

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TÜM EKSENDE OPERATÖR KATSAYILI
STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN GREEN
FONKSİYONUNUN BULUNMASI VE ÖZDEĞERLERİ
SAYISININ ASİMPOTOTİK İFADESİ ÜZERİNE**

Mat.Müh.Fatma AYDIN

F.B.E.Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Matematik Mühendisliği Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**TEZ YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ**

Tez Danışmanı :Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU(Y.T.Ü)

Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu
Prof. Dr. Hamit Avcı
Prof. Tahire Sencer T.

128658

İSTANBUL,2002

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. TÜM EKSENDE VERİLMİŞ OPERATÖR KATSAYILI STURM-LİOUVILLE OPERATÖR DENKLEMİNİN GREEN FONKSİYONU	
2.1 Ön Bilgiler	3
2.2 Tüm Eksende Verilmiş Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Operatör Denkleminin Green Fonksiyonunun İncelenmesi.....	5
2.3 Green Fonksiyonunun Birinci Türevi.....	22
2.4 Green Fonksiyonunun İkinci Türevi.....	33
2.5 Green Fonksiyonunun Denklemi Sağlaması.....	39
2.6 Green Fonksiyonunun Simetrikliği.....	42
3. TÜM EKSENDE TANIMLANMIŞ OPERATÖR KATSAYILI STURM LİOUVILLE DENKLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ SAYISININ ASİMPTOTİK İFADESİ	
3.1 L Operatörünün Özdeğerleri Sayısının Asimptotik İfadesi.....	43
4. SONUÇLAR.....	46
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	48

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında büyük özveriyle bana yardımcı olan ,hiçbir zaman yardım ve desteğini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof.Dr.Mehmet Bayramoğluna'na , anlayışı ,ilgisi ve yardımlarıyla her zaman yanımda olan ve destekleyen değerli hocam Sayın Yard.Doç.Dr.İnci Albayrak'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca destek ve ilgisinden dolayı Sayın Prof.Tahir Şişman'a,manevi desteğinden dolayı tüm aile üyelerime , değerli hocam Sayın Yard.Doç.Dr.Coşkun Güler'e ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.



ÖZET

H ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(-\infty, \infty, H)$ ayrılabilir Hilbert uzayında

$$-y'' + Q(x)y \quad -\infty < x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ile tanımlanan operatörün Green fonksiyonu incelenmiş ve özdeğerler sayısının asimptotik ifadesi bulunmuştur. Burada $Q(x)$, $(-\infty, \infty)$ 'dan alınmış her x değerinde H 'da kendine eş, pozitif ve tersi kompakt operatördür.

Anahtar Kelimeler: Operatör fonksiyon, Green fonksiyonu, spektrum, spektral açılım



ABSTRACT

Let H be separable Hilbert space. In $L_2(-\infty, \infty, H)$ separable Hilbert space, Green function of differential expression defined by

$$-y'' + Q(x)y \quad -\infty < x < \infty$$

is studied and asymptotic expression of eigenvalue numbers is found, where $Q(x)$ is an operator that is self adjoint and positive (for every x in $(-\infty, \infty)$) and its inverse is compact in H .

Key words : Operator-function, Green function, spectrum, spectral expansion.



1.GİRİŞ

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ,değerleri H 'ya ait , Bochner anlamında ölçülebilir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $f(x)$ fonksiyonlar kümesini $H_1 = L_2(-\infty, \infty; H)$ ile gösterelim.Burada $\|\cdot\|_H$ sembolü H uzayında normu gösterir. H_1 'e ait iki $f(x), g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımını

$$(f(x), g(x))_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x), g(x))_H dx$$

formülü ile tanımlarsak H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayı olur.

Bu çalışmada H_1 uzayında

$$I(y) = -y'' + Q(x)y, \quad -\infty < x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonu incelenmiş ve buna dayanarak özdeğerler sayısının asimptotik ifadesi bulunmuştur.

$I(y)$ 'nin ifadesinde yer alan $Q(x)$ her $x \in (-\infty, \infty)$ için H 'da tanımlı kendine eş ,pozitif tanımlı,tersi kompakt olan operatördür.Bunun yanısıra $Q(x)$ operatör fonksiyonu üzerine Titchmarsh-Levitan koşulları denilen koşullarda eklenmiştir.

Ele aldığımız L operatörünün özdeğerler sayısının asimptotik davranışı ilk olarak 1967 yılında A.G.Kostyuchenko ve B.M.Levitan'ın çalışmasında bulunmuştur.Sonraları bu çalışma farklı yönlerde geliştirilmiş ve genelleştirilmiştir. [Aslanov,1985;Bayramoğlu,1971; Bayramoğlu,1997; Bayramoğlu ve Uslu Öztürk,2000; Boymatov,1973; Solomyak,1986;]

Biz bu tez çalışmasında farklı yöntem kullanarak A.G.Kostyuchenko ve B.M.Levitan'ın çalışmasında yer alan $Q(x)$ 'in sonsuzda regularlık denilen ek koşulundan kurtulduk.

Sturm-Liouville operatörünün spektrumunun asimptotik davranışının incelenmesine dair ve konuya ait kaynakların yer aldığı Otelbayev (1990) kitabı gösterilebilir.



2 .TÜM EKSENDE VERİLMİŞ OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖR DENKLEMİNİN GREEN FONKSİYONU

2.1 Ön Bilgiler

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı iken (a,b) aralığından alınmış her x sayısına $A(x)$ operatörü (vektörü) karşılık geliyorsa o zaman (a,b) aralığında operatör (vektör) fonksiyon tanımlanmıştır denir.Eğer $x_0 \in (a,b)$ iken

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|A(x_0 + h) - A(x_0)\| = 0$$

ise ozaman $A(x)$ operatör (vektör) fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.Eğer $\forall u \in H$ için;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|A(x_0 + h)u - A(x_0)u\| = 0$$

ise o zaman $A(x)$ operatör fonksiyonu x_0 noktasında kuvvetli süreklidir denir. (a,b) aralığının herbir noktasında sürekli operatör(vektör) fonksiyona (a,b) aralığında sürekli operatör(vektör) fonksiyon denir.

H' 'da tanımlanmış lineer A operatörünün tanım kümesi $D(A)$ olsun. $\forall x, y \in D(A)$ için $(Ax, y) = (x, Ay)$ koşulu sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir.

Eğer $\forall f \in D(A)$ için $(Af, f) \geq \delta (f, f)$, $((Af, f) \leq \delta (f, f))$ eşitsizliğini sağlayan δ sayısı varsa A , δ ile alttan (üstten) sınırlıdır denir ve kısaca $A \geq \delta I$ ($A \leq \delta I$) şeklinde yazılır.Burada I , H uzayında birim operatördür.

$\delta > 0$ ise , A operatörüne pozitif tanımlı $\delta = 0$ ise , A operatörüne pozitif operatör denir.

Bütün H uzayında tanımlanmış A lineer operatörü H' 'nın keyfi sınırlı kümesini kompakt kümeye dönüştürüyorsa A operatörüne kompakt operatör denir.

A pozitif operatör olsun. A^{-1} operatörü kompakt ise A 'nın spektrumu sadece özdeğerlerden ibarettir.Yani;

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \quad (\text{Mikusinski et.al,1990})$$

Bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormalize edilmiş öz vektörler $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ ile gösterilirse ,spektral açılım teoremine göre[Mikusinski et.al,1990] , $\forall x \in H$ için

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$$

ve

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (Ax, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k$$

olur.Bu formüller sırası ile sembolik olarak

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} (., e_k) e_k \quad (2.1a)$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (., e_k) e_k \quad (2.1b)$$

şeklinde yazılır.(2.1b) formülüne A operatörünün spektral açılımı denir. (2.1a), (2.1b) formülleri ile $\phi(\lambda)$ $(-\infty, \infty)$ da tanımlanmış keyfi fonksiyon iken

$$\phi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda_k) (., e_k) e_k$$

ile $\phi(A)$ operatörü tanımlanır. $\phi(A)$ 'nın tanım kümesi $D(f(A))$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi(\lambda_k)|^2 |(x, e_k)|^2 < \infty$$

koşulunu sağlayan $x \in H$ lardan oluşur. $x \in D(f(A))$ iken

$$\phi(A)x = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda_k) (x, e_k) e_k \quad \text{ile tanımlanır.}$$

A , H uzayında tanımlı kompakt operatör A^* ise, A'nın eşleniği olsun.A A^* operatörü H uzayında kendine eş pozitif operatördür.

AA^* operatörü negatif olmadığından dolayı bunun spektrumu negatif olmayan özdeğerlerden ibarettir. AA^* 'ın pozitif özdeğerlerini $s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_n^2 \geq \dots$ ile gösterelim. $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ sayılarına A operatörünün s-sayıları denir.

Eğer $\sum_{i=1}^{\infty} s_i$ serisi yakınsak ise A operatörüne çekirdek, $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2$ serisi yakınsak ise A operatörüne Hilbert-Schmidt (kısaca H-S) tipli operatör denir. A pozitif operatör ise A'nın s-sayıları A'nın özdeğerleri olur.

σ_1 çekirdek operatörler kümesi iken norm;

$$A \in \sigma_1 \text{ olmak üzere} \quad \|A\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i,$$

σ_2 H-S tipli operatör kümesi iken ;

$$A \in \sigma_2 \text{ olmak üzere} \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanırlarsa σ_1, σ_2 Banach uzayları oluştururlar.

