2.1 İç noktaları olmayan kapalı küme (sınırlı)



Şekil 2.2 İç noktaları olan sınırlı (hiperküre içine alınabilir) ne açık ne kapalı



Şekil 2.3 Kapalı sınırsız küme



Şekil 2.4 Açık sınırsız küme

Tanım 2.2.7

Bir $x \in R^n$ noktasının her komşuluğu $A \subseteq R^n$ kümesinden bir nokta ve A kümesinin tümleyeninden bir nokta içeriyorsa x A kümesinin bir sınır noktasıdır. Tüm sınır noktalarının kümesi ∂S ile gösterilir.

2.3 Afın fonksiyon ve çokyüzlü

Tanım 2.3.1

$f : R^n \rightarrow R^m$ tanımlı $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ve $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ tanım aralığındaki

her x ve y ve her λ skaleri için sağlanan f fonksiyonuna *lineer fonksiyon* denir.

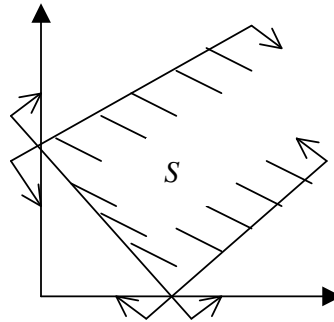
Tanım 2.3.2

$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$ formundaki vektör değerli fonksiyonlara *afın fonksiyon* denir. Katsayıları skaler veya matris olabilir. Sabit terim skaler veya sütun vektörüdür.

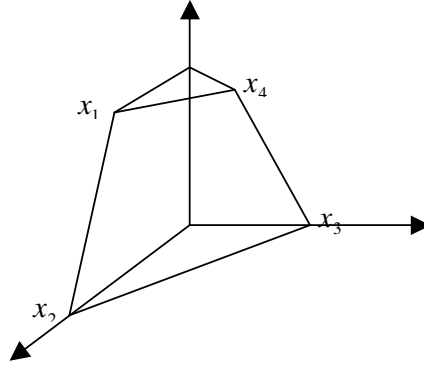
Lineer programlama problemleri lineer amaç fonksiyonu ve sonlu sayıda lineer eşitlik veya eşitsizlik kısıtına sahip optimizasyon problemleridir. Bu tür problemler C ve K konileri çokyüzlü olmak üzere konik lineer problemlerin bir özel hali olarak görülebilir.

Tanım 2.3.3

Sonlu sayıda kapalı yarıuzayların kesişimine *çokyüzlü (polihedral)* denir. Kapalı yarıuzay konveks küme olduğundan çokyüzlü de kapalı konveks bir kümedir. Örneğin uygun çözümler kümesi bir çokyüzlüdür.



Şekil 2.5 Çokyüzlü



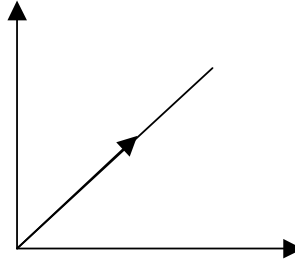
Şekil 2.6 Çokyüzlü: kapalı sınırlı (kompakt) küme

2.4 Konveks koniler

Tanım 2.4.1

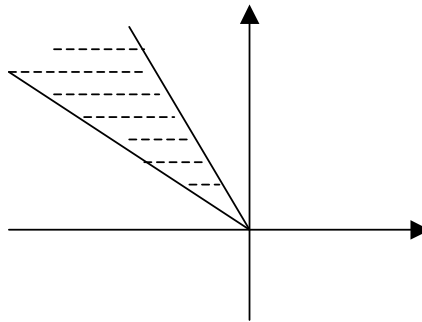
$V \neq \emptyset, v \in V \subset R^n$ olsun. $\alpha \geq 0$ için $\alpha v \in V$ ise V bir konidir.

Orijinde bulunan 0 konisinden başka bütün koniler sınırsız kümelerdir. $0 \in R^n$ noktası her konide bulunur. Orijinden çıkan yarı ışın bir konidir.



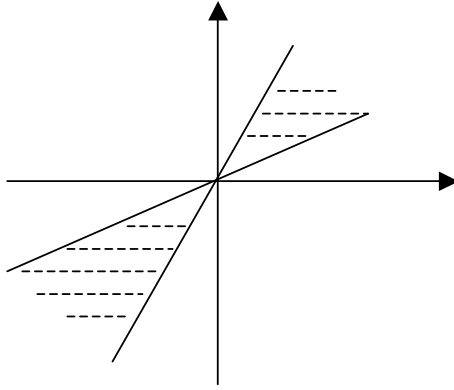
Şekil 2.7 Orijinden çıkan yarı ışın

R^n 'de K genel konisi konvektir.



Şekil 2.8 Genel koni

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi koninin konveks olması gerekmez.

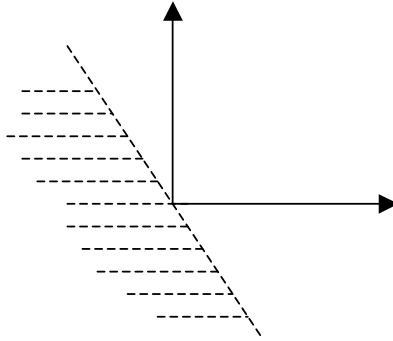


Şekil 2.9 Konveks olmayan bir koni

$R_+^n = \{x \in R^n \mid x \geq 0\}$ standart konisi konveks bir konidir.

R^n de konveks bir konidir.

Kapalı yarıuzay konveks bir konidir. Ancak $H^- = \{x \in R^n \mid \langle c, x \rangle < 0\}$ açık yarıuzayı orijini kesmediğinden koni değildir.



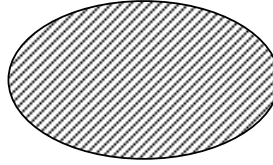
Şekil 2.10 Açık yarıuzay (koni değil)

3. KONVEKS ANALİZE GİRİŞ

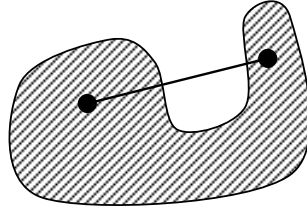
3.1 Konveks kümeler

Tanım 3.1.1

$S \subset E_n$ ve $S \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ ise S konveks kümedir. Yani kümede herhangi iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki tüm noktalar yine kümenin elemanı ise küme konvektir.



Şekil 3.1 Konveks bir küme



Şekil 3.2 Konveks olmayan bir küme

İki konveks kümenin kesişimi, toplamı ve bir konveks kümenin sabit bir λ ile çarpımı yine konvektir.

Tanım 3.1.2

Konveks bölgede iki farklı noktanın konveks kombinasyonu olarak yazılamayan noktaya uç (*extreme*) nokta denir. Matematiksel olarak $S \subset E_n$ konveks bölgesinde $x_1, x_2 \in S$ ve $x_1 \neq x_2$ ve $k \in (0,1)$ olmak üzere $\bar{x} = kx_1 + (1-k)x_2$ şeklinde yazılamıyorsa $\bar{x} \in S$ noktası S 'nin bir uç noktasıdır. Tanımdan dolayı uç nokta bir iç nokta olamaz. Dolayısıyla bütün uç noktalar sınırlıdır.

Tanım 3.1.1'de kümenin herhangi iki elemanının konveks kombinasyonunun kümede olması kümenin konveks bir küme olduğu belirtilmiştir. Kolaylıkla gösterilebilir ki herhangi sonlu sayıdaki x için de geçerlidir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.1.3

S konveks bir küme ise $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in S$ ($\forall x_i \in S, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \forall \lambda_i \geq 0$) 'dır.

3.2 Konveks örten ve Carathéodory teoremi***Tanım 3.2.1***

$S \subset E_n$ kümesinin *konveks örteni* kümenin tüm konveks kombinasyonlarının topluluğudur.

Diğer bir deyişle konveks örten

$$co(S) = H(S) = \{x : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, p}, \forall x_i \in S\} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır ve $co(S)$ veya $H(S)$ ile gösterilir.

Aynı zamanda konveks örten S kümesini kapsayan en küçük konveks kümedir. Aslında $H(S)$ S kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimidir.

Tüm konveks kümelerin kesişimi de konveks bir kümedir ve bu küme S 'yi içeren en küçük konveks kümedir.

Önerme 3.2.1

İki konveks örten tanımı denktir.

Tanım 3.2.1'te sonlu sayıda eleman için konveks örten tanımı yazılmıştır. Ancak aşağıdaki çok ünlü teoremden verilmiştir ki n boyutlu uzayda p 'nin $n+1$ 'den fazla alınmasına gerek yoktur.

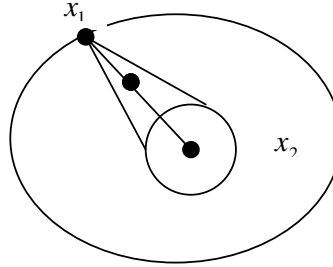
Teorem 3.2.1 (Carathéodory Teoremi)

Bir kümenin elemanlarının tüm konveks kombinasyonları kümesi n boyutlu uzayda en fazla $n+1$ elemanın konveks kombinasyonları ile sınırlandırılabilir. Yani $x \in H(S)$ ise p 'nin $n+1$ 'den fazla alınmasına gerek yoktur.

Aşağıdaki teorem konveks kümeleri karakterize eden bir teoremdir. Biri kümenin kapanışında biri konveks kümenin içinde olmak üzere biri iç nokta olmak zorunda iki eleman alındığında bu iki nokta birleştirildiğinde aradaki noktaların da kümenin içinde olduğunu ifade eder.

Teorem 3.2.2

$S \subset E_n$ içi boş olmayan konveks bir küme olsun. $x_1 \in clS$ ve $x_2 \in int S$ olmak üzere $\forall \lambda \in (0,1)$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in int S$ 'dir.



