

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ARİTMETİĞİN TEMEL TEOREMİ
ve
TARİHSEL GELİŞİMİ**

Yavuz ARSLAN

**FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**TE. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Tez Danışmanı : Doç. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

Prof. Dr. Mustafa Sivri

Prof. Dr. Mehmet AHLATGİOĞLU

Doç. Dr. Göksel AĞARGÜN

İSTANBUL, 2002

128660

[Signature]

[Signature]

[Signature]

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. EUCLİD ve ATT	2
3. al- FÂRİSÎ ve ATT	5
4. PRESTET' in SONUÇLARI	9
5. EULER' in SONUÇLARI	11
6. LEGENDRE	13
7. GAUSS	14
8. ATT' in FARKLI İSPATLARI	15
KAYNAKLAR	19
ÖZGEÇMİŞ	21

SİMGELİSTESİ

$a \mid b$ a bölür b

$a \nmid b$ a bölmez b



KISALTMA LİSTESİ

- ATT Aritmetiğin Temel Teoremi
- WOP Well-Ordering Principle
- DCC The Decending Chain Condition



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1	1-8. Önergelerin doğrudan veya dolaylı olarak 9. Önermede kullanıldıklarını gösteren diyagram.....	8
-----------	--	---



ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamamda bana yardımcı olan Öğretim Görevlisi Doç. Dr. Göksel Ağargün' e ve maddi desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.



ÖZET

Bu çalışmada, doğal sayılar için tek türlü çarpanlara ayrılma özelliği hakkında Euclid' ten Gauss' a kadar olan bir dönemdeki başlıca çalışmalar incelenmiştir. Aritmetiğin Temel Teoreminin bir geniş kapsamlı araştırması verilmiştir.

Bu araştırmada Euclid, al-Fārisī, Prestet, Euler, Legendre ve Gauss gibi matematikçilerin çalışmalarından bahsedilmiştir. Aritmetiğin Temel Teoreminin farklı ispatları incelenmiş ve sınıflandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Euclid, al-Fārisī, Euler, Gauss, ATT.



ABSTRACT

In this work we investigate main studies of the unique factorization property for natural numbers during the period from Euclid to Gauss. We give a comprehensive survey of the Fundamental Theorem of Arithmetic.

In this survey, we can mention Euclid, al-Fārisī, Prestet, Euler, Legendre, and Gauss. We study different proofs of the Fundamental Theorem of Arithmetic and classify them.

Keywords: Euclid, al-Fārisī, Euler, Gauss, FTA



1. GİRİŞ

Modern değişmeli halkalar teorisinde önemli rol oynayan tek türlü çarpanlara ayırma kavramı, köken olarak Yunan aritmetiğine dayanmaktadır. Tek türlü çarpanlara ayırmanın iki temel kısmı vardır. Bunlar varlık ve tekliktir. Varlık, bir elemanın sonlu sayıda indirgenemez elemanlarının çarpımı şeklinde yazılabileceğini, teklik ise bu gösterilişin tek türlü olacağını ifade eder. İlk olarak doğal sayıların bir özelliği olarak ortaya çıkan tek türlü çarpanlara ayırma kavramı, Aritmetiğin Temel Teoremi (ATT) olarak adlandırılır.

ATT şu şekilde ifade edilir: 1 den büyük bütün doğal sayılar, çarpanların sırasını düşünmeksizin tek türlü asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir. ATT belirttiğimiz şekilde Euclid' in Elements kitabında yer almasa da, Euclid ATT tarihinde önemli bir yere sahiptir. Özellikle Euclid' in Elements kitabındaki VII. ve IX. ciltler ATT ile ilgili önemli sonuçlar içerir.

al-Fārisī, “ Tadhkirat al-Ahbāb fī bayan al-tahābb ” kitabında asal çarpanlara ayırmanın varlığını ispat etmiş, tekliği ile alakalı bütün delilleri sunmuştur. Önerme 9, verilen bir sayının asal çarpanları yardımı ile bütün bölenlerinin bulunabileceğini göstermiştir. Buna benzer bir yaklaşımı Prestet' in “ Nouveaux Elemens de Mathematiques ” (Goldstein ,1992) kitabında da görebiliriz.

Prestet' ten sonra Euler den (1770) söz edebiliriz. Euler “ Vollständige Anleitung zur Algebra ” kitabında ATT' nin varlık kısmını kabul etmiş ve al-Fārisī ve Prestet' in yaklaşımına benzer bir yaklaşımla bütün bölenlerinin bulunabileceğini göstermiştir. Daha sonra, Legendre (1798) “ Theorie des nombres ” kitabında ATT' nin varlık kısmını ispatlamış, teklik kısmını kabul etmiştir. Fakat açık bir şekilde ATT' yi ifade etmemiştir. ATT' nin ilk açık ifadesi ve ispatı Gauss' un “ Disquisitiones Arithmeticae ” kitabında yer almıştır. Gauss' dan sonrada bir çok matematikçi ATT' nin farklı ispatlarını yapmışlardır.

2. EUCLID ve ATT

Euclid' in Elements kitabı 13 cilttir. VII, VIII ve IX. ciltler sayılar teorisi deki temel sonuçları içeren aritmetik kitaplardır. Bu kitaplarda Euclid, asal, asal olmayan, aralarında asal ve mükemmel sayıların tanımlarını vermiş ve birçok önemli temel sonuçları ispatlamıştır. ATT, Elements' de açık olarak yer almaz ancak ATT ile yakından ilgili olan iki teorem VII.30 ve VII.31 Elements' de bulunur. Ayrıca Önerme IX.14 bir çeşit teklik teoremidir. Aslında ATT; VII.30 ve VII.31 önermelerinden elde edilir. Aşağıda bu önemelerin ifadelerini verelim.

Önerme VII.30: Eğer iki sayının çarpımıyla elde edilen bir sayı, bir asal sayı tarafından bölünebiliyorsa, çarpılan sayılardan biri de aynı asal tarafından bölünebilir. (yani, c asal sayısı $a \cdot b$ çarpımını bölüyorsa, a veya b sayısından en az birini de böler.

Önerme VII.31: Her birleşik sayı bir asal sayı tarafından bölünür.