2.2 Tüm Eksende Verilmiş Operatör Katsayılı Strum-Liouville Operatör Denkleminin Green Fonksiyonunun İncelenmesi

H ayrılabilir soyut Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(-\infty, \infty; H)$ ile Bochner anlamında ölçülebilir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $f: (-\infty, \infty) \rightarrow H$ fonksiyonlar kümesini gösterelim.

Eğer H_1 'e ait $f(x), g(x)$ elemanlarının iç çarpımını

$$(f, g)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x), g(x))_H dx$$

(2.1)

formülü ile tanımlarsak o zaman H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur. [Yosida,1980]Daha önce bahsettiğimiz gibi H_1 uzayında

$$l(y) = -y'' + Q(x)y, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.2)$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonunu inceleyeceğiz ve buna dayanarak L nin özdeğerler sayısının asimptotik davranışını bulacağız.

$Q(x)$ üzerine Titchmarch – Levitan koşulları olarak bilinen aşağıdaki koşulların sağlandığı varsayılmaktadır.

1. $\forall x \in (-\infty, \infty)$ için $Q(x)$, H' 'da kendine eş operatördür. $Q(x) \geq I$ dir. Burada I , H' 'da birim operatördür.
2. $Q(x)$ 'in tanım kümesi $D(Q(x))$ x 'den bağımsızdır ve $D(Q(x)) = D$, $\bar{D} = H$ dir. (Burada $\bar{D}$, D kümesinin kapanışıdır).
3. x 'in $(-\infty, \infty)$ ait her değerinde $Q(x)$ in tersi $Q^{-1}(x)$, H' 'da tam sürekli operatördür.

$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j(x)^{3/2}}$ serisi yakınsaktır ve $F(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ dur. Burada

$\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \dots \leq \alpha_n(x) \leq \dots$ $Q(x)$ 'in özdeğerleridir. Bu özdeğerlerin $(-\infty, \infty)$ da ölçülebilirliği varsayılmaktadır.

4. $|x - \xi| \leq 1$ olduğunda

$$\left\| [Q(x) - Q(\xi)]Q^{-a}(x) \right\| \leq c|x - \xi| \quad (c = sbt > 0) \quad (0 < a < \frac{3}{2})$$

5. $|x - \xi| \leq 1$ olduğunda $\left\| Q^{\frac{1}{2}}(x).Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| \leq c$ olsun.

$l(y)$ diferansiyel ifadesi ile L operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\varphi_k(x) \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$, $f_k \in D$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k(x) f_k$$

şeklinde elemanlar kümesini D' ile gösterelim. Burada $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) fonksiyonlarının $L_2(-\infty, \infty)$ uzayında, f_k ($k = 1, 2, \dots$) elemanlarının ise H uzayında tam ortonormal sistem oluşturduğu varsayılmaktadır. Bu takdirde D' kümesinin H_1 uzayında tam sistem oluşturduğu bilinmektedir (Balakrisnan, 1976). Tanım kümesi D' ve her $y \in D'$ iken

$$L'y = l(y)$$

formülü ile L' operatörünü oluşturalım.

Böyle tanımlanmış L' operatörünün H_1 uzayında alttan I ile sınırlı bir simetrik operatör oluşturduğu kolayca gösterilebilir. Bunu yani,

$$(L'y, z) = (y, L'z) \quad , \quad \forall y, z \in D' \quad (2.3)$$

olduğunu gösterelim.

$$L'y = l(y) = -y'' + Q(x)y \quad , \quad y = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k f_k \quad , \quad z = \sum_{s=1}^n b_s \varphi_s f_s \quad (b_s, c_k = \text{sbt}) \quad (2.4)$$

olsun. (2.1) deki iç çarpım tanımına göre ,

$$(L'y, z)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (-y'', z) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (Q(x)y, z) dx \quad \text{dir.} \quad (2.4')$$

(2.4) deki ifadeler (2.4') denkleminde yerine konulursa;

$$\begin{aligned}
(L'y, z)_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n -c_k \varphi_k''(x) f_k, \sum_{s=1}^n b_s \varphi_s(x) f_s \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n Q(x) c_k \varphi_k(x) f_k, \sum_{s=1}^n b_s \varphi_s(x) f_s \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n -c_k \varphi_k'' \overline{b_k \varphi_k} \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n (c_k \varphi_k(x) f_k), Q(x) \sum_{s=1}^n (b_s \varphi_s(x) f_s) \right) dx
\end{aligned}$$

Birinci toplamda kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left(c_k \varphi_k''(x) \cdot \overline{b_k \varphi_k(x)} \right) dx &= -c_k \overline{b_k} \left\{ \varphi_k(x) \cdot \overline{\varphi_k'(x)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_k'(x) \overline{\varphi_k''(x)}) dx \right\} \\
&= c_k \overline{b_k} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_k'(x) \overline{\varphi_k'(x)}) dx \\
&= c_k \overline{b_k} \left\{ \varphi_k(x) \cdot \overline{\varphi_k'(x)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_k(x) \cdot \overline{\varphi_k''(x)}) dx \right\} \\
&= c_k \overline{b_k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k''(x)} dx
\end{aligned}$$

Böylece;

$$\begin{aligned}
(L'y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) f_k, -\sum_{s=1}^n b_s \varphi_s''(x) f_s \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (y, Q(x)z) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left((y, -z'') dx + \int_{-\infty}^{\infty} (y, Q(x)z) dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} (y, -z'' + Q(x)z) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y, L'z) dx = (y, L'z)_1
\end{aligned}$$

Böylece (2.3) ispatlanmış oldu. Yani $(L'y, z) = (y, L'z)$ olduğu gösterildi. [Yosida, 1980]

L' operatörü simetrik operatör olduğundan dolayı kapanışa sahiptir. L' operatörünün kapanışını L ile gösterelim. Biz L operatörünün kendine eş olduğunu varsayacağız. Biz bu bölümde L operatörünün Green fonksiyonunu inceleyeceğiz. Buna dayanarak 3. bölümde L operatörünün özdeğerler sayısının asimptotik davranışını ele alacağız. Belirtelim ki, Green fonksiyonunun incelenmesinde (Levitan, 1968) çalışmasının yanısıra (Oer, Z., 1997) çalışmasındanda yararlanacağız.

$\mu > 0$ parametre olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan iki değişkenli $G(x, \xi; \mu)$ operatör fonksiyonuna L' nin Green fonksiyonu denir.

- 1) $G(x, \xi; \mu)$ H' da dönüşüm yapan x ve ξ ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < \xi < \infty$) nin sürekli operatör fonksiyonudur.
- 2) $x \neq \xi$ değerlerinde $G(x, \xi; \mu)$ nün ξ 'ye göre birinci türevi sürekli ve $G'_\xi(x, x+0; \mu) - G'_\xi(x, x-0; \mu) = -I$
- 3) $G(x, \xi; \mu)$ ikinci türeve sahip operatör fonksiyondur ve $-G''_{\xi\xi}(x, \xi; \mu) + G(x, \xi; \mu)Q(\xi) + \mu G(x, \xi; \mu) = 0$ ($x \neq \xi$) dir.

Yukarıda belirttiğimiz gibi $G(x, \xi; \mu)$ operatör fonksiyonunun bulunmasında Hilbert Levy'nin parametrik yöntemini kullanacağız. Yöntem gereği $G(x, \xi; \mu)$ operatör fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
 G(x, \xi; \mu) &= r(x - \xi)g(x, \xi; \mu) - \int_{-\infty}^{\infty} \{r(x - \eta)g(x, \eta; \mu)[Q(\eta) - Q(x)] \\
 &\quad - r''(x - \eta)g(x, \eta; \mu) + 2r'(x - \eta)\frac{\partial g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta}\} G(\eta, \xi; \mu) d\eta \\
 &= r(x - \xi)g(x, \xi; \mu) - \{P_1 - P_2 + P_3\} G(\eta, \xi; \mu) d\eta
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

integral denkleminin çözümü şeklinde arayalım.

Burada $\aleph = \{Q(x) + \mu I\}^{1/2}$ olmak üzere

$$g(x, \xi; \mu) = \frac{1}{2} \aleph^{-1} e^{-|x-\xi|\aleph}$$

ve $r(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ koşulunu sağlayan istenildiği kadar türeve sahip fonksiyondur.

Bu integral denkleminin çözüme sahip olduğunu ve elde edilen çözümün (2.2) probleminin Green fonksiyonu olduğunu göstereceğiz. (2.5) denklemi aşağıda tanımlanan uzaylarda gözönüne alınacaktır.

X_1 ve X_2 uzayları;

$-\infty < x, \eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış, değerleri H 'da lineer sınırlı operatörler olan ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x, \eta)\|^2 d\eta < \infty$$

koşulunu sağlayan $A(x, \eta)$ operatörler kümesini X_1 ile gösterelim. X_1 bir lineer uzay oluşturur. Bu uzayda $A(x, \eta)$ nın normunu,

$$\|A(x, \eta)\|_{X_1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x, \eta)\|^2 d\eta \right)^{1/2}$$

formülü ile tanımlayalım. Bu durumda X_1 bir Banach uzay olur.

X_2 ile $-\infty < x, \eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış, değerleri H 'da dönüşüm yapan Hilbert-Schmidt (H-S) tipli ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x, \eta)\|_2^2 d\eta < \infty \quad \text{koşulunu sağlayan } A(x, \eta)$$

operatörler kümesini gösterelim.

Burada $\|A(x, \eta)\|_2^2, A(x, \eta)$ 'nin H-S normunu gösterir.