Şekil 3.3 Teorem 3.2.2

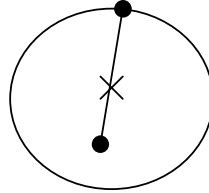
Sonuç 3.2.1

S konveks bir küme ise $int S$ de konvektir.

Sonuç 3.2.2

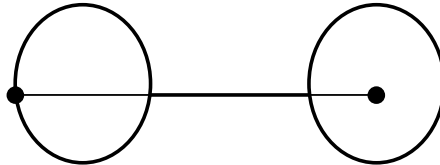
S konveks ve $int S \neq \emptyset$ ise clS konvektir.

Teorem 3.2.2'ye aksi örnekler verilebilir. Örneğin konveks bir küme alalım ve içinden bir nokta atalım.



Şekil 3.4 Teorem 3.2.2'ye bir aksi örnek

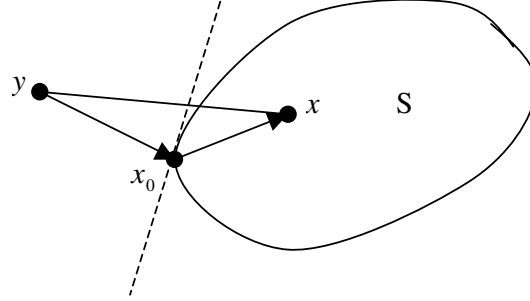
Aşağıda görülen diğer bir örnekte ise birleştirilen iki nokta arasındaki noktalar iç nokta olmamaktadır.



Şekil 3.5 Teorem 3.2.2'ye diğer bir aksi örnek

Teorem 3.2.3

$S \subset E_n$ kapalı konveks bir küme ve $y \notin S$ olsun. y noktasından S kümesine en kısa mesafeyi veren nokta vardır ve tektir. x_0 'ın bu minimize eden nokta olması için gerek ve yeter koşul $\langle x - x_0, y - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in S$ olmasıdır.



Şekil 3.6 Kapalı konveks bir kümeye minimum uzaklık

Bir konveks küme ile bu kümeye ait olmayan bir nokta alındığında küme kapalı olmasa Teorem 3.2.3'ü sağlayan bir nokta olmayabilir. Örneğin açık daire için böyle bir nokta olmaz.

Eğer küme konveks değilse ise böyle bir nokta tek olmayabilir.

Tanım 3.2.2

$p \neq 0$ ve $p \in E_n$ olmak üzere $H = \{x : \langle p, x \rangle = \alpha, \alpha \text{ bir skaler}\}$ kümesi bir *hiperdüzlem* tanımlar. p vektörüne hiperdüzlemin *normal vektörü* denir. Bir hiperdüzlem uzayı iki kapalı yarıuzaya ayırır. Bu yarıuzaylar konvekstir.

$$H^+ = \{x : \langle p, x \rangle \geq \alpha\} \text{ ve } H^- = \{x : \langle p, x \rangle \leq \alpha\} \quad (3.2)$$

Önerme 3.2.2

Hiperdüzlem konvekstir.

İspat:

$\forall x_1, x_2 \in H, \forall \lambda \in [0,1]$ olmak üzere $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in H$ olduğunu göstermemiz gerekir.

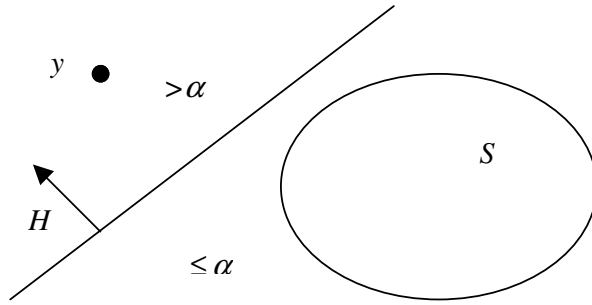
$$\begin{aligned}
\langle p, \lambda x_1, (1-\lambda)x_2 \rangle &= \langle p, \lambda x_1 \rangle + \langle p, (1-\lambda)x_2 \rangle \\
&= \lambda \langle p, x_1 \rangle + (1-\lambda) \langle p, x_2 \rangle \\
&= \lambda \alpha + (1-\lambda) \alpha \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

3.3 Ayırma teoremi

Ayırma Teoreminden Optimizasyonda gerek dualite gerek optimum için gerek koşulların ispatında da faydalanılır. Ayırma Teoremi lineer fonksiyonel analizin üç temel teoreminden biri olan Hahn-Banach Teoremine eşdeğerdir.

Teorem 3.3.1 (Ayırma Teoremi)

$\emptyset \neq S \subset E_n$ kapalı konveks bir küme ve $y \notin S$ olsun. $\exists p \neq 0$ vektörü ve bir α skaleri vardır ki $\langle p, y \rangle > \alpha$ ve $\langle p, x \rangle \leq \alpha, \forall x \in S$ 'dir.

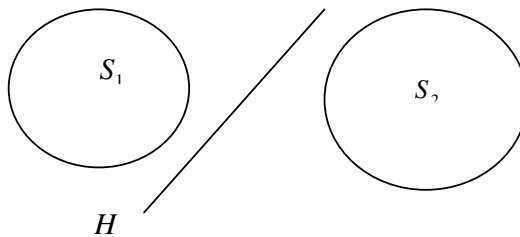


Şekil 3.7 Ayırma teoremi

Teorem 3.3.2 (İki konveks kümenin ayrılması)

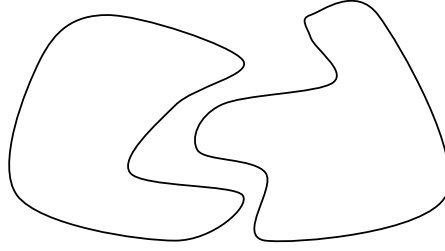
$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ konveks kümeler ise bunları ayıran bir hiperdüzlem vardır. Yani $\langle p, x \rangle \geq \alpha, \forall x \in S_1$ ve $\langle p, x \rangle \leq \alpha, \forall x \in S_2$ olacak şekilde $0 \neq p \in E_n$ varsa $H = \{x : \langle p, x \rangle = \alpha\}$ hiperdüzlemi S_1 ve S_2 'yi ayırıyor denir.

Bu teorem optimizasyonda çok önemlidir ve Kuhn-Tucker Teoremi buradan elde edilmiştir.



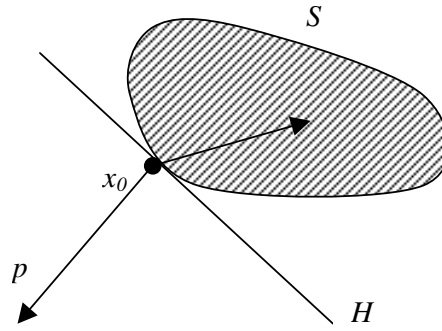
Şekil 3.8 İki konveks kümenin ayrılması

Konveks olmasalar bu kümeleri ayırmak mümkün değildir.



Tanım 3.3.1

$\emptyset \neq S \subset E_n$ ve $x_0 \in \partial S$ olsun. Her $x \in S$ için $\langle p, x - x_0 \rangle \leq 0$ ($S \subset H^-$) olacak şekilde $\exists p \neq 0$ bulunabiliyor ise H hiperdüzlemine S kümesinin x_0 noktasında *destek hiperdüzlemi* denir.



Şekil 3.9 Destek hiperdüzlemi

Teorem 3.3.3

Konveks kümelerin sınır noktalarında destek hiperdüzlemleri vardır. $\emptyset \neq S \subset E_n$ konveks bir küme ve $x_0 \in \partial S$ olmak üzere S 'yi x_0 noktasında destekleyen bir hiperdüzlem vardır.

$$\exists p \neq 0 \quad \langle p, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in clS \quad (3.3)$$

Bu teorem fonksiyonel analizdeki Hahn-Banach teoremine denktir.

Uygulamalı matematikte, matematiksel ekonomide ve optimizasyonda konveks küme ve konveks fonksiyonlar çok önemli bir sınıftır. İncelemeyi kolaylaştıran özellikleri vardır. Bu sınıfın pratikte birçok uygulaması vardır.

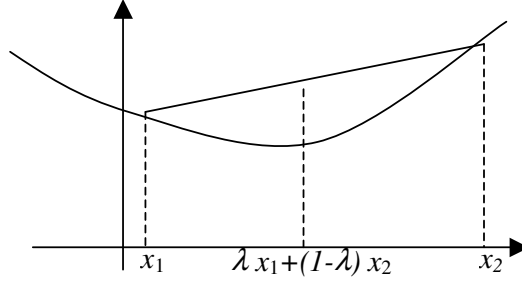
3.4 Konveks fonksiyon

Tanım 3.4.1

$f : S \rightarrow E_1, S \subset E_n, S \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in [0,1]$ için.

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (3.4)$$

ise f ye S üzerinde bir *konveks fonksiyon* denir.



Şekil 3.10 Konveks fonksiyon

Teorem 3.4.1

f konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (\forall x_i \in S, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \forall \lambda_i \geq 0) \text{ dır} \quad (3.5)$$

Teorem 3.4.2

Konveks fonksiyonlar tanım bölgesinin içinde süreklidir.

