

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

128689

TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLAŞTIRMA

Yonca TURGUT

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hamit AVCI

Prof. Dr. Ehliman Adıgüzelov

Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu

İSTANBUL, 2002

128689

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Ön Bilgiler.....	1
2. KOMPAKTLIK KAVRAMI ve EŞDEĞER KOŞULLAR.....	5
2.1 Kompakt Uzay.....	5
2.2 Sonlu Kesişim Özelliği.....	6
2.3 Kompaktlık ve Hausdorff Uzayları.....	8
3. KOMPAKT UZAYLARIN ALT UZAYLARI, ÇARPIMLARI ve SÜREKLİ GÖRÜNTÜLERİ HAKKINDA TEMEL TEOREMLER.....	13
4. KOMPAKTLIK TÜRLERİ.....	19
4.1 Dizisel Kompaktlık.....	19
4.2 Sayılabilir Kompaktlık ve Limit Nokta Kompaktlık.....	21
4.3 Parakompaktlık.....	26
4.4 Yerel Kompaktlık.....	29
5. KOMPAKTLAŞTIRMA.....	31
5.1 Kompaktlaştırma Kavramı.....	31
5.2 Alexandroff Kompaktlaştırması.....	32
5.3 Stone-Čech Kompaktlaştırması.....	36
6. SONUÇ.....	43
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	45

SİMGE LİSTESİ

d	Metrik
(X,d)	Metrik uzay
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
τ	Topoloji
(X,τ)	Topolojik uzay
(A,τ_A)	Topolojik alt uzay
$\overline{A}$	A nın kapanışı
$\circ$	
$\overset{\circ}{A}$	A nın içi
$\tilde{A}$	A nın tümleyeni
A'	A nın yığılma noktaları kümesi (A nın türetilmiş kümesi)
Λ	Damga kümesi
π	İzdüşüm tasviri
$\beta(X)$	Stone-Čech Kompaktlaştırması

ÖNSÖZ

Topolojinin başlangıcından beri reel eksenin $[a, b]$ kapalı aralığının düzgün süreklilik teoremi ve maksimum değer teoremi gibi teoremlerin ispatları için temel olan önemli bir özelliğinin varlığı bilinmektedir. Fakat uzun bir süre bu özelliğin keyfi bir topolojik uzay için nasıl formüle edileceği açık değildi. $[a, b]$ nin temel özelliği olarak düşünülen bu gerçek, $[a, b]$ nin her sonsuz alt kümesinin bir limit noktasına sahip olmasıdır. Bu özellik kompaktlık kavramı ile anılmıştır. Daha sonra matematikçiler tarafından, bu formülasyonun meselenin özünde bulunmadığı, uzayın açık örtüleri cinsinden ifadesinin daha güçlü bir formülasyon olacağı anlaşılmıştır. Sözü edilen bu formülasyona günümüzde kompaktlık denilmektedir.

Tezimi hazırlarken bana yardımcı olan ve yönlendiren hocam, Sayın Prof. Dr. Hamit Avcı'ya, her zaman yanımda olan ve beni destekleyen aileme, eşime ve çalışmamda bana yardımcı olan arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.



ÖZET

“Topolojik Uzaylarda Kompaktlaştırma” olarak adlandırılan bu çalışma Genel topolojinin önemli bir konusudur ve beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde ön bilgiler başlığı altında tanımlar ve bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Bu konunun anlaşılabilmesi için kompakt uzayların iyi bilinmesi gerektiğinden bu çalışmada kompakt uzaylara oldukça geniş yer verilmiştir.

İkinci bölümde kompaktlık kavramı ve eşdeğer koşullar üzerinde durulmuş, kompaktlık ve Hausdorff uzaylar arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde kompakt uzayların alt uzayları, çarpımları ve sürekli görüntüleri hakkında temel teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde kompaktlık türleri olarak dizisel kompaktlık, limit nokta kompaktlığı, parakompaktlık ve yerel kompaktlık incelenmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise kompaktlaştırma kavramı ve tanımı verildikten sonra Alexandroff Kompaktlaştırması (Tek Nokta Kompaktlaştırması) ve Stone-Čech Kompaktlaştırması ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Ayrıca her bölümde, konunun kolay anlaşılması için önemli örneklere yer verilmiştir.

ABSTRACT

This study, which is called “Compactification in Topological Spaces”, is the important subject of General Topology and includes five chapters.

In the first chapter; the definitions and some fundamental concepts are given by the title “Preliminaries”.

In this study, the compact spaces are extensively investigated since they should be known very well to understand this subject.

In the second chapter; it is dwelt upon compactness concept and equivalent conditions, and it is talked about the relations between compactness and Hausdorff Spaces.

In the third chapter; the fundamental theorems about the subspaces, products and continuous images of compact spaces are examined.

In the fourth chapter; The subjects; sequentially compactness, limit point compactness, countable compactness, paracompactness and local compactness are studied as kinds of compactness.

In the fifth and last chapter, Alexandroff Compactification and Stone-Čech Compactification are investigated in details after giving the concept of compactification.

Moreover, Important examples are given in the each chapter to understand the subject easily.

1. GİRİŞ

Klasik analizdeki bir çok önemli teorem, kapalı sınırlı aralıklar için ispatlanmıştır. Örneğin kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun, maksimum değer kabul ettiğini ifade eden Maksimum Değer Teoremi ve yine kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olduğunu ifade eden Düzgün Süreklilik Teoremi bunlardan ikisidir. Bu tür teoremlerin ispatlarının temelinde Heine-Borel Teoremi olarak bilinen ve “kapalı sınırlı bir aralığın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır” şeklinde ifade edilen teorem bulunmaktadır. Kapalı sınırlı aralıkların bu önemli özelliği topolojide kompaktlık tanımı olarak verilir.

Her topolojik uzay kompakt olmayabilir. Bu taktirde böyle bir uzay, kompakt bir uzayın yoğun alt uzayına homeomorf kılınabilir. Elde edilen uzay topolojik uzayın bir genişlemesi ve kompaktlaştırmasıdır.

Kompaktlık kavramını ilk defa 1906 yılında Frechet kullanmıştır. 1924'te Teitze'nin makalesinde kullandığı “tek nokta kompaktlaştırması” kavramı ile de kompaktlaştırma konusundaki çalışmalar başlamıştır.

1.1 Ön Bilgiler

1.1.1 T_1 -Uzayı

Bir X topolojik uzayının bir T_1 -Uzayı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki aksiyomun sağlanmasıdır.

[T1] Farklı $a, b \in X$ gibi nokta çiftlerinin her biri, diğerini içermeyen bir açık kümeyle aittir. Başka bir deyişle

$$a \in G, b \notin G \text{ ve } b \in H, a \notin H$$

olacak şekilde G ve H kümeleri vardır. (Bu aksiyoma Fréchet ayırma aksiyomu da denir.)

1.1.2 Hausdorff Uzayı (T_2 -Uzayı)

Bir X topolojik uzayının bir Hausdorff uzayı ya da T_2 -Uzayı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki aksiyomun sağlanmasıdır.

[T2] Farklı $a, b \in X$ gibi nokta çiftlerinin her biri ayrık-açık kümelerle aittir. Başka bir deyişle

$$a \in G, b \in H \text{ ve } G \cap H = \emptyset$$

olacak şekilde G ve H açık kümeleri vardır. (Bu aksiyoma Hausdorff ayırma aksiyomu da denir.)

1.1.3 Düzenli Uzay

Bir X topolojik uzayının bir Düzenli Uzay olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki aksiyomun sağlanmasıdır.

[D] Eğer F , X in kapalı bir alt kümesi ve $p \in X$, F e ait olmayan bir nokta ise o zaman

$$F \subset G \text{ ve } p \in H$$

olacak şekilde G ve H açık kümelerini vardır. (Bu aksiyoma Vietoris ayırma aksiyomu da denir.)

1.1.4 T_3 -Uzayı

[T1] aksiyomunu sağlayan bir düzenli X topolojik uzayına T_3 -Uzayı denir.

1.1.5 Normal Uzay

Bir X topolojik uzayının bir Normal Uzay olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki aksiyomun sağlanmasıdır.

[N] F_1 ve F_2 , X in ayrık kapalı alt kümeleri ise o zaman

$$F_1 \subset G \text{ ve } F_2 \subset H$$

olacak şekilde G ve H ayrık açık kümeleri vardır. (Bu aksiyoma Urysohn ayırma aksiyomu da denir.)

1.1.6 T_4 -Uzayı

$[T_1]$ aksiyomunu sağlayan bir normal X topolojik uzayına T_4 -Uzayı denir.

1.1.7 Urysohn Yardımcı Teoremi: F_1 ve F_2 , bir X normal uzayının ayrık kapalı alt kümeleri olsun. O zaman

$$f(F_1) = \{0\} \text{ ve } f(F_2) = \{1\}$$

olacak şekilde bir

$$f : X \rightarrow [0,1]$$

sürekli fonksiyonu vardır.

1.1.8 Urysohn Metrikleme Teoremi: Her ikinci sayılabilir normal T_1 -uzayı metriklenebilirdir.

1.1.9 Tam Düzenli Uzay

Bir X topolojik uzayının bir Tam Düzenli Uzay olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki aksiyomun sağlanmasıdır.

$[TD]$ Eğer F , X in bir kapalı alt kümesi ve $p \in X, p \notin F$ ise o zaman

$$f(p) = 0 \text{ ve } f(F) = \{1\}$$

olacak şekilde bir

$$f : X \rightarrow [0,1]$$

sürekli fonksiyonu vardır.

1.1.10 Tychonoff Uzayı ($T_{3\frac{1}{2}}$ -Uzayı)

$[T_1]$ aksiyomunu sağlayan bir tam düzenli X topolojik uzayına Tychonoff-Uzayı denir.

1.1.11 Birinci Sayılabilir Uzay

Bir X topolojik uzayı eğer Sayılabilirliğin Birinci Aksiyomu adı verilen aşağıdaki aksiyomu sağlıyorsa bu uzaya Birinci Sayılabilir Uzay denir.

$[S_1]$ $\forall x \in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluk tabanı vardır.

1.1.12 İkinci Sayılabilir Uzay

Bir (X, τ) topolojik uzayı eğer Sayılabilirliğin İkinci Aksiyomu adı verilen aşağıdaki aksiyomu sağlıyorsa bu uzaya İkinci Sayılabilir Uzay denir.

[S2] τ -topolojisinin sayılabilir bir tabanı vardır.

1.1.13 Teorem: Her ikinci sayılabilir uzay birinci sayılabilir uzaydır.

1.1.14 Lindelöf Uzayı

Eğer bir (X, τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü var ise, bu uzaya Lindelöf Uzay denir.

1.1.15 Teorem (Lindelöf Teoremi): A kümesi, ikinci sayılabilir bir X uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. Bu taktirde A nın her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır.

1.1.16 Teorem: X ikinci sayılabilir uzay olsun. O zaman X in her tabanının sayılabilir bir alt tabanı vardır.

1.1.17 Sonuç: Her İkinci sayılabilir uzay bir Lindelöf uzayıdır.

1.1.18 Metriklenebilir Uzay

Eğer X bir topolojik uzay ve X üzerinde X in topolojisini üreten bir d-metriği varsa, X uzayına metriklenebilirdir denir. Metriklenebilir X uzayı ile birlikte X in topolojisini veren özel d-metriği, bir metrik uzaydır.

2. KOMPAKTLIK KAVRAMI VE EŞDEĞER KOŞULLAR

2.1 Kompaktlık Kavramı

2.1.1 Tanım: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir topluluğu olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın elemanlarının birleşimi X e eşit ise o zaman $\mathcal{A}$ sınıfına X in bir örtüsüdür denir. Eğer $\mathcal{A}$ sınıfının elemanları X in açık alt kümeleri ise $\mathcal{A}$ sınıfına X in bir açık örtüsüdür denir.

2.1.2 Tanım: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere eğer X uzayının her $\mathcal{A}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına kompakt uzay denir.

2.1.3 Örnek: $\mathcal{A} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ açık aralıkların sınıfı, $\mathbb{R}$ yi örten hiçbir sonlu alt sınıfı içermediği için $\mathbb{R}$ -reel eksenini kompakt değildir.

2.1.4 Örnek: Sonlu sayıda nokta içeren herhangi bir X kümesi, kompakttır. Çünkü bu durumda X in her açık örtüsü sonludur.