X_2 'de $\|A(x, \eta)\|$ 'nin normunu

$$\|A(x, \eta)\|_{X_2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x, \eta)\|_2^2 d\eta \right)^{1/2}$$

ile tanımlarsak X_2 uzayı da bu norma göre Banach uzayı olur.

Çalışmamıza devam edebilmek için gerekli olan, H 'da dönüşüm yapan sınırlı $A(x, \eta)$ operatörlerinin oluşturduğu diğer $X_3^{(p)}$, $X_2^{(s)}$, $X_4^{(s)}$ ve X_5 ($p \geq 1$, $s < 0$) uzaylarının tanımını verelim. Bu uzaylarda norm sırasıyla;

$$\|A(x, \eta)\|_{X_3^{(p)}} = \left(\sup_{-\infty < x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x, \eta)\|^{(p)} d\eta \right)^{1/p}$$

$$\|A(x, \eta)\|_{X_2^{(s)}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x, \eta) Q^{(s)}(\eta)\|_2^2 d\eta$$

$$\|A(x, \eta)\|_{X_4^{(s)}} = \sup_{-\infty < x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x, \eta) Q^{(s)}(\eta)\| d\eta$$

$$\|A(x, \eta)\|_{X_5} = \sup_{-\infty < x < \infty} \sup_{-\infty < \eta < \infty} \|A(x, \eta)\|$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylar B.M. Levitan (Levitan, 1968) tarafından verilmiş ve Banach uzayı oldukları ispatlanmıştır.

(2.5) integral denklemini X_1 ve X_2 uzaylarında gözönüne alalım. Biz $\mu > 0$ büyük değerlerinde bu denklemin X_1 ve X_2 de tek çözüme sahip olduğunu ve çözümün ardışık yaklaşım yöntemi ile bulunabileceğini göstereceğiz.

Bunun için μ 'nün sözü edilen değerlerinde $r(x - \xi)g(x, \xi; \mu) \in X_1$,
 $r(x - \xi)g(x, \xi; \mu) \in X_2$ ve

2013 YILINDA TÜRKİYE KÜLTÜR VE TURİZM BAKANLIĞI TARAFINDAN YAYINLANAN ESERLERİN KOPYASI

$$PG(x, \xi; \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ r(x - \eta) g(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] - r_x''(x - \eta) g(x, \eta; \mu) \right. \\ \left. + 2r_x'(x - \eta) \frac{\partial g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta} \right\} G(\eta; \xi; \mu) d\eta$$

operatörünün X_1 ve X_2 'de büzen dönüşüm olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Önce (2.5) denkleminde $r(x - \xi)g(x, \xi; \mu) \in X_2$ yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)\|_2^2 dx d\xi < \infty$$

olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\|r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)\|_2^2$$

nin normunu bulalım.

$g(x, \xi; \mu)$ x , ξ ve $\mu > 0$ nün herbir değerinde kendine eş operatördür. $|r(x - \xi)| < c$ olduğundan

$$\|r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)\|_2^2 \leq c^2 \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i(x, \xi; \mu))^2$$

olur. Burada $\lambda_i(x, \xi; \mu)$, $g(x, \xi; \mu)$ operatörünün özdeğerleridir.

$$\|r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)\|_2^2 = \|r(x - \xi) \aleph^{-1} e^{-\aleph|x-\xi|}\|_2^2 \quad \text{dir.}$$

Kendine eş operatörün spektral açılımına göre,

$$\|r(x - \xi) \aleph^{-1} e^{-\aleph|x-\xi|}\|_2^2 \leq c^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}|x-\xi|}}{\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}} \right)^2 = c^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}|x-\xi|}}{\alpha_j(x)+\mu} \quad \text{dir.}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| r(x-\xi) \aleph^{-1} e^{-\aleph|x-\xi|} \right\|_2^2 dx d\xi = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int_{-\infty}^x \left\| r(x-\xi) \aleph^{-1} e^{\aleph(x-\xi)} \right\|_2^2 d\xi + \int_x^{\infty} \left\| r(x-\xi) \aleph^{-1} e^{\aleph(\xi-x)} \right\|_2^2 d\xi \right\} \\
& \leq c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} x}}{\alpha_j(x)+\mu} \int_{-\infty}^x e^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} \xi} d\xi + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} x}}{\alpha_j(x)+\mu} \int_x^{\infty} e^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} \xi} d\xi \right\} \\
& = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} x} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} \xi}}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \Big|_{-\infty}^x + \sum_{j=1}^{\infty} e^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} x} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} \xi}}{-2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \Big|_x^{\infty} \right) \\
& = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(e^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} x} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} x}}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \right) \right] - \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} x} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} x}}{-2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \right] \right\} \\
& = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{-2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \right) = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \right)
\end{aligned}$$

(koşul 3. kullanılarak)

$$\leq c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_j(x))^3} = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx < \infty$$

sağlanır.

Teorem 1: A sınırlı, B (H-S) operatörü ise o zaman AB ve BA operatörü H-S tipli operatör olur ve

$$\|AB\|_2 \leq \|A\| \|B\|_2$$

$$\|BA\|_2 \leq \|B\|_2 \|A\|$$

sağlanır. (Bu teoremin ispatı (Kato, 1980) bulunabilir.)

Lemma 1: $K(x, \xi)$, x ve ξ nin (a, b) den alınmış $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ her bir değerinde H da sınırlı bir operatör olsun. Eğer

$$\int_a^b \|K(x, s)\| dx < M \quad \text{ve} \quad \int_a^b \|K(x, s)\| ds \leq M$$

ise o zaman

$$A f(x) = \int_a^b K(x, s) f(s) ds$$

integral operatörü $L_2(a, b, H)$ Hilbert uzayında sınırlı operatördür ve $\|A\|_{L_2(a, b, H)} \leq M$ dir. Bu Lemmanın ispatı aşağıdaki bilinen Lemmaya dayanır. (Smirnov, 1964)

Lemma 2: $(a, b) \times (a, b)$ de tanımlanmış $K(x, s)$ operatör fonksiyonu

$$\int_a^b |K(x, s)| ds \leq M \quad \text{ve} \quad \int_a^b |K(x, s)| dx \leq M$$

oluyorsa

$$B f(x) = \int_a^b K(x, s) f(s) ds$$

operatörü $L_2(a, b)$ uzayında sınırlı bir operatördür ve $\|B\| \leq M$ yani

$$\|B f(x)\|^2 = \int_a^b |B f(x)|^2 dx = \int_a^b \left| \int_a^b K(x, s) f(s) ds \right|^2 dx \leq M^2 \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Şimdi Lemma 1'i ispatlayalım;

$$\begin{aligned}
\|A f(x)\|_{L_2(a,b;H)}^2 &= \int_a^b \|A f(x)\|_H^2 dx \\
&= \int_a^b \left\| \int_a^b K(x,s) f(s) ds \right\|_H^2 dx \\
&\leq \int_a^b \left\{ \int_a^b \|K(x,s) f(s)\| ds \right\}^2 dx
\end{aligned}$$

Lemma 2'den

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b \|K(x,s)\| \|f(s)\| ds \right\}^2 dx \leq M^2 \int_a^b \|f(x)\|^2 dx$$

dir. Böylece

$$\|A f\|_{L_2(a,b;H)}^2 \leq M^2 \int_a^b \|f(x)\|^2 dx$$

olur. Buradan da;

$$\|A f\|_{L_2(a,b;H)} \leq M \|f\|_{L_2(a,b;H)} \quad \text{bulunur.}$$

Lemma 3 : $K(x,s)$ Lemma 1 deki özelliklere sahip olsun. O zaman

$$T A(x,s) = \int_a^b A(\xi,s) K(\xi,x) d\xi$$

integral operatörü X_2 uzayında sınırlı operatördür ve

$$\|T\|_{x_2} \leq M \quad \text{dir.}$$

İspat :

$$\begin{aligned}
\|TA\|_{X_2}^2 &= \int_a^b \int_a^b \|TA\|_2^2 dx ds \\
&= \int_a^b \int_a^b \left\| \int_a^b A(\xi, s) K(\xi, x) d\xi \right\|_2^2 dx ds \\
&\leq \int_a^b \int_a^b \left[\int_a^b \|A(\xi, s)\|_2 \|K(\xi, x)\| d\xi \right]^2 dx ds \\
&\leq M^2 \int_a^b \left[\int_a^b \|A(\xi, s)\|_2^2 d\xi \right] ds \\
&\leq M^2 \|A\|_{X_2}^2
\end{aligned}$$

Böylece,

$$\|TA\|_{X_2}^2 \leq M \|A\|_{X_2}^2 \text{ veya}$$

$$\|T\| \leq M \text{ dir.}$$

Bu lemma $X_1, X_3^{(p)}$... uzayları içinde geçerlidir.