Tanım 3.4.2

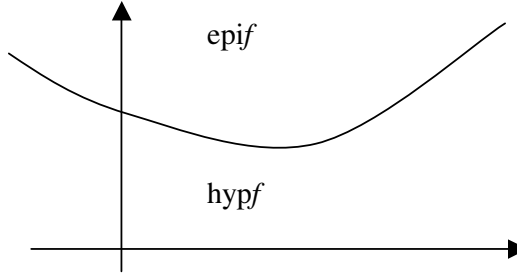
Bir fonksiyonun *epigrafiği* fonksiyonun grafiğinin üzerinde kalan noktaların oluşturduğu kümedir.

$$epif = \{(x, y) : x \in S, y \in E_1, y \geq f(x)\} \quad (3.6)$$

Tanım 3.4.3

Bir fonksiyonun *hipografiği* fonksiyonun grafiğinin altında kalan noktaların oluşturduğu kümedir.

$$hypf = \{(x, y) : x \in S, y \in E_1, y \leq f(x)\} \quad (3.7)$$



Şekil 3.11 Konveks bir fonksiyonun epigraf ve hipografı

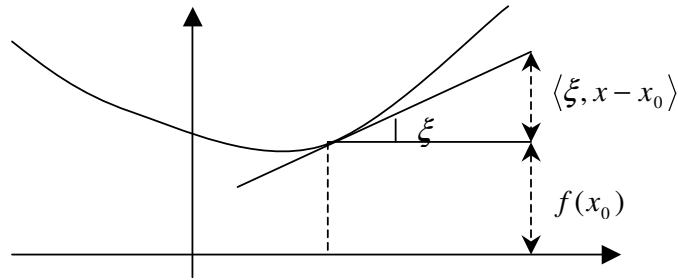
Teorem 3.4.3

$\emptyset \neq S \subset E_n$ konveks küme ve $f : S \rightarrow E_1$ olsun. f 'in konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $epif$ 'in konveks küme olmasıdır.

3.5 Subgradyent kavramı

Tanım 3.5.1

$\emptyset \neq S \subset E_n$ konveks küme ve $f : S \rightarrow E_1$ konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle$ ise ξ f 'in x_0 'daki *subgradyent*idir denir. f 'in x_0 'daki subgradyentleri kümesi $\partial f(x_0)$ şeklinde gösterilir ve *subdiferansiyel* denir.



Şekil 3.12 Konveks bir fonksiyon için subgradyentin geometrik yorumu

Teorem 3.5.1

$\emptyset \neq S \subset E_n$ konveks küme ve $f : S \rightarrow E_1$ konveks bir fonksiyon ise $x_0 \in \text{int } S$ için öyle bir ξ vektörü vardır ki

$$H = \{(x, y) : y = f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle\} \quad (3.8)$$

hiperdüzlemi $[x_0, f(x_0)]$ noktasında $epif$ 'i destekler.

3.6 Eşlenik fonksiyonlar

Tanım 3.6.1

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ fonksiyonunun eşlenik (konjuget) fonksiyonu $f^* : E_n \rightarrow \bar{R}$

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \}, \forall x^* \in E_n \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 3.6.1

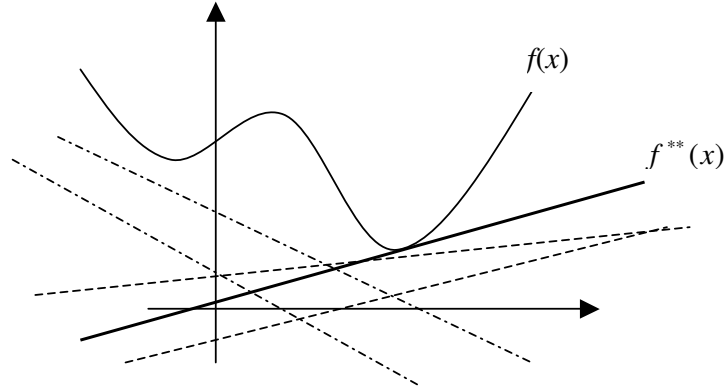
$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ ve $g : E_n \rightarrow \bar{R}$ için

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow f^*(x^*) \geq g^*(x^*) (\forall x \in E_n) \text{ dir} \quad (3.10)$$

Tanım 3.6.2

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ fonksiyonunun ikincil eşlenik (konjuget) fonksiyonu $f^{**} : E_n \rightarrow \bar{R}$

$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \}, \forall x \in E_n$ şeklinde tanımlıdır.



Şekil 3.13 İkincil eşlenik fonksiyonu

Teorem 3.6.1

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. $f^{**}(x) \leq f(x) (\forall x)$ 'dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
 f^*(x^*) &\geq \langle x, x^* \rangle - f(x) (\forall x, x^* \in E_n) \\
 f(x) &\geq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) (\forall x, x^* \in E_n) \\
 \sup_{x^* \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \} &\leq f(x) \\
 f^{**}(x) &\leq f(x)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aşağıdaki teorem çok önemli bir teoremdir. Bu dualite teoremidir.

Teorem 3.6.2

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ ise $f(x_0) = f^{**}(x_0)$ dır.

İspat: $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ olduğundan $\exists x^* \in E_n : x^* \in \partial f(x_0)$ 'dır. Subgradyent tanımından

$$\begin{aligned}
 f(x) &\geq f(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle (\forall x \in E_n) \\
 \langle x^*, x \rangle - f(x) &\leq \langle x^*, x_0 \rangle - f(x_0) (\forall x \in E_n) \\
 f^*(x^*) &\leq \langle x^*, x_0 \rangle - f(x_0) \\
 f(x_0) &\leq \langle x^*, x_0 \rangle - f^*(x^*) \leq f^{**}(x_0)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

buradan ve $f^{**} \leq f$ 'den $f(x_0) = f^{**}(x_0)$ 'dır.

Tanım 3.6.3

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere $(P) \inf_{x \in E_n} f(x)$ minimizasyon problemine *primal problem* denir.

$f(x) = \inf P$ koşulunu sağlayan her $x \in E_n$ (P) probleminin bir çözümüdür.

Tanım 3.6.4

$f(x)$ fonksiyonu ile ilgili $\phi : E_n \times E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere $\phi(x, 0) = f(x)$ koşulunu sağlayan

$\phi(x, y)$ fonksiyonuna *perturbasyon fonksiyonu* denir. $\forall y \in E_n$ için $(P_y) \inf_{x \in E_n} \phi(x, y) = h(y)$

minimizasyon problemine verilen perturbasyon fonksiyonuna göre (P) probleminin *perturbasyon problemi* denir. $y = 0$ için (P_0) problemi (P) 'nin kendisidir. Problem

$$\begin{aligned}
 \inf f(x) \\
 g(x) &\leq 0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

ise

$$h(y) = \inf\{f(x) : g(x) \leq y\} \quad (3.14)$$

tanımlansın.

Perturbasyon fonksiyonunun 0 noktasındaki değeri yani $h(0)$, problemin değeridir. Çözümün olması için sıfır-dualite aralığı olmalıdır. Eğer böyle ise $h(0) = h^{**}(0)$ 'dır. Konveks analizde bunun için $\partial h(0) \neq \emptyset$ olmalıdır. Eşlenik fonksiyonlarla ilgili teoremden bu eşitliğin sağlanması için yeter koşul 0 noktasındaki subdiferansiyel kümesinin boş kümeden farklı olmasıdır.

Tanım 3.6.5

(P) primal problem, (P_y) perturbasyon problemi ve $\phi^* : E_n \times E_n \rightarrow \overline{R}$ fonksiyonu ϕ perturbasyon fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu olsun. (P) probleminin ϕ perturbasyon fonksiyonuna göre dual problemi $(P^*) \sup_{y \in E_n} \{-\phi^*(0, y^*)\}$ olarak tanımlıdır. $\sup P^* = -\phi^*(0, y^*)$

koşulunu sağlayan her $y^* \in E_n$ elemanı (P^*) probleminin bir çözümüdür.

Tanım 3.6.6

Primal ve dual amaç değerleri arasındaki farka *dualite aralığı* denir. Terim, bir aralığın mevcut olduğunu yani değerinin sıfır olmadığını gösterir. Sıfır-dualite aralığı varsa primal ve dual amaç değerleri birbirine eşittir ve problemin çözümü vardır.

4. KLASİK LİNEER PROGRAMLAMA İÇİN DUALİTE TEOREMİ

4.1 Klasik lineer programlamaya giriş

Tanım 4.1.1

Bir LPP c_i, b_j, a_{ji} problemde verilmek üzere

$$\begin{aligned} \min < c, x > &= \sum_i c_i x_i \\ \sum_i a_{ji} x_i &\leq b_j, j = 1, \dots, p \\ \sum_i a_{ji} x_i &\geq b_j, j = p + 1, \dots, q \\ \sum_i a_{ji} x_i &= b_j, j = q + 1, \dots, m \end{aligned}$$

genel halinde bir optimizasyon problemidir.

Bir lineer programlama probleminin (LPP) esas özelliği amaç fonksiyonu ve kısıtların tümünün lineer olmasıdır.

Tanım 4.1.2

Standard formdaki bir LPP

$$\min \{ < c, x > \mid Ax = b, x \geq 0 \} \text{ 'dir.}$$

Böylece her LPP'deki elemanlar:

1. Bir $m \times n$ A matrisi, $n > m$ olmak üzere.
2. Bir $b \in R^m$ vektörü
3. Bir $c \in R^n$ vektörü

Burada $< c, x >$ c ve x vektörlerinin iç çarpımı, Ax ise A matrisi ile x vektörünün çarpımıdır.

Bu yüzden problemimiz x , bileşenleri negatif olmayan ($x \geq 0$) tüm uygun $x \in R^n$ vektörlerini gezerken, $Ax = b$ kısıtıyla $< c, x >$ iç çarpımının minimum değerini bulmaktır. Ayrıca bu minimum değere ulaşılan x vektörü (veya tüm x vektörleri) ile de ilgileniyoruz.

Her LPP standard forma dönüşebilir. Bu dönüşümün nasıl elde edildiğini anlamak önemlidir.

Bu üç adımda yapılır.

İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler:

İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler için

$$x^+ = \max\{0, x\} \geq 0, x^- = \max\{0, -x\} \geq 0$$

olmak üzere pozitif ve negatif değişkenler için

$$x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^-$$

özelliklerini kullanarak

$$x_i = x_i^{(1)} - x_i^{(2)}, x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \geq 0$$

yeni değişkenleriyle problem yeniden yazılır.