2.1.5 Örnek: Klasik Heine-Borel Teoremini göz önüne alalım:

$A = [a, b]$ kapalı ve sınırlı aralık ve $\{G_i : i \in \Lambda\}$ (Λ , herhangi bir damga kümesidir.)

$$A \subset \bigcup_{i \in \Lambda} G_i$$

olacak şekilde açık kümelerin bir sınıfı olsun. Bu taktirde

$$A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

olacak şekilde $G_{i_1}, \dots, G_{i_m}$ gibi sonlu sayıda açık küme vardır.

Yukarıdaki terminolojiden Heine-Borel Teoremi aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir:

Kapalı ve sınırlı bir $A = [a, b]$ aralığının her açık örtüsü sonlu bir örtüye indirgenebilir. Bu taktirde $\mathbb{R}$ -reel eksenini üzerindeki her kapalı ve sınırlı aralık Heine-Borel Teoremi gereğince kompakttır.

2.1.6 Örnek: Olağan topolojili $\mathbb{R}$ -reel eksenini üzerindeki $X = (0,1)$ aralığı kompakt değildir.

$$\mathcal{A} = \left\{ A_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

açık aralıklar sınıfı,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olup; X aralığının bir açık

örtüsüdür. Ancak $\mathcal{A}$ sınıfı hiçbir sonlu alt örtü içermez. Gerçekten

$$\mathcal{A}^* = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)\}$$

sınıfı, $\mathcal{A}$ sınıfının herhangi bir alt sınıfı olsun. Eğer

$$\varepsilon = \min(a_1, \dots, a_m)$$

ise o zaman $\varepsilon > 0$ ve

$$(a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_m, b_m) \subset (\varepsilon, 1)$$

dır. Öte yandan $(0, \varepsilon]$ ve $(\varepsilon, 1)$ aralıkları ayrıktır. O halde $\mathcal{A}^*$, X in bir örtüsü değildir ve dolayısıyla X kompakt değildir.

2.1.7 Örnek: $(0, 1]$ aralığı kompakt değildir.

$\mathcal{A} = \{(1/n, 1] : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüsü hiçbir sonlu alt örtü içermez.

2.2 Sonlu Kesişim Özelliği

2.2.1 Tanım: Bir $\{A_i : i \in \Lambda\}$ kümeler sınıfının eğer her sonlu alt sınıfının boştan farklı bir kesişimi varsa yani

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m} \neq \emptyset$$

ise bu $\{A_i : i \in \Lambda\}$ sınıfına sonlu kesişim özelliğine sahiptir denir.

2.2.2 Örnek: Aşağıdaki açık aralıkların sınıfını göz önüne alalım:

$$\mathcal{A} = \left\{ (0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{3}\right), \left(0, \frac{1}{4}\right), \dots \right\}$$

Burada $\mathcal{A}$, sonlu kesişim özelliğine sahiptir. Çünkü

$$(0, a_1) \cap (0, a_2) \cap \dots \cap (0, a_m) = (0, b); \quad b = \min(a_1, a_2, \dots, a_m) > 0$$

olup, $\mathcal{A}$ nın kendisinin de boştan farklı bir kesişime sahip olduğu görülür.

2.2.3 Önerme: Aşağıdaki özellikler eşdeğerdir.

- i) X uzayı kompaktır.
- ii) X in kapalı alt kümelerinin her $\{F_i : i \in \Lambda\}$ sınıfı için

$$\bigcap_{i \in \Lambda} F_i = \emptyset$$

olması; $\{F_i : i \in \Lambda\}$ sınıfının,

$$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} = \emptyset$$

olmak üzere bir $\{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_m}\}$ sonlu alt sınıfını içermesini gerektirir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): X kompakt olsun. $\{F_i : i \in \Lambda\}$ sınıfı, X in kapalı alt kümelerinin sınıfı olmak üzere

$$\bigcap_{i \in \Lambda} F_i = \emptyset$$

olduğunu varsayalım. Bu taktirde De Morgan Kuralı gereğince

$$X = \tilde{\emptyset} = \left(\bigcap_{i \in \Lambda} F_i \right)^{\sim} = \bigcup_{i \in \Lambda} \tilde{F}_i$$

olup her bir F_i kapalı olduğundan $\{\tilde{F}_i : i \in \Lambda\}$ sınıfı, X in açık bir örtüsüdür. Hipotez gereğince X kompakt olduğundan

$$X = \tilde{F}_{i_1} \cup \dots \cup \tilde{F}_{i_m}$$

olacak şekilde $\tilde{F}_{i_1}, \tilde{F}_{i_2}, \dots, \tilde{F}_{i_m} \in \{\tilde{F}_i : i \in \Lambda\}$ elemanları vardır. Yine De Morgan Kuralı gereğince

$$\emptyset = \tilde{X} = (\tilde{F}_{i_1} \cup \tilde{F}_{i_2} \cup \dots \cup \tilde{F}_{i_m})^{\sim} = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m}$$

sonucu elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): X uzayının kapalı alt kümelerinin her $\{F_i : i \in \Lambda\}$ sınıfı için

$$\bigcap_{i \in \Lambda} F_i = \emptyset$$

olması $\{F_i : i \in \Lambda\}$ sınıfının

$$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} = \emptyset$$

olmak üzere bir $\{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_m}\}$ sonlu alt sınıfını içermesini gerektirir. Bu taktirde X in kompakt olduğunu ispatlayalım.

$\{G_i : i \in \Lambda\}$ sınıfı, X in açık bir örtüsü yani

$$X = \bigcup_{i \in \Lambda} G_i$$

olsun. De Morgan Kuralı gereğince

$$\emptyset = \tilde{X} = \left(\bigcup_{i \in \Lambda} G_i \right)^{\sim} = \bigcap_{i \in \Lambda} \tilde{G}_i$$

Her bir G_i açık olduğundan $\{\tilde{G}_i : i \in \Lambda\}$, kapalı kümelerin bir sınıfıdır. Bununla birlikte

$$\emptyset = \bigcap_{i \in \Lambda} \tilde{G}_i$$

dır. O halde hipotezden

$$\tilde{G}_{i_1} \cap \dots \cap \tilde{G}_{i_m} = \emptyset$$

olacak şekilde $\tilde{G}_{i_1}, \dots, \tilde{G}_{i_m} \in \{\tilde{G}_i : i \in \Lambda\}$ elemanları vardır. Böylece De Morgan Kuralı gereğince

$$\tilde{\emptyset} = X = (\tilde{G}_{i_1} \cap \dots \cap \tilde{G}_{i_m})^c = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

elde edilir. Bu nedenle X kompaktır.

2.2.4 Teorem: X topolojik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul sonlu kesişim özellikli X uzayının kapalı alt kümelerinin her bir $\mathcal{F}$ sınıfının, boş olmayan kesişime sahip olmasıdır.

İspat: Aşağıdaki özellikler birbirinin karşıt doğrusudur.

$\{F_i\}$, X in kapalı alt kümelerinin herhangi bir sınıfı olmak üzere

$$(i) \quad \bigcap_{i \in \Lambda} F_i = \emptyset \Rightarrow F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} = \emptyset \text{ olacak şekilde } i_1, \dots, i_m \text{ vardır.}$$

$$(ii) \quad \text{Her } i_1, \dots, i_m \text{ için } F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in \Lambda} F_i \neq \emptyset$$

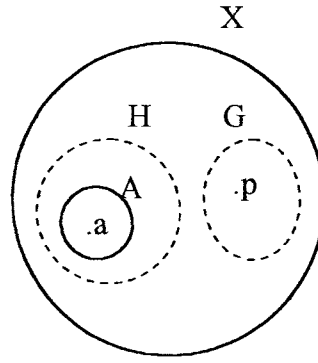
Bir önceki önermeden ve yukarıdaki özelliklerin eşdeğer olmasından dolayı

$$\forall i_1, \dots, i_m \text{ için} \quad F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in \Lambda} F_i \neq \emptyset$$

dır.

2.3 Kompaktlık ve Hausdorff Uzayları

2.3.1 Önerme: X bir Hausdorff uzayı ve $A \subset X$ olmak üzere A kompakt ve $p \in X - A$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde $p \in G$, $A \subset H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açık kümeleri vardır.



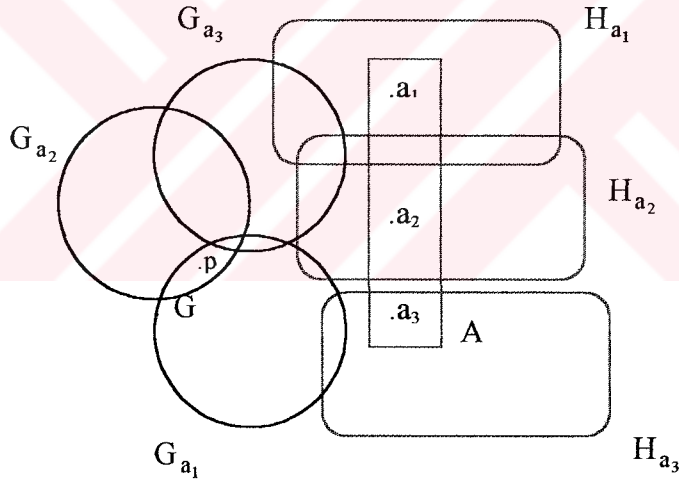
Şekil 2.1

İspat: $a \in A$ olsun. $p \notin A$ olduğundan $p \neq a$ dır.

Hipotez gereğince X bir Hausdorff uzayıdır. O halde $\forall a \in A$ için

$$a \in H_a \text{ ve } p \in G_a \text{ için } G_a \cap H_a = \emptyset$$

olacak şekilde G_a ve H_a açık kümeleri vardır.



Şekil 2.2

O halde

$$A \subset \bigcup \{H_a : a \in A\}$$

elde edilir. Yani $\bigcup \{H_a : a \in A\}$ sınıfı, A nın açık bir örtüsüdür. A kompakt olduğundan

$$A \subset H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \dots \cup H_{a_m}$$

olacak şekilde $H_{a_1}, H_{a_2}, \dots, H_{a_m} \in \{H_a\}$ elemanları vardır.

$$H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \dots \cup H_{a_m} = H$$

$$G_{a_1} \cap G_{a_2} \cap \dots \cap G_{a_m} = G$$

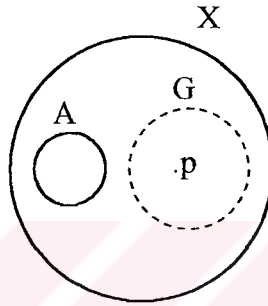
olsun. H_{a_i} ve G_{a_i} kümeleri açık olduğundan G ve H açıktır. Her a_i için $p \in G_{a_i}$ olduğundan $p \in G$ ve $A \subset H$ dir. $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$ olduğundan $G \cap H_{a_i} = \emptyset$ dir.

$$G \cap H = G \cap \{H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \dots \cup H_{a_m}\} = (G \cap H_{a_1}) \cup \dots \cup (G \cap H_{a_m}) = \emptyset \text{ dir.}$$

2.3.2 Önerme: A bir X Hausdorff uzayının kompakt alt kümesi olsun. Eğer $p \notin A$ ise o zaman

$$p \in G \subset \tilde{A}$$

olacak şekilde G açık kümesi vardır.



Sekil 2.3

İspat: Bir önceki önerme gereğince

$$p \in G, A \subset H \text{ ve } G \cap H = \emptyset$$

olacak şekilde G ve H açık kümeleri vardır. O halde

$$A \cap G = \emptyset \Rightarrow p \in G \subset \tilde{A} \text{ dir.}$$

2.3.3 Teorem: Bir Hausdorff uzayının her kompakt alt kümesi kapalıdır

İspat: X bir Hausdorff uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi kompakt olsun. A kümesinin kapalı olduğunu göstermek için $\tilde{A}$ kümesinin açık olduğunu gösterelim:

$p \in \tilde{A}$ olsun. Bir önceki önerme gereğince

$$p \notin A \Rightarrow p \in G_p \subset \tilde{A}$$

olacak şekilde G_p açık kümesi vardır. O halde

$$\tilde{A} = \bigcup \{G_p : p \in \tilde{A}\}$$

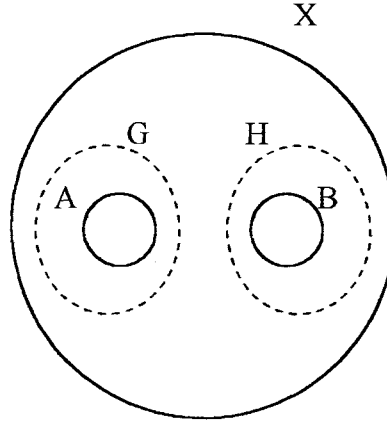
elde edilir. $\tilde{A}$, açık kümelerin birleşimi olduğundan açıktır. Yani A kapalıdır.