(2.5) ifadesinden

$$P_1 A = \int_{-\infty}^{\infty} r(x-\eta) g(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] A(\eta, \xi) d\eta$$

ifadesini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x-\eta) g(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] A(\eta, \xi) d\eta =$$

$$\int_{|x-\eta|\leq 1} |x-\eta| \|Q^a(x)g(x,\eta;\mu)\| \cdot \|A(\eta,\xi)\|_2 d\eta \quad (2.8)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{|x-\eta|\leq 1} |x-\eta|^{1+\varepsilon} |x-\eta|^{-\varepsilon} \|Q^a(x)\aleph^{-2-\varepsilon}\| \|\aleph^{1+\varepsilon} e^{-\aleph|x-\eta|}\| \cdot \|A(\eta,\xi)\|_2 d\eta \quad (2.9)$$

Spektral açılım formülünü kullanarak $\|Q^a(x)\aleph^{-2-\varepsilon}\|$ sınırlandıralım.

$$\left\| Q^a(x)(Q(x) + \mu I)^{\frac{1}{2}(-2-\varepsilon)} \right\| = \sup_{\lambda \geq 1} \lambda^a (\lambda + \mu)^{\frac{1}{2}(-2-\varepsilon)}$$

$$\leq \sup_{\lambda \geq 1} (\lambda + \mu)^a (\lambda + \mu)^{-\frac{1}{2}(2+\varepsilon)}$$

$$= \sup_{\lambda \geq 1} (\lambda + \mu)^{a - \frac{(2+\varepsilon)}{2}}$$

$\varepsilon > 0$ iken $\zeta = a - \frac{(2+\varepsilon)}{2} < 0$ koşulunu sağlayan bir ζ seçelim. Bu taktirde

$$\|Q^a(x)\aleph^{-2-\varepsilon}\| \leq \frac{c}{\mu^\zeta} \quad c > 0 \quad (2.10)$$

olur. Şimdi ise

$$\left\| |x-\eta|^{1+\varepsilon} \aleph^{1+\varepsilon} e^{-\aleph|x-\eta|} \right\|$$

ifadesini sınırlandıralım. Biz burada $x \geq 0$ iken $x^\alpha e^{-x}$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gözönünde bulunduracağız.

$$\left\| |x-\eta|^{1+\varepsilon} \aleph^{1+\varepsilon} e^{-\aleph|x-\eta|} \right\| = \sup_{\lambda \geq 1} |x-\eta|^{1+\varepsilon} (\lambda + \mu)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)} e^{-(\lambda+\mu)^{1/2}|x-\eta|}$$

$$= \sup_{\lambda \geq 1} \left(|x-\eta| (\lambda + \mu)^{1/2} \right)^{1+\varepsilon} e^{-(\lambda+\mu)^{1/2}|x-\eta|} < \infty \quad (2.11)$$

(2.9), (2.10) ve (2.11) den

$$\begin{aligned}
 \|a_1\|_2^2 &\leq \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \left(\int_{|x-\eta|\leq 1} |x-\eta|^{-\varepsilon} \|A(\eta, \xi)\|_2 d\eta \right)^2 \\
 &= \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \left[\int_{|x-\eta|\leq 1} |x-\eta|^{-\varepsilon} \|A(\eta, \xi)\|_2 d\eta \int_{|x-\eta'|\leq 1} |x-\eta'|^{-\varepsilon} \|A(\eta', \xi)\|_2 d\eta' \right] \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$\eta - x = v$, $\eta' - x = v'$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned}
 &\frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{|v|\leq 1} |v|^{-\varepsilon} \|A(\eta, \xi)\|_2 dv \int_{|v'|\leq 1} |v'|^{-\varepsilon} \|A(\eta', \xi)\|_2 dv' \\
 &= \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \int_{|v|\leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|v'|\leq 1} |v'|^{-\varepsilon} dv' \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x+v, \xi)\|_2 \|A(x+v', \xi)\|_2 dx \\
 &\leq \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \int_{|v|\leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|v'|\leq 1} |v'|^{-\varepsilon} dv' \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|A(x+v, \xi)\|_2^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|A(x+v', \xi)\|_2^2 dx \right)^{1/2} \\
 &= \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \int_{|v|\leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|v'|\leq 1} |v'|^{-\varepsilon} dv' \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|A(u, \xi)\|_2^2 du \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|A(u', \xi)\|_2^2 du' \right)^{1/2} \\
 &= \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \left(\int_{|v|\leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \|A(u, \xi)\|_2^2 du \\
 &\|a_1\|_{x_2}^2 \leq \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \left(\int_{|v|\leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \|A(u, \xi)\|_2^2 du \\
 &\|a_1\|_{x_2}^2 \leq \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x, \xi)\|_2^2 dx
 \end{aligned}$$

$$\|a_1\|_{X_2} \leq \frac{c}{\mu^\zeta} \|A(x, \xi)\|_{X_2}.$$

$|x - \eta| > 1$ iken $r(x - \eta) = 0$ olduğundan $a_2 = 0$ olur.

Şimdide (2.5) denklemindeki P_2 ve P_3 operatörlerinin $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde bizen operatör olduğunu göstereyim.

$P_2 A = r''(x - \eta) g(x, \eta; \mu)$ yü göz önüne alalım.

$|r''(x - \eta)| < c_1$ olduğundan

$$\|r''(x - \eta) g(x, \eta; \mu)\| \leq c_1 \|g(x, \eta; \mu)\|$$

olur.

$$\|g(x, \eta; \mu)\| = \left\| \aleph^{-1} e^{-\aleph |x - \eta|} \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j(x) + \mu)^{-1/2} e^{-\sqrt{\alpha_j(x) + \mu} |x - \eta|} (., e_j) e_j \right\|$$

$$\leq \frac{e^{-\sqrt{\alpha_j(x) + \mu} |x - \eta|}}{(\alpha_j(x) + \mu)^{1/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{-\sqrt{\mu} |x - \eta|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|r''(x - \eta) \aleph^{-1} e^{-\aleph |x - \eta|}\| d\eta \leq \frac{c_1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\mu} |x - \eta|} d\eta$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{\mu}} \left(\int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{\mu} |x - \eta|} d\eta + \int_x^{\infty} e^{\sqrt{\mu} |x - \eta|} d\eta \right)$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{\mu}} \left(\int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{\mu} x} \cdot e^{\sqrt{\mu} \eta} d\eta + \int_x^{\infty} e^{\sqrt{\mu} x} \cdot e^{-\sqrt{\mu} \eta} d\eta \right)$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{-\sqrt{\mu}x} \cdot e^{\sqrt{\mu}\eta} \int_{-\infty}^x -\frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{\sqrt{\mu}x} \cdot e^{-\sqrt{\mu}\eta} \Big|_x^{\infty} \right)$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\mu}} = \frac{2c_1}{\mu} = \frac{c}{\mu}$$

böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|r''(x-\eta) e^{-\sqrt{\mu}|x-\eta|}\| d\eta \leq \frac{c}{\mu} \quad \text{olduğundan}$$

$$\|P_2\|_{X_2} \leq \frac{c}{\mu}$$

elde edilir.

$\mu > 0$ büyük değerlerinde $\|P_2\|_{X_2} \leq \frac{c}{\mu}$ olur. Benzer şekilde $\|P_3\|_{X_2} \leq \frac{c}{\mu}$ bulunur. Bununla PA operatörünün $\mu > 0$ 'ın büyük değerlerinde X_2 uzayında büzen operatör olduğunu ispatlamış olduk.

$r(x-\eta)g(x,\eta;\mu) \in X_2$ olduğunda (2) denkleminin $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde X_2 uzayında çözümünün varlığını ve tekliğini gösterdik. Benzer şekilde X_1 uzayında varlığı ve tekliği gösterilir.

Teorem 2 : Eğer 1), 2), 3) koşulları sağlanıyorsa o zaman $\mu > 0$ nün büyük değerlerinde, (2.5) denkleminin, X_1, X_2 uzaylarının her birine ait çözümü vardır ve tektir.

Lemma 4: Eğer $Q(X)$ operatör fonksiyonları 1), 2), 3) koşullarını sağlıyorsa o zaman P operatörü $\mu > 0$ büyük değerlerinde $X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, X_3^{(s)}, X_4^{(s)}$ uzaylarının her birinde büzen operatördür.

Biz daha önce

$$G(x, \xi; \mu) = r(x - \xi)g(x, \xi; \mu) - PG(\eta, \xi; \mu)$$

integral denkleminin X_2 uzayına ait olduğunu gösterdiğimizden bu lemmaya göre bu integral denklem çözüme sahiptir ve çözümde $X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, X_3^{(s)}, X_4^{(s)}$ uzaylarına ait olacaktır.

Lemma 5: $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1., 2., 3. koşullarını sağlasın ve ek olarak

$$|x - \xi| \leq 1 \quad \text{iken} \quad \left\| Q^{\frac{1}{2}}(x) Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| \leq c \quad \text{olsun. Bu takdirde;}$$

$$\frac{\partial^2 [r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)]}{\partial \xi^2} \quad x \in X_4^{(-\frac{1}{2})} \quad x \neq \xi$$

yani

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^2 (rg)}{\partial \xi^2} Q^{-1/2}(\xi) \right\| d\xi < \infty \text{ olur.}$$

Bu lemma kolayca ispatlanabilir.

2.3 Green Fonksiyonunun Birinci Türevi

(2.5) denkleminin ξ değişkenine göre formal türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r(x - \xi)g(x, \xi; \mu) \right] - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ r(x - \eta)g(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \right. \\ &\quad \left. - r''(x - \eta)g(x, \eta; \mu) + 2r'(x - \eta) \frac{\partial G(x, \eta; \mu)}{\partial \eta} \right\} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta \end{aligned} \quad (2.13)$$

X_3^p ($p \geq 1$) Banach uzayında aşağıdaki integral denklemi göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} K(x, \eta; \mu) &= \frac{\partial}{\partial \xi}(rg) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ r(x - \eta)g(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \right. \\ &\quad \left. - r''(x - \eta)g(x, \eta; \mu) + 2r'(x - \eta) \frac{\partial g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta} \right\} K(\eta, \xi; \mu) d\eta \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (r(x-\xi) g(x, \xi; \mu)) \in X_3^p$$

olması için

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial \xi} (rg) \right\|^p d\xi < \infty \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (rg) \in X_3^{(1)} \equiv X_3$$

olması yeterlidir.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (r(x-\xi) g(x, \xi; \mu)) = -r'(x-\xi) g(x, \xi; \mu) + r(x-\xi) \frac{\partial g}{\partial \xi}(x, \xi; \mu)$$

$$r(x-\xi) \frac{\partial g}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) \in X_3 \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) = \begin{cases} -\frac{1}{2} N^{-1} e^{-N(\xi-x)} & x < \xi \\ \frac{1}{2} N^{-1} e^{-N(x-\xi)} & x > \xi \end{cases}$$

$x < \xi$ için sınırlandırma yapalım.