Eşitsizlikleri eşitlikler haline dönüştürmek:

Lineer programlama problemlerinde kısıtlar çoğu zaman eşitsizlik şeklindedir.

$$\min\{cx \mid Ax \leq b, A'x = b', x \geq 0\}$$

probleminde yapma değişkenler kullanılarak kısıtlar tek bir eşitlik kısıtı haline getirilebilir.

$$y = b - Ax \geq 0$$

yeni değişkeni tanımlanarak ve 1 birim matris olmak üzere

$$X = (x \ y), \tilde{A} = (A \ 1)$$

denilerek problemin kısıtları sadece

$$\tilde{A}X = b$$

haline getirilebilir.

Maksimumu minimuma çevirmek:

Problemde minimum yerine maksimum isteniyorsa

$$\max\{f(x)\} = -\min\{-f(x)\}$$

veya daha açık bir dille

$$\max\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\} = -\min\{(-c)x \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

Şimdi Rockafellar tarafından bulunan Klasik lineer programlama problemi için dualite

teoremini ispatlayalım. Primal problemimiz

$$\min\{\langle c, x \rangle \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, s}; \langle a_i, x \rangle = b_i, i = \overline{s+1, m}\} \quad (4.1)$$

olsun. Bu probleme karşılık $h(y)$ fonksiyonunu yazalım

$$h(y) = \inf_x \{\langle c, x \rangle \mid \langle a_i, x \rangle - b_i \leq y_i, i = \overline{1, s}; \langle a_i, x \rangle - b_i = y_i, i = \overline{s+1, m}\} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} h^*(y^*) &= \sup_y \{\langle y, y^* \rangle - \inf_x \{\langle c, x \rangle \mid \langle a_i, x \rangle - b_i \leq y_i, i = \overline{1, s}; \langle a_i, x \rangle - b_i = y_i, i = \overline{s+1, m}\}\} \\ &= \sup_y \{\langle y, y^* \rangle + \sup_x \{\langle -c, x \rangle \mid \langle a_i, x \rangle - b_i \leq y_i, i = \overline{1, s}; \langle a_i, x \rangle - b_i = y_i, i = \overline{s+1, m}\}\} \\ &= \sup_{y, x} \{\langle y, y^* \rangle - \langle c, x \rangle \mid \langle a_i, x \rangle - b_i \leq y_i, i = \overline{1, s}; \langle a_i, x \rangle - b_i = y_i, i = \overline{s+1, m}\} \\ &= \sup_x \{\sup_y \{\langle y, y^* \rangle - \langle c, x \rangle \mid \langle a_i, x \rangle - b_i \leq y_i, i = \overline{1, s}; \langle a_i, x \rangle - b_i = y_i, i = \overline{s+1, m}\}\} \end{aligned}$$

olarak $h(y)$ fonksiyonunun birinci eşleniği bulunur. Elde edilen bu sonuçta

$$\langle a_i, x \rangle - b_i + \varepsilon_i = y_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad \varepsilon_i \geq 0 \quad (4.3)$$

ve

$$\sum_{i=1}^s y_i y_i^* = \sum_{i=1}^s (\langle a_i, x \rangle - b_i + \varepsilon_i) y_i^*, \quad \varepsilon_i \geq 0 \quad (4.4)$$

yerine konursa

$$\sup_{\varepsilon_i \geq 0} \sum_{i=1}^s (\langle a_i, x \rangle - b_i + \varepsilon_i) y_i^* + \sum_{i=s+1}^m (\langle a_i, x \rangle - b_i) y_i^* - \langle c, x \rangle = \begin{cases} +\infty, \exists y_i^* > 0, i = \overline{1, s} \\ \sum_{i=1}^m (\langle a_i, x \rangle - b_i) y_i^* - \langle c, x \rangle, y_i^* \leq 0, \forall i = \overline{1, s} \end{cases}$$

ve buna bağlı olarak eşlenik fonksiyonu

$$h^*(y^*) = \begin{cases} +\infty, \exists y_i^* > 0, i = \overline{1, s} \\ \sup_x \left(\sum_{i=1}^m (\langle a_i, x \rangle - b_i) y_i^* - \langle c, x \rangle \right), \forall y_i^* \leq 0, \forall i = \overline{1, s} \end{cases} \quad (4.5)$$

elde edilmiş olur. İkinci eşlenik fonksiyonu da

$$\begin{aligned}
h^{**}(0) &= \sup_{y^*} \{-h^*(y^*)\} \\
&= -\inf_{y^*} h^*(y^*) \\
&= -\inf \sup_{i=1}^m (\langle a_i, x \rangle - b_i) y_i^* - \langle c, x \rangle (\forall y_i^* \leq 0, \forall i = \overline{1, s})
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\sup_x \left(\sum_{i=1}^m (\langle a_i, x \rangle - b_i) y_i^* - \langle c, x \rangle \right) &= \sup_x \left(\sum_{i=1}^m (\langle a_i, x \rangle y_i^* - b_i y_i^*) - \langle c, x \rangle \right) \\
&= \sup_x \left(\sum_{i=1}^m (\langle a_i y_i^*, x \rangle - b_i y_i^*) - \langle c, x \rangle \right) \\
&= \sup_x \left(\left\langle \sum_{i=1}^m a_i y_i^*, x \right\rangle - \sum_{i=1}^m b_i y_i^* - \langle c, x \rangle \right) \\
&= \sup_x \left(\left\langle \sum_{i=1}^m a_i y_i^* - c, x \right\rangle - \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \right) \\
&= \begin{cases} -\sum_{i=1}^m b_i y_i^* & , \sum_{i=1}^m a_i y_i^* = c \\ +\infty & , \sum_{i=1}^m a_i y_i^* \neq c \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
h^{**}(0) &= - \inf_{\substack{y_i^* \geq 0, \\ i=1, s, \\ \sum_{i=1}^m a_i y_i^* = c}} \left(-\sum_{i=1}^m b_i y_i^* \right) \\
&= \sup_{\substack{y_i^* \geq 0, \\ i=1, s, \\ \sum_{i=1}^m a_i y_i^* = c}} \left(\sum_{i=1}^m b_i y_i^* \right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

4.3 Lagrange Yöntemi

LP problemleri Lagrange fonksiyonundan faydalanılıp minmax gibi gösterilebilir. Primal ve dual problemleri iki oyunculu bir oyun gibi düşünülürse Oyun teorisinden minmax değeri 1. oyuncunun garanti edeceği miktardır, yerini değiştirdiğimizde maxmin 2. oyuncunun garanti edeceği miktardır ve buna dual problem denir.

Lagrangian Dualite

$$\min \{ \langle c, x \rangle \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, s}; \langle a_i, x \rangle = b_i, i = \overline{s+1, m} \} \tag{4.9}$$

problemini ele alalım.

$$D = \{x \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, s}; \langle a_i, x \rangle = b_i, i = \overline{s+1, m}\}$$

olmak üzere problem

$$\min\{\langle c, x \rangle \mid x \in D\} \text{ 'dir.}$$

Lagrangian fonksiyonu $L: \Re^m \times \Re^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$

$$L(x; \lambda) = \langle c, x \rangle + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\langle a_i, x \rangle - b_i) \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $Q = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_m) \mid \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, s}\}$ olmak üzere

$\lambda \in Q$ üzerinde maksimize ettiğimizde

$$\max_{\lambda \in Q} L(x; \lambda) = \begin{cases} \langle c, x \rangle, & x \in D \\ +\infty, & x \notin D \end{cases} \quad (4.11)$$

ve bu değer $x \in \Re^n$ üzerinde minimize edildiğinde

$$\min_{x \in \Re^n} \max_{\lambda \in Q} L(x; \lambda) = \min_{x \in D} \langle c, x \rangle \quad (4.12)$$

bulunur.

(P) probleminin optimal değeri $p \in [-\infty, +\infty]$ ile gösterilirse

$$p = \min_{x \in \Re^n} \max_{\lambda \in Q} L(x; \lambda) \quad (4.13)$$

ve (P) ile ilgili olarak (P^*) problemi ise $q \in [-\infty, +\infty]$ dual değer olmak üzere

$$q = \max_{\lambda \in Q} \min_{x \in \Re^n} L(x; \lambda) \quad (4.14)$$

şeklinde gösterilebilir. Böylece dual problem $\Phi(\lambda) = \min_{x \in \Re^n} L(x; \lambda)$ dual fonksiyonu $\lambda \in Q$

üzerinde maksimize edilerek elde edilir.

$$\begin{aligned}
\min_{x \in \mathfrak{R}^n} L(x; \lambda) &= \min_{x \in \mathfrak{R}^n} \{ \langle c, x \rangle - \sum_{i=1}^m \lambda_i (\langle a_i, x \rangle - b_i) \} \\
&= \min_{x \in \mathfrak{R}^n} \{ \langle c, x \rangle - \sum_{i=1}^m (\lambda_i \langle a_i, x \rangle - \lambda_i b_i) \} \\
&= \min_{x \in \mathfrak{R}^n} \{ \langle c, x \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, x \right\rangle - \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \} \\
&= \min_{x \in \mathfrak{R}^n} \left\{ \left\langle c - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, x \right\rangle + \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \right\} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i, & c = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \\ +\infty, & c \neq \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\max_{\lambda \in Q} \min_{x \in \mathfrak{R}^n} L(x; \lambda) = \max_{\lambda \in Q} \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i, \quad c = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$$

Bu alınan dual problem olur. Yani (P) primal problemine Lagrange fonksiyonu dahil edilip minmax şeklinde yazarak dual problemi elde etmiş olduk.

Dual problem alındığında perturbasyon yöntemi ile aynı sonucun alındığını gördük.