2.3.4 Teorem: A ve B , X Hausdorff uzayının ayırık kompakt alt kümeleri olsun. O zaman

$$A \subset G \text{ ve } B \subset H$$

olacak şekilde G ve H ayrık açık kümeleri vardır.

İspat:



Sekil 2.4

$A, B \subset X$ alt kümeleri kompakt ve $A \cap B = \emptyset$

olmak üzere $a \in A$ olsun. O zaman $a \notin B$ dir. Hipotez gereğince B kompakttır. O halde Önerme 2.3.1 gereğince

$$a \in G_a, B \subset H_a \text{ ve } G_a \cap H_a = \emptyset$$

olacak şekilde G_a ve H_a açık kümeleri vardır.

$a \in G_a$ olduğundan $\{G_a : a \in A\}$ sınıfı A nın açık bir örtüsüdür.

A kompakt olduğundan

$$A \subset G_{a_1} \cup G_{a_2} \cup \dots \cup G_{a_m}$$

olacak şekilde sonlu sayıda $G_{a_1}, G_{a_2}, \dots, G_{a_m}$ açık küme vardır.

B , her bir H_{a_i} nin alt kümesi olduğundan

$$B \subset H_{a_1} \cap H_{a_2} \cap \dots \cap H_{a_m} \text{ dir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_{a_1} \cup \dots \cup G_{a_m} = G \\ H_{a_1} \cap \dots \cap H_{a_m} = H \end{array} \right\} \text{ olsun. Bu Taktirde}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \subset G \\ B \subset H \end{array} \right\} \text{ olduğu görülür.}$$

Ayrıca G açık kümelerin birleşimi ve H sonlu sayıda açık kümenin kesişimi olduğundan açıktır.

$$\forall i \text{ için; } G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$$

olur. Bu taktirde

$$G_{a_i} \cap H = \emptyset$$

$$G \cap H = (G_{a_1} \cup \dots \cup G_{a_m}) \cap H = (G_{a_1} \cap H) \cup \dots \cup (G_{a_m} \cap H) = \emptyset$$

sonucu çıkar



3. KOMPAKT UZAYLARIN ALT UZAYLARI, ÇARPIMLARI ve SÜREKLİ GÖRÜNTÜLERİ HAKKINDA TEMEL TEOREMLER

3.1 Teorem: $A, (X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. O zaman aşağıdaki özellikler birbirine eşdeğerdir.

- i) A kümesi $\mathcal{T}$ ya göre kompaktır.
- ii) A kümesi, A üzerindeki $\mathcal{T}_A$ alt uzay topolojisine göre kompaktır.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\mathcal{G} = \{G_i : i \in \Lambda\}$ sınıfı A kümesinin bir $\mathcal{T}_A$ açık örtüsü olsun. Alt uzay topolojisi tanımına göre herhangi bir $i \in \Lambda$ için

$$G_i = A \cap H_i \subset H_i$$

olacak şekilde $H_i \in \mathcal{T}$ vardır. O halde

$$A \subset \bigcup_{i \in \Lambda} G_i \subset \bigcup_{i \in \Lambda} H_i$$

dır ve dolayısıyla

$$\mathcal{H} = \{H_i : H_i \in \mathcal{T}, i \in \Lambda\}$$

sınıfı A kümesinin bir $\mathcal{T}$ açık örtüsüdür. $A, \mathcal{T}$ ya göre kompakt olduğundan $\mathcal{H}$ sonlu bir alt örtü içerir. Yani

$$A \subset H_{i_1} \cup H_{i_2} \cup \dots \cup H_{i_m}; \quad H_{i_k} \in \{H_i : i \in \Lambda\}$$

$$A \subset A \cap (H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_m}) = (A \cap H_{i_1}) \cup \dots \cup (A \cap H_{i_m}) = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

olur. Böylece $\{G_i : i \in \Lambda\}$ sınıfı, bir $\{G_{i_1}, \dots, G_{i_m}\}$ sonlu alt örtüsünü içerir ve dolayısıyla $(A, \mathcal{T}_A)$ kompaktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\mathcal{H} = \{H_i : H_i \in \mathcal{T}, i \in \Lambda\}$ sınıfı, A kümesinin bir $\mathcal{T}$ açık örtüsü ve her hangi bir $i \in \Lambda$ için

$$G_i = A \cap H_i$$

olsun. Bu takdirde

$$A \subset \bigcup_{i \in \Lambda} H_i \Rightarrow A \subset A \cap \left(\bigcup_{i \in \Lambda} H_i \right) = \bigcup_{i \in \Lambda} (A \cap H_i) = \bigcup_{i \in \Lambda} G_i$$

dır. Burada $G_i \in \mathcal{T}_A$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{G} = \{G_i\}$, A nın $\mathcal{T}_A$ açık örtüsüdür. (ii) den $A, \mathcal{T}_A$ - kompakt olduğundan $\{G_i\}$ sınıfı, sonlu bir $\{G_{i_1}, \dots, G_{i_m}\}$ alt örtü içerir. Bu nedenle

$A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m} = (A \cap H_{i_1}) \cup \dots \cup (A \cap H_{i_m}) = A \cap (H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_m}) \subset (H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_m})$ olup; böylece $\{H_i\}$ sınıfı, bir $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_m}\}$ sonlu alt örtüye indirgenebilir. Dolayısıyla A, τ ya göre kompakttır.

3.2 Teorem: Bir kompakt uzayın her kapalı alt kümesi kompakttır. Bu teoremin tersinin doğru olabilmesi için uzayın Hausdorff olması gerekir.

İspat: X kompakt uzay, F de X in kapalı bir alt kümesi ve $\mathcal{G} = \{G_i : i \in \Lambda\}$ sınıfı F nin açık bir örtüsü yani $F \subset \bigcup_{i \in \Lambda} G_i$ olsun. O zaman

$$X = \left(\bigcup_{i \in \Lambda} G_i \right) \cup \tilde{F}$$

dır ve $\mathcal{G}^* = \{G_i\} \cup \{\tilde{F}\}$ sınıfı ise X in bir örtüsüdür. F kapalı olduğundan $\tilde{F}$ açıktır. Böylece $\mathcal{G}^*$ X in açık bir örtüsüdür. Hipotez gereği X kompakttır. O halde $\mathcal{G}^*$, sonlu bir alt örtüye indirgenebilir. Yani

$$X = G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m} \cup \tilde{F} \quad ; G_{i_k} \in \mathcal{G}$$

yazılabilir. F ve $\tilde{F}$ ayrık kümeler olduğundan

$$F \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m} \quad ; G_{i_k} \in \mathcal{G}$$

dır. Böylece F nin herhangi bir $\mathcal{G} = \{G_i\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtü içerdiği yani F nin kompakt olduğu gösterilmiş olur.

3.3 Yardımcı Teorem (Tüp Yardımcı Teoremi): Y kompakt uzay olmak üzere $X \times Y$ çarpım uzayını göz önüne alalım. Eğer $x_0 \in X$ olmak üzere N , $X \times Y$ uzayının $x_0 \times Y$ dilimini içeren $X \times Y$ nin açık bir kümesi ise o zaman; W , X de x_0 in bir komşuluğu olmak üzere N , $x_0 \times Y$ çevresinde bir $W \times Y$ tüpünü içerir. ($W \times Y$ kümesine genellikle $x_0 \times Y$ çevresinde bir tüp denir.)

İspat: Önce N kümesinin, tam olarak $W \times Y$ kümesini içerecek şekilde X de x_0 in bir W komşuluğunun var olduğunu gösterelim.

N de bulunan $U \times V$ taban elemanları ($X \times Y$ topolojisi için) ile $x_0 \times Y$ dilimi örtülsün. Y ye homeomorfik olan $x_0 \times Y$ uzayı, Y nin kompakt olmasından dolayı kompakttır. O halde $x_0 \times Y$ uzayı

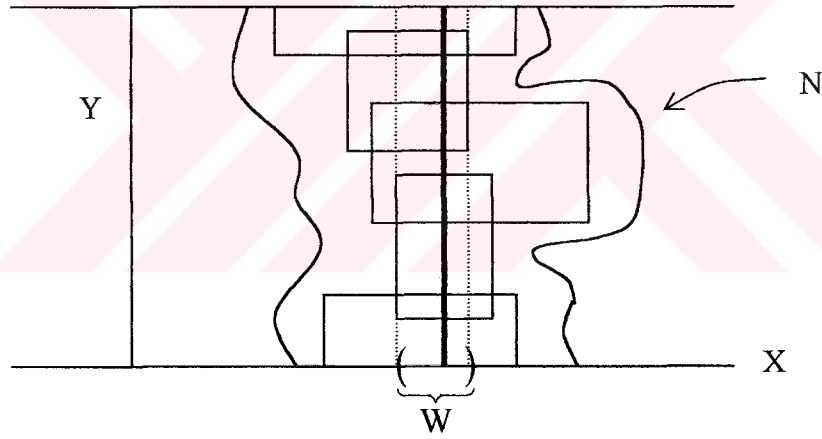
$$U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$$

şeklindeki sonlu sayıda taban elemanlarıyla örtülebilir.

($U_i \times V_i$ taban elemanlarının her birinin $x_0 \times Y$ ile kesiştiğini kabul edelim. Çünkü aksi takdirde $x_0 \times Y$ ile kesişmeyen taban elemanları çıkarılsa bile yine $x_0 \times Y$ nin bir örtüsü vardır.)

$$W = U_1 \cap \dots \cap U_n$$

olarak tanımlansın. W kümesi açık olup; W , her bir $U_i \times V_i$ kümesi $x_0 \times Y$ ile kesiştiğinden x_0 ı içerir. Burada $x_0 \times Y$ dilimini örtmek için seçilmiş olan $U_i \times V_i$ kümelerinin, $W \times Y$ tütünü örttüğünü göstereceğiz.



Şekil 3.1

$x \times y, W \times Y$ nin bir noktası olsun. Bu nokta gibi aynı y -koordinatına sahip olan $x_0 \times Y$ diliminin $x_0 \times y$ noktasını göz önüne alalım. Burada bir i için $y \in V_i$ olacak şekilde

$$x_0 \times y \in U_i \times V_i$$

dır. Öte yandan her j için $x \in U_j$ dir. Çünkü $x \in W$ dir. Bu nedenle istenildiği gibi

$$x \times y \in U_i \times V_i$$

elde edilir. Tüm $U_i \times V_i$ kümeleri N de bulunduklarından ve $W \times Y$ tütünü örttüklerinden

$$W \times Y \subset N \text{ dir.}$$

3.4 Teorem: Sonlu sayıda kompakt uzayın çarpımı kompaktır.

İspat:İspat için, iki kompakt uzayın çarpımının kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi sayıdaki kompakt uzayın çarpımının kompakt olduğu tümevarımla gösterilebilir.

X ve Y kompakt uzaylar olmak üzere $X \times Y$ uzayının kompakt olduğunu gösterelim:

$\mathcal{A}$ sınıfı $X \times Y$ uzayının açık bir örtüsü olsun.

$x_0 \in X$ verildiğinde $x_0 \times Y$ dilimi kompaktır ve bu nedenle $\mathcal{A}$ sınıfının sonlu sayıdaki $A_1, A_2, \dots, A_m$ elemanları ile örtülebilir. Bu elemanların birleşimi olan

$$N = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$$

kümesi, $x_0 \times Y$ yi içeren açık bir küme olup yukarıdaki yardımcı teoremden dolayı W, X de açık olmak üzere N açık kümesi $x_0 \times Y$ çevresinde bir $W \times Y$ tüpünü içerir. Bu taktirde $W \times Y$ $\mathcal{A}$ nın sonlu sayıdaki elemanı tarafından örtülür.

Böylece her bir $x \in X$ için $W_x \times Y$ tüpü, $\mathcal{A}$ sınıfının sonlu sayıda terimi tarafından örtülebilecek şekilde x in bir W_x komşuluğu seçilebilir.

Tüm W_x komşuluklarının topluluğu X in açık bir örtüsüdür. Dolayısıyla X in kompaktlığı gereği X i örten sonlu bir $\{W_1, \dots, W_k\}$ alt topluluğu vardır.

$$W_1 \times Y, \dots, W_k \times Y$$

tüplerinin birleşimi $X \times Y$ nin tümüdür. Çünkü her biri $\mathcal{A}$ nın sonlu sayıdaki terimi ile örtülebilir. Dolayısıyla $X \times Y$ de örtülebilir.