VII. 31 sayesinde ATT' nin varlık kısmı (1 den büyük her doğal sayı asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir) ve VII.30 sayesinde ATT' nin tekliği (çarpanların sırasını düşünmeksizin bu yazılışın tek türlü olduğu) kolaylıkla gösterilebilir. Bugün birçok matematikçi ATT' nin ispatı için bu önermeleri kullanmaktadır. Tekliği için, $p_1 \cdot p_n = q_1 \cdot q_m$ nin iki farklı asal çarpanlara ayrılış olduğunu varsayalım. VII.30 sayesinde $p_1 | q_1$ olduğu görülür. Dolayısıyla buradan $p_1 = q_1$ elde edilir. Bu şekilde p ve q' lerin aynı ve $n=m$ olduğu gösterilebilir. Fakat Euclid VII. cildinde bu önermelerden sonra ATT' yi ifade etmemiştir.

XI. ciltte yer alan Önerme 14 “ Eğer bir sayı asal sayılar tarafından bölünen en küçük sayı ise, başka hiçbir asal sayı tarafından bölünemez. ” olarak ifade edilir. Şimdi bunu gösterelim;

A sayısı, B, C, D asal sayıları tarafından bölünebilen en küçük sayı olsun. O zaman A sayısı, B, C, D asal sayılarından farklı bir asal sayıya bölünemez.

Mümkünse, A sayısını, B, C, D asal sayıları ile aynı olmayan bir E asal sayısına bölelim.

E asal sayısı A' yı F' ye göre bölsün; bu yüzden E ile F' nin çarpımı A' yı verir.

Eğer iki sayının çarpımı herhangi bir sayıyı verirse ve herhangi bir asal sayı bu sayıyı bölerse, aynı zamanda orijinal sayılardan birini de böler [VII. 30]; bu yüzden B, C, D asal sayıları, E ve F sayılarından birini böler.

E sayısı B, C, D sayılarından farklı ve bir asal sayı olduğundan E, bu sayılar tarafından bölünemez.

Bundan dolayı A' dan küçük olan F sayısı, B, C, D asal sayıları tarafından bölünecektir. Bu imkansızdır. Çünkü bu, A' nın, B, C, D asal sayıları tarafından bölünebilen en küçük sayı olması durumu ile çelişir.

Bu yüzden A' yı B, C, D asal sayılarından başka hiçbir asal sayı bölemez.

ATT ile Önerme 14 arasında birçok benzerlik vardır. Önerme 14 bir çeşit teklik teoremidir. ATT' nin teklik koşulunun iyi bir kısmı gösterimidir. Ancak Önerme 14 in kare çarpanı olan sayıları kapsamadığı açıktır. Euclid önermesine şu ifadeyle başlar; A sayısı, B, C, D asal sayılarına bölünen en küçük sayı olsun. Eğer B, C, D sayılarının birbirinden farklı olmama ihtimali varsa, A bu sayıların çarpımlarına eşit olmayıp bu sayıların en küçük ortak katı olacaktır. Eğer takip eden $A = BCD$ ifadesindeki B, C ve D sayılarından en az ikisinin eşit ise, bu durum Euclid' nin bir sonraki ispatı ile çelişir. Eğer B, C, D asal sayıları, $B = C \neq D$ şeklindeyse, o zaman böldükleri en küçük sayı B^2D den ziyade BD dir. Bu yüzden kare bölenli sayıları bu yapıya dahil edemeyiz. Bu yüzden bazı yazarlar Önerme 14' ü değerlendirmiş ve haklı bir şekilde ATT' ye teknik olarak denk olmadığını belirtmişlerdir (Hendy, 1975 ; Mullin, 1965).

Bazı tarihçiler (Hendy, 1975 ; Mullin, 1965) IX.14' deki yorumlarında Euclid' in önermesinde, A' nın sadece B, C ve D asallarının çarpımı gibi sınırlı sayıda asalların kullanılması durumunda ispatlandığını iddia etmişlerdir. Yunan aritmetiği az gelişmiş cebir notasyonu engeline takılmıştı ve bu durum Euclid' de etkilemiştir. Euclid bu sorunu, belirsiz sayılardaki mevzularda, belirli sayıları dikkate alarak çözmüştür.

Özellikle Euclid, asal sayıların sayısının sonsuz olduğunu çok iyi biliyordu. Bunu için IX.20' de şöyle ifade eder: “ Asal sayılar, belirlenmiş asal sayıların sayısından daha fazladır. ” Bu önermenin ispatında belirlenmiş olan “ A, B, C sayılarını alır ve A, B, C sayılardan daha fazla asal sayı olduğunu söyler. ” IX.14' ün ispatının aynı çeşit bir varsayımı vardır: A sayısı B, C, D' ye bölünen en küçük sayı olsun... Bahsettiğimiz gibi, belirsiz bir sayının durumu için aldığımız üç sayı bir hata olarak düşünülmemelidir.

Önerme 14 asal çarpanlarına ayrışımın varlığını belirtmeden asal sayı koleksiyonuyla başladığı, fakat ATT' nin tam sayılarla başladığını belirtmeliyiz. Buradan görülür ki; bu iki teoremin başlangıç noktaları farklıdır.

Şimdi Euclid' in ATT' yi bilip bilmediği sorusuna karar verelim. Bu konuyla ilgili iki görüş vardır. Birincisi, Euclid' in ATT' yi bildiği, fakat Elements kitabında bunu belirtmediği görüşüdür. ATT' yi ispatlamak için bazı yararlı önermeler vermiştir, fakat ATT' yi önemli

görmediği için Elements kitabında bu konu üzerinde fazla durmamıştır. Ama eğer isteseydi, VII. cildindeki Önerme 30 ve 31 de bu konuyu verebilirdi. İkinci ve daha çok savunucusu olan görüş ise Euckid' in hiçbir şekilde ATT' yi bilmediğidir. Başlıca sonuçların ispatını amaçlayan Elements, bilimsel bir incelemeden çok bir metin kitabıdır. Eğer Euclid ATT' yi biliyorsa, neden kitabında belirtmedi, onun için temel bir sonuç değilse bile, ATT' yi kitabında belirtmeliydi. Elements kitabında temel olmayan ve diğer önermelerde de kullanılmayan bazı önermeler olduğunu görüyoruz (IX.14 gibi). Benzer bir şekilde ATT' yi büyük bir sonuç olarak ve diğer önermelerin kanıtlanmasına yardımcı olmayacak başka bir önerme olarak verebilirdi.