Bu teoreme oyun teorisindeki gibi yorum getirmek gerekirse şöyle söylenebilir: Primal problem 1. oyuncunun stratejisi ve stratejiler kümesini, dual problem de 2. oyuncunun stratejisi ve stratejiler kümesini ifade etmek üzere 2. oyuncu λ 'ya göre maksimum, 1. oyuncu x 'e göre minimum oynarsa bu oyunda optimal stratejinin ne olacağını düşünelim. Bu durumda 2. oyuncu 1. oyuncunun hamlesini tahmin edebilir ve x 'e göre maksimum yapacaktır. Böylece 2. oyuncunun stratejisini dual problem ifade ettiğinden ve 2. oyuncu en fazla bu kadar kaybedecektir. Buna karşılık da 1. oyuncu en az bu kadar kazanacaktır. Yani optimal strateji

$$L(\lambda, x_0) \leq L(x_0, \lambda_0) \leq L(x_0, \lambda)$$

değerleri arasında kalacaktır.

5. ÇOK AMAÇLI LINEER PROGRAMLAMAYA GİRİŞ

Tanım 5.1

Çok amaçlı lineer programlama problemi

$$\begin{cases} \max\{\langle c_1, x \rangle\} \\ \max\{\langle c_2, x \rangle\} \\ \vdots \\ \max\{\langle c_k, x \rangle\} \end{cases}$$

$$Ax \leq b$$

$$x \in S \subset R^n$$

şeklinde tanımlanır. Başka bir deyişle C amaç fonksiyonlarının $k \times n$ boyutlu katsayılar matrisi olmak üzere

$$\max\{Cx \mid Ax \leq b, x \in S\}$$

şeklindedir.

Bu probleme aynı zamanda lineer vektör maksimizasyon problemi de denir. Amaç, verilen koşullar altında Cx vektörünün maksimum değerini bulmaya çalışmaktır.

Kompleks problemlerde probleme tek amaçlı gibi bakmak kullanışlı değildir. Bu yüzden çok amaçlı lineer programlama problemleri büyük önem taşır.

Burada klasik lineer programlamadan farklı olarak fonksiyon vektör değerli olduğu için optimallik kavramının yerine çok amaçlı lineer programlama problemlerinde pareto optimum kavramı gelir.

Tanım 5.2

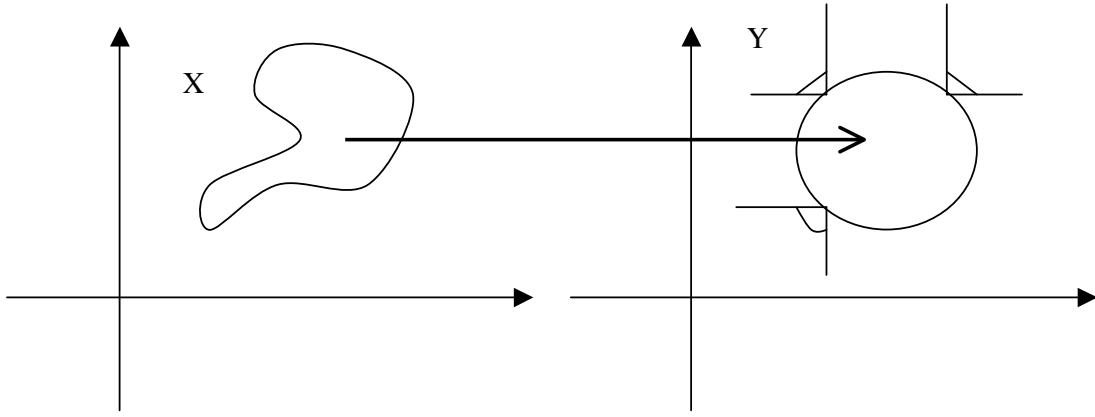
$F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ ve $Y = F(X)$ görüntü uzayı olmak üzere

$$\begin{cases} f_i(x) \rightarrow \max, i = \overline{1, m} \\ x \in X \end{cases}$$

problemini alalım.

$x^* \in X$ noktası bu problemin bir maksimumu olsun ve $f(x) \geq f(x^*)$ ve en az bir i için $f_i(x) > f_i(x^*)$ olacak şekilde başka bir maksimum nokta yok ise x^* çözüm noktasına *pareto*

maksimum denir.



Şekil 5.1 Pareto optimum

Problemimiz aşağıdaki şekilde olsaydı ve minimumu arasaydık

$$\begin{cases} f_i(x) \rightarrow \min, i = \overline{1, m} \\ x \in X \end{cases}$$

$x^* \in X$ noktası bu problemin bir minimumu ise ve $f(x) \leq f(x^*)$ ve en az bir i için $f_i(x) < f_i(x^*)$ olacak şekilde başka bir minimum nokta bulunamıyorsa x^* çözüm noktasına *pareto minimum* denir.

Şimdi Çok Amaçlı Lineer Programlamada mevcut olan dualite teoremlerini kısaca inceleyelim.

6. GALE, KUHN VE TUCKER'İN DUALİTE YÖNTEMLERİ

Gale, Kuhn ve Tucker aşağıdaki genel haldeki iki lineer programlama problemini incelemişlerdir. Bu problemlerin herbiri aynı varsayımlara sahiptir; A $(m \times n)$ -matris, B $(m \times r)$ -matris, C $(k \times n)$ -matris, D $(k \times r)$ -matris ve x, y, u, v değişkenler olmak üzere

$$\text{"max"}\{D \mid Ax = By, Cx \geq Dy, x \in R_0^n, y \in R_+^r\} \quad (6.1)$$

$$\text{"min"}\{D \mid A^T u \geq C^T v, B^T u \leq D^T v, u \in R^m, v \in R_+^k\} \quad (6.2)$$

(x^0, y^0, D^0) (6.1) için bir uygun çözüm olsun. O zaman (x^0, y^0, D^0) (6.1) için *etkin* veya *basılamaz* olması için gerek ve yeter şart (6.1) için $D' \geq D^0$ olacak şekilde farklı bir (x', y', D') uygun çözümünün bulunamamasıdır. Eğer (x^0, y^0, D^0) (6.1) için bir etkin çözüm ise D^0 (6.1) için yukarıdaki matris eşitsizliklerinden dolayı *maksimaldir* denir. (6.1) problemi tüm maksimal D^0 'ları sıralama problemi olarak düşünülebilir. Benzer bir çözüm yaklaşımı problem (6.2) için uygulanabilir.

$k > 1, r = 1$ ve $y = 1$ olsun. B bir $(m \times 1)$ -boyutlu b vektörüne ve D bir $(k \times 1)$ -boyutlu d vektörüne dönüşür ve genel haldeki iki lineer programlama matris problemi aşağıdaki vektör problemleri haline gelirler:

$$\text{"max"}\{d \mid Ax = b, Cx \geq d, x \in R_0^n\} \quad (6.3)$$

$$\text{"min"}\{d \mid A^T u \geq C^T v, b^T u \leq d^T v, u \in R^m, v \in R_+^k\} \quad (6.4)$$

Eğer $k = 1, r = 1$ ve $y = v = 1$ ise B bir $(m \times 1)$ -boyutlu b vektörü, C bir $(1 \times n)$ -boyutlu c vektörü ve D bir skaler-değerli ρ değişkeni haline gelir. O zaman genel haldeki iki lineer programlama matris problemi sıradan lineer programlama problemlerinin bir dual çiftine indirgenmiş olur:

$$\text{"max"}\{d \mid Ax = b, Cx \geq d, x \in R_0^n\} \quad (6.5)$$

$$\text{"min"}\{\rho \mid A^T u \geq c^T, b^T u \leq \rho, u \in R^m\} \quad (6.6)$$

Gale, Kuhn ve Tucker'ın elde ettikleri esas sonuçlar aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 6.1

(6.1) ve (6.2) problemlerini düşünelim.

- i. (6.1)'in etkin çözümünün olması için gerek ve yeter şart (6.2)'nin etkin çözümünün olmasıdır.
- ii. (x^0, y^0, D^0) (6.1) için bir etkin çözüm olsun. O zaman (6.2) için $D^0 = D^*$ olacak şekilde bir etkin çözüm (u^*, v^*, D^*) vardır. Benzer şekilde (6.2) için de geçerlidir.
- iii. Eğer (x^0, y^0, D^0) (6.1) için bir etkin çözüm ise $Cx^0 = D^0 y^0$ 'dır. Benzer şekilde (6.2) için de geçerlidir.
- iv. (x^0, y^0, D^0) ve (u^0, v^0, D^0) sırasıyla (6.1) ve (6.2) için uygun çözümler ve $Cx^0 = D^0 y^0, B^T u^0 = D^{0T} v^0$ olsun. O zaman (x^0, y^0, D^0) ve (u^0, v^0, D^0) sırasıyla (6.1) ve (6.2) için etkin çözümlerdir.

7. ISERMANN'IN DUALİTE YÖNTEMİ

Aşağıdaki lineer programlama vektör problemleri dual çiftini alalım:

$$\text{"max"}\{z = Cx \mid Ax = b, x \in R_0^n\} \quad (7.1)$$

$$\text{"min"}\{h = Ub \mid UA w \leq Cw \text{ hiçbir } w \in R_0^n \text{ için}\} \quad (7.2)$$

(7.2)'de U ($k \times m$)-boyutlu bir matristir. $k=1$ için (7.1) ve (7.2) lineer programların dual çiftine indirgenir.

(7.1) ve (7.2) problemleri için dualite özellikleri aşağıdaki teoremden özetlenmiştir:

Teorem 7.1

(7.1) ve (7.2) problemlerini düşünelim:

i. Aşağıdakiler denktir:

- 1) (7.1) ve (7.2)'in her ikisinin de bir uygun çözümü vardır;
- 2) (7.1) ve (7.2)'in her ikisinin de bir etkin çözümü vardır ve $Cx^0 = U^0 b$ olacak şekilde etkin çözümlerin en az bir (x^0, U^0) çifti vardır;
- 3) $\min\{b^T u \mid A^T u - c^T v \geq 0, v \geq 1\}$ lineer programının bir $(\hat{u}, \hat{v})$ optimal çözümü vardır.

ii. x^0 'ın (7.1) için bir etkin çözüm olması için gerek ve yeter şart (7.2) için $Cx^0 = U^0 b$ olacak şekilde bir U^0 uygun çözümünün var olmasıdır. O zaman U^0 'ın kendisi (7.2) için bir etkin çözüm olur.

iii. U^0 'ın (7.2) için bir etkin çözüm olması için gerek ve yeter şart (7.1) için $Cx^0 = U^0 b$ olacak şekilde bir x^0 uygun çözümünün var olmasıdır. O zaman x^0 'ın kendisi (7.1) için bir etkin çözüm olur.