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_x^{\infty} \left\| -\frac{1}{2} r e^{-N(\xi-x)} \right\| d\xi < \infty$$

olduğunu gösterelim. $|r| < c$ olduğundan

$$\left\| -\frac{1}{2} r e^{-N(\xi-x)} \right\| \leq \frac{1}{2} c \left\| e^{-N(\xi-x)} \right\| = \frac{1}{2} c e^{-\sqrt{\sigma_1(x)+\mu}(\xi-x)}$$

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_x^{\infty} \left\| \frac{1}{2} r e^{-N(\xi-x)} \right\| d\xi \leq c \sup_{-\infty < x < \infty} \int_x^{\infty} e^{-\sqrt{\sigma_1(x)+\mu}(\xi-x)} d\xi$$

$$\leq c \sup_{-\infty < x < \infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(x) + \mu}} e^{-\sqrt{\alpha_1(x) + \mu}(\xi - x)} \right]_x^\infty$$

$\mu > 0$, $\alpha_1(x) \geq 1$ olduğundan dolayı

$$\leq c \sup_{-\infty < x < \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(x) + \mu}} \right] \leq \left[\frac{c}{\sqrt{\mu}} \right]$$

Diğer terimlerde benzer şekilde sınırlandırılarak sonuçta $\mu > 0$ olduğunda $\frac{\partial}{\partial \xi} (rg) \in X_3$

bulunur. Buna göre $K(x, \xi; \mu)$ nın $X_3^{(P)}$ uzayının, özel olarak $X_3^{(1)} \equiv X_3$ uzayının elemanıdır.

Şimdi de;

$\xi < x$ olduğunu varsayalım. ($x < \xi$) içinde benzer şekilde incelenir.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\xi} K(x, \xi; \mu) d\xi &= rg(x, \xi; \mu) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ r(x - \eta) g(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \right. \\ &\quad \left. - r''(x - \eta) g(x, \eta; \mu) + 2r'(x - \eta) \frac{\partial g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta} \right\} K(\eta, \xi; \mu) d\eta \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.16) denklemi (2.5) ile aynı olur. (2.5) denklemi tek çözüme sahip olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\xi} K(x, \xi; \mu) d\xi = G(x, \xi; \mu) \quad (2.17)$$

olur. $\xi \neq x$ için $K(x, \xi; \mu)$ operatör fonksiyonu sürekli ise yani

$\| K(x, \xi + h; \mu) - K(x, \xi; \mu) \| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \quad$ iken oluyorsa (2.17) eşitliğinin türevini alarak

$$K(x, \xi; \mu) = \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \xi; \mu)$$

bulunur. Şimdi $K(x, \xi; \mu)$ operatör fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim. (2.14) denklemini aşağıdaki şekilde ifade edelim.

$$\begin{aligned} K(x, \xi; \mu) - \frac{\partial(rg)}{\partial \xi} = & - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ rg(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] - r''(x, \eta; \mu) \right. \\ & \left. + 2r'g'(x, \eta; \mu) \right\} \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi, \mu) d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} rg(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \\ & - r''g(x, \eta; \mu) + 2r'g'(x, \eta; \mu) \left\} K(\eta, \xi; \mu) - \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$L(x, \xi; \mu) = K(x, \xi; \mu) - \frac{\partial rg}{\partial \xi}(x, \xi; \mu)$$

$$\begin{aligned} l(x, \xi; \mu) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ rg(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] - r''g(x, \eta; \mu) \right. \\ & \left. + 2r'g'(x, \eta; \mu) \right\} \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta \end{aligned}$$

ile gösterelim. (2.18) denklemini

$$\begin{aligned} L(x, \xi; \mu) = l(x, \xi; \mu) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ rg(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] - r''g(x, \eta; \mu) \right. \\ \left. + 2r'g'(x, \eta; \mu) \right\} L(\eta, \xi; \mu) d\eta \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklini alır ve buradan

$$\Delta L(x, \xi; \mu) = \Delta l(x, \xi; \mu) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ r g(x, \eta; \mu) [Q(\eta) - Q(x)] - r'' g(x, \eta; \mu) + 2r' g'(x, \eta; \mu) \right\} \Delta L(\eta, \xi; \mu) d\eta \quad (2.20)$$

elde edilir. Burada

$$\Delta L(x, \xi; \mu) = l(x, \xi + h; \mu) - l(x, \xi; \mu)$$

$$\Delta l(x, \xi; \mu) = l(x, \xi + h; \mu) - l(x, \xi; \mu)$$

dir. (2.20) denklemini

$$\Delta L = \Delta l - P(\Delta L) \quad (2.21)$$

şeklinde yazalım.

Elemanları H uzayında dönüşüm yapan sınırlı $A(x, \eta)$ operatör fonksiyonları $(-\infty \leq x, \eta < \infty)$ olan ve normları

$$\|A(x, \eta)\|_{X_5} = \sup_{-\infty \leq x < \infty} \sup_{-\infty \leq \eta < \infty} \|A(x, \eta)\|_H$$

şeklinde tanımlanan Banach uzayını X_5 ile gösterelim. Lemma 4'de olduğu gibi P operatörü $\mu > 0$ büyük değerlerinde X_5 uzayında da büzen operatör olduğu gösterilir. Buna göre $(I+P)^{-1}$ var ve sınırlıdır.

$$\|(I+P)^{-1}\|_{X_5} = A \quad \text{olsun}$$

(2.21) denkleminde

$$\|\Delta L\|_{X_5} \leq A \|\Delta L\|_{X_5} \quad (2.22)$$

bulunur. Burada $A = \|(I+P)^{-1}\|$ dir.

Lemma 6: $\forall \varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ vardır ki, $|h| < \delta$ olduğunda

$$\|L(x, \xi + h; \mu) - L(x, \xi; \mu)\|_{x,} < \varepsilon \quad \text{olur.} \quad (2.23)$$

İspat : (2.22) den görüldüğü gibi lemmanın ispatı için aşağıdaki ifadenin doğruluğunu göstermek yeterlidir.

Keyfi $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ varsa ki, $|h| < \delta$ olduğunda

$$\|\Delta l\|_{x,} < \frac{1}{A} \varepsilon$$

olur. Sabit δ için $\zeta \geq \delta$ seçelim.

$$\begin{aligned} \Delta l(x, \xi; \mu) = & \int_{-\infty}^{\xi-\zeta} \left\{ \operatorname{rg} [Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \Delta_{\xi} \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta \\ & + \int_{\xi-\zeta}^{\infty} \left\{ \operatorname{rg} [Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \Delta_{\xi} \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta \end{aligned}$$

şeklinde yazalım.

$$\|\alpha_1\|_{x,} \text{ 'i sınırlandıralım.}$$

α_1 için $\eta < \xi - \zeta$ dır. Yani, $\xi - \eta > \zeta$, $-\eta + h + \xi > \zeta + h$ ve buradan $|h| < \delta$ olduğundan

$-\eta + h + \xi > \zeta + h < \zeta - \delta$ olur. Buna göre η ve ξ nin bu değerlerinde

$$\Delta \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) = \int_{-\infty}^h \frac{\partial^2 rg}{\partial \xi^2}(\eta, \xi + t; \mu) dt$$

doğrudur. Böylece

$$\begin{aligned}
\left\| \Delta \frac{\partial r g}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) \right\|_H &= \left\| \int_{-\infty}^{|h|} \frac{\partial^2 r g}{\partial \xi^2}(\eta, \xi+t; \mu) \right\|_H dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{|h|} \left\| \left[r'' g - 2r' g' + r g'' \right](\eta, \xi+t; \mu) \right\| dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{|h|} \left[\left\| (r'' g)(\eta, \xi+t; \mu) \right\|_H - \left\| (2r' g')(\eta, \xi+t; \mu) \right\|_H \right. \\
&\quad \left. + \left\| (r g'')(\eta, \xi+t; \mu) \right\|_H \right] dt
\end{aligned}$$

olur.

$$\int_{-\infty}^{|h|} \left\| r \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}(\eta, \xi+t; \mu) \right\|_H dt$$

yi sınırlandıralım. Önce $\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}$ türevinin bir terimini alarak sınırlandırmayı yapalım, diğer terimler içinde benzer sınırlandırma yapılabilir.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{|h|} \left\| r \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}(\eta, \xi+t; \mu) \right\|_H dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{|h|} \left\| r \kappa e^{-\kappa(\xi+t-\eta)} \right\|_H dt \\
&\leq c \int_0^{|h|} \sup_{\alpha_1(x)+\mu \geq 1} (\alpha_1(t) + \mu)^{\frac{1}{2}} e^{-(\xi+t-\eta)(\alpha_1(x)+\mu)^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \int_0^{|h|} \frac{1}{2} \sup_{\alpha_1(x)+\mu \geq 1} (\alpha_1(x) + \mu)^{\frac{1}{2}} (\xi+t-\eta)^{-(\xi+t-\eta)(\alpha_1(x)+\mu)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\xi+t-\eta} dt
\end{aligned}$$