3.5 Teorem: Kompakt bir kümenin sürekli görüntüsü de kompaktır

İspat: $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subset X$ alt kümesi de kompakt olsun. $f(A)$ görüntüsünün Y nin kompakt bir alt kümesi olduğunu göstereceğiz.

$\mathcal{G} = \{G_i : i \in \Lambda\}$ sınıfının $f(A)$ nın açık bir örtüsü olduğunu yani

$$f(A) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} G_i$$

olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \Lambda} G_i\right) = \bigcup_{i \in \Lambda} f^{-1}(G_i)$$

dır. O halde $\mathcal{H} = \{f^{-1}(G_i)\}$ sınıfı, A nın bir örtüsüdür.

Burada f süreklidir ve her bir $i \in \Lambda$ için G_i kümesi açıktır. Dolayısıyla her bir $f^{-1}(G_i)$ ters görüntüsü de açıktır. Başka bir deyişle $\mathcal{H}$, A nın açık bir örtüsüdür. Hipotez gereği A kompakt olduğundan $\mathcal{H}$ sınıfı,

$$A \subset f^{-1}(G_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(G_{i_m})$$

şeklinde sonlu alt örtüye indirgenebilir. Bu nedenle

$$f(A) \subset f(f^{-1}(G_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(G_{i_m})) \subset (G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m})$$

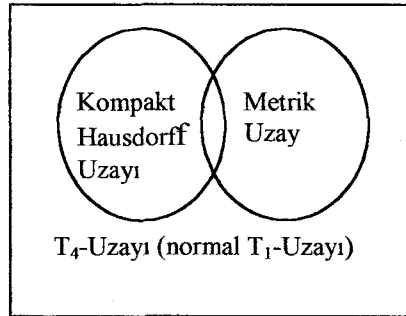
dır. Böylece $f[A]$ kompakttır.

X uzayının hem Hausdorff, hem kompakt ve F_1 ve F_2 nin de X in kapalı alt kümeleri olduğunu varsayalım. Bu taktirde Teorem.3.2. gereğince F_1 ve F_2 kompakt; Teorem.2.3.4 gereğince F_1 ve F_2 ayrık açık kümelerin alt kümeleridir.

Başka bir deyişle

3.6 Sonuç: Her kompakt Hausdorff uzayı normal uzaydır.

Böylece Metrik uzaylar ve kompakt Hausdorff uzayları, T_4 -uzayları yani normal T_1 -uzaylar sınıfı içinde bulunurlar.



Sekil 3.2

3.7 Teorem: f , bir X kompakt uzayından bir Y Hausdorff uzayının içine, bire-bir, sürekli, fonksiyon olsun. O zaman X ve $f(X)$ homeomorfiktir.

İspat:

$f : X \rightarrow f(X)$ fonksiyonu örtendir ve hipotez gereği birebir ve süreklidir.

f fonksiyonu birebir örten olduğundan

$$f^{-1} : f(X) \rightarrow X$$

ters fonksiyonu vardır. f^{-1} ters fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. X uzayının her kapalı F alt kümesi için

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$$

kümesi, $f(X)$ in kapalı bir alt kümesi ise f^{-1} ters fonksiyonu süreklidir. Her kapalı kümenin ters görüntüsü kapalı ise fonksiyon süreklidir. O halde $f(X)$ in kapalı olduğunu gösterelim: Teorem.3.2 gereğince X kompakt uzay ve F , X in kapalı alt kümesi olduğundan F kompakttır.

f , sürekli olduğundan Teorem.3.5. gereğince $f(F)$, $f(X)$ in kompakt bir alt kümesidir. Fakat Y Hausdorff uzayı olduğundan $f(X)$ alt kümesi de Hausdorff uzayıdır. O halde Teorem.2.3.3. gereğince $f(F)$ kapalıdır. Sonuç olarak f^{-1} ters fonksiyonu süreklidir. Böylece

$$f : X \rightarrow f(X)$$

bir homeomorfizmadır. O halde X ile $f(X)$ homeomorfiktir.

4. KOMPAKTLIK TÜRLEİ

4.1 Dizisel Kompaktlık

4.1.1 Tanım: Bir X topolojik uzayının herhangi bir A alt kümesindeki her dizi yine A daki bir noktaya yakınsayan bir alt dizi içeriyorsa, A kümesine dizisel kompakttır denir.

Bir X topolojik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa X uzayına dizisel kompakttır denir.

4.1.2 Örnek: A , X topolojik uzayının sonlu bir alt kümesi olsun. Bu taktirde A , mutlaka dizisel kompakttır.

$$(s_1, s_2, s_3, \dots)$$

A da bir dizi ise o zaman A daki elemanlardan en az bir a_0 elemanı, dizide sonsuz sayıda bulunmalı. O halde

$$(a_0, a_0, a_0, \dots)$$

dizisi, (S_n) dizisinin bir alt dizisidir ve A ya ait olan a_0 elemanına yakınsar.

4.1.3 Örnek: Olağan topoloji olan $\mathbb{R}$ -reel ekseni üzerindeki $A = (0,1)$ açık aralığı dizisel kompakt değildir. Örneğin A da

$$S_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right)$$

dizisini göz önüne alalım (S_n) dizisinin 0 a yakınsadığı ve bu nedenle her alt dizisinin de 0 a yakınsadığı görülür. Fakat 0 , A ya ait değildir. Bir başka değişle, A daki (S_n) dizisi, A daki bir noktaya yakınsayan bir alt dizi içermez. Yani A dizisel kompakt değildir.

Genelde, dizisel kompakt olmayan kompakt kümeler vardır ve tersi de doğrudur.

4.1.4 Önerme: Dizisel kompakt kümenin sürekli görüntüsü de dizisel kompakttır.

İspat: $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon, A , X in dizisel kompakt alt kümesi olsun. $f[A]$ görüntü kümesinin Y nin dizisel kompakt alt kümesi olduğunu göstermeliyiz:

$$(b_1, b_2, \dots)$$

$f[A]$ da bir dizi olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(a_n) = b_n$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \dots \in A$ noktaları vardır.

Öte yandan A dizisel kompakt olduğundan (a_n) dizisi, A daki bir a_0 noktasına yakınsayan bir

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots)$$

alt dizisini içerir. f süreklidir ve dolayısıyla dizisel süreklidir. Böylece

$$(f(a_{i_1}), f(a_{i_2}), \dots) = (b_{i_1}, b_{i_2}, \dots)$$

dizisi $f(a_0) \in f[A]$ noktasına yakınsar. Böylece $f[A]$ dizisel kompaktır.

4.1.5 Örnek: τ , X üzerinde $\emptyset$ ve X in sayılabilir alt kümelerinin tümleyenlerinden oluşan topoloji olsun. X in her sonsuz alt kümesi dizisel kompakt değildir.

İspat: X daki bir $(a_1, a_2, \dots)$ dizisinin $b \in X$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter koşul dizinin

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, b, \dots)$$

biçiminde olmasıdır. Yani dizinin belli bir terimden sonraki elemanlarının değişmeyecek olmasıdır. Bir başka deyişle (a_n) dizisinin b den farklı terimlerinden oluşan A kümesi sonludur. Burada A sayılabilir ve $\tilde{A}$, b noktasını içeren bir açık kümedir.

$$\tau = \{\emptyset, \tilde{A} : A \subset X\} \quad A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$$

O halde $(a_n) \rightarrow b$ ise $\tilde{A}$, dizinin sonlu sayıda terimi hariç hepsini içerir. Böylece A sonludur.

(X, τ) topolojik uzayındaki bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, p, p, p, \dots)$$

formunda olmasıdır. O halde eğer A , X in sonsuz alt kümesi ise bu taktirde A da terimleri farklı bir (b_n) dizisi vardır. Böylece (b_n) her hangi bir yakınsak alt dizi içermez ve A dizisel kompakt değildir.

4.1.6 Önerme: X in alt kümesi A dizisel kompakt olsun. O zaman A nın her sayılabilir açık örtüsü, sonlu bir alt örtüye indirgenebilir.

İspat: A nın sonsuz olduğunu varsayalım. Aksi takdirde ispat aşıkardır. Teoremin tersini ispatlayalım.

Yani hiç bir sonlu alt örtüsü olmayan sayılabilir bir $\{G_i : i \in \mathbb{N}\}$ açık örtüsünün var olduğunu farz edelim. $(a_1, a_2, \dots)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$A \cap G_{n_1} \neq \emptyset$$

olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı n_1 olsun.

$$a_1 \in A \cap G_{n_1}$$

elemanını seçelim.

$$A \cap G_{n_2} \neq \emptyset$$

olacak şekilde n_1 den büyük en küçük pozitif tam sayı n_2 olsun.

$$a_2 \in (A \cap G_{n_2}) - (A \cap G_{n_1})$$

elemanını seçelim. Böyle bir nokta her zaman vardır. Aksi takdirde G_{n_1} , A yı örter. Böylece devam edildiğinde her $i \in \mathbb{N}$ için

$$a_i \in A \cap G_{n_i}, a_i \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} A \cap G_{n_j}$$

özelliğini sağlayan $(a_1, a_2, \dots)$ dizisi elde edilir. (a_i) dizisinin A da hiçbir yakınsak alt dizisi yoktur. Gerçekten; $p \in A$ olsun. O zaman $p \in G_{i_0}$ olacak şekilde $G_{i_0} \in \{G_i\}$ vardır. Burada, $p \in A \cap G_{i_0}$ olduğundan

$$A \cap G_{i_0} \neq \emptyset$$

dir. O halde

$$G_{n_{j_0}} = G_{i_0}$$

olacak şekilde $j_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $(a_1, a_2, \dots)$ dizisinin seçiminden dolayı

$$i > j_0 \Rightarrow a_i \notin G_{n_{j_0}}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla $a_i \notin G_{i_0}$ dir. Bu nedenle G_{i_0} , p yi içeren açık küme olduğundan (a_i) nin hiç bir alt dizisi p ye yakınsamaz. Oysa p keyfî eleman olduğundan A dizisel kompakt değildir.

4.2 Sayılabilir Kompaktlık ve Limit Nokta Kompaktlık

4.2.1 Tanım: Bir X topolojik uzayının sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X e sayılabilir kompakt uzay denir.

4.2.2 Tanım: Bir X topolojik uzayının her sonsuz alt kümesinin bir limit noktası varsa, X e limit nokta kompakt uzay denir. Bazı kaynaklarda bu özelliği sağlayan uzaya Bolzano-Weierstrass Kompakttır denilmiştir.

4.2.3 Teorem: Her kompakt uzay limit nokta kompakttır.

İspat: X in sonsuz bir A alt kümesini göz önüne alalım. A nın X de hiçbir yığılma noktasının olmadığını kabul edelim. Bu taktirde her $x \in X$ için $x \notin A'$ dır. Yani öyle bir $N_x \in N(x)$ açık komşuluğu vardır ki

$$(N_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

yazılabilir. Buradan

$$A \cap N_x = \emptyset \text{ veya } A \cap N_x = \{x\}$$

elde edilir. Her $x \in X$ için $x \in N_x$ olduğundan

$$X = \bigcup_{x \in X} N_x$$

olur. Böylece $\{N_x : x \in X\}$ sınıfı X in açık bir örtüsü olup, X kompakt olduğundan $\{N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_n}\}$ sonlu alt örtüsü

$$X = \bigcup_{i=1}^n N_{x_i}$$

olacak şekilde vardır. $A \subset X$ olduğundan

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n N_{x_i}$$

olur. Böylece

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n N_{x_i} \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap N_{x_i}) = \emptyset$$

veya

$$A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap N_{x_i}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

olur. Her iki durumda da A sonlu bir kümedir. Bu durum A nın sonsuz olması ile çelişir. O halde A nın X de en az bir yığılma noktası vardır.

4.2.4 Örnek: Her kapalı-sınırlı $A = [0,1]$ aralığı limit nokta kompaktır.

Çünkü eğer, B , A nın sonsuz bir altkümesi ise o zaman B de sınırlıdır ve “reel sayıların her sınırlı sonsuz kümesinin bir yığılma noktası vardır” biçiminde ifade edilen Bolzano-

Weierstrass Teoremi gereğince B kümesinin bir p yığılma noktası vardır. Ayrıca, A kapalı olduğundan B nin p yığılma noktası A ya aittir. Yani A limit nokta kompakttır.

4.2.5 Örnek: $A = (0,1)$ açık aralığı limit nokta kompakt değildir. $A = (0,1)$ aralığının sonsuz

$$B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

alt kümesini göz önüne alalım. B nin A ya ait olmayan bir tek 0-limit noktasına sahip olduğu görülür. O halde A limit nokta kompakt değildir.