Böylece (7.1) vektör problemi bir çok amaçlı simpleks yöntemi ile çözüldüğünde (7.2) dual dual vektör problemi aynı anda çözülmüş olacaktır. (7.1) ve (7.2) problemleri çifti ile Gale, Kuhn ve Tucker'ın vektör problemleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile belirtilmiştir:

Teorem 7.2

(6.3) ve (6.4) ile (7.1) ve (7.2) problemlerini düşünelim.

- i. x^0 'ın (7.1) için bir etkin çözüm olması için gerek ve yeter şart (6.3) için $d^0 = Cx^0$ olacak şekilde bir (x^0, d^0) etkin çözümünün var olmasıdır.
- ii. U^0 'ın (7.2) için bir etkin çözüm olması için gerek ve yeter şart (u^0, v^0, d^0) (6.4) için $u^0 = U^{0T} v^0$ ve $d^0 = U^0 b$ olacak şekilde bir uygun çözüm olmak üzere bir $v^0 \in R_+^k$ varolmasıdır.

8. KORNBLUTH'UN DUALİTE YÖNTEMİ

Kornbluth aşağıdaki çok amaçlı lineer programlama çiftini incelemiştir:

$$\text{"max"}\{z = Cx \mid Ax = By, x \in R_0^n, y \in R_+^r\} \quad (8.1)$$

$$\text{"min"}\{g = B^T u \mid A^T u \geq C^T v, u \in R^m, v \in R_+^k\} \quad (8.2)$$

Her iki problem de r ile k kesin pozitif sağ taraf sabitleri olmak üzere homojen çok parametrelili lineer programlama problemi olarak düşünülebilir. Böylece (x^0, y^0) değerinin (8.1) problemi için bir etkin çözüm olması için gerek ve yeter koşul $Cx' \geq Cx^0$ sağlanacak şekilde hiçbir (x', y^0) uygun çözümü bulunmaması ve (u^0, v^0) değerinin (8.2) problemi için bir etkin çözüm olması için gerek ve yeter koşul $B^T u' \leq B^T u^0$ olacak şekilde hiçbir (u', v^0) uygun çözümü bulunmamasıdır. Kornbluth'un çalışmaları (8.1) ve (8.2) problemleri için uygun biçimdeki etkin çözümler üzerine yoğunlaşmıştır. Yine de her lineer programlama vektör problemi için her etkin çözüm uygun bir etkin çözümdür.

Aşağıdaki teorem (8.1) ve (8.2) problemleri ile lineer programlama matris problemleri (6.1) ve (6.2) arasındaki yakın ilişkiyi göstermektedir.

Theorem 8.1

(6.1) ve (6.2) problemleri ile (8.1) ve (8.2) lineer programlama problemlerini düşünelim.

- i. (x^0, y^0) değerinin (8.1) problemi için bir etkin çözüm olması için gerek ve yeter koşul (x^0, y^0, D^0) değeri (6.1) problemi için bir etkin çözüm olacak şekilde $(k \times r)$ -boyutlu bir D^0 matrisinin bulunmasıdır.
- ii. (u^0, v^0) değerinin (8.2) problemi için bir etkin çözüm olması için gerek ve yeter koşul (u^0, v^0, D^0) değeri (6.2) problemi için bir etkin çözüm olacak şekilde $(k \times r)$ -boyutlu bir D^0 matrisinin bulunmasıdır.

Bu teorem (6.1) ve (6.2) problemleri çifti için varlık ve dualite teorisinin (8.1) ve (8.2) problemleri çiftine uygulanabildiğini gösterir.

9. AZİMOV'UN DUALİTESİ

Azimov'un çok amaçlı problemler için dualite yaklaşımında eşlenik çokdeğerli fonksiyonlardan faydalanılmıştır. Dualite teorisi ilk kez çok değerli fonksiyonlar için tanımlanmıştır. Bu teori daha sonra çok amaçlı problemlerde dual ilişki kurabilmek için kullanılmıştır.

9.1 Eşlenik çok değerli fonksiyonlar

Y ve Y^* reel lineer topolojik uzayları $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kanonik bilineer forma göre dual ve sırasıyla $\sigma(Y, Y^*)$ ve $\sigma(Y^*, Y)$ zayıf topolojilerine sahip olsunlar. Bir çok değerli fonksiyon $H : Y \rightarrow Y_0$ verilsin.

$$\text{epi}H = \{(y, y_0) \in Y \times Y_0 \mid y_0 \in H(y) + K_0\}, \text{dom}H = \{y \in Y \mid H(y) \neq \emptyset\}$$

kümelerine sırasıyla H çok değerli fonksiyonunun *epigrafiği* ve *etkin kümesi* denir. Aşağıdaki fonksiyonlar tanımlansın.

$$\Omega_H^*(y^*, y_0^*) = \sup\{\langle y^*, y \rangle - \langle y_0^*, y_0 \rangle \mid y_0 \in H(y), y \in Y\} \quad (9.1)$$

$$\Omega_H^{**}(y, y_0^*) = \sup\{\langle y^*, y \rangle - \Omega_H^*(y^*, y_0^*) \mid y^* \in Y^*\} \quad (9.2)$$

K_0^* K_0 'a dual koni olsun. $K_0^*(\text{int } K_0^*)$ 'ın Y_0^* dual uzayının birim çemberi ile kesişimi $K_{01}^*(K_{02}^*)$ ile gösterilir.

Önerme 9.1.1

$y \in \text{int } \text{dom}H$ ve $y_0^* \in K_{01}^*$ olsun. O zaman öyle bir $y^* \in Y^*$ vardır ki

$$\Omega_H^{**}(y, y_0^*) = \langle y^*, y \rangle - \Omega_H^*(y^*, y_0^*) \text{ 'dır.}$$

Fr bir kümenin sınırını göstermek üzere $\Gamma(y) = \text{Fr}(H(y) + K_0)$ olsun.

Tanım 9.1.1

$y_0 \in \Gamma(y)$ olduğunu varsayalım. Bir (y, y_0) noktasında $H : Y \rightarrow Y_0$ çok değerli fonksiyonunun *subdiferansiyeli* aşağıdaki şekilde tanımlanan kümedir:

$$\partial H(y, y_0) = \{y^* \in Y^* \mid \exists y_0^* \in K_{01}^* : \langle y^*, y \rangle - \langle y_0^*, y_0 \rangle = \Omega_H^*(y^*, y_0^*)\}$$

Tanım 9.1.2

Bir $H : Y \rightarrow Y_0$ çok değerli fonksiyonu eğer herhangi $y_0 \in \Gamma(y)$ için $\partial H(y, y_0)$ boş olmayan bir küme ise *subdiferansiyellenebilir* denir.

Bir $H : Y \rightarrow Y_0$ çok değerli fonksiyonu *epiH* konveks ise konvekstir denir.

Azimov'un bu makalesinde daha sonra farklı dualite ilişkileri kurulmak üzere kullanılan iki farklı eşlenik fonksiyon tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 9.1.3

$H^* : Y^* \rightarrow Y_0$ ($H_{>}^* : Y^* \rightarrow Y_0$) tanımlı

$$H^*(y^*)(H_{>}^*(y^*)) = \{y_0 \in Y_0 \mid \exists y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*) : \langle y_0^*, y_0 \rangle = \Omega_H^*(y^*, y_0^*)\} \quad (9.3)$$

çok değerli fonksiyonuna $H : Y \rightarrow Y_0$ fonksiyonunun *eşlenik fonksiyonu* denir.

Tanım 9.1.4

$H^{**} : Y \rightarrow Y_0$ ($H_{>}^{**} : Y \rightarrow Y_0$) tanımlı

$$H^{**}(y)(H_{>}^{**}(y)) = \{y_0 \in Y_0 \mid \exists y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*) : \langle y_0^*, y_0 \rangle = \Omega_H^{**}(y, y_0^*)\} \quad (9.4)$$

çok değerli fonksiyonuna $H : Y \rightarrow Y_0$ fonksiyonunun *ikinci eşlenik fonksiyonu* denir.

9.2 Çok amaçlı problemlerin dualitesi

X ve X^* reel lineer uzayları bir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilineer formuna göre dual olsunlar. X ve X^* reel lineer uzayları sırasıyla $\sigma(Y, Y^*)$ ve $\sigma(Y^*, Y)$ topolojilerine sahip olsunlar. Y_0 sonlu-boyutlu Euclidean uzayı bir Y_0 konisi ile sıralı olsun. K_0 konisi şu koşulları sağlıyor olsun; K_0 konveks ve kapalı, $\text{int } K_0 \neq \emptyset$ ve $K_0 \cap (-K_0) = \{0\}$. $F : X \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ tek değerli bir fonksiyon olsun. Çok amaçlı problemi

$$(P) \text{ Min}\{F(x) \mid x \in X\} \quad (9.5)$$

şeklinde tanımlansın. Bazı $x \in X$ için $F(x) = +\infty$ ve $\text{Min}F(X) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım.

(P) problemine esas problem denir. $F(x) \in \text{Min}F(X)$ olacak şekilde herhangi $x \in X$ elemanına (P) probleminin bir çözümü denir. $\text{Min}P = \text{Min}\{F(x) \mid x \in X\}$ olsun.

Y ve Y^* reel lineer uzayları $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kanonik bilineer forma göre dual ve sırasıyla $\sigma(Y, Y^*)$ ve $\sigma(Y^*, Y)$ topolojilerine sahip olsunlar.

$\Phi: X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu herhangi $x \in X$ için $\Phi(x, 0) = F(x)$ şeklinde tanımlı olsun. Φ fonksiyonuna perturbasyon denir. (P) probleminin dual problemleri Φ perturbasyonuna göre tanımlanır. Bunun için Φ fonksiyonunun birinci eşleniği $\Phi^*(\Phi^*)$ hesaplanmalıdır.

$$\Omega_{\Phi}^*(x^*, y^*, y_0^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle - \langle y_0^*, \Phi(x, y) \rangle \mid (x, y) \in X \times Y\} \quad (9.6)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\Phi^*(\Phi^*)$ fonksiyonu şu şekilde tanımlıdır:

$$\Phi^*(x^*, y^*)(\Phi^*(x^*, y^*)) = \{y_0 \in Y_0 \mid \exists y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*) : \langle y_0^*, y_0 \rangle = \Omega_{\Phi}^*(x^*, y^*, y_0^*)\}$$

$$(P^*) \max \bigcup \{-\Phi^*(0, y^*) \mid y^* \in Y^*\} \quad (9.7)$$

$$(P_{>}^*) \max \bigcup \{-\Phi_{>}^*(0, y^*) \mid y^* \in Y^*\} \quad (9.8)$$

problemleri verilen Φ perturbasyonuna göre (P) probleminin dualidir.

$$\max P^* = \max \bigcup \{-\Phi^*(0, y^*) \mid y^* \in Y^*\} \quad (9.9)$$

$$\max P_{>}^* = \max \bigcup \{-\Phi_{>}^*(0, y^*) \mid y^* \in Y^*\} \quad (9.10)$$

olsun.

Şimdi $H: Y \rightarrow Y_0$ çok değerli fonksiyonunu

$$H(y) = \text{Min}\{\Phi(x, y) \mid x \in X\} \quad (9.11)$$

şeklinde tanımlayalım. O halde $H(0) = \text{Min}P$ olduğu açıktır.

Şimdi bu makaledeki esas teoremlere göz atalım.

Koşul R

Herhangi $y \in Y$ için $\text{min} cl(\Phi(X, y) + K_0)$ kümesi dıştan stabildir.

Önerme 9.2.1

Koşul R'nin sağlandığını varsayalım. O zaman herhangi $y^* \in Y^*$ için

$$a) \quad \Phi^*(0, y^*) = H^*(y^*)$$

$$b) \quad \Phi_{>}^*(0, y^*) = H_{>}^*(y^*)$$

$y^* \in Y^*$ ve $y_0^* \in K_{01}^*$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\Omega_{\Phi}^*(0, y^*, y_0^*) = \Omega_H^*(y^*, y_0^*) \quad (9.12)$$

olduğu açıktır.

Teorem 9.2.1

Koşul R'nin sağlandığını varsayalım ve ayrıca $0 \in \text{int } \text{dom} H$ olsun. O zaman

$$a) \max H^{**}(0) = \max P^*; \quad b) \max H_{>}^{**}(0) = \max P_{>}^* \text{ 'dır.}$$

Teorem 9.2.1 için sadece Koşul R sağlandığında a) ve b) ilişkileri max yerine Max yazıldığında doğru olur.

$\Phi: X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonu için aşağıdaki koşullar geçerlidir:

Koşul α

$\Phi: X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ konveks bir fonksiyondur.

Koşul β

Herhangi $y \in Y$ için $\Phi(x(y), y) \leq c_0$ olacak şekilde bir $c_0 \in Y_0$, Y 'de sıfırın bir V komşuluğu ve bir $x(\cdot): V \rightarrow X$ fonksiyonu bulunur.

Koşul γ

$\text{Min} \Phi(X, 0) \neq \emptyset$ 'dır.

Önerme 9.2.2

$\Phi: X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonunun Koşul R ve β 'yı sağladığını varsayalım.

O zaman $(0, y_0) \in \text{int } \text{epi} H$ olacak şekilde bir $y_0 \in Y_0$ vardır.

Önerme 9.2.3

$\Phi: X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonunun Koşul R ve α' 'yı sağladığını varsayalım. O zaman $epiH$ konveks bir kümedir.

Teorem 9.2.2

$\Phi: X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonunun $\alpha - \gamma$ koşullarını sağladığını varsayalım. O halde Koşul R sağlanır.

Tanım 9.2.1

(P) esas problemi 9.11'de tanımlanmış olan $H: Y \rightarrow Y_0$ çok değerli fonksiyonu sıfırda subdiferansiyele sahipse *stabildir* denir.

Teorem 9.2.3

(P) problemi için $\Phi: X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonu $\alpha - \gamma$ koşullarını sağlasın. O zaman aşağıdakiler doğrudur:

A. Herhangi $y_0 \in \min P$ için öyle bir $y_0^* \in K_{01}^*$ vardır ki

$$\langle y_0^*, y_0 \rangle = \max \{ -\Omega_\Phi^*(0, y^*, y_0^*) \mid y^* \in Y^* \} \text{ dır}$$

B. $\max P^* = \text{int}_\Gamma \text{Min}P$ dir, $\text{int}_\Gamma \text{Min}P$ kümesinin $\text{Min}P + K_0$ kümesinin sınırında tanımlanmış topolojiye göre içi olmak üzere.

C. $\max P_\geq^* \subset \text{Min}P \subset cl \max P_\geq^*$

O halde Önerme 9.1.1 'den $0 \in \text{int } domH$ için birleşim $y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*)$ üzerinde olmak üzere

$$H^{**}(0)(H_\geq^{**}(0)) = \bigcup \{ y_0 \in Y_0 \mid \langle y_0^*, y_0 \rangle = \max \{ -\Omega_H^*(y^*, y_0^*) : y^* \in Y^* \} \} \text{ 'dır.} \quad (9.13)$$

9.3 Özel hal I

X, X^* ve Y, Y^* ilgili σ -topolojilerine ait dual uzaylar olsun. $J: X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon ve $\Lambda: X \rightarrow Y$ sürekli bir lineer fonksiyon olsun.

$F(x) = J(x, \Lambda x)$ olsun.

$$(P) \quad \text{Min}\{J(x, \Lambda x) \mid x \in X\} \quad (9.14)$$

problemini düşünelim. $J(x, \Lambda x) \neq +\infty$ olacak şekilde bir $x \in X$ varolsun. $\Phi : X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonunu $\Phi(x, y) = J(x, \Lambda x - y)$ şeklinde tanımlarız. O zaman $H(y) = \text{Min}\{J(x, \Lambda x - y) \mid x \in X\}$ 'dir.

$$\Omega_{\Phi}^*(0, y^*, y_0^*) = \Omega_J^*(\Lambda^* y^*, -y^*, y_0^*) \quad (9.15)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Bu durumda dual problemler şöyledir:

$$(P^*) \quad ((P_{>}^*)) \quad \max \bigcup \{y_0 \in Y_0 \mid \langle y_0^*, y_0 \rangle = -\Omega_J^*(\Lambda^* y^*, -y^*, y_0^*)\} \quad (9.16)$$

Burada birleşim tüm $y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*)$ ve $y^* \in Y^*$ üzerindedir.

Teorem 9.2.1 ve (9.13) ve (9.12)'den R ve $0 \in \text{int dom } H$ koşulları altında birleşim tüm $y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*)$ üzerinde olmak üzere

$$\max P^*(P_{>}^*) = \max \bigcup \{y_0 \in Y_0 \mid \langle y_0^*, y_0 \rangle = \max\{-\Omega_J^*(\Lambda^* y^*, -y^*, y_0^*) \mid y^* \in Y^*\}\} \text{ 'dir.} \quad (9.17)$$

Aşağıdaki önermenin ispatı kolaydır.

Önerme 9.3.1

Eğer $J : X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ konveks ise $\Phi : X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonu da konveks bir fonksiyondur.

Sıradaki teorem (9.14) ve (9.16) problemleri için bir dualite teoremidir.

Teorem 9.3.1

$\text{Min } P \neq \emptyset$ ve $J : X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ konveks bir fonksiyon olsun. Ayrıca $J(x_0, \cdot)$ $y = \Lambda x_0$ 'da sürekli olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varolsun. O zaman A)'da (9.15) dikkate alınmak üzere A) ve B) bağıntıları doğrudur.

9.4 Özel hal II

Y_1, Y_1^* ve Y_2, Y_2^* ilgili σ -topolojilerine ait dual uzaylar olsun. $K_1 \subset Y_1$ 'in içi boş olmayan konveks kapalı bir koni olduğunu varsayalım. $F_0 : A \rightarrow Y_0$ ve $F_1 : A \rightarrow Y_1$ ifadeleri $A \subset X$

konveks bir küme olmak üzere konveks fonksiyonlar ve $F_2 : X \rightarrow Y_2$ ifadesi $\Lambda : X \rightarrow Y_2$ sürekli lineer bir fonksiyon ve $a \in Y_2$ olmak üzere $F_2(x) = \Lambda x + a$ şeklinde tanımlı bir afin fonksiyon olsun.

(P) problemi aşağıdaki şekildedir:

$$(P) \text{ Min}\{F_0(x) \mid x \in A, F_1(x) \leq 0, F_2(x) = 0\} \quad (9.18)$$

$Y = Y_1 \times Y_2$ olmak üzere $\Phi : X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} F_0(x) & x \in A, F_1(x) \leq y_1, F_2(x) = y_2 \text{ ise,} \\ +\infty & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Burada $y = (y_1, y_2)$ 'dir.

$$L(x, y_0^*, y_1^*, y_2^*) = \langle y_0^*, F_0(x) \rangle - \langle y_1^*, F_1(x) \rangle - \langle y_2^*, F_2(x) \rangle$$

olsun.