$t \geq 0$ olmak üzere $t e^{-t} \leq 1$ olduğundan,

$$\leq c \int_0^{|h|} \frac{dt}{\xi+t-\eta} \leq \frac{c}{2} \int_0^{|h|} \frac{dt}{\xi-\delta} = \frac{c}{2(\xi-\delta)} |h| < \frac{c\delta}{2(\xi-\delta)}$$

bulunur. Böylece

$$\|a_1\|_{x_s} \leq \frac{c\delta}{2(\xi-\delta)} \quad (2.24)$$

bulunur. Benzer işlemler $\|a_2\|_{x_s}$ ve $\|a_3\|_{x_s}$ içinde yapıldığında (Levitan, 1968)

$$\|\Delta l(\eta, \xi; \mu)\|_{x_s} \leq \varepsilon$$

bulunur.

$$K(x, \xi; \mu) - \frac{\partial r g}{\partial \xi}(x, \xi; \mu)$$

operatör fonksiyonunun ξ 'ye göre sürekli olduğunu gösterdik. $\xi = x$ noktasında

$$\frac{\partial r g}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) \text{ hangi sıçrayışa sahip ise } \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) \text{ de aynı sıçrayışa sahiptir.}$$

$$\frac{\partial r g}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) \text{ nün sürekliliğini inceleyelim.}$$

$$\frac{\partial r g}{\partial \xi} = -r'g + r \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad \text{iken} \quad r \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad \text{terimini göz önüne alalım.}$$

$$r(x - \xi) \text{ fonksiyonu, ifadesinden görüldüğü gibi } r \frac{\partial g}{\partial \xi}, \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad \text{ile} \quad x = \xi \quad \text{noktasında aynı}$$

sıçrayışa sahiptir. $\xi < x$ için

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \xi}(x, \xi+h; \mu) - \frac{\partial g}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) \right\|_H$$

ifadesini sınırlandırılm. $t= x - \xi$ olsun $\alpha_1(x) = \lambda$ iken spektral açılım formülünden

$$\begin{aligned}
 \| e^{-(t-h)\lambda} - e^{-t\lambda} \|_H &\leq \sup_{(\lambda+\mu) \geq 1} \left| e^{-(t-h)\sqrt{\lambda+\mu}} - e^{-t\sqrt{\lambda+\mu}} \right| \\
 &= \sup_{(\lambda+\mu) \geq 1} \left| e^{-t\sqrt{\lambda+\mu}} (e^{h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1) \right| \\
 &= \sup_{(1 \leq (\lambda+\mu) \leq N)} \left| e^{-t\sqrt{\lambda+\mu}} (e^{h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1) \right| \\
 &+ \sup_{(\lambda+\mu) \geq N} \left| e^{-t\sqrt{\lambda+\mu}} (e^{h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1) \right| = J_1 + J_2
 \end{aligned}$$

J₂ için:

$h \rightarrow 0$ olduğunda $|h| < t$ alalım. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için N 'yi öyle büyük seçelim ki;
 $\lambda + \mu > N$ olduğunda

$$\left| e^{-(t+h)\sqrt{\lambda+\mu}} - e^{-t\sqrt{\lambda+\mu}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{olur.} \quad (2.25)$$

J₁ için;

N 'yi sabit tutarak $1 \leq (\lambda + \mu) \leq N$ için öyle bir h seçebiliriz ki

$$\left| e^{h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.26)$$

(2.25) ve (2.26) dan.

ACI YÖNETİM SİSTEMİ
 YEREL YÖNETİMLERİN
 YEREL YÖNETİMLERİN
 YEREL YÖNETİMLERİN

$$\left| e^{-(t-h)\aleph} e^{-t\aleph} \right|_H \leq \varepsilon$$

buluruz. Diğer terimlerde benzer işlemler yapılarak

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \xi}(x, \xi + h; \mu) - \frac{\partial g}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) \right\|_H \leq \varepsilon$$

elde edilir.

$x \neq \xi$ iken $\frac{\partial(rg)}{\partial \xi}$ nin sürekli olması $x \neq \xi$ için $K(x, \xi; \mu) = \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \xi; \mu)$ nün sürekli olmasını gösterir.

$x = \xi$ sıçrama noktası için $\frac{\partial(rg)}{\partial \xi}$ yi inceleyelim.

$$\frac{\partial(rg)}{\partial \xi} = r'g + r \frac{\partial g}{\partial \xi}$$

r' g sürekli. (2.15) denklemini inceleyelim. $h > 0$ kabul edelim.

$$r \frac{\partial g}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+h} = -\frac{1}{2} r e^{-h\aleph} \quad r \frac{\partial g}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-h} = -\frac{1}{2} r e^{-h\aleph}$$

$$\left[r \frac{\partial g}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+h} + \frac{1}{2} I \right] \aleph^{-2} = -\frac{1}{2} (r e^{(-h\aleph)} - I) \aleph^{-2} = \alpha(x, \xi; h) \text{ olsun.}$$

$$\|\alpha(x, \xi; h)\| = \left\| -\frac{1}{2} (r e^{-h\aleph} - I) \aleph^{-2} \right\|$$

$$\leq \frac{c}{2} \sup_{1 \leq (\lambda + \mu) \leq N} \left| \left(e^{-h(\lambda + \mu)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \frac{1}{\lambda + \mu} \right|$$

$$+ \frac{c}{2} \sup_{(\lambda + \mu) \geq N} \left| e^{-h(\lambda + \mu)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right| \frac{1}{\lambda + \mu}$$

$1 \leq \lambda + \mu \leq \aleph$ olduğunda h istenildiği kadar küçük seçilebilir ki

$$\left| e^{-h(\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right| < \frac{1}{2} \varepsilon \text{ olur.}$$

$\forall \varepsilon > 0$ olsun. $(\lambda + \mu) \geq \aleph$ olacak şekilde öyle büyük N seçebiliriz ki

$$\frac{1}{\lambda + \mu} < \frac{1}{2} \varepsilon \text{ koşulu sağlanır.}$$

Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ bulunabilir ki, $0 < h < \delta$ iken,

$$\|\alpha(x, \xi; h)\|_H < \varepsilon \text{ olur. } h \rightarrow 0 \text{ iken } (h > 0)$$

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \sup_{-\infty < \xi < \infty} \left\| \left[r \frac{\partial g}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-h} - \frac{1}{2} I \right] \aleph^{-2} \right\|_H \rightarrow 0$$

olduğu ispatlanır. Buradan;

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \sup_{-\infty < \xi < \infty} \left\| \left[r \frac{\partial rg}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial rg}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-h} + I \right] \aleph^{-2} \right\|_H \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \sup_{-\infty < \xi < \infty} \left\| \left[r \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-h} + I \right] \aleph^{-2} \right\|_H \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0 \quad (2.28)$$

olduğu ispatlanır.

$f \in D = (Q(x))$ olsun. f elemanının $(Q(x) + \mu I)$ operatörünün tanım kümesine ait olduğu bellidir. $Q(x) + \mu I$ operatörü f fonksiyonuna uyguladığında $(Q(x) + \mu I)f = g$ olsun. Bu durumda $Q(x) + \mu I$ nın tersi olduğundan ;

$$f = \aleph^{-2} g \quad (2.29)$$

olur. (2.28) den

$$\left\| \left[\frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-h} + I \right] f \right\| \leq \left\| \left[\frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-h} + I \right] \aleph^{-2} \right\|_H \|g(x)\|_H$$

$$\leq \varepsilon \|g(x)\|_H$$

elde edilir. Böylece, $x = \xi$ sıçrama noktasında sıçrayışının $-f$ 'e eşit olduğunu yani;

$$G'_\xi(x, x+0; \mu) - G'_\xi(x, x-0; \mu) = -I \quad (2.30)$$

olduğu görülür. $G(x, \xi; \mu)$ operatör fonksiyonunun $x = \xi$ noktasında sıçrayışa sahip olduğunu görmüş olduk.

2.4 Green Fonksiyonunun İkinci Türevi

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial r g}{\partial \xi} - \int_{-\infty}^{\infty} \{r g[Q(\eta) - Q(x)] - r'' g + 2r' g'\} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta \quad (2.31)$$

ifadesini

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial r g}{\partial \xi} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \{r g[Q(\eta) - Q(x)] - r'' g + 2r' g'\} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \{r g[Q(\eta) - Q(x)] - r'' g + 2r' g'\} \left[\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial r g}{\partial \xi} \right] d\eta \end{aligned} \quad (2.32)$$

şeklinde göz önüne alalım.

$$L(x, \xi; \mu) = \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial r g}{\partial \xi}$$

$$l(x, \xi; \mu) = - \int_{-\infty}^{\infty} \{r g[Q(\eta) - Q(x)] - r'' g + 2r' g'\} \frac{\partial r g}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta$$

olmak üzere (2.32) denklemi

$$L(x, \xi; \mu) = l(x, \xi; \mu) - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} L(\eta, \xi; \mu) d\eta$$

halini alır. Bu denklemin ξ 'ye göre türevini alalım;

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{\partial l}{\partial \xi} - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial L}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta$$

bulunur.

$$\frac{\partial rg}{\partial \xi}(x, x+0; \mu) - \frac{\partial rg}{\partial \xi}(x, x-0; \mu) = -I$$

göz önüne alarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \xi} &= \{rg[Q(\xi) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 rg}{\partial \xi^2} d\eta \\ &= l_1(x, \xi; \mu) \end{aligned}$$

bulunur. $l_1 \in X_4^{(-\frac{1}{2})}$ uzayına ait olduğunu göstererek Lemma 4'e göre aşağıdaki denklemi

$X_4^{(-\frac{1}{4})}$ uzayına ait ve çözümün var olduğunu göstermiş olduk.

$$M(x, \xi; \mu) = l_1(x, \xi; \mu) - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} M(\eta, \xi; \mu) d\eta \quad (2.33)$$

$$l_1(x, \xi; \mu) \in X_4^{(-\frac{1}{4})}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} l_1(x, \xi; \mu) &= rg[Q(\xi) - Q(x)] - r''g + 2r'g' \\ &\quad - \int_{|\eta - \xi| \leq 1} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 rg}{\partial \xi^2} d\eta \end{aligned}$$

$$- \int_{|\eta-\xi|>1} \left\{ rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \frac{\partial^2 rg}{a\xi^2} d\eta$$

$$= a_1 + a_2 + a_3$$

$|\eta-\xi|>1$ iken $a_3 = 0$ ve $a_1 \in X_4^{\frac{1}{2}}$ dir.