Bugün ders kitapları ATT' yi temel teorem olarak ele alır. Bu kitaplar önce asal sayıların tanımı verir ve daha sonra asal sayıların tekliğini ispatlar. Daha sonra ise aralarında asal sayılar ve en büyük ortak bölen kavramını verirler. Bu yaklaşımın Gauss' la başladığı söylenebilir. Gauss en büyük ortak böleni bulmak için bölme algoritmasını kullanmış ve buradan aralarında asal sayıların işlemsel tarifine ulaşmıştır. Aralarında asal sayıları bulduktan sonra asal sayılara ait sonuçlara ulaşmıştır. Euclid in teorisinde ATT öneminin çok büyük bir kısmını kaybetmiştir. Çünkü Önerme 14 temel olmanın çok ötesinde, Euclid' in aritmetik teorisinde en sonda yer alır.

3. al-FĀRISĪ ve ATT

Kamāl al-Dīn al-Fārisī büyük bir Fars matematikçisi, fizikçisi ve astronomuydu. Gauss' dan önce ATT 'ye ait en geniş kapsamlı çalışma, muhtemelen al-Fārisī' ye aitti. al-Fārisī' nin bu çalışması “ Tadhkirat al Ahbāb fī bayān al-tahābb ” adlı kitabında yer alır. Bu kitabın başlangıcında bir birleşik sayının sonlu sayıda asal sayının çarpımı şeklinde yazılabileceğinin ilk ispatının da yer aldığı 9 önerme bulunur. Esas uğraşı amicable (arkadaş) sayılardır. Ve amacı ise İbn-i Qurra' nın “ Eğer $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ ve $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ asal ve $p, q > 2$ ise $2^n \cdot p \cdot q$ ve $2^n \cdot r$ amicable (arkadaş) dır. ” teoremini farklı bir yöntemle ispatlamaktı (Hogendijk, 1985). İbn-i Qurra tüm sayıların ayrışması üzerine bir çalışma yapmıştır. al-Fārisī sayılar teorisinde yeni fikirlerin gelişmesine öncülük etmiştir. Ayrıca tam sayıların ayrışımını, İbn-i Qurra' dan daha derinlemesine incelemiştir. al-Fārisī çalışması için önce tam sayıların asal çarpanlarına ayrılabilceğini göstermiş ve bunu kullanarak bir sayının bölenlerini bulmuştur.

(Ağargün ve Fletcher, 1994) Makalelerinde ilk dokuz önermenin ingilizce tercümesini ve al-Fārisī' nin metodunun bir açıklamasını vermişlerdir. Bu dokuz önermenin asıl amacı verilen bir sayının bölenlerini bularak, amicable (arkadaş) sayılar üzerine çalışma için bir hazırlık yapmaktır. Asal çarpanlara ayırmada ilk adımı Euclid' in attığı ve al-Fārisī' nin de ilk önermesinde sonlu asal çarpanlara ayırmanın ispatını yaparak son noktayı koyduğu söylenebilir.

Önerme 1: Her birleşik sayı, sonlu sayıda asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilir. $a > 1$, bir birleşik sayı olsun. Euclid VII.31 önermesine göre a ' nın bir b asal böleni vardır. Dolayısıyla $1 < c < a$,

$$a = bc$$

dir. Eğer c asal ise önerme ispatlanmıştır, aksi takdirde c bir d asal bölenine sahiptir. Ve $1 < e < c$ için,

$$c = de$$

dir. Eğer e asal ise önerme ispatlanmıştır. Çünkü,

$$a = bde$$

dir. Şayet asal değilse biz işlemlerimize bu şekilde devam ederiz. Sonlu bir sayı, sonsuz bir çarpım şeklinde yazılamayacağından bu işlem bir yerde sonuçlanacaktır. O halde bir k asal sayısı için,

$$a = bd \dots k$$

dir. Bu önerme asal çarpanlarına ayırmanın varlık kısmı için ortaya konmuş ilk ispattır. al-Fārisī den sonra Prestet asal çarpanlarına ayırmanın varlık kısmını ifade etmemiş, fakat verilen bir tamsayının tüm bölenlerini bulmak için kullanmıştır. Euler ise ifade etmiş ve kullanmıştır. Sonraları ise Legendre belirtmiş ve ispatlamıştır.

Daha sonra al-Fārisī 2-5 önermelerini vermiştir.

Önerme 2: Verilen a, b, c sayıları için ,birincinin üçüncüye oranı, birincinin ikinciye oranı ile ikincinin üçüncüye oranının birleşimidir.

Önerme 3: 1 in herhangi bir bileşik sayıya oranı, 1 in bu bileşik sayının her bir asal çarpanına oranlarının birleşimidir.

Önerme 4: Aynı çarpıma sahip, tüm birleşik sayılar birbirlerine eşittirler.

Önerme 5: İki farkı birleşik sayı, aynı çarpıma sahip olamaz.

al-Fārisī 5. önermeden sonra bir tam sayının tüm çarpanlarını bulmaya başlamıştır. Sayının kendisini bölen olarak almamıştır. Burada temel başlangıç (Prestet ve Euler de olduğu gibi) asal çarpanlara ayrııştır.

Önerme 6: Asal çarpanları $b, c, d, e, \dots, k'$ dan oluşan bileşik bir a sayısının bölenleri $bc, bd, \dots$ gibi ikili çarpımlar; $bcd, bde, \dots$ gibi üçlü çarpımlar ve böyle devam ederek elde edilen çarpımlardır.

Daha sonra al-Farisi 7.önermeyi ispatlamıştır. Sonra bu önermeyi 8. Önermede kullanmıştır.

Önerme 7: Eğer $a \nmid b$ ise $n = 3, 4, \dots$ için $a^2 \nmid ba$ ve $a^n \nmid ba$, $a^3 \nmid ba^2$, $a^{n+1} \nmid ba^2$, $a^4 \nmid ba^3$, $a^{n+2} \nmid ba^3 \dots$ ve benzer şekilde.

Önerme 8: Birleşik bir a sayısı asal çarpanlarına $a = bcd \dots k$ şeklinde ayrılmış olsun. Çarpanlarında biri mesela b , a' da tekrar etmiyor ise $b^2 \nmid a$ ve $n = 3, 4, \dots$ için $b^n \nmid a$ dır.

Eğer b bir kez tekrar ediyor ise $b^2 \mid a$ fakat $b^n \nmid a$ dır. Ve eğer b sadece iki kez tekrar ediyorsa ise $b^2 \mid a$, $b^3 \mid a$ fakat $b^{n+1} \nmid a$ dır.