4.2.6 Teorem: (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- (i) X uzayı sayılabilir kompakttır.
- (ii) X uzayının sayılabilir sonsuz her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.
- (iii) X deki her dizi bir yığılma noktasına sahiptir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): A , X de sayılabilir sonsuz bir alt küme olsun. A nın hiçbir yığılma noktasının olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$\overline{A} = A \cup A'$$

eşitliğinden

$$A = \overline{A}$$

ve her bir $a_i \in A$ için öyle bir $N_i \in \mathcal{N}(a_i)$ açık komşuluğu vardır ki

$$N_i \cap A = \{a_i\}$$

dır. Yani A kapalı ve ayrık bir kümedir. Böylece

$$\{N_i : i \in \Lambda\} \cup \tilde{A}$$

ailesi X in sayılabilir açık bir örtüsüdür. Bu örtü içinde X i örtecek şekilde hiçbir sonlu alt örtü yoktur. Bu bir çelişkidir. O halde A nın en az bir yığılma noktası vardır

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $f : N \rightarrow X$ fonksiyonu yani $f(N) = (x_n)$, X de bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi X de sayılabilir sonsuz bir alt küme ise, hipotez gereği x_0 gibi bir yığılma noktası vardır. Yani x_0 noktasının her komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta elemanı vardır. O halde

$x_n \rightarrow x_0$ dır. Diğer taraftan, eğer dizi X de sonlu ise öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n \geq n_0$ için $f(n) = x_0$ dır. Böylece $x_n \rightarrow x_0$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i): X uzayının sayılabilir kompakt olmadığını kabul edelim. Bu durumda X in sayılabilir $\{N_i : i \in \mathbb{N}\}$ açık bir örtüsünün X i örten sonlu bir alt örtüsü yoktur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \notin X - \bigcup_{i=1}^n N_i$$

seçerek (x_n) dizisini oluşturabiliriz. Bu şekilde oluşan dizinin X de hiçbir yığılma noktası yoktur. Çünkü her bir $x \in X$ için öyle bir $N_{n(x)} \in \mathcal{N}(x)$ komşuluğu vardır ki

$$(x_{n(x)+1}) \cap N_{n(x)} = \emptyset$$

olur. Bu da çelişkidir. O halde X sayılabilir kompaktır.

4.2.7 Sonuç: Her dizisel kompakt uzay, sayılabilir kompaktır.

İspat: Dizisel kompakt uzayda, her dizi yakınsak bir alt diziye sahip olduğundan, bu alt dizinin yakınsadığı nokta, uzayın bir limit noktasıdır. Bir önceki teoremden uzay sayılabilir kompaktır.

Aşağıdaki örnek sayılabilir bir kompakt uzayın, dizisel kompakt olması gerekmediğini gösterir.

4.2.8 Örnek: $\mathcal{T}$, $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \dots$ kümelerinden üretilmiş $\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir topoloji olsun. A , $\mathbb{N}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi ve $n_0 \in A$ olsun. Eğer n_0 tek ise o zaman n_0+1 A 'nın bir limit noktasıdır. Eğer n_0 çift ise o zaman n_0-1 A 'nın bir limit noktasıdır. Her iki halde de A bir limit noktasına sahiptir. Bu nedenle $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ dizisel kompaktır.

Öte yandan $\mathbb{N}$ 'nin açık bir örtüsü olan

$$\mathcal{A} = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \dots\}$$

sınıfının sonlu alt örtüsü olmadığından $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ topolojik uzayı kompakt değildir. Ayrıca

$$(1,2,3,\dots)$$

dizisi, yakınsak alt dizi içermediğinden $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ topolojik uzayı dizisel kompakt değildir.

4.2.9 Teorem: Her kompakt uzay sayılabilir kompaktır.

İspat: X kompakt uzay ve A , X de hiçbir yığılma noktası olmayan bir alt küme olsun. Bu takdirde her bir $p \in X$ noktası, A uzayının en fazla bir noktasını kapsayan G_p açık kümesine aittir. $\{G_p : p \in X\}$ sınıfı, X kompakt kümesinin açık bir örtüsüdür. Bu sınıf $\{G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_m}\}$ şeklinde sonlu bir alt örtüyü kapsar. Böylece

$$A \subset X \subset G_{p_1} \cup \dots \cup G_{p_m}$$

olur. Her bir $i \in \Lambda$ için G_{p_i} , A dan en fazla bir noktayı kapsadığından

$$G_{p_1} \cup \dots \cup G_{p_m}$$

kümesinin alt kümesi olan A kümesi en fazla m tane noktayı kapsar. Yani A kümesi sonludur. Buna göre X uzayının sonsuz her alt kümesi bir yığılma noktasını kapsar. Bir önceki teoreme göre X uzayı sayılabilir kompattır.

O halde aşağıdaki diyagram verilebilir:

$$\text{Kompakt} \Rightarrow \text{sayılabilir kompakt} \Leftarrow \text{dizisel kompakt}$$

4.2.10 Önerme:

- i) Sayılabilir kompakt kümelerin sürekli görüntüsü sayılabilir kompakt olmayabilir.
- ii) Sayılabilir kompakt uzayın kapalı bir alt kümesi sayılabilir kompattır.

İspat

i) $\mathcal{T}$, $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \dots$ kümelerinden üretilmiş N pozitif tam sayılar kümesinde tanımlı topoloji olmak üzere $X = (N, \mathcal{T})$ uzayı sayılabilir kompattır. D , N üzerinde ayırtık topoloji olmak üzere $Y = (N, D)$ topolojik uzayı sayılabilir kompakt uzay değildir. Öte yandan her $n \in N$ için $2n$ ve $2n-1$ n üzerine tasvir eden

$$f : X \rightarrow Y$$

fonksiyonu süreklidir ve sayılabilir kompakt X kümesini sayılabilir olmayan Y kümesi üzerine tasvir eder.

ii) X sayılabilir kompakt, F X in kapalı bir alt kümesi ve A , F nin sonsuz altkümesi olsun.

$$F \subset X$$

olduğundan A , X in sonsuz altkümesidir. Hipotez gereğince X sayılabilir kompattır. Bu takdirde A nın X de bir p yığılma noktası vardır.

$$A \subset F$$

olduğundan p aynı zamanda F nin bir yığılma noktasıdır.

Öte yandan F kapalıdır ve bu nedenle tüm yığılma noktalarını içerir. O halde $p \in F$ dir. Böylece F nin herhangi bir sonsuz A altkümesinin bir $p \in F$ yığılma noktası olduğunu, yani F nin sayılabilir kompakt olduğunu göstermiş olduk.

4.2.11 Teorem: Eğer bir X uzayı birinci sayılabilir aksiyomunu sağlıyorsa ve sayılabilir kompaktsa, X uzayı dizisel kompaktır.

İspat: $(x_n : n \in \mathbb{N})$ sonsuz bir dizi olsun. Teorem 4.2.6 ya göre bu dizinin X gibi bir yığılma noktası vardır. X uzayı birinci sayılabilir aksiyomunu sağladığından, x noktasının komşuluğunun sayılabilir bir tabanı vardır. Bu taban elemanlarının açık ve

$$U_1 \supset U_2 \supset \dots$$

şeklinde azalan bir dizi olduğunu kabul edelim. x noktası $(x_n : n \in \mathbb{N})$ dizisinin bir yığılma noktası olduğundan, her k damgası için U_k kümesine düşecek şekilde x_{n_k} elemanını seçebiliriz.

$$(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$$

alt dizisi, x noktasına yakınsar. Gerçekten verilen N_x komşuluğu için,

$$U_k \subset N_x$$

olacak şekilde bir k sayısı vardır. Böylece

$$x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \dots$$

noktalarının tümü N_x kümesine aittir. Bu da X uzayının dizisel kompakt olduğunun tanımıdır.

4.3 Parakompaktlık

Parakompaktlık ilk kez 1944 de Dieudonne tarafından kompaktlığın genelleştirilmesi olarak verilmiştir. Bu kavram A. H. Stone tarafından her metrik uzayın parakompakt olduğunun gösterilmesi ile daha büyük önem kazanmış ve bu sonuç Bing, Smirnov ve Nagata tarafından Genel Metriklenebilme Teoreminin ispatında kullanılmıştır.

Parakompaktlık tanımı verilmeden önce bunun için gerekli olan özel tip bazı tanımlar verilecektir.

4.3.1 Tanım: X bir uzay ve $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{A}$ herhangi iki örtüsü olsun. Eğer her $B \in \mathcal{B}$ için $B \subset A$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{A}$ kümesi varsa bu $\mathcal{B}$ örtüsüne $\mathcal{A}$ nın inceltimi denir.

Bu tanımı verdikten sonra kompaktlık tanımına eşdeğer bir tanım verebiliriz: Eğer bir X uzayının her $\mathcal{A}$ açık örtüsünün X i örten sonlu açık inceltimi varsa X uzayı kompakttır.

4.3.2 Tanım: X bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer X in her noktasının $\mathcal{A}$ nın sadece sonlu sayıda elemanını kesen komşuluğu varsa $\mathcal{A}$ sınıfına yerel sonludur denir.

Eğer her bir $\mathcal{A}_n$ yerel sonlu olmak üzere

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu $\mathcal{A}$ ailesine σ -yerel sonlu denir. Eğer her bir $\mathcal{A}_n$ ailesi ayrık bir aile ise bu taktirde $\mathcal{A}$ ya σ -ayrık adı verilir.

4.3.3 Örnek:

- a) $\mathcal{A} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ topolojik uzayında yerel sonludur.
- b) $\mathcal{B} = \{(n, 2n) : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ topolojik uzayında yerel sonludur.
- c) $\mathcal{C} = \left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ topolojik uzayında yerel sonlu değildir.

4.3.4 Tanım: Eğer bir X uzayı Hausdorff ve X in her $\mathcal{A}$ açık örtüsünün X i örten bir sonlu açık yerel $\mathcal{B}$ inceltimi varsa X e parakompakt uzay denir.

4.3.5 Örnek: Herhangi bir kompakt Hausdorff uzayının parakompakt olduğu aşıkardır.

4.3.6 Örnek: Kompakt olmayan $\mathbb{R}$ -reel eksenini bir parakompakt uzaydır. $\mathbb{R}$ nin parakompakt olması gerçeği her metriklenebilir uzayın parakompakt olmasının bir sonucudur. Ancak ispat şu şekilde verilebilir:

$\mathcal{A}$, $\mathbb{R}$ nin bir açık örtüsü olsun. Her bir n tamsayısı için $[n, n+1]$ aralığını örten ve $(n-1, n+2)$ açık aralığı ile her birini kesen $\mathcal{A}$ nın sonlu sayıda elemanını seçelim. Bu şekilde tanımlanan sınıf $\mathcal{B}_n$ olsun. Bu taktirde

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_n$$

sınıfı, $\mathbb{R}$ yi örten, $\mathcal{A}$ nın yerel sonlu açık bir inceltimidir.

Parakompakt uzayın en önemli özelliklerinden biri de, bir X parakompakt uzayının, damgalı bir $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü verildiğinde $\{U_\alpha\}$ vasıtasıyla tek bir bölüntüsünün var olmasıdır.

4.3.7 Teorem: Her parakompakt uzay normaldir.

İspat: İspat bir kompakt Hausdorff uzayın aynı zamanda normal uzay olması ispatına benzer. İlk olarak düzenliliği ispatlayalım: a , X in bir noktası ve B , X in a dan ayrık kapalı bir alt kümesi olsun. Hausdorff olma koşulu, B deki her b için, kapanışı a dan ayrık olan b çevresinde açık bir U_b kümesinin seçilmesine olanak verir. X uzayını, hem $X-B$ kümesi, hem de açık U_b kümeleri ile örtelim; X i örten yerel sonlu açık $\mathcal{C}$ inceltimini alalım. $\mathcal{C}$ nin B yi kesen her elemanını içeren bir $\mathcal{D}$ alt topluluğunu oluşturalım. Bu taktirde $\mathcal{D}$, B yi örter.. Bundan başka eğer $D \in \mathcal{D}$ ise o zaman $\overline{D}$, a dan ayrıktır. Çünkü D , B yi keser. Böylece D , kapanışı a dan ayrık olan bir U_b kümesi içinde yer alır.

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$$

olsun; bu taktirde V , X de B yi içeren açık bir kümedir. Çünkü $\mathcal{D}$ yerel sonlu olup

$$\overline{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$$

olur, dolayısıyla $\overline{V}$, a dan ayrıktır. Böylece düzenlilik ispatlanmış olur.