$\|a_2 Q^{-\frac{1}{2}}(\xi)\|$ yi sınırlandıralım.

$$\begin{aligned} \|a_2 Q^{-\frac{1}{2}}(\xi)\| &= \left\| \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left[\left\{ rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \frac{\partial^2 rg}{a\xi^2} \right] Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) d\eta \right\| \\ &\leq \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \left[\left\{ rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \frac{\partial^2 rg}{a\xi^2} \right] Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\eta \\ &= \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \left\{ rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \left\{ rg'' + r''g - 2r'g' \right\} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\eta \\ &= \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \left\{ rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \left\{ rg'' \right\} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\eta \\ &\quad + \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \left\{ rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \left\{ -2r'g' \right\} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\eta \\ &\quad + \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \left\{ rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \left\{ r''g \right\} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\eta \\ &= K_1 + K_2 + K_3 \end{aligned}$$

$\|K_3\|$ 'ü sınırlandıralım.

$$\begin{aligned}
\|K_3\| &= \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\}rg''Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\eta \\
&= \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\}r \left\{ \frac{1}{2} \kappa e^{-\kappa|\eta-\xi|} - \right\} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\eta \\
&\leq \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\} e^{-|\eta-\xi|(Q(\eta)+\mu I)^{\frac{1}{2}}} \cdot (Q(\eta)+\mu I)^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\eta \\
&\leq \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\} e^{-|\eta-\xi|(Q(\eta)+\mu I)^{\frac{1}{2}}} \cdot \|(Q(\eta)+\mu I)^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi)\| \right\| d\eta
\end{aligned}$$

$|\eta-\xi|\leq 1$ olduğundan dolayı $\left\| Q^{-\frac{1}{2}}(\eta) \cdot Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| \leq c$ koşulunu kullanarak

$$\leq c \int_{|\eta-\xi|\leq 1} \left\| \{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\} e^{-\kappa|\eta-\xi|} \right\| d\eta$$

olur. Bu integralin ve diğer terimlerin sınırlandırılmasıyla $l_1 \in X_4^{-\frac{1}{2}}$ bulunur.

Şimdi (2.33) denklemin $f \in D\{Q(x)\}$ olduğunda çözümün $\frac{\partial L}{\partial \xi} = M(f)$ ($\eta \neq \xi$)

denkleminin sağladığını gösterelim. $f \in D\{Q(x)\}$ olduğunda (2.33) denklemi;

$$M(f) = l_1(f) - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\}M(f)d\eta$$

olur. Bu ifadenin ξ_0 'dan ξ 'ye kadar integralini alalım.

$$\int_{\xi_0}^{\xi} M(x, \xi; \mu)(f) d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi} l_1(x, \xi; \mu)(f) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\} \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi} M(\eta, \xi; \mu)(f) d\xi \right\} d\eta$$

Böylece;

$$\begin{aligned} [L(x, \xi; \mu) - L(x, \xi_0; \mu)] &= [l(x, \xi; \mu) - l(x, \xi_0; \mu)](f) \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} [L(\eta, \xi, \mu) - L(\eta, \xi_0, \mu)] f d\eta \end{aligned} \quad (2.34)$$

bulunur.

$$\int_{\xi_0}^{\xi} l_1(x, \xi; \mu)(f) d\xi = [l(x, \xi; \mu) - l(x, \xi_0; \mu)](f) \quad (2.35)$$

olduğunu gösterirsek (2.34) denkleminin çözümünün tekliğinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_{\xi_0}^{\xi} M(x, \xi; \mu) d\xi = [L(x, \xi; \mu) - L(x, \xi_0; \mu)](f) \quad (2.36)$$

Böylece;

$$M(x, \xi; \mu)(f) = \frac{\partial L}{\partial \xi}(f) \quad (2.37)$$

bulunur.

$$L(x, \xi, \mu) = \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) - \frac{\partial rg}{\partial \xi}(x, \xi; \mu) \quad \text{olduğundan (2.37) 'den ve Lemma 5'den } \eta \neq \xi \text{ de}$$

$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}$ nin varlığı ve $X_4\left(-\frac{1}{2}\right)$ uzayına ait olduğu çıkar.

Şimdi de (2.35) i ispatlayalım;

$$l(x, \xi; \mu) = - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta$$

olur.

(ξ_0, ξ) aralığında keyfi ξ' seçelim. O zaman $Q^{-1}(\xi)Q(\xi')$ de H' 'da sınırlı operatördür.

$\xi > \xi'$, $\xi = \xi' + k + r$ (k tamsayı $0 < r < 1$) olsun.

$|x - \xi| \leq 1$ iken $\|Q(x)Q^{-1}(\xi)\| < c$ olduğunu varsayalım.

$Q^{-1}(\xi)Q(\xi') = Q^{-1}(\xi)Q(\xi - 1)Q^{-1}(\xi - 1)\dots\dots\dots Q^{-1}(\xi' + r)Q(\xi')$ olur.

$Q^{-1}(\xi)Q(\xi')$ nün sınırlı olduğu yukarıdaki özdeşlikten ve koşuldan elde edilir. I yi f 'e uygulayalım.

$$\begin{aligned} I(x, \xi; \mu)(f) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\xi) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu)(f) d\eta \\ &= \int_{|x-\eta| \leq 1} \{rg[Q(\xi) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu)(f) d\eta \\ &\quad + \int_{|x-\eta| > 1} \{rg[Q(\xi) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu)(f) d\eta = b_1 + b_2 \end{aligned}$$

$|x - \eta| > 1$ olduğunda $b_2 = 0$ dır. $b_1(x, \xi; \mu)$ yü 2 halde inceleyelim.

1. $|x - \xi| > 2$ olması halinde;

$|\eta - \xi| \geq |x - \xi| - |x - \eta| > 1$ integral altındaki fonksiyon, kendisi ve ξ 'ye göre türevi sınırlı operatördür.

2. $|x - \xi| \leq 2$ olması halinde

$f = Q^{-1}(\eta)h$ $h \in H$ yazalım. Bu durumda da integral altındaki operatörün kendisinin ve

ξ 'ye göre türevinin sınırlı olduğunu görüyoruz. Böylece (2.35)'in doğruluğu elde edilmiş olur.

2.5 Green Fonksiyonunun Denklemi Sağlaması

$x \neq \xi$ için $G(x, \xi; \mu)$ Green fonksiyonunun için

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = G(x, \xi; \mu)[Q(\xi) + \mu I] \quad (2.38)$$

denklemini sağladığını gösterelim:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial (rg)}{\partial \xi} - \int_{-\infty}^{\infty} [rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'] \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu) d\eta$$

denkleminin ξ 'ye göre türevini alırsak:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 (rg)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial K}{\partial \xi} \quad (2.39)$$

olur. Burada:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu)(f) d\eta$$

$$K = \int_{-\infty}^{\xi} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu)(f) d\eta$$

$$+ \int_{\xi}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta, \xi; \mu)(f) d\eta$$

(2.30)'u kullanarak ξ 'ye göre türevi

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \xi} = & -\{rg(Q(\xi) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\} + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(\eta, \xi; \mu)(f) d\eta \end{aligned}$$

olur. Bu türev (2.39) da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} g + 2 \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \xi} - r \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} = & \{rg[Q(\xi) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(\eta, \xi; \mu) d\eta \end{aligned} \quad (2.40)$$

bulunur.

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + (Q(x) + \mu I)g = 0 \quad \xi \neq x \quad \text{olduğundan} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} = (Q(x) + \mu I)g$$

olur. (2.40)'ta yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} - r''g + 2r'g' - rg(Q(x) + \mu I) = & \{rg[Q(\xi) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(\eta, \xi, \mu) d\eta \end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = rg(Q(\xi) + \mu I) - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(\eta, \xi, \mu) d\eta \quad (2.41)$$

$f \in D$ için;

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(f) = (Q(\xi) + \mu I)(f) - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(\eta, \xi, \mu)(f) d\eta \quad (2.42)$$

elde edilir. $[Q(\xi) + \mu I]f = \alpha$ olsun. Buna göre (2.42)'yi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(f) &= [Q(\xi) + \mu I]^{-1} \alpha = rg(x, \xi, \mu) \alpha \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(f) [Q(\xi) + \mu I]^{-1} \alpha \, d\eta \end{aligned} \quad (2.43)$$

şeklinde yazıp (2.5) denklemi ile karşılaştırsak ve (2.5) denkleminin tek çözüme sahip olduğunu göz önüne alırsak,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(f) = [Q(\xi) + \mu I]^{-1} \alpha = G(x, \xi, \mu) \alpha$$

yı elde ederiz.

$$(Q(\xi) + \mu I)^{-1} \alpha = f \quad \text{ve} \quad \alpha = (Q(\xi) + \mu I) f$$

olduğu son ifadede göz önüne alırsak

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(f) = G(x, \xi, \mu) [Q(\xi) + \mu I] f \quad (2.44)$$

olur. Burada her bir $\xi > 0$ için f elemanlar kümesi H' da yoğun olduğundan (2.44) den

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(\eta, \xi, \mu) G(x, \xi, \mu) [Q(\xi) + \mu I] = 0 \quad (x \neq \xi) \quad (2.45)$$

bulunur.