Bir birleşik bir sayının tüm bölenlerini bulabilmek için al-Farisi 9. Önermeyi ispatlamıştır. Bu önermede daha önce geçen bütün önermelerin dolaylı veya doğrudan kullanıldığını görüyoruz. Fakat 9. Önerme takipçilerinden çok daha önce orta konmuştur. 9. Önerme asal olmayan bir sayının tüm bölenlerini bulan ilk önerme olarak bilinir.

Önerme 9: Birleşik bir a sayısı $a = bcd...kl$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılmışsa a' 'nin aşağıdaki sayılar dışında böleni yoktur: $b, c, d, ..., k, l$, bunların ikişerli çarpımları; $bc, bd, ...,$ üçerli çarpımları; $bcd, bch, ...,$ gibi, ..., bir çarpan hariç diğerlerinin hepsinin çarpımı; $cdh...kl$, $bdh...kl$, $bcdh...k$.

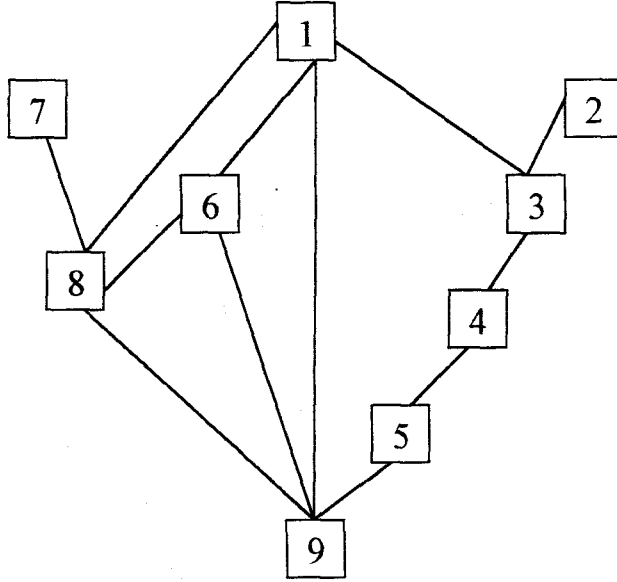
$1, b, c, d, ..., k$ ve l 'nin a' 'nin bir böleni olduğu açıktır. Diğerlerinin de a' 'nin böleni olduğu 6. Önermenin bir sonucudur. Şimdi z , a' 'nin başka bir böleni olsun. z ya asaldır ya da asal değildir. Eğer z asal ise a' 'yı $b(cd...l)$ şeklinde yazalım. Buradan $z \mid b(cd...l)$ için Euclid VII.30' a göre $z \mid cdh...l$ olur. Aynı şekilde $z \mid c(dhl...)$ ve $z \mid dh...l$ olur. Bu şekilde devam edilirse, $z \mid kl$ elde edilir. Dolayısıyla $z \mid k$ veya $z \mid l$ dir. Buradan görülüyor ki, $z = k$ veya $z = l$ dir. Bu bir çelişkidir. Şimdi z' 'nin asal olmayan bir sayı olduğunu ve daha önceki bölenlerden farklı olduğunu varsayalım. 5. Önermenin bir sonucu olarak, z' 'nin asal çarpanları arasında, a' 'nin asal çarpanlarından farklı bir çarpan olduğu söylenebilir. Eğer böyle bir çarpan yoksa, z' 'nin, z ve a' 'da aynı sayıda tekrar etmeyen bir asal çarpanının olduğu söylenebilir. Bu durumda üç ihtimal söz konusudur. (i) Eğer böyle bir asal çarpan yoksa, z' 'nin a' 'nin asal çarpanlarından farklı olan bir asal çarpanı v ardır. (ii) z' 'nin asal çarpanlarından biri z' 'de, a 'dakinden daha çok tekrar etmiştir. (iii) z' 'nin bir asal çarpanı a' 'da daha çok tekrar etmiştir.

Eğer birinci durum geçerli ise yani h , a' 'nin asal çarpanlarından farklı bir asal sayı ise, z' 'nin asal sayı olduğu varsayılan önceki durumdan bu bir çelişkidir.

Eğer ikinci durum geçerli ise, z' 'nin bir asal çarpanı p , z' 'de n kez, fakat a' 'da z' 'den daha az tekrar etmişse, $p^{n+1} \mid z$ ve $p^{n+1} \mid a$ olur. Fakat bu 8. Önermeden imkansızdır.

Eğer üçüncü durum geçerli ise yani z' 'nin çarpanları, a' 'nin çarpanlarından daha fazla tekrar etmemişse z , a' 'nin yukarıda ifade edilen bir çarpanı olur. Bu bir çelişkidir.

al-Fārisī' nin 1-9. önermeleri için aşağıdaki diyagram verilebilir. Bu diyagram 1-8. önermelerin doğrudan veya dolaylı olarak 9. Önerme de kullanıldıklarını gösterir.



Şekil 3.1 1-8. önermelerin doğrudan veya dolaylı olarak 9. önermede kullanıldıklarını gösteren diyagram

al-Fārisī'nin ATT' çin önemli adımlar attığını görüyoruz. Kendisi ATT' nin varlık kısmını belirtmiş ve ispatlamıştır. Fakat teklik kısmının önemli olmadığı düşüncesiyle, ne belirtmiş ne de ispatlama ihtiyacı duymuştur. Bu tabi ki tekliği bilmediğini göstermez. İsteseydi tekliği de ispatlayabilirdi. al-Fārisī'nin tekliği çok iyi bildiği 9. Önermenin ispatından kolayca görülebilir. Asal olmayan bir sayının tüm asal çarpanlarını bulmak için 9. Önermeyi kullanmıştır. Ve İbn-i Qurra' nın teoremine yeni bir ispat olarak sunmuştur. Aslındada tekliğin ispatı için gerekli olan her şeyi sunmuştur. Bunun için 9. Önerme ATT' nin teklik kısmına denk sayılabilir.

4. PRESTET' in SONUÇLARI

Bu kısımda Sean Prestet' in 1689'da yayınlanan Nouveaux Elemens de Mathematiques (Goldstein, 1992) deki bazı sonuçları sunacağız. Bu sonuçlar modern zamanlardan önce asal çarpanlara ayırmanın ilgi çekici bir konu olarak görülmediğini ve sadece bölenleri bulmak için bir araç olarak kullanıldığını göstermektedir.