Normalliğin ispatı için sadece a yı, kapalı A kümesi ile; Hausdorff koşulunu da düzenlilik ile yer değiştirmek yeterli olacaktır.

4.3.8 Teorem:

- a) Bir parakompakt uzayın her kapalı alt uzayı parakompakttır.
- b) Parakompakt uzayların çarpımı parakompakt olmayabilir.

İspat:

- a) Y , X parakompakt uzayının kapalı bir alt kümesi olsun. $\mathcal{A}$, Y deki açık kümelerle Y nin bir örtüsü olsun. Her bir $A \in \mathcal{A}$ için $A^* \cap Y = A$ olacak şekilde X in bir A^* açık kümesini seçelim. X uzayını, $X-Y$ açık kümesi ile beraber A^* açık kümeleri ile örtelim. X i örten bu örtünün, yerel sonlu açık inceltimi, $\mathcal{B}$ olsun.

$$C = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

topluluğu $\mathcal{A}$ nın yerel sonlu açık inceltimini gerektirir. (b) şikkını gösteren örnek aşağıdadır:

4.3.9 Örnek: R_1 parakompakttır. R_1^2 ise parakompakt değildir. Çünkü normal uzay değildir.

4.3.10 Yardımcı Teorem: Eğer X düzenli bir topolojik uzay ise o zaman aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- 1) X uzayı parakompakttır.
- 2) X in her bir açık örtüsünün yerel sonlu bir inceltimi vardır.
- 3) X in her bir açık örtüsünün kapalı yerel sonlu bir inceltimi vardır.
- 4) X in her bir açık örtüsünün açık σ -yerel sonlu bir inceltimi vardır.

(John L. Kelley General Topology sayfa:156).

4.3.11 Teorem: Her metriklenebilir uzay parakompakttır.

İspat: X bir metriklenebilir uzay olsun. Bu takdirde X in her açık örtüsünün X i örten bir açık inceltimi vardır ve sayılabilir yerel sonludur. İspat için son koşulun X in her açık örtüsünün X i örten açık bir inceltime sahip olmasını ve yerel sonlu olmasını gerektirdiğini ispatlamak gerekir ki bu da yukarıdaki yardımcı teoremin bir sonucudur.

4.3.12 Teorem: Her regüler Lindelöf uzayı parakompakttır.

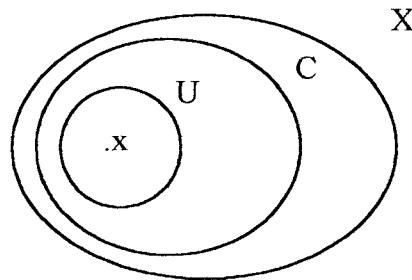
İspat: X bir regüler Lindelöf uzayı ve $\mathcal{A}$, X in bir açık örtüsü ise bu örtünün $\mathcal{A}^*$ gibi sayılabilir bir alt örtüsü vardır. bu $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}$ nın σ -yerel sonlu bir inceltimidir.

4.4 Yerel Kompaktlık

Topolojik uzaylarda öyle kavramlar vardır ki uzayın tamamında değil de uzayın belli bölgelerinde sağlanır. Bunlardan biri de yerel kompaktlıktır. Bir uzay kompakt olmadığı halde yerel olarak kompakt olabilir. Yerel kompaktlık kavramı 1924 te Tietze ve Alexandroff tarafından verilmiştir.

4.4.1 Tanım: Eğer bir X uzayının, bir x noktasının bir U komşuluğunu içeren C kompakt alt kümesi var ise o zaman bu X uzayına “ x de yerel kompakt uzay” denir

Eğer X , her bir noktasında yerel kompakt ise yani her noktasının bir kompakt komşuluğu var ise o zaman X uzayına “yerel kompakt uzay” denir.



Sekil 4.1

4.4.2 Örnek: Olağan Topoloji olan $\mathbb{R}$ reel eksenini yerel kompaktır. Her $p \in \mathbb{R}$ noktasının bir kapalı aralığa örneğin $[p - \delta, p + \delta]$ aralığına ait iç nokta olduğu ve kapalı aralığın Heine-Borel Teoreminden kompakt olduğu görülür.

Diğer taraftan $\mathbb{R}$, kompakt uzay değildir. Örneğin

$$\mathcal{A} = \{..(-3,-1),(-2,0),(-1,1),(0,2),(1,3),...\}$$

sınıfı $\mathbb{R}$ nin açık bir örtüsüdür; ancak hiçbir sonlu alt örtü içermez.

Böylece yukarıdaki örnekten de görülür ki; bir yerel kompakt uzay kompakt olmak zorunda değildir. Diğer taraftan bir topolojik uzay, noktalarının her birinin bir komşuluğu olduğundan tersi doğrudur. Bu bir önerme ile verilebilir.

4.4.3 Önerme: Her kompakt uzay yerel kompaktır. $\mathbb{Q}$ -rasyonel sayılar alt kümesi ise yerel kompakt değildir.

4.4.4 Örnek: $\mathbb{R}^n$ uzayı yerel kompaktır. x noktası

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

kompakt kümesinde içerilen

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

taban elemanında yer alır.

4.4.5 Örnek: En küçük üst sınır özelliğini sağlayan her basit sıralı X kümesi yerel kompaktır. X için verilen, X deki bir kapalı aralık tarafından kapsanan bir taban elemanı kompaktır.

5. KOMPAKTLAŞTIRMA

5.1 Kompaktlaştırma Kavramı

Verilen topolojik uzay bazı hallerde kompakt olmayabilir. Bu taktirde verilen bu uzay kompakt bir uzayın yoğun bir alt uzayına homeomorf kılınabilir.

Örneğin $\mathbb{C}$ kompleks düzlem üzerinde tanımlı kompleks analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun $z \rightarrow \infty$ için nasıl bir davranış gösterdiği araştırılırken, $\mathbb{C}$ kompleks düzlem Riemann küresinin bir alt uzayı olarak ele alınır. Öyle ki Riemann küresinin kuzey kutbu, “ ∞ ” notasyonu ile gösterilen ve “ideal nokta” diye adlandırılan noktaya karşılık getirilerek, Riemann küresi ile

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}^*$$

kümesi arasında bire-bir eşleme yapılmış olur. Bu da bize $f(z)$ fonksiyonunun “ ∞ ” noktasında nasıl bir davranış gösterdiğini inceleme imkanını verir. Bir başka elemanter örnek; $x^2 = 2$ denkleminin çözümü, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinde imkansızdır. Ancak $\mathbb{Q}$ rasyonel kümesi $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ irrasyonel sayıların eklenmesi halinde yani $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin genişlemesi durumunda, bu mümkündür.

Kompaktlaştırma kavramının altında yatan temel düşünce, yukarıdaki örneklerden de anlaşılacağı gibi, verilen topolojik uzayın genişlemesidir. Bu konudaki çalışmalar 1924’de Tietze’nin, makalesinde kullandığı “bir nokta kompaktlaştırması” kavramı ile başlamıştır. Yine 1924’de Alexandroff ve Urysohn, öncelikle kompaktlaştırmayı, sayılabilir kompakt uzayların genişlemesi olarak düşünmüşlerdir. Daha sonra 1930’da Tychonoff’un düşüncelerini daha da geliştirmiştir. Bu konudaki çalışmalar, Freudenthal (1942), Kelley (1955), Wagner (1957) ve Kowalsky (1961) ile devam etmiş ve etmektedir.

5.1.1 Tanım: Eğer X topolojik uzayı, Y topolojik uzayının bir alt uzayına homeomorfik ise X uzayına “ Y uzayına gömülüdür” denir.

Burada Y kompakt uzay ise o zaman Y ’ye “ X ’in bir kompaktlaştırması” denir.

Bir X uzayının kompaktlaştırması, genellikle X e bir veya daha fazla noktanın eklenmesiyle ve genişletilmiş uzay üzerinde uygun bir topolojinin tanımlanmasıyla elde edilir. Burada genişletilmiş uzay kompakttır ve bir alt küme olarak X içerir.

5.1.2 Örnek: U olağan topolojili $\mathbb{R}$ -reel eksenini göz önüne alalım. $-\infty$ ve ∞ ile gösterilen iki yeni noktayı $\mathbb{R}$ ye ekleyelim. Böylece elde edilen $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Genişletilmiş kümesine “Genişletilmiş Reel Eksen” denir.

R de sıralama bağıntısı herhangi

$$a \in \mathbb{R} \text{ için; } -\infty < a < \infty$$

biçiminde tanımlanarak $\mathbb{R}^*$ kümesine genişletilebilir. $\mathbb{R}^*$ ın

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

$$(a, \infty) = \{x : a < x\}$$

$$[-\infty, a) = \{x : x < a\}$$

biçimindeki alt kümelerinin sınıfı, $\mathbb{R}^*$ üzerinde bir U^* topolojisi için tabandır. $(\mathbb{R}^*, U^*)$, topolojik uzayı bir kompakt uzaydır ($\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$ kapalı sınırlı) ve bir alt küme olarak $(\mathbb{R}, U)$ topolojik uzayını kapsar. Böylece $(\mathbb{R}^*, U^*)$, $(\mathbb{R}, U)$ uzayının bir kompaktlaştırmasıdır. Olağan topolojili R-reel eksen, reel sayıların herhangi (a, b) açık aralığına homeomorfiktir. Yukarıdaki $(\mathbb{R}^*, U^*)$ uzayının klasik Heine-Borel Teoremine göre kompakt olan herhangi $[a, b]$ kapalı aralığına homeomorfik olduğu gösterilebilir.

5.2 Alexandroff Kompaktlaştırması (Tek Nokta Kompaktlaştırması)

5.2.1 Tanım: (X, τ_X) herhangi bir topolojik uzay olsun. (X, τ_X) nun Alexandroff Kompaktlaştırması veya bir nokta kompaktlaştırması, (Y, τ_Y) topolojik uzayı ile tanımlanır ve burada

$$Y = X \cup \{\infty\}$$

olup ∞ simgesi, sonsuzda bir nokta olarak adlandırılır ve X 'deki diğer her noktadan farklıdır. τ_Y aşağıdaki kümelerden oluşur.

- (1).TİP: $U = X$ üzerindeki τ_X topolojisinin her bir elemanı ($\tau_X \subset \tau_Y$)
- (2).TİP: $Y - C = X$ 'in herhangi kapalı ve kompakt alt kümesinin Y deki tümleyeni
- $$\tau_Y = \{U, Y - C : U \in \tau_X, C \subset X \text{ kompaktkapalı}\}$$

τ_Y sınıfının Y üzerinde bir topoloji olduğunu göstermemiz gerekir:

$$[T1] \quad \emptyset \in \tau_X \subset \tau_Y$$

$$Y - \emptyset = Y \in \tau_Y$$

[T2] İki kümenin kesişiminin açık olduğunun gösterilmesi üç durumun bir arada düşünülmesi ile olur.

$$U_1 \cap U_2 \in \tau_X \subset \tau_Y \quad (1)\text{-tipindedir}$$

$$(Y - C_1) \cap (Y - C_2) = Y - (C_1 \cap C_2) \in \tau_Y \quad (2)\text{-tipindedir}$$

$$U_1 \cap (Y - C_1) = U_1 \cap (X - C_1) \in \tau_X \subset \tau_Y \quad (1)\text{-tipindedir}$$

Çünkü C_1, X de kapalı olduğundan $X - C_1$ açıktır.

[T3] Benzer şekilde herhangi sayıda açık kümenin birleşiminin açık olduğu gösterilebilir:

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = U \in \tau_X \subset \tau_Y \quad (1)\text{-tipindedir}$$

$$\bigcup_{\beta} (Y - C_{\beta}) = Y - \left(\bigcap_{\beta} C_{\beta} \right) \in \tau_Y \quad (2)\text{-tipindedir}$$

$$\left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) \cup \left(\bigcup_{\beta} (Y - C_{\beta}) \right) = U \cup (Y - C) = Y - (C - U) \in \tau_Y \quad (2)\text{-tipindedir}$$

Çünkü $C - U$, U nun kapalı bir alt kümesidir ve böylece kompaktır.

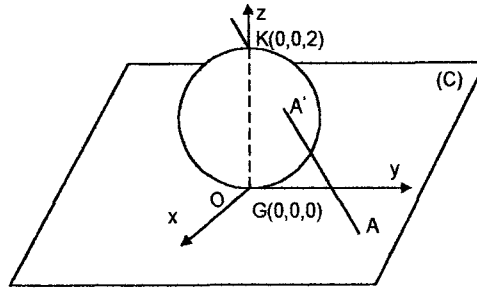
5.2.2 Örnek: R^3 -üç boyutlu öklid uzayında, (x,y) -düzlemini C olarak; yarı çapı 1, merkezi $(0,0,1)$ noktası olan küreyi de S^2 olarak tanımlayalım.