Bu durumda y_0^*, y_1^* ve y_2^* elemanları $y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*), y_1^* \in -K_1^*$ ve $y_2^* \in Y_2^*$ olacak şekilde herhangi elemanlar olmak üzere dual problemler aşağıdaki şekildedir:

$$(P^*) \ ((P_{>}^*)) \quad \max \bigcup \{y_0 \in Y_0 \mid \langle y_0^*, y_0 \rangle = \inf \{L(x, y_0^*, y_1^*, y_2^*) \mid x \in A\}\}, \quad (9.19)$$

Teorem 9.2.1 ve (9.13) ve (9.12)'den bağıntılarından R ve $0 \in \text{int } \text{dom} H$ koşulları altında ve $y_0^*, y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*)$ olacak şekilde herhangi bir eleman olmak üzere

$$\max P^*(P_{>}^*) = \max \bigcup \left\{ y_0 \in Y_0 \mid \langle y_0^*, y_0 \rangle = \max_{y_1^* \in -K_1^*, y_2^* \in Y_2^*} \inf_{x \in A} L(x, y_0^*, y_1^*, y_2^*) \right\} \text{ 'dir.} \quad (9.20)$$

Önerme 9.4.1

$\Phi : X \times Y \rightarrow Y_0 \cup \{+\infty\}$ perturbasyon fonksiyonu konvektir.

Teorem 9.4.1

$\text{Min} P \neq \emptyset$ olsun. $F_1(x_0) < 0, F_2(x_0) = 0$ olacak şekilde ve F_0 ve F_1 fonksiyonları bu noktada sürekli olmak üzere bir $x_0 \in \text{int } A$ noktasının varolduğunu varsayalım. Ayrıca $\Lambda : X \rightarrow Y_2$ bir

açık fonksiyon olsun. O halde (9.18) ve (9.19) problemleri için A) – C) bağıntıları aşağıdaki koşul ile sağlanır:

A) bağıntısı aşağıdaki şekildedir:

A) Herhangi $y_0 \in \text{Min}P$ için

$$\langle y_0^*, y_0 \rangle = \max_{y_1^* \in -K_1^*, y_2^* \in Y_2^*} \inf_{x \in A} L(x, y_0^*, y_1^*, y_2^*)$$

olacak şekilde bir $y_0^* \in K_{01}^*$ elemanı vardır.

10. ÇOK AMAÇLI LİNEER PROGRAMLAMA İÇİN PERTURBASYON YÖNTEMİ

$y = (y_1, y_2)$, $y_1 \in R^{m_1}$, $y_2 \in R^{m_2}$, $A_1 : R^n \rightarrow R^{m_1}$, $A_2 : R^n \rightarrow R^{m_2}$ olmak üzere çok amaçlı lineer programlama problemi

$$(P) \text{ Min}\{Cx \mid A_1x \leq b_1, A_2x \leq b_2, x \geq 0\} \quad (10.1)$$

alalım. $\text{MinP} = \text{Min}\{Cx \mid A_1x \leq b_1, A_2x \leq b_2, x \geq 0\}$ olsun.

$\Phi : X \times Y \rightarrow R^n \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu herhangi $x \geq 0$ için $\Phi(x, 0) = Cx$ şeklinde tanımlı olsun. Φ ifadesine perturbasyon denir. Φ perturbasyonuna göre (P) probleminin dual problemleri tanımlanır. Bunun için Φ fonksiyonunun birinci eşleniği $\Phi^*(\Phi^*)$ hesaplanmalıdır.

$$\Omega_\Phi^*(x^*, y^*, y_0^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle - \langle y_0^*, \Phi(x, y) \rangle \mid (x, y) \in X \times Y\} \quad (10.2)$$

tanımlandığında $\Phi^*(\Phi^*)$ fonksiyonu:

$$\Phi^*(x^*, y^*)(\Phi^*(x^*, y^*)) = \{y_0 \in R^n \mid \exists y_0^* \in K_{01}^*(K_{02}^*) : \langle y_0^*, y_0 \rangle = \Omega_\Phi^*(x^*, y^*, y_0^*)\}$$

$$(P^*) \max \bigcup \{-\Phi^*(0, y^*) \mid y^* \in R^{m_1} \times R^{m_2}\} \quad (10.3)$$

$$(P_\>^*) \max \bigcup \{-\Phi_\>^*(0, y^*) \mid y^* \in R^{m_1} \times R^{m_2}\} \quad (10.4)$$

problemleri verilen Φ perturbasyonuna göre (P) probleminin dualidir.

$$\max P^* = \max \bigcup \{-\Phi^*(0, y^*) \mid y^* \in R^{m_1} \times R^{m_2}\} \quad (10.5)$$

$$\max P_\>^* = \max \bigcup \{-\Phi_\>^*(0, y^*) \mid y^* \in R^{m_1} \times R^{m_2}\} \quad (10.6)$$

olsun.

$A_1 : R^n \rightarrow R^{m_1}$, $A_2 : R^n \rightarrow R^{m_2}$ olmak üzere

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} Cx, A_1x - b_1 \leq y_1, A_2x - b_2 = y_2 \\ +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L &= \langle y_0^*, Cx \rangle - \langle y_1^*, A_1x - b_1 \rangle - \langle y_2^*, A_2x - b_2 \rangle \\ &= \langle C^*y_0^* - A_1^*y_1^* - A_2^*y_2^*, x \rangle + \langle y_1^*, b_1 \rangle + \langle y_2^*, b_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\inf_{x \in R^n} L = \begin{cases} \langle y_1^*, b_1 \rangle + \langle y_2^*, b_2 \rangle, & C^* y_0^* - A_1^* y_1^* - A_2^* y_2^* = 0 \\ -\infty, & C^* y_0^* - A_1^* y_1^* - A_2^* y_2^* \neq 0 \end{cases}$$

$$\langle y_0^*, y_0 \rangle = \langle y_1^*, b_1 \rangle + \langle y_2^*, b_2 \rangle \text{ olmak üzere } C^* y_0^* - A_1^* y_1^* - A_2^* y_2^* = 0 \text{ iken}$$

$$\inf_{x \in R^n} L = \langle y_1^*, b_1 \rangle + \langle y_2^*, b_2 \rangle \text{ 'dir.}$$

KAYNAKLAR

- Azimov, A.Ya., Duality of Multiobjective Problems, Math. USSR Sbornik, 1988, Vol. 59, No.2
- Balbas, A., Jimenez, P., Heras, A., Duality Theory and Slackness Conditions in Multiobjective Linear Programming, Computers and Mathematics with Applications 37, pp. 101-109, 1999.
- Bazaraa, M. S., Jarvis J. J., Sherali H., Linear Programming and Network Flows, J. Wiley and Sons, New York, 1990.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., ve Shetty, C. M. Nonlinear Programming, Theory and Algorithms, J. Wiley and Sons, New York, 1993.
- Bector, C. R., ve Husain I., Duality for Multiobjective Variational Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, V.166, pp. 214-229,1992.
- Bonnans, J.F. ve Shapiro A., Perturbation Analysis of Optimization Problems, Springer-Verlag, New York, 2000.
- Chiang, M., Lecture Notes: Convex Optimization and Lagrange Duality, Princeton University, 2005.
- Chong, E. K. P., Žak, S. H., An Introduction to Optimization, John Wiley&Sons, Canada, 2001, second edition.
- Ehrgott, M., Puerto, J.& Rodriguez-Chia, A. M., A Primal-Dual Algorithm for Multiobjective Linear Programming, Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 2003.
- Ekeland, I. ve Temam, R., Convex Analysis and Variational Problems, Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1976.
- Fletcher, R., Practical Methods of Optimization, Chichester:Wiley, 2000, second edition.
- Freund, R. M., Lecture Notes: Duality Theory of Constrained Optimization, Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- Giorgi, G., Guerraggio, A., Thierfelder, J., Mathematics of Optimization: smooth and nonsmooth case, Amsterdam, Boston, Elsevier, 2004.
- Horst, R. ve Pardalos, P. M., Handbook of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- Isermann, H., Duality in Multiple Objective Linear Programming, S. Zionts (Ed.): Multiple Criteria Decision Making, Springer Verlag, 1978, pp. 274 – 285.
- Isermann, H., On Some Relations between a Dual Pair of Multiple Objective Linear Programs, Zeitschrift für Operations Research, Band 22, pp. 33 – 41, Physica-Verlag, Würzburg, 1978.
- Kornbluth, Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming, Operational Research Quarterly, 1974, pp. 599 – 614.
- Luenberger, D. G., Optimization by Vector Space Methods, Wiley Professional Paperback Series, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1969.

- Mishra, S. K., ve Mukherjee, R. N., On Efficiency and Duality for Multiobjective Variational Problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, V.187, pp. 40-54, 1994.
- Pedregal, P., *Introduction to Optimization*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1963.
- Preda, V., On Efficiency and Duality for Multiobjective Variational Problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, V.166, pp. 365-377, 1992.
- Rardin, R. L., *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, Inc., 1998.
- Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Pres, Princeton NJ, 1970.
- Rockafellar, R.T., *Conjugate Duality and Optimization*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1974.
- Sezginman, İ., *Lineer Programlama*, Yıldız Teknik Üniversitesi, 1993.
- Steuer, R. E., *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, John Wiley & Sons, 1986.
- Tucker, A. W., *International Transactions in Operational Research* 11, Operational Research Hall of Fame, Blackwell Publishing, 2004, pp. 239-242.
- Winston, W. L., *Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms*, California: Duxbury Press, 1995.
- Zeleny, M., *Linear Multiobjective Programming*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	27.08.1981	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1996-1999	Terakki Vakfı Özel Şişli Terakki Lisesi
Lisans	1999-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2004-	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

2005-Devam ediyor Yeditepe Üniversitesi Ticari Bilimler Fakültesi
Bilişim Sistemleri ve Teknolojileri Bölümü
Araştırma Görevlisi