Prestet ATT' nin ne varlığını ne de tekliğini belirtmiştir. Euclid' den etkilenecek bölenlerle ilgilenmiştir. al-Fārisī ve Euler gibi, bir sayının tüm bölenlerini bulmak için temel sonuçları sunmuştur. Özellikle Sonuç IX önemli bir yere sahiptir. Bu Prestet' in ATT' yi bildiği kanısını uyandırmaktadır. Kendisinin ATT' yi ispatlayabileceğini fakat ilgilenmediğini düşünüyoruz.

Kitabının ilk cildinin 6. Bölümünde şu teorem yer alır.

Teorem: Eğer b ve c aralarında asal iki sayı ise, bu sayıların bir çarpımı olan bc , bu sayılarla kalansız bölünen en küçük sayıdır.

Bu teoremin bir sonucunu Prestet aşağıda vermiştir.

Sonuç III: d , b ve c ' nin çarpımı bc ' yi bölen ve c ile de aralarında asal olan bir sayı olsun.

O zaman d , b ' nin bir bölenidir.

Gelecek amaç bir sayının bölenlerini asal çarpanlarının bir çarpımı olarak belirlemektir.

Sonuç IV: a ve b birbirinden farklı iki asal sayı ise, ab ' nin tüm bölenleri 1 , a , b veya ab ' dir.

Prestet Sonuç V ve Sonuç VI da farklı üç, dört, beş ve benzer şekilde sonlu asal sayının çarpımı için aynı yöntemi kullanmaya devam etmiştir.

Aşağıdaki Sonuçta bazı asal sayıların kuvvetleri üzerinde çalışmıştır.

Sonuç VIII: a asal sayı ise, aa ' nın tüm bölenleri 1 , a , aa ' dır. Ve a^3 ' ün tüm bölenleri 1 , a , a^2 , a^3 ' dür. Ve bu şekilde sonsuza kadar devam edebilir.

Son olarak aşağıdaki Sonucu vermiştir.

Sonuç IX: a ve b asal sayılarsa aab 'nin tüm çarpanları a , a , b 'den biri veya 1 , a , aa 'dan biri veya bunlardan herhangi birisinin b ile çarpımı; yani 1 , a , aa , $1b$, ab , aab 'den biridir. Çünkü basit a , a , b asal sayılarının tüm çarpımları aa ve ab 'dir.

Prestet çalışmasında ATT'yi ifade etmemiştir. Çünkü onun amacı verilen bir sayının asal çarpanlarıyla tüm bölenlerini bulabilmektir. Buna rağmen Prestet'in sonuçları ATT'ye çok yakındır. Özellikle Sonuç IX ATT'nin teklik kısmına denk sayılabilir.



5. EULER' in SONUÇLARI

Euler Vollständige Anleitung zur Algebra (Euler, 1770) kitabında ATT' nin varlık kısmını ispatsız fakat düzenli bir şekilde vermiştir. Ayrıca al-Fārisi' nin 9. Önermesi ve Prestet' in Sonuç IX' na benzer bir şekilde teklikle ilgili ifadeler vermiştir.

1. kısmın, 1. Bölümünün, VI. Ünitesindeki 41. Makalede Euler, asal çarpanlara ayırmanın varlığından bahseder ve kısmi bir ispat verir. Fakat ispatında bazı detaylar yer almaz.

41. Makale: Bütün bileşik sayılar asal sayılardan elde edilen çarpanlarıyla ifade edilebilirler.

Asal olmayan bir çarpan bulduğumuzda, bu çarpan her zaman iki veya daha fazla asal sayının çarpımı şeklinde yazılır. Mesela 30 sayısı 5×6 ile gösterdiğimizde 6 sayısının asal olmadığı açıktır, ancak 6 ' yı 2×3 olarak ifade edersek 30 sayısının tüm çarpanlarını asal sayı olarak yani $5 \times 2 \times 3$ veya $2 \times 3 \times 5$ şeklinde yazabiliriz.

Euler, 43. Makalede bir örnekle, herhangi bir sayının asal çarpanlarına ayrılışını bulmak için bir metot vermiştir.

43. Makale bu yüzden, herhangi bir sayıyı asal çarpanlarına ayırmak için bir metot bulmak kolaydır. Mesela 360 sayısını ele alalım; bu sayıyı öncelikle 2×180 diye gösterebiliriz. 180 ' de 2×90 ' a eşittir. Ve

$$90 \text{ eşittir } 2 \times 45$$

$$45 \text{ eşittir } 3 \times 15$$

$$15 \text{ eşittir } 3 \times 5$$

Böylece 360 sayısı $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ asal çarpanları ile ifade edilebilir. Çünkü bütün bu sayılar çarpılınca 360 eder.

Euler, asal sayılara ayırma işleminin tek türlü olduğunu belirtmemiştir. Ancak Vollständige Anleitung zur Algebra kitabında ispatsız şekliyle bu konuyla ilgili bir ifadesi vardır. Bu ifade 1. Bölümün 1. Kısmının VI. Ünitesinin 65. Maddesinde yer almaktadır.

Herhangi bir sayıyı asal çarpanlarıyla ifade ettiğimiz zaman, bu sayının bölünebileceği sayıları göstermek çok kolay olacaktır. Yapmamız gereken şey önce asal çarpanları teker teker almak ve onları ikiye ikiye, üçer üçer, dörder dörder çarpmak ve benzer şekilde amaçlanan sayıya buluncaya kadar devam etmektir.

Görüyoruz ki Euler, al-Fārisī ve Prestet geleneğini takip etmiş ve bir sayının tüm bölenlerini bulmakla ilgilenmiş. Makale 65'te Euler şöyle demektedir; Bir sayının tüm bölenleri, bu sayıyı asal sayıların çarpımı şeklinde ifade ettiğimizde karşımıza çıkan asal çarpanlardan elde edilir ve bu bir sayının bölenlerini bulmakta tek yoldur. Dolayısıyla bu, asal çarpanlarına ayırmanın tekliği olarak düşünülebilir. Ayrıca 64. Makalenin sonunda bir örnek vermiştir. 60 veya $2 \times 2 \times 3 \times 5$ sayısı sadece bu asal sayılarla değil aynı zamanda bu sayıların herhangi ikisinin çarpımıyla oluşan 4, 6, 10, 15 ve bu sayıların herhangi üçünün çarpımı ile oluşan 12, 20, 30 ve son olarak 60 ile bölünür



6. LEGENDRE

Bu kısımda Legendre' nin 8. Teoremine yer veriyoruz (Legendre; 1798):

N asal olmayan herhangi bir sayı olsun. N, α , β , γ ve benzer şekilde bazı asal sayıların çarpımı veya bunların çeşitli kuvvetleri alınmış hallerinin çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Böylece N sayısını, $N = \alpha^m \beta^n \gamma^p$ olarak ele alabiliriz.