“Kuzey Kutup” $\infty = (0,0,2) \in S^2$ noktası ve herhangi bir $A \in C$ noktasından geçen doğru, şekilde görüldüğü gibi S^2 küresini ∞ noktasından farklı bir A' noktasında keser. $f(A) = A'$ olarak tanımlı

$$f : C \rightarrow S^2$$

fonksiyonu gerçekten, kompakt olmayan C düzleminde kompakt olan S^2 küresinin $S^2 - \{\infty\}$ alt kümesi üzerine homeomorfizmadır. O halde S^2 , C nin bir kompaktlaştırmasıdır.

$$K(0,0,2) = \infty \text{ olmak üzere}$$



Şekil 5.1

(X, τ_X) ve (Y, τ_Y) uzayları arasında önemli bir ilişki vardır:

5.2.3 Teorem: X yerel kompakt Hausdorff uzay; Y, X in tek nokta kompaktlaştırması olsun. O zaman

- i) Y bir kompakt Hausdorff uzaydır
- ii) X, Y nin bir alt uzayı; $Y - X$ tek noktadan oluşur ve $\overline{X} = Y$ başka bir deyişle X, Y de yoğundur.

İspat:

- i) Y nin kompakt olduğunu gösterelim:

$\mathcal{A}$, Y nin bir açık örtüsü olsun. $\mathcal{A}$ topluluğu (2)-tipindeki bir açık kümeyi, örneğin $Y - C$ yi içermeli. Çünkü (1)- tipindeki açık kümelerin hiçbiri ∞ noktasını içermez.

$\mathcal{A}$ topluluğunun diğer tüm elemanları $Y - C$ den farklıdır, X ile kesişir ve C yi örten X deki açık kümelerin bir topluluğu formundadır. C kompakt olduğundan örtünün sonlu sayıdaki elemanı da C yi örter. Karşılık gelen $\mathcal{A}$ nin sonlu eleman topluluğu, $Y - C$ elemanı ile birlikte Y nin tümünü örter.

Y nin Hausdorff olduğunu gösterelim:

x ve y , Y nin iki noktası olsun. Her ikisi de X de bulunursa, X de sırasıyla bu elemanları içeren ayrık açık U ve V kümeleri vardır. Öte yandan eğer $x \in X$ ve $y = \infty$ ise X de x in bir U komşuluğunu içeren bir C kompakt kümesini seçebiliriz. O zaman U ve $Y - C$, Y de sırasıyla x ve ∞ un ayrık komşuluklarıdır.

- ii) $X \subset Y$ ve $\overline{X} = Y$ olduğunu gösterelim:

Y nin herhangi açık kümesi verildiğinde bu açık küme ile X in kesişimi, X de açıktır. Çünkü

$$U \cap X = U \text{ ve } (Y - C) \cap X = X - C$$

kümelerinin her ikisi de X de açıktır. Ayrıca X de herhangi açık küme (1)-tipindedir ve böylece Y de açıktır. X kompakt olmadığından ∞ noktasını içeren her bir $Y - C$ açık kümesi X ile kesişir. Böylece ∞ , X in bir limit noktasıdır ve böylece $\overline{X} = Y$ dir.

5.2.4 Yardımcı Teorem: X bir Hausdorff uzayı olsun. O zaman X kümesinin x de yerel kompakt olması için gerek ve yeter koşul x in her U komşuluğu için

$$\overline{V} \text{ kompakt ve } \overline{V} \subset U$$

olacak şekilde x in bir V komşuluğunun olmasıdır.

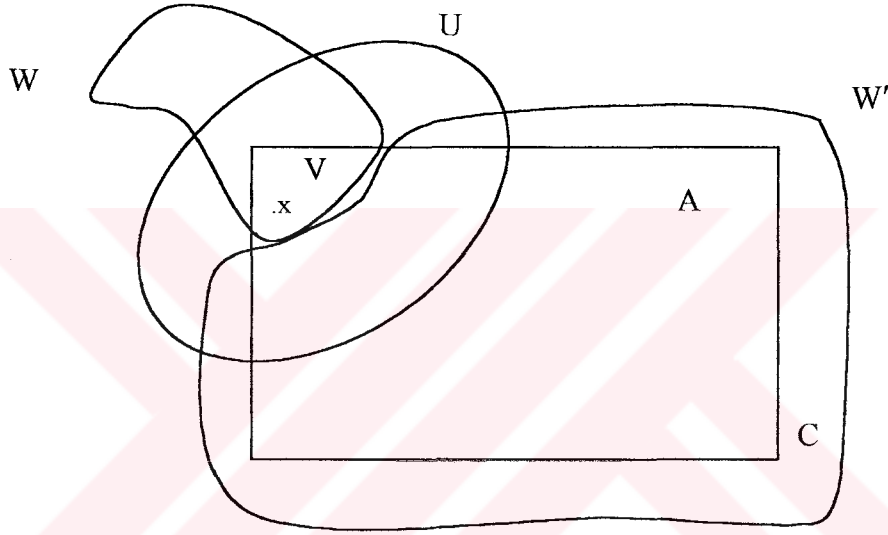
İspat:

Bu yeni formülasyonun yerel kompaktlığı gerektirdiği açıktır; $C = \overline{V}$ kümesi, x in bir komşuluğunu içeren, istenen kompakt kümedir.

Tersine; C nin, x in bir komşuluğunu içeren bir kompakt küme olduğunu varsayalım: U , x in herhangi bir komşuluğu ve $A = C - U$ olsun.

A , C de kapalı olduğundan kompakttır.

x ve A nın civarında sırasıyla W ve W' ayrık açık kümelerini seçelim:



Şekil 5.2

$$V = W \cap \overset{\circ}{C}$$

olsun. $\overset{\circ}{C}$ kümesi, C de içeren tüm açık kümelerin birleşimi idi. O halde V , x in bir komşuluğudur. X Hausdorff olduğundan C , X de kapalıdır. Böylece

$$\overline{V} \subset C$$

dir ve böylece $\overline{V}$ kompakttır. V , W de içerildiğinden W' den ayrıktır ve $\overline{V}$, A yı kesemez. Böylece

$$\overline{V} \subset C - A$$

dır. Öyle ki

$$\overline{V} \subset U$$

dır.

Eğer X , her noktasında yerel kompakt ise bu yardımcı teoremin daha basit bir ispatı mümkündür. X in Y -tek nokta kompaktlaştırmasındaki $\tilde{U}$ kümesinin kompakt olması gerçeği kullanılabilir. Sırasıyla x ve $Y - U$ nun ayrık V ve W komşuluklarını seçelim. O zaman Y deki $\bar{V}$ kompakttır ve U da içerilir.

5.2.5 Sonuç: X yerel kompakt Hausdorff uzayı ve Y , X 'in bir alt uzayı olsun. Eğer Y , X de açık veya X de kapalı ise o zaman Y yerel kompakttır.

İspat:

i) Y nin X de kapalı olduğunu varsayalım:

$y \in Y$ verilsin ve C , X deki y nin U komşuluğunu içeren, X de kompakt bir küme olsun. O zaman $C \cap Y$, C de kapalıdır böylece kompakttır ve Y deki y nin $U \cap Y$ komşuluğunu içerir.

ii) Y nin X de açık olduğunu varsayalım:

$y \in Y$ verilsin. Bir önceki yardımcı teorem gereğince $\bar{V}$ kompakt ve $\bar{V} \subset Y$ olacak şekilde X deki y nin bir V komşuluğunu seçelim. O zaman $C = \bar{V}$ kümesi Y deki y nin V komşuluğunu içeren Y de bir kompakt kümedir.

5.2.6 Sonuç: Bir X uzayının, kompakt Hausdorff uzayın bir açık alt kümesine homeomorfik olması için gerek ve yeter koşul X in yerel kompakt Hausdorff olmasıdır.

İspat: Teorem 5.2.3 ve bir önceki sonuçtan çıkar.

5.2.7 Teorem: Yerel kompakt X Hausdorff uzayının Y tek nokta kompaktlaştırması bir T_4 -uzayıdır.

İspat: Teorem 5.2.3.i gereğince kompakt Y uzayı Hausdorff uzaydır ve dolayısıyla T_1 -uzayıdır. Ayrıca Sonuç 3.6 gereğince normal uzayıdır. O halde T_4 -uzayıdır.

5.3 Stone-Čech Kompaktlaştırması

Bir X uzayını kompaktlaştırma kuralı olarak incelemiş olduğumuz tek nokta kompaktlaştırması, X in minimal kompaktlaştırmasıdır. X uzayının Stone-Čech Kompaktlaştırması ise X in maximal kompaktlaştırmasıdır.

5.3.1 Tanım: X , Y de yoğun ($\bar{X} = Y$) olacak şekilde X i içeren Y kompakt Hausdorff uzayına X uzayının bir kompaktlaştırması denir.

X in Y_1 ve Y_2 gibi iki kompaktlaştırması için eğer her $x \in X$ için $h(x) = x$ olacak şekilde bir $h : Y_1 \rightarrow Y_2$

homeomorfizması varsa Y_1 ve Y_2 kompaktlaştırmalarına “eşdeğerdir” denir.

X in bir kompaktlaştırmalarının olabilmesi için X , tam düzenli olmalıdır. Tersine her tam düzenli uzayın en az bir kompaktlaştırması vardır.

X in bir kompaktlaştırmasını elde etmenin yolu aşağıdaki gibidir:

X uzayı tam düzenli olsun. Bir Z kompakt Hausdorff uzayında X in bir

$$h : X \rightarrow Z$$

gömmesini seçelim:

X_0 , Z nin $h(X)$ alt uzayı ve Y_0 ise bu uzayın Z de kapanışı olsun. O zaman Y_0 bir kompakt Hausdorff uzaydır ve $\overline{X_0} = Y_0$ dir. Böylece Y_0 , X_0 uzayının bir kompaktlaştırmasıdır.

(X, Y) ikilisi, (X_0, Y_0) ikilisine homeomorfik olacak şekilde X i içeren bir Y uzayını oluşturalım. X den ayırık bir A kümesini, bire-bir, örten bir

$$k : A \rightarrow Y_0 - X_0$$

tasviri altında $Y_0 - X_0$ kümesine karşılık gelecek şekilde seçelim.

$$Y = X \cup A$$

olarak tanımlansın ve

$$H(x) = h(x) \quad ; \forall x \in X$$

$$H(a) = k(a) \quad ; \forall a \in A$$

koşulunu sağlayan bire-bir, örten

$$H : Y \rightarrow Y_0$$

tasviri tanımlansın. Bu taktirde Y yi Y deki U açık kümeleri ile topolojileştirmek için gerek ve yeter koşul $H(U)$ kümesinin Y_0 da açık olmasıdır H tasviri bir homeomorfizmadır ve X uzayı Y nin bir alt uzayıdır. Çünkü H tasviri, Y nin X alt uzayına kısıtlandığında h -homeomorfizmasına eşittir. Y uzayına “ h -gömmesi ile üretilmiş X uzayının kompaktlaştırması” adı verilir.

Yukarıdaki oluşumu aşağıdaki şekilde özetleyelim:

$$h : X \rightarrow Z$$

tasviri eğer, Z kompakt Hausdorff uzayında X in bir gömmesi ise yani X i Z nin bir alt kümesine tasvir ediyorsa o zaman h , X in bir Y kompaktlaştırmasını üretir ve h -gömmesinin bir

$$H : Y \rightarrow Z$$

gömmesine genişletilebilir özelliği vardır.

Genel olarak, verilen bir X uzayını kompaktlaştırmanın bir çok yolu vardır. Örneğin $X=(0,1)$ açık aralığının aşağıdaki kompaktlaştırmalarını göz önüne alalım:

5.3.2 Örnek: $\mathbb{R}^2$ 'de S^1 birim çemberini alalım ve

$$h(t) = \cos(2\pi t) \times \sin(2\pi t)$$

olacak şekilde

$$h : (0,1) \rightarrow S^1$$

tasvirini göz önüne alalım. h gömmesi ile üretilmiş kompaktlaştırma, X in tek nokta kompaktlaştırmasına denktir.

5.3.3 Örnek: $Y = [0,1]$ olsun. O zaman Y , X in bir kompaktlaştırması olup $(0,1)$ açık aralığının her bir ucuna bir nokta ekleme ile elde edilmiştir.