2.6 Green Fonksiyonunun Simetrikliği

Green fonksiyonu $G(x, \xi; \mu)$ nün simetrikliđini, yani

$$G^*(x, \xi; \mu) = G(\xi, x; \mu)$$

olduğunu gösterelim. (2.45) denkleminin her iki yanının H 'da iç çarpıma göre eşleniğini alırsak

$$-\frac{\partial^2 G^*(x, \xi; \mu)}{\partial \xi^2} + [Q(\xi) + \mu I]G^*(x, \xi; \mu) = 0$$

olur.

$$-\frac{\partial^2 G^*(x, \xi; \mu)}{\partial \xi^2} \in X_4^{-\frac{1}{2}} \quad \text{yani}$$

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^2 G^*(x, \xi; \mu)}{\partial \xi^2} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\xi < \infty \quad (2.46)$$

(Lemma 4) olduğunu göstermiştir. A operatörünün normu $\|A\|$, A 'nın eşleniğinin normuna eşit ($\|A^*\| = \|A\|$) olduğundan (2.46) dan

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \frac{\partial^2 G^*(x, \xi; \mu)}{\partial \xi^2}(\xi) \right\| d\xi < \infty \quad (2.47)$$

olur. (2.45), (2.46) ve (2.47) den [Levitan,1968] da olduğu gibi işlemler yapılırsa;

$$G^*(x, \xi; \mu) = G(\xi, x; \mu) \quad (2.48)$$

olduğu çıkar.

3. BÜTÜN EKSENDE TANIMLANMIŞ OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN ÖZDEĞERLER SAYISININ ASİMPTOTİK İFADESİ

3.1 L Operatörünün Özdeğerleri Sayısının Asimptotik İfadesi

Teorem 2'ye göre $\mu > 0$ ın yeterince büyük değerlerinde $G(x, \xi; \mu)$ Green fonksiyonu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(x, \xi; \mu)\|_2^2 dx d\xi < \infty$$

koşulunu sağlar. Yani $(L + \mu I)$ operatörünün tersi Hilbert Schmidt tipli operatördür. L 'nin öz değerlerini,

$$1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlarını ise,

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$$

ile gösterelim. $\lambda > 1$ herhangi reel sayı olsun $N(\lambda)$ ile λ sayısını aşmayan λ_n ($n = 1, 2, \dots$)

özdeğerler sayısını gösterelim.

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1,$$

Biz bu bölümde $Q(x)$ in öz değerleri $\alpha_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) üzerine, ek koşullar altında $\lambda \rightarrow \infty$

iken $N(\lambda)$ nin asimptotik ifadesini bulacağız. $G(x, \xi; \mu)$ L operatörünün Green

fonksiyonu olduğundan dolayı

$$\psi_n(x) = (\lambda_n + \mu) \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; \mu) \psi_n(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır.

P operatörü $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde bützen olduğundan $\mu \rightarrow \infty$ iken

$$G(x, \xi; \mu) = r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)[1 + o(1)] \quad (3.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $o(1)$ $\mu \rightarrow \infty$ iken (x, ξ) değişkenlerine göre normu sıfıra düzgün yakınsayan operatör değerli bir fonksiyondur. (3.1) , (3.2)' de göz önünde

bulundurulur ise

$$\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n + \mu} \sim \int_{-\infty}^{\infty} r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)\psi_n(\xi)d\xi \quad (3.3)$$

olur. Buradan (Kosyuchenko A.G. ve Levitan B.M.) çalışmasına göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \mu} \sim \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha_j(x) + \mu)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4)$$

olarak bulunur. Burada (Titchmarsh, 1958, b. XVII)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda + \mu)^3} \quad (3.5)$$

olduğu görülür..(3.5)'i (3.4) de göz önüne alırsak;

$$\int_0^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda + \mu)^3} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha_j(x) + \mu)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{olur.}$$

Bu eşitlikten $N(\lambda)$ ın asimptotik ifadesini bulmak için Titchmarsh'ın Tauber tipli

teoremini kullanacağız.[Titchmarsh, 1958, b. XXII] Bunun için $Q(x)$ operatör fonksiyonunun $\alpha_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) öz değerleri üzerine aşağıdaki koşulları eklememiz gerekir.

(Kostyuchenko ve Levitan, 1967)

$$\frac{c_1}{t^{3/2}} \sum_i \int_{\alpha_i(x) \leq t} dt \leq \sum_j \int_{\alpha_j(x) \geq t} dt \leq \frac{c_2}{t^{3/2}} \sum_i \int_{\alpha_j(x) \leq t} dt$$

olacak şekilde c_1, c_2 sabitlerinin olduğunu varsayalım. Bu taktirde sözü edilen Tauber tipli teoreme göre $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_j \int_{\alpha_j(x) < \lambda} \{\lambda - \alpha_j(x)\}^{\frac{1}{2}} dx$$

asimptotik formülü elde edilir.



4. SONUÇLAR

$H_1 = L_2(-\infty, \infty, H)$, $(-\infty, \infty)$ 'da tanımlı ve değerleri ayrılabilir H Hilbert uzayına ait Bochner anlamda ölçülebilir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

özellğine sahip fonksiyonlar uzayı olsun. H_1 'e ait $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımını

$$(f, g)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x), g(x))_H dx$$

formülleri ile tanımlarsak H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur. Bu tez çalışmasında H_1 'de

$$-y'' + Q(x)y, \quad -\infty < x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonu ve bu operatörün özdeğerler sayısının asimptotik ifadesi bulunmuştur.

Burada $Q(x)$, x 'in $(-\infty, \infty)$ 'dan alınmış herbir değerinde H 'da dönüşüm yapan kendine eş alttan sınırlı ve tersi kompakt operatör olmanın yanısıra Titchmarsh-Levitan koşullarını sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

- Aslanov, G. I. (1985), 2n. mertebeden operatör-diferansiyel denklemlerin öz değerinin dağılımı üzerine, DAN, Azerb. SSK, No 6, 7-11, (R) .
- Balakrishnan, A.V., (1976), Applied Functional Analysis, Springer-Verlay.
- Bayramoğlu, M., (1971), Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimptotik davranışı. "Fonksiyonel analiz ve uygulamaları" Sbornik, Bakü: Bilim, 144-166, (R) .
- Bayramoğlu, M., (1997), On Asymptotics Of The Weighted Trace Of Strum-Liouville Operator Equation On The Half Axis With Boundary Condition Which Contains Operator , Spectral Theory Of The Operators And Its Applications, XI ISSUE, Baku, 14-44, (R).
- Bayramoğlu, M., ve Öztürk Uslu, S., (2000), Sonlu Aralıkta Strum-Liouville Operator Denkleminin Spektrumunun İncelenmesi, YTÜD, 2000/4, 134-147.
- Boymatov, K.Kh., (1973), Operator Diferansiyel Operator Spektrumunun Asimptotiği , Usp . matem.nauk, V.28, 4, 207-208, (R).
- Kato, T., (1980), Pertubation Theory For Linear Operators, Berlin-Heidelberg-New York ; Springer Verlag.
- Kostyuchenko, A.G. and Levitan, B.M., (1967), Asymptotic Behaviour Of The Eigenvalue Of The Strum-Liouville Operator Problem , Funct. Analysis Appl.1, 75-93.
- Levitan, B.M., (1968), Operatör Katsayılı Strum-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun İncelenmesi, Mat.Sb.76(118), No: 2, 239-270, (R).
- Mikusinski, J., and Debnath, C.J., (1990), Introduction To Hilbert Space With Applications , Academic Press Inc., New York.
- Otelbayev, M., (1990), Strum-Liouville Operatörünün Spektrumunun Davranışı, Alma Ata: Bilim, (R).
- Smirnov, V.I., (1964), A Course Of Higher Mathematics , Vol.5, New York: Pergamon Press.
- Solomyak, M.Z., (1986), Asymptotics Of The Spectrum Of The Schrödinger Operator With Non Regular Homogenous Potential , Math.USSR, Sbornik, Vol.55, No:1, 19-37.
- Titchmarsh, E.C., (1958), "Eigenfunctions Expansions Associated With Second Order Differential Equations " , 2nd ed., Vol.I., Oxford Univ.Press, London.
- Yosida, K., (1980), Functional Analysis, Berlin-Göttingen -Heidelberg: Springer-Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 20.04.1978

Doğum yeri İstanbul

Lise 1992-1995 Özel Ayazağa Işık Lisesi

Lisans 1995-1999 Yıldız Teknik Üniversitesi
Kimya-Metalurji Fakültesi
Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2000-2002 Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilimdalı,
Matematik Mühendisliği Programı

Çalıştığı kurumlar

2002-Devam ediyor Y.T.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü
Araştırma Görevlisi

Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
DOKÜMANTASYON BÖLÜMÜ