Bunu Legendre şu şekilde ispatlar;

Bu ayrışım yapmak için takip edilmesi gereken metot, en küçüğünden başlayarak N sayısını 2, 3, 5, 7, 11 ve devam eden asal sayıların her birisine bölmeye çalışmak şeklindedir. Bu sayılardan birisi α olsun. Eğer N α ' ya bölünebiliyorsa, α olabildiğince tekrarlanmalıdır. Örneğin m kere tekrarlanmış ve son bölüm P olsun. O zaman;

$$N = \alpha^m P$$

olur. P sayısı α ' ya bölünemez. P' yi α ' dan küçük bir asal sayıya bölmeye çalışmakta faydasızdır. Eğer P, α ' dan küçük bir θ sayısına bölünebilseydi, N' de θ ' ya bölünebilirdi. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden P' yi α ' dan büyük bir asal sayıya bölmeye çalışmak zorundayız. Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz ki;

$$P = \beta^n Q \text{ ve } Q = \gamma^p R$$

Sonuçta $N = \alpha^m \beta^n \gamma^p \dots$ eşitliği karşımıza çıkar.

Bu ispatta da görüldüğü gibi, Legendre' nin metoduna göre herhangi bir sayı asal çarpanlarına her zaman aynı şekilde ayrılır. Açık olarak bunun ATT' nin teklik kısmına denk olduğunu kabul edemeyiz. Buna karşın teklik ile ilgili bir ifade 10. Teoremde karşımıza çıkar:

Bir N sayısı $\alpha^m \beta^n \gamma^p \dots$ şeklinde ifade edilsin. N' in her bir böleni $\alpha^\mu \beta^\nu \gamma^\pi \dots$ şeklindedir. Burada μ , ν , $\pi \dots$ ler, m, n, p... lerden büyük olamaz.

Legendre bu teoremde, bir sayının kaç tane böleni olduğunu ve aynı zamanda bu bölenlerin toplamını kaç olduğunu bulmayı amaçlamaktadır. Bu ifadeden teklik özelliğini kolayca ispatlayabiliriz.

7. GAUSS

Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae* of 1801 (Gauss, 1801) adlı eserinin 16. Teoreminde pozitif tamsayıları için tek türlü çarpanlara ayırma özelliğini vermiştir. II. Bölüm aşağıdaki teoremle başlamaktadır.

13. Teorem: Bir çarpımın iki pozitif çarpanı, verilen bir asal sayıdan küçük ise bu çarpım bu asal sayıya bölünemez.

Ardından Gauss, Euclid' in *Elements*' nin VII.32 Önermesini ve genellemesini vermektedir.

14. Teorem: Ne a ne de b bir p asal sayısına bölünemiyorsa ab çarpımı da p sayısına bölünemez.

15. Teorem: Eğer a, b, c, d sayılarından hiçbirisi bir p asal sayısıyla bölünemiyorsa, $abcd$ çarpımı da bu asal sayıya bölünemez.

16. Teorem: Bir birleşik sayı, asal çarpanlarına tek bir yolla ayrılabilir.

Gauss ATT' nin varlık kısmı için bir ispat ortaya koymamıştır. Bu kısmın neden o şekilde olduğunun, basit bir muhakeme sonucu anlaşılabilirliğini öne sürmüştür. Anlatımına şu şekilde başlamıştır; Basit bir muhakeme sonucu anlaşılır ki, birleşik bir sayı, asal çarpanlarına ayrılabilir. Ancak bunun birçok ve çeşitli yoldan yapılamayacağı genel olarak ispatsız şekilde kabul edilir. Daha sonra $A = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ sayısını ele almış (a, b, c birbirinden farklı asal sayılardır) ve göstermiştir ki; $A, a, b, c, \dots$ den başka asal çarpanı olan veya bazı asal çarpanları daha çok tekrarlanan bir yolla asal çarpanlarına ayıramaz.

ATT' nin ilk derli toplu ifadesinin ve ispatının *Disquisitiones Arithmeticae* of 1801 adlı eserinde Gauss tarafından verildiği görülüyor. O zamandan bu zamana bir çok farklı ispatla yapılmıştır. Gelecek kısımda ATT' nin çeşitli ispatlarını inceleyip, sınıflandıracğız.

8. ATT' in FARKLI İSPATLARI

Bu bölümde ATT' in farklı ispatlarını inceleyecek ve sınıflandıracacağız. Ayrıca başka bir ispat vereceğiz. Şimdi ATT' in iki parçası olan varlık ve tekliği, birbirinden ayrı bir şekilde inceleyelim.

Varlığı ispatlamak için pek çok yazar benzer metotlar uygular. Bu metotları dört ana başlık altında ele alacağız. Birinci metot, iyi sıralama prensibini (WOP) kullanır. Mesela, pozitif tamsayıların boş olmayan her kümesi bir en küçük eleman içerir.

Önermenin yanlış olduğunu farz edelim. O zaman asalların bir çarpımı olarak yazılamayan bir birleşik sayı vardır. Şimdi bu sayılardan en küçüğüne n diyelim. n birleşik sayı olduğundan, $n' i$, $1 < n_1 < n$ ve $1 < n_2 < n$ olmak üzere bulunduğu yerde, $n_1 n_2$ çarpımı şeklinde ifade edebiliriz. n_1 ve n_2 , n' den küçük olduğundan ya asallardır veya asalların bir çarpımıdır. O zaman $n = n_1 n_2$ asallarının bir çarpımıdır ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden, 1 den büyük bütün tamsayılar asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir. Bazı yazarlar WOP' u bu şekilde kullanırlar (H. Davenport, 1952 ; G.H. Hardy, E. M. Wright, 1938 ; J. Hunter, 1964 ; Shockley, 1967 ; R.B.J.T Allenby, 1991).

İkinci tip ispatta, temel basamak Euclid' in Kitap VII deki 31. Önermesini kullanmaktır. Her birleşik sayı, bir asal sayı tarafından bölünür. Bu ikinci ispat aşağıdaki gibidir:

n , 1 den farklı bir doğal sayı olsun. Eğer n asal değilse, yani bileşik sayı ise o zaman bir asal böleni vardır. Bu p_1 olsun. Aynı şekilde n/p_1 ' i bölen bir p_2 asalı vardır. Eğer $n \neq p_1 p_2$ ise o zaman $n/p_1 p_2$ ' yi bölen bir p_3 asalı vardır. Bu şekilde devam edersek belli bir adımdan sonra $n = p_1 p_2 \dots p_m$ ' i elde ederiz. Bu ispatta azalan zincir kuralı kullanılır. (DCC). Yani, her biri bir öncekinden daha küçük olan, sınırsız tam sayılar dizisi yoktur. Biz VII.31' de DCC' nin kullanıldığını görüyoruz. a , bir birleşik sayı olsun. O zaman bir böleni vardır. Buna b diyelim. Eğer b asal değilse, bir böleni vardır. Bu c olsun. Eğer c asal değilse, c' nin de bir böleni vardır. Bu şekilde DCC' yi kullanarak belli bir basamaktan sonra a' nin bir asal bölenlerini buluruz. Bu yüzden, ATT' nin varlık kısmını bu şekilde ispatlamak için DCC' yi iki kez kullanmamız gerekir. Bazı yazarlar bu ispatları verirler. (L.E. Dickson, 1957 ; H.N. Wright, 1988 ; A.Baker , 1984 ; R.D. Carmichael ,1959).

Tümevarımı kullanan başka bir ispat vardır. Mesela B.M.Stewart' ın ispatı. Bu ispat yönteminde varlık özelliğinin sağlandığı bütün $n \geq 2$ tam sayılar kümesi ele alınır.

O zaman $2'$ in kendisi asaldır. Eğer bu küme $2, 3, \dots, n$ tamsayılarını içeriyorsa, o zaman bu yol, $n+1'$ in bu kümede olduğunu göstererek sona erir.

Ayrıca varlık kısmını, WOP ve DCC' yi beraber kullanarak da ispatlayabiliriz. Mesela D. Shanks' ın ispatı gibi.

$a > 1'$ in bir tamsayı olduğunu ve $b > 1$, a' nın en küçük böleni olduğunu kabul edelim(WOP). b , bir asal olmak zorundadır. Eğer değilse, o zaman b' nin 1 den büyük fakat kendisinden küçük bir böleni vardır. Bu bölen a' yı da böler ve bu durum b' nin tanımıyla çelişir. $b=p$ ve $(a/p)=c$ olur. Aynı işlemi c ile tekrarlayalım. Sonuçta bu işlem DCC den dolayı sona erer ve a , sonlu sayıda asal sayıların çarpımı şeklinde ifade edilebilir.

ATT' nin teklik kısmının birkaç değişik ispatı vardır. Bu ispatlardan birisi "olağan metot" olarak adlandırılan Euclid' in Elements adlı eserindeki VII. Kitabındaki 30. Önermesinin (eğer c asal sayısı ab' bölüyorsa, a veya b sayılarından birini de böler) kullanılmasıdır. Bu metot bir çok yazarın ispatlarında görülebilir (H.Davenport, 1952 ; G.H.Hardy, E.M.Wright, 1938 ; J.Hunter, 1964 ; Shockley, 1964 ; Dickson, 1957 ; H.N.Wright, 1988 ; A.Baker, 1984 ; R.D. Carmichael, 1959 ; Stewart, 1952 ; Shanks, 1962 ; Jones, 1955 ; Gauss, 1801).

Şimdi bu ispatı verelim:

Kabul edelim ki; a sayısının iki türlü asal çarpanlara ayrışması olsun. p' ler ve q' lar asal olmak üzere;

$$a = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m,$$

olsun. $p_1, q_1(q_2 \dots q_m)$ çarpımını böldüğünden, q_1 veya $q_2 \dots q_m$ den birini bölmesi gerekir. p_1, q_1' i bölüyorsa o zaman her iki sayı asal olduğundan $p_1 = q_1$ olur. Eğer $p_1, q_2 \dots q_m'$ i bölüyorsa o zaman aynı düşünceyi tekrarlayarak ve sonunda şu sonuca varırız: p_1 asal sayısı $i = 1, \dots, m$ için q_i asal sayılarından birine eşit olmalıdır. İki gösterimden ortak asal p_1' i kısaltalım ve aynı işlemi soldan bir asalla tekrarlayalım. Tümevarım ve DCC ile soldaki tüm asal sayıların sağdakilere eşit olduğunu ve ayrıca $n = m$ olduğunu gösterebiliriz.

WOP' u kullanan başka bir teklik ispatı vardır. Bazı yazarların ispatlarını bu sınıfa dahil edebiliriz (Davenport, 1952 ; Stark, 1971 ; Wright, 1988).

Temel teoremin yanlış olduğunu varsayalım ve n , asal sayıların çarpımı şeklinde birden fazla yazılabilen en küçük tam sayı olsun. p' ler ve q' lar asal olmak üzere;

$$n = p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_l$$

olur. Burada p' lerin hiçbirisi q_j' lere ($1 \leq j \leq l$) eşit değildir. Çünkü eşit olsa, her iki taraftaki ortak çarpanlar kısaltılırdı ve asal sayıların çarpımı şeklinde birden fazla yazılabilen n' den daha küçük bir sayı elde edilirdi. Bu ise n' in seçimi ile çelişir. Açık olarak görülür ki, n asal değildir ve böylece $k \geq 2$, $l \geq 2$ dir. Bu yüzden $i = 1, \dots, k$ için

$$p_i^2 \leq n \text{ olur ve buradan } p_i \leq \sqrt{n}$$

yazılır. Benzer şekilde $q_j^2 \leq n$ olmak üzere q_j vardır. $q_1^2 \leq n$ dersek $q_1 \leq \sqrt{n}$ olur. $p_1 \neq q_1$ olduğundan $p_1 q_1 < n$ olur. Eğer $n_1 = n - p_1 q_1$ şeklinde yazarsak, $0 < n_1 < n$ i elde ederiz ve buradan görülür ki, n_1 ' in asal sayıların çarpımı şeklinde birden fazla gösterimi olamaz. Fakat p_1 , n ve dolayısıyla n_1 ' in bir çarpanıdır. Bu durum q_1 içinde geçerlidir. Bundan dolayı, asal sayıların çarpımı şeklinde yazılan n_1 ' in tek türlü gösteriminde p_1 ve q_1 sayıları görülmelidir. Ve böylece $p_1 q_1$, n_1 ' i ve dolayısıyla n ' i böler. Fakat o zaman q_1 ,

$$n_2 = n / p_1 = p_2 \dots p_a$$

ifadesinin bir çarpanı olur. Ve n_2 ' in asal sayıların çarpımı şeklinde birden fazla gösterimi olur. Çünkü bu gösterimde hiçbir p , q eşit olamaz. Dolayısıyla $n_2 < n$ olduğundan bu bir çelişkidir ve teorem ispatlanır.

Şimdi burada başka bir ispat sunacağız. Diğer teklik ispatları, bu ispattaki i ' nin değerine göre, bu ispattan elde edilebilir. Örneğin $i = s$ bu ispatlardan birini verir (Niven, Zuckerman, 1960).

Teoremin yanlış olduğunu varsayalım. Ve n , asal sayıların çarpımı şeklinde birden fazla gösterime sahip en küçük tam sayı olsun (WOP). Diyelim ki:

$$n = p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_s \quad (1)$$

Açıkça görülür ki r ve s , 1' den daha büyüktür. Ve $p_1, \dots, p_k$ asallarının, $q_1, \dots, q_l$ asalları ile ortak elemanı yoktur. Çünkü eğer örneğin p_1 ortak asal olursa, (1) de p_1 kısaltılarak n / p_1 ' in iki farklı çarpanlara ayrılışı elde edilirdi. Fakat bu n seçimiyle çelişir. Dolayısıyla $i = 1, \dots, s$; $j = 1, \dots, r$ için $q_i \neq p_j$ ve genelliği bozmadan $p_1 < q_1$ kabul edebiliriz.

Böylece $2 \leq i \leq s$ için;

$$N = n - p_1 q_2 \dots q_i = q_2 \dots q_i (q_1 q_{i+1} \dots q_s - p_1) = p_1 (p_2 \dots p_r - q_2 \dots q_i) \quad (2)$$

olur. Açıkça $N < n$ dir. Ve buradan görülür ki N , tek türlü asal çarpanlara ayrılışa sahiptir.

Fakat $p_1 \nmid (q_1 q_{i+1} \dots q_s - p_1)$ dir. Bundan dolayı (2) bize, N ' in p_1 i içeren ve içermeyen olmak üzere iki türlü çarpanlara ayrılışını verir. Buda bir çelişkidir.

KAYNAKLAR

Ağargün, A.G. ve Fletcher, C.R., (1994), al-Fârîsî and Fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica* 21, 162-173.

Ağargün, A. G. ve Özkan, M. Ö., (2001), A Historical Survey of the Fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica* 28, No. 3, 207-214.

Ağargün, A. G., (1993), Some Factorization Problem in Rings. Ph D Thesis, The University of Wales.

Allenby, R.B.J.T., (1991), Rings, Fields and Groups, Edward Arnold, London.

Baker, A., (1984), A concise Introduction to the Theory of Numbers, Cambridge University Press, Cambridge.

Carmichael, R.D., (1914), The Theory of Numbers, Dover Publications Inc, New York. (New Dover edition first published in 1959).

Davenport, H., (1952), The Higher Arithmetic, Hutchinson House, London.

Dickson, L.E., (1957), Introduction to the Theory of Numbers, Dover Publications Inc, New York.

Euler, L., (1770), Vollständige Anleitung zur Algebra, St Petersburg, 1770; French translation with Additions by Joseph L. Lagrange Lyon, 1774; republished in vol. 7 of Lagrange's Oeuvres and in vol.(1)1 of Euler's Opera; English translation Elements of Algebra, [trans. John Hewlett, London, 1840], reprinted Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985

Gauss, C.F., (1801), Disquisitiones Arithmeticae, Leipzig, 1801; Translated into English by A.C. Clarke, New Haven, Yale Univ. Press, 1966.

Goldstein, C., (1992), On a seventeenth century version of the Fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica* 19, 177-187.

Hardy, G.H., (1938), and Wright, E.M. , An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford.

Heath, T.L., (1980), The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge.

Hendy, M.D., (1975), Euclid and the Fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica* 2, 189-191.

Hogendijk, J.P., (1985), Thabit ibn Qurra and the pair of amicable numbers 17296, 18416. *Historia Mathematica* 12, 269-273.

Hunter, J., (1964), Number Theory, Oliver and Boyd, Edinburgh and London.

Jones, B.W., (1955), The Theory of Numbers, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Knorr, W.R., (1976), Problems in the interpretation of Greek Number Theory: Euclid and the Fundamental Theorem of Arithmetic. *Studies in History and Philosophy of Science* 7, 353-368.

Legendre, A.M., (1798), *Théorie des Nombres*, 3rd ed. , Paris: Firmin Didot, 1830; reprinted Paris: Hermann, 1900.

Mullin, A.A., (1965), Mathematico-Philosophical Remarks on New Theorems Analogous to the Fundamental Theorem of Arithmetic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, VI, No.3, July, 218-222.

Niven, I. , and Zuckerman, H.S., (1960), *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley, New york.

Rashed, R., (1982), Matériaux pour l'histoire des nombres amiables. *Journal for The History of Arabic Science* 6, 209-278.

Shanks, D., (1962), *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, Vold, Sparten Books, Washington.

Shockley, J.E., (1967), *Introduction to Number Theory*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Stark, H.M., (1971), *An Introduction to Number Theory*, Markham Publishing Company, Chicago.

Steward, B.M., (1952), *Theory of Numbers*, The Macmillan Company, New York.

Wright, H.N. (1964), *Frist Course in Theory of Numbers*, John Wiley and Sons Inc. , New York

Wright, E.M., (1988), Number Theory and other reminiscences of viscownt cherwell, *Notes and Records of the Royal Society of London* 42, 197-204.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	06. 03. 1978	
Doğum yeri	Adapazarı	
İlkokul	1983 - 1988	Ahmet Akkoç İlkokulu
Ortaokul	1988 - 1991	Adapazarı Atatürk Lisesi
Lise	1991 - 1994	Adapazarı Atatürk Lisesi
Lisans	1995 - 1999	Yıldız Teknik Üniversitesi
Yüksek Lisans	2000 - 2002	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