5.3.4 Örnek: $\mathbb{R}^2$ de $[-1,1]^2$ karesini göz önüne alalım.

$$h(x) = x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

olacak şekilde

$$h : (0,1) \rightarrow [-1,1]^2$$

tasvirini göz önüne alalım.

$$Y_0 = \overline{h(x)}$$

uzayı “topolojicilerin sinüs eğrisi”dir. h -gömmesi, diğer ikisinden oldukça farklı bir $(0,1)$ in kompaktlaştırmasını oluşturur. Bu $(0,1)$ in sağ uca bir nokta, sol uca tüm doğru parçası noktalarının eklenmesiyle elde edilir.

5.3.5 Örnek: $X = (0,1)$ olsun. Örnek 5.3.2 de verilen X in tek nokta kompaktlaştırmasını göz önüne alalım. Sınırlı sürekli

$$f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonsiyonunun bu kompaktlaştırmaya genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

limitlerinin var ve eşit olmasıdır.

Örnek 5.3.3 de göz önüne alınan X in İki Nokta Kompaktlaştırması için f -fonsiyonunun genişletilebilir olması için gerek ve yeter koşul her iki noktanın limitlerinin de var olmasıdır.

Örnek 5.3.4 ün kompaktlaştırması için fonksiyonların daha geniş bir sınıfı için genişlemeler vardır. Yukarıda gösterilen limitler var ise f in genişletilebilir olduğu kolayca görülebilir. Fakat $f(x) = \sin(\gamma_x)$ fonksiyonu aynı zamanda bu kompaktlaştırmaya genişletilebilir:

H , X alt uzayında h ye eşit olan R^2 de Y nin gömmesidir. O zaman bileşke tasvir

$$Y \xrightarrow{H} R \times R \xrightarrow{\pi_2} R$$

f -fonksiyonunun istenilen genişlemesidir. Çünkü eğer $x \in X$ ise o zaman

$$H(x) = h(x) = x \times \sin(\gamma_x)$$

$$\pi_2(H(x)) = \sin(\gamma_x)$$

sonucu çıkar. Bu kompaktlaştırmada, özel bir durum vardır:

Bileşen fonksiyonları x ve $\sin(\gamma_x)$ olan $h : (0,1) \rightarrow R^2$ gömmesi seçilerek bu kompaktlaştırma elde edilebilir. Böylece x ve $\sin(\gamma_x)$ fonksiyonlarının her ikisinin de kompaktlaştırmaya genişletilebildiği sonucuna ulaşılır. Bu sonuç, eğer $(0,1)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı sürekli fonksiyonlar sınıfına sahipsek, bir J için $(0,1)$ in R^J içine bir gömmesinin bileşen fonksiyonları olarak bu fonksiyonları kullanabileceğimiz ve o suretle sınıftaki genişletilebilir her fonksiyon için bir kompaktlaştırma elde edebileceğimiz fikrini uyandırır.

Bu fikir Stone-Çech kompaktlaştırmasındaki temel fikirdir. Bu aşağıdaki gibi tanımlıdır:

5.3.6 Tanım: X , bir tam düzenli uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı, sürekli reel değerli fonksiyonların sınıfı, Λ damga kümesi olmak üzere $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ olsun. Her bir $\alpha \in \Lambda$ için $f_\alpha(X)$ i içeren, R de bir kapalı I_α aralığını seçelim:

$$I_\alpha = [\inf f_\alpha(X), \sup f_\alpha(X)]$$

Bu taktirde

$$h(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in \Lambda}$$

olmak koşulu ile

$$h : X \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$$

tasviri tanımlanır.

Herhangi sayıdaki kompakt uzayın çarpımının kompakt olduğunu ifade eden Tychonoff Teoreminden dolayı

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$$

kompakttır. X tam düzenli olduğundan, $\{f_\alpha\}$ sınıfı noktaları X deki kapalı kümelerden ayırır. Böylece h bir gömmedir. X in h ile üretilen kompaktlaştırması, X in Stone-Čech kompaktlaştırması adını alır ve $\beta(X)$ ile tanımlıdır.

Stone-Čech kompaktlaştırmasının önemli bir özelliği aşağıdaki genişleme özelliğidir.

5.3.7 Teorem: X tam düzenli uzay, $\beta(X)$ X in Stone-Čech kompaktlaştırması olsun. Bu taktirde X üzerindeki her sınırlı sürekli reel değerli fonksiyon tek olarak $\beta(X)$ üzerinde bir sürekli reel değerli fonksiyona genişleyebilir.

İspat: $\beta(X)$ kompaktlaştırması yukarıdaki gibi tanımlı $\alpha \in \Lambda$ için

$$h : X \rightarrow \prod I_\alpha$$

gömmesi ile üretilebilir. Bunun anlamı $\beta(X)$ kompaktlaştırmasının, X alt uzayına sınırlandırıldığında h gömmesine eşit bir

$$H : \beta(X) \rightarrow \prod I_\alpha$$

gömmesinin olmasıdır. X üzerinde bir sürekli, sınırlı, reel değerli fonksiyon verildiğinde bu fonksiyon bir $\beta \in \Lambda$ için f_β ye eşittir. Burada eğer

$$\pi_\beta : \prod I_\alpha \rightarrow I_\beta$$

tasviri β . koordinat üzerine izdüşüm ise o zaman

$$\pi_\beta \circ H : \beta(X) \rightarrow I_\beta$$

bileşke tasviri f_β nin istenen genişlemesidir. Çünkü eğer $x \in X$ ise

$$\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha \in \Lambda}) = f_\beta(x) \text{ olur.}$$

Gelişmenin tekliği aşağıdaki yardımcı teoremin sonucudur:

5.3.8 Yardımcı Teorem: $A \subset X$ ve

$$f : A \rightarrow Z$$

A nın Z -Hausdorff uzayı içine sürekli bir tasvir olsun. f nin sürekli bir

$$g : \bar{A} \rightarrow Z$$

fonksiyonuna, en çok bir genişlemesi vardır.

İspat: f nin iki farklı genişlemesinin

$$g, g' : \bar{A} \rightarrow Z$$

olduğunu varsayalım

$$g(x) \neq g'(x)$$

olacak şekilde x seçelim. U ve U' sırasıyla $g(x)$ ve $g'(x)$ in ayrık komşulukları olsun.

$$g(V) \subset U \text{ ve } g'(V) \subset U'$$

olacak şekilde x in bir V komşuluğunu seçelim. Burada V , bir y noktasında A yı keser. O zaman

$$g(y) \in U \text{ ve } g'(y) \in U'$$

olur. Oysa $y \in A$ olduğundan

$$g(y) = f(y) \text{ ve } g'(y) = f(y)$$

dır. Bu da U ve U' nün ayrık olması gerçeği ile çelişir.

Burada Stone-Čech Kompaktlaştırması'nın tekliği ve genişleme özelliği ile karakterize edilmesi anlamına gelen esas teoremi ispatlayalım:

5.3.9 Teorem: X tam düzenli uzay olsun. Y_1 ve Y_2 , Teorem 5.3.7 de verilen genişleme özelliğine sahip X in iki kompaktlaştırması olsun. O zaman her $x \in X$ için

$$\Phi(x) = x$$

olacak şekilde Y_1 ve Y_2 üzerine bir Φ homeomorfizması vardır.

İspat:

1.adım: Bu adımda önce şu gerçeği ispatlayalım:

Y nin Teorem 5.3.7 de ifade edilen genişleme özelliğini sağlayan X in bir kompaktlaştırması olduğunu varsayalım. Eğer Z , herhangi kompakt Hausdorff uzay ve

$$g: X \rightarrow Z$$

herhangi sürekli fonksiyon ise o zaman g , Y yi Z nin içine tasvir eden sürekli bir k fonksiyonuna genişletilebilir.

Bu gerçeği ispatlamak için Z nin tam düzenli olduğunu öyle ki bir J için $[0,1]^J$ de gömülebilir olduğunu belirtelim. Böylece

$$Z \subset [0,1]^J$$

olması da farz edilebilir. Burada

$$g: X \rightarrow Z \subset [0,1]^J \subset \mathbb{R}^J$$

olduğunu göz önüne alalım. g tasvirinin her bir g_α bileşen fonksiyonu X üzerinde sürekli, sınırlı, reel değerli bir fonksiyondur. Hipotez gereği g_α , Y nin $\mathbb{R}$ içine bir k_α sürekli tasvirine genişletilebilir.

$$k(y) = (k_\alpha(y))_{\alpha \in J}$$

olacak şekilde

$$k : Y \rightarrow R^J$$

tasviri tanımlansın. R^J çarpım topolojisine sahip olduğu için k tasviri süreklidir. Burada k nın gerçekten Y yi Z alt uzayı içine tasvir ettiği ileri sürülebilir. Çünkü $g(X)$, Z tarafından kapsanır ve

$$k(X) = g(X)$$

dır. Z , R^J de kapalı olduğundan

$$\overline{k(X)} \subset Z$$

olduğu sonucu çıkar. k nın sürekliliğinden

$$k(Y) = \overline{k(X)} \subset \overline{k(Y)}$$

yazılabilir. Böylece k , Y yi Z içine tasvir eder.

2.adım: Bu adımda teoremi ispatlayalım:

$$j_2 : X \rightarrow Y_2$$

kapsama tasvirini göz önüne alalım. Bu j_2 tasviri, X in Y_2 kompakt Hausdorff uzayı içine sürekli bir tasvirdir. Y_1 , genişleme özelliğine sahip olduğundan 1.adımdan j_2 tasviri sürekli bir

$$f_2 : Y_1 \rightarrow Y_2$$

tasvirine genişletilebilir. Benzer şekilde Y_2 genişleme özelliğine sahip olduğundan ve Y_1 kompakt Hausdorff uzay olduğundan j_1 kapsama tasvirini sürekli bir

$$f_1 : Y_2 \rightarrow Y_1$$

tasvirine genişletebilir.

$$\begin{array}{ccc} X \subset Y_1 & & \\ \downarrow j_2 & \searrow f_2 & \\ & Y_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \subset Y_2 & & \\ \downarrow j_1 & \searrow f_1 & \\ & Y_1 & \end{array}$$

$$f_1 \circ f_2 : Y_1 \rightarrow Y_1$$

bileşkesi, her $x \in X$ için

$$f_1(f_2(x)) = x$$

özelliğine sahiptir. Dolayısıyla $f_1 \circ f_2$,

$$i_x : X \rightarrow X$$

özdeşlik tasvirinin sürekli bir genişlemesidir. Öte yandan Y_1 in özdeşlik tasviri aynı zamanda i_x in sürekli bir genişlemesidir. Bir önceki yardımcı teoremden verilen genişlemenin tekliğinden $f_1 \circ f_2$, Y_1 in özdeşlik tasvirine; benzer şekilde $f_2 \circ f_1$, Y_2 nin özdeşlik tasvirine eşittir. Böylece f_1 ve f_2 homeomorfizmalardır.



6. SONUÇ

Bu çalışmada, Topolojik Uzaylarda kompakt olmayan bir uzayın kompaktlaştırılması ve kompaktlaştırma türleri olarak Alexandroff Kompaktlaştırması ile Stone-Čech Kompaktlaştırması incelenmiştir. Kompaktlaştırma kavramının anlaşılabilmesi için bazı temel tanım ve teoremlerin yanı sıra kompakt uzaylar üzerinde de durulmuş olup; kompakt uzayların alt uzayları, çarpımları ve sürekli görüntüleri ile ilgili teoremler verilmiş, ayrıca kompaktlık türleri de ayrıntılı olarak incelenmiştir.



KAYNAKLAR

- Dönmez A., (2000), Metrik Ve Topolojik Uzaylar, Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., İstanbul.
- Gemignani, M.C., (1962), Elementary Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London.
- Kelley, J.L., (1955), General Topology, D. Van Nostrand Company, Inc., New York.
- Lipschutz, S., (1965), Theory And Problems Of General Topology, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Munkres, J.R., (1975), Topology A First Course, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Yıldız, C., (1999), Genel Topoloji, Gazi Üniversitesi Basımevi, Ankara.
- Walker, R.C., (1974), The Stone Čech Compactification, Springer-Werlag Berlin Heidelberh, New York.
- Willard, S., (1970), General Topology, Addison –Wesley Publishing Company, Inc., London.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 08.01.1977

Doğum Yeri İSTANBUL

Lise 1991-1994 Yeşilköy 50. Yıl Lisesi

Lisans 1995-1999 Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Y.lisans 2000-2002 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri

Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Çalıştığı Kurum

2000-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi