

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİE GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL
SİSTEMLERİNİN GÖZLENEBİLİRLİĞİ

106359

Matematik Öğr. Saim SAKALLI

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

106359

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ayşe KARA

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU

Doç. Dr. Ömer GÖK

İSTANBUL, 2001

Yrd. Doç. Dr. Ayşe KARA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. MANİFOLD	3
2.1 Diferansiyellenebilir Manifold	3
2.1.1 Tanım.....	3
2.1.2 Uyarı.....	3
2.1.3 Tanım.....	3
2.1.4 Tanım.....	4
2.1.5 Tanım.....	4
2.1.6 Tanım.....	4
2.2 Lie Parantezinin Özellikleri.....	4
2.2.1 Tanım.....	5
2.3 Lie Grupları.....	5
2.3.1 Tanım.....	5
2.3.2 Tanım.....	6
2.3.3 Tanım.....	7
2.4 Lie Cebiri.....	7
2.4.1 Lie Cebirine Ait Örnekler.....	7
2.4.2 Lie Grubu Ve Lie Cebirine Ait Örnekler.....	8
2.5 Üstel Tasvir.....	11
2.5.1 Tanım.....	11
2.5.2 Teorem.....	11
2.6 Adjoint Gösterilim.....	15
2.6.1 Tanım.....	15
2.7 Lie Türevi.....	16
2.7.1 Tanım.....	16
3 GENEL KONTROL SİSTEMLERİ.....	19
3.1 Giriş.....	19
3.1.1 İlk Tanım.....	19
3.1.2 Uyarılar.....	19
3.1.3 Tanım.....	20
3.1.4 Uyarılar.....	20
3.2 Kontrol Edilebilirlik.....	21
3.2.1 Tanım.....	21
3.2.2 Teorem (Yörünge Teoremi)	21
3.3 Gözlenebilirlik.....	21
3.3.1 İkinci Tanım.....	21
3.3.2 Tanım.....	21

3.3.3	Uyarı.....	22
3.3.4	Tanım.....	22
3.3.5	Örnekler.....	22
4	LİNEER GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN GÖZLENEBİLİRLİĞİ.....	28
4.1	Giriş.....	28
4.2	Gözlenebilirlik.....	30
4.3	Önerme.....	30
4.4	Önerme	32
4.5	Önerme	33
4.6	Teorem.....	34
4.7	Teorem.....	35
4.8	Örnekler.....	36
5	SONUÇLAR.....	39
KAYNAKLAR.....		40
ÖZGEÇMİŞ.....		41

ÖNSÖZ

Tez konusunun seçimindeki katkılarından, araştırmanın her aşamasında verdiği yönlendirici destekten, kaynak bulma ve araştırmanın sonuca ulaşmasındaki yardımlarından dolayı Yrd. Doç.Dr. Ayşe KARA'ya, yazılım aşamasındaki katkılarından dolayı değerli arkadaşım Serdar ALİCURA'ya teşekkür ederim.

Saim SAKALLI
Haziran, 2001



ÖZET

“Lie grupları üzerinde Lineer Kontrol Sistemlerinin Gözlenebilirliği” adlı bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

I. bölümde diferansiyellenebilen manifold, Lie parantezi, Lie grupları, Lie cebiri , üstel tasvir Adjoint Gösterim ve Lie Türevi incelenmiştir.

II. bölümde genel kontrol sistemlerinin tanımı, kontrol edilebilirliği ve gözlenebilirliği hakkında genel bilgiler ve örnekler verilmiştir.

III. bölümde ise Lie grupları üzerindeki Lineer Kontrol Sistemleri için yerel gözlenebilirliği ve global gözlenebilirliği karakterize eden cebirsel koşullar incelenmiştir.



ABSTRACT

This thesis with the title “Observability of Linear Control Systems on Lie Groups” consists of three chapters.

In the chapter I; differentiable manifold, Lie bracket , Lie groups , Lie algebras, exponential map, adjoint representation and Lie derivative have been studied.

In the chapter II; the definition of general control systems, general information about their controllability and observability and examples have been given.

In the chapter III; algebraic conditions which characterize local and global observability of linear control systems on Lie groups have been studied.



1 GİRİŞ

Bu tezin amacı matematiksel bakış açısından Lie grupları üzerinde lineer kontrol sistemleri için yerel ve global gözlenebilirliği karakterize eden cebirsel koşulların bulunduğu çalışmanın incelenmesidir. “Lie grupları üzerinde lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği” ni incelemek için Topoloji, Lie grupları, Lie cebiri, Üstel tasvir, Adjiont gösterim, Lie türevi, Diferansiyel geometriden yararlanıldı.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. I. Bölümde diferansiyellenebilen manifold, Lie grupları, Lie cebiri, Üstel tasvir, Adjiont gösterim, Lie türevi konuları incelendi. Bu konularla ilgili örnekler verildi. II. Bölümde kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği ve gözlenebilirliği hakkında bilgi verildi. III. Bölümde ise Lie grupları üzerinde lineer kontrol sistemlerinin yerel ve global gözlenebilirliği için cebirsel koşullar bulundu.

$G, L(G)$ Lie cebirli bağlantılı bir Lie grubu olsun. Bu kısımda, G üzerinde bir Σ lineer kontrol sistemi aşağıdaki tarzda belirlenmiştir:

$$\Sigma = (G, D, h, V)$$

Burada, D

$$\dot{g}(t) = X(g(t)) + \sum_{j=1}^m u_j(t) Y^j(g(t))$$

$$y = h(g) \in V, \quad u \in U$$

diferansiyel denklemlerin ailesi ile üretilen vektör alanlarının bir kümesidir. X vektör alanı G nin sonsuz küçük(infinitesimal) bir otomorfizmidir. $Y^1, \dots, Y^m \in L(G)$ leri sağ-invariant vektör alanları olarak göz önüne alınıyor ve u kısıtlanmayan parçalı sabit kontrollerin sınıfı olan U nun bir elemanı, yani $u \in U$ dur. V çıkış uzayı bir Lie grubudur ve çıkış tasviri

$$h : G \rightarrow V$$

Lie gruplarının bir homomorfizmidir.

Teorem 3.3 de $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde $I = \tilde{e}$

a) $I, \text{Ker}(h)$ 'nin normal, kapalı bir lie alt grubudur.

b) I, G_{Σ} -invariant olduğu ispatlanmıştır.

Teorem 3.4 de $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. o takdirde $I, L(G)$ 'nin X -invariant alt cebir Yani

$\text{ad}^i(X)(I) \subset I, \quad \forall i \geq 0$ olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.5 de $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi ve n , G 'nin boyutu olsun.

$T = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{ad}^{-i}(X)(\kappa)$ eşitliği gösteriliyor.

Teorem 3.6 da $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde, Σ *yerel gözlenebilirdir* $\Leftrightarrow T = 0$ olduğunu ispatlanıyor.

Teorem 3.7 de $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. o takdirde, Σ *gözlenebilirdir*. $\Leftrightarrow$

$T = 0$ ve $\text{Fix}(T) \cap \text{Ker}(h) = \{e\}$ olduğunu ispatlanıyor Burada, $\text{Fix}(T)$ G deki sabit noktaların kümesidir.



2 MANİFOLD

n boyutlu yerel Euclid uzayı M , her bir noktasının komşuluğu R^n Euclid uzayının açık bir alt kümesine homeomorfik olan bir Hausdorff topolojik uzayıdır.

$U \subset M$ açık kümesinin R^n 'nin açık alt kümesine homeomorfik olmasını sağlayan ϕ tasvirine koordinat tasviri adı verilir (u, ϕ) ikilisinde koordinat sistemi denir ve $x_i = r_i \circ \phi$ fonksiyonları koordinat fonksiyonları olarak adlandırılır ve $r_i : R^n \rightarrow R$, $r_i(a) = a_i$, $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ olduğunda da $(u, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ şeklinde gösterilir.

2.1 Diferansiyellenebilir Manifold

M bir yerel Euclid uzayı ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, M 'nin açık kümeler koleksiyonu olsun. $\alpha \in \Lambda$ (Λ : indis kümesi)

$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} = S$ olmak üzere,

1. $\{\cup U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} = M$
2. Her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \in C^\infty$
3. S koleksiyonunun maksimal ise M ye diferansiyellenebilir manifold denir.

2.1.1 Tanım

$f: U \subset R^n \rightarrow R$, yani $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = y$, $f(x) = y$ olmak üzere $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$) k .

mertebeden türevleri U kümesi içerisinde sürekli ise f fonksiyonuna C^k sınıfındandır denir. Eğer f fonksiyonu türevleri vasıtasıyla bir kuvvet serisi ile ifade edilebiliyorsa C^∞ sınıfındandır denir. $k=\infty$ ise fonksiyon C^∞ sınıfındandır denir.

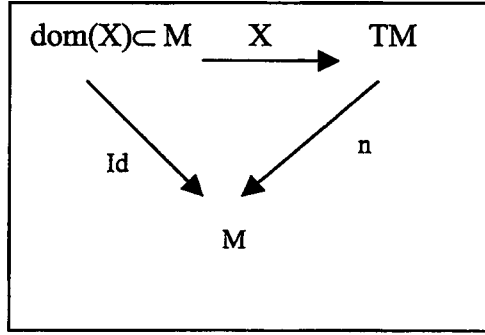
2.1.2 Uyarı : n boyutlu M manifoldunun tanjant demeti $2n$ boyutludur. $TM = \cup T_p M$ ($p \in M$) dir.

2.1.3 Tanım: $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin oluşturduğu tasvir $x : C^\infty(M) \rightarrow R$ dir. X vektör alanının

1. $X(f+g) = X(f) + X(g)$

2. $X(f.g)_p = Xf.g(p) + f(p).Xg$ özelliklerini sağladığını kabul edelim. T_pM 'nin boyutu M manifoldunun boyutuna eşittir.

2.1.4 Tanım : M deki açık $\text{dom}(X)$ üzerinde tanımlı bir X vektör alanı özdeşliğin bir liftingidir (yani kaldırmasıdır).



Burada gösterilmek istenen $n(p,v) = p$ olduğudur. $X(p) \in T_pM$, her $p \in \text{dom}(X)$ bir vektör alanı ve f fonksyonu için yeni fonksiyon $\tilde{X}(f)(p) = X(p).(f)$ $p \in M$ dir.

2.1.5 Tanım: Verilen X, Y vektör alanları için $\tilde{X} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, X vektör alanının genişlemesi şeklinde tanımlıdır.

2.1.6 Tanım: iki vektör alanının Lie parantezi yine bir vektör alanıdır.

$$[X, Y](p)(f) = X_p(\tilde{Y}(f)) - Y_p(\tilde{X}(f)) \quad (1.1)$$

NOT: Matris grupları üzerindeki Lie parantezi X ve Y vektör alanı olmak üzere $[X, Y] = XY - YX$ şeklinde tanımlıdır.

2.2 Lie Parantezinin Özellikleri

1- $[X, X] = 0$ yansımalıdır.

2- $[X, Y] = -[Y, X]$ ters simetriktir.

3- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ Jacobi özdeşliği sağlar.

2.2.1 Tanım

C^∞ sınıfından iki tane diferansiyellenebilir manifoldun bileşkesi yine diferansiyellenebilir bir manifold oluşturur.

$M: C^\infty - m$ manifold

$N: C^\infty - n$ manifold

$\psi: M \rightarrow N$ tasviri (1.2)

$m \rightarrow \psi(m) \in N$ şeklinde tanımlansın. (1.3)

$(U, \varphi) \rightarrow (v, \tau) \quad \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \tau = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ (1.4)

$T_m(M) \rightarrow T_{\psi(m)}(N)$ (1.5)

$c^\infty(M, m, R) \rightarrow c^\infty(N, \psi(m), R)$ (1.6)

$d_{\psi(m)}: T_m(M) \rightarrow T_{\psi(m)}(N)$ (1.7)

$v \rightarrow d_{\psi(m)}(V) \in T_{\psi(m)}(N)$ (1.8)

$d_{\psi(m)}(V)g = V(g \circ \psi)_m$ (1.9)

2.3 Lie Grupları (Varadarajan, 1974)

Lie grubu hem manifold hemde grup yapısına sahip olan bir düzendir.

2.3.1 Tanım: G , eğer grup yapısında olan bir diferansiyellenebilir manifold ve $G \times G \rightarrow G$ 'ye $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma \cdot \tau^{-1}$ tasviri pürüzsüz (smooth) diferansiyellenebilir bir tasvirse Lie grubu olarak adlandırılır.

Not : G bir Lie grubu olsun. O zaman $\tau \rightarrow \tau^{-1}$ tasviri ile gösterilen bu ifade diferansiyellenebilirdir. Çünkü, bu diferansiyellenebilir birleşim $\tau \rightarrow (e, \tau) \rightarrow \tau^{-1}$ şeklinde ifade edilir.

Burada e, G Lie grubunun birim elemanıdır. $G \times G \rightarrow G$ 'ye $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma \cdot \tau$ şeklinde tanımlıysa diferansiyellenebilirdir. Çünkü, bu diferansiyellenebilir birleşim $(\sigma, \tau) \rightarrow (\sigma, \tau^{-1}) \rightarrow \sigma \cdot \tau$ şeklindedir.

Genel lineer grup, uniter grup, ortogonal grup ve özel lineer grup bilinen Lie grubu örnekleridir.

Örnek 1: Genel lineer grup $G=GL(n,R)$, $n \times n$, tersi olan matrislerin oluşturduğu grup lineer bir Lie grubudur.

Örnek 2: Kompleks, 2×2 matrislerden oluşan ve determinantı 1, ters matrisi transpozisinin eşleniği olan matrislerin grubu $SU(2,C)$ bir Lie grubudur.

Örnek 3: $S^1=R/Z$, S^{-1} 'in bir Lie grubudur.

Örnek 4: Diğer klasik Lie grupları aşağıdadır:

a- Uniter grup $U(n,C)$: Bu gruplar kompleks datalı $n \times n$ boyutlu matrislerdir ve tersi transpozisinin eşleniğidir.

$$U(n,C)=\{A: \bar{A}^t = A^{-1}\} \quad (1.10)$$

b- $SU(n)$ özel üniter grup: $U(n)$ 'in determinantı 1 olan alt grubudur.

$$SU(n) = \{A: \bar{A}^t = A^{-1} \text{ ve } \det A=1\} \quad (1.11)$$

c- $O(n,r)$ ortogonal grup: Reel datalı $n \times n$ boyutlu ve tersi transpozesi olan

$$O(n,R) = \{A: A^t = A^{-1}\} \quad (1.12)$$

şeklindeki gruplardır.

d- $SO(n)$ özel ortogonal grup: $O(n)$ 'nin determinantı 1 olan alt grubudur.

$$SO(n) = \{A: A^t = A^{-1} \text{ ve } \det A=1\} \quad (1.13)$$

2.3.2 Tanım

G bir Lie grubu ve $\tau \in G$ olmak üzere $\ell_\sigma : G \rightarrow G$

$\ell_\sigma(\tau) = \sigma\tau$ ile tanımlı ℓ_σ tasvirine sol dönüşüm denir.

Bunun türevi $d\ell_\sigma(T_\tau(G)) \subset T_{\sigma\tau}G$ dir.

$d\ell_\sigma: T(G) \rightarrow T(G)$ ' dir.

2.3.3 Tanım

Eğer her $\sigma \in G$ için $X \circ \ell_\sigma = d\ell_\sigma(X)$ ise X vektör alanı G üzerinde sol invariant vektör alanıdır denir.

2.4 Lie Cebiri

Bir K cismi ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) üzerindeki bir g vektör uzayına, eğer onun vektör uzayı yapısına ek olarak $\tilde{g} \times \tilde{g} \rightarrow \tilde{g}$ tasviri (X, Y) çiftini $\tilde{g}$ 'nin $[X, Y]$ elemanına götürüyorsa ve aynı zamanda aşağıdaki özelliklere sahipse Lie Cebiri'dir denir.

1) K üzerinde ikili lineer

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]$$

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2]$$

2) $[X, Y] = -[Y, X]$ Ters simetri

3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ Jacobi özdeşliği

Lie cebiri kavramının önemi her bir Lie grubu ile birleştirilmiş özel sonlu boyutlu bir Lie cebiri vardır ve Lie grubunda onun Lie cebirine ait özellikleri yansır. Herhangibir G Lie grubunun Lie cebirinin sol invariant vektör alanlarının uzayı olarak veya birim elemandaki tanjant uzayı olarak alabiliriz.

2.4.1 Lie Cebirine Ait Örnekler

1- M manifoldu üzerindeki tüm diferansiyellenebilen vektör alanlarının oluşturduğu vektör uzayı, vektör alanları üzerinde Lie parantezi altında Lie cebiri tanımlar.

2- Tüm parantezler “0” denk alındığında herhangi bir vektör uzayı Lie cebiri haline gelir.

3- $[A, B] = AB - BA$ işlemi ile tüm $n \times n$ boyutlu matrislerin vektör uzayı bir Lie cebiridir.

UYARI: Bir Lie grubunun Lie cebiri, G üzerindeki sol invariant vektör alanlarının oluşturduğu uzaya izomorfiktir. Alternatif olarak G 'nin Lie cebiri $T_e(G)$ ile de izomorfiktir. Etkisiz eleman yardımıyla sol dönüşümü kullanalım. $L_a: G \rightarrow G$, $L_a(g) = ag$ tasviri a 'nın sol dönüşümüdür.

$d L_a(T_e(G)) \subset T_{ag}(G)$ olmak üzere $d L_a: T(G) \rightarrow T(G)$ dir.

2.4.2 Lie Grubu ve Lie Cebirine Ait Örnekler

a) R 'yi Lie Grubu olarak alabiliriz. Sol invariant vektör alanlarını

$\left\{ \lambda \left(\frac{d}{dr} \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ şeklinde basit olarak yazabiliriz. Böylece herhangi iki vektör alanının Lie parantezinin sıfır olduğunu söyleyebiliriz.

b) 3 boyutlu Heisenberg grubu

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.14)$$

şeklindedir.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (1.15)$$

alalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için G 'ye ait bir nokta $\gamma(t)$, G üzerinde bir eğridir. Öyleki

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \quad (1.16)$$

dir.

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X \in T_e(G) \quad (1.17)$$

olur.

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (1.18)$$

olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ için G 'ye ait bir nokta $\alpha(t)$ 'de G üzerinde bir eğridir.

Öyle ki

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \quad (1.19)$$

dir.

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \in T_e(G) \quad (1.20)$$

olur.

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (1.20)$$

olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ için, G 'ye ait bir nokta, $\beta(t)$ de G üzerinde bir eğridir. Öyle ki;

$$\beta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \quad (1.21)$$

dir.

$$\beta'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \in T_e(G) \quad (1.22)$$

dir.

$$T_e(G) \cong \tilde{g} = \text{geren}_{L.A.} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (1.23)$$

$$[X, Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \quad (1.24)$$

$$[X, Z] = XZ - ZX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.25)$$

$$[Y, Z] = YZ - ZY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.26)$$

$$i) [\alpha_1 X + \alpha_2 Z, Y] = \alpha_1 [X, Y] + \alpha_2 [Z, Y] \quad (1.27)$$

$$ii) [X, Y] = -[Y, X] \quad (1.28)$$

$$iii) [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (1.29)$$

özelliklerini sağladığından 3 boyutlu Heisenberg grubu bir Lie cebiridir.

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \text{geren}_{\text{L.A}} \{X, Y\} \quad (1.30)$$

2.5 Üstel Tasvir

Sol invariant vektör alanlarının uzayı olarak veya birim elemandaki tanjant uzayı olarak G' nin $\tilde{\mathfrak{g}}$ Lie cebirini gördükten sonra şimdi de bir parametrelili alt grupların kümesi olarak Lie cebirinin üçüncü tanımını verelim.

2.5.1 Tanım

G Lie grubu ve $\tilde{\mathfrak{g}}$ onun Lie cebiri olsun. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ ye bir homomorfizma G' nin bir parametrelili alt grubu olarak adlandırılır ve burada, $\lambda \frac{d}{dr} \rightarrow \lambda X$ $\mathbb{R}'$ den $\tilde{\mathfrak{g}}$ içine bir homomorfizma dır. $\mathbb{R}$ basit bağlantılıdır, 1- parametrelili tek bir alt grubu mevcuttur.

$\exp_x: \mathbb{R} \rightarrow G$ öyleki $d\exp_x \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X$ dir.

$t \rightarrow \exp_x(t)$ şeklinde olan G' nin 1- parametrelili tek alt grubunun tanjant uzayı 0 noktasında $X(e)$ ' yi verir. Üstel fonksiyon ;

$\exp: \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow G$ şeklinde ifade edilir ve

$$\exp(X) = \exp_x(1) \quad (1.31)$$

dir.

2.5.2 Teorem

X, G Lie grubunun $\tilde{\mathfrak{g}}$ Lie cebirine ait olsun. Buradan,

- 1) $\exp(tX) = \exp_x(t), t \in \mathbb{R}$
- 2) $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp(t_1X)) (\exp(t_2X)), \forall t_1, t_2$
- 2) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$ olduğu gösterilebilir.

İspat:

1) φ ve ψ , R 'den G 'ye , $\psi(t) = \exp_{sX}(t)$ ve $\varphi(t) = \exp_X(st)$ şeklinde tanımlayalım. Burada $s \in R$ dir. sX 'in tek integral eğrisi ψ dir ve ki $\psi(0) = e$ dir.

$$d\varphi\left(\frac{d}{dt}\right) d\exp_X\left(s\frac{d}{dt}\right) = sX|_{\exp_X(st)} \quad (1.32)$$

dir.

Böylece φ , sX 'in integral eğrisidir ve $\varphi(0) = e$ dir. İntegral eğrileri tek olduğundan $\varphi = \psi$ dir. Böylece $\exp_{sX}(t) = \exp_X(st)$, $(s,t \in R; X \in \tilde{g})$ olur.

Yukardaki eşitlikte $t=1$ alalım ve s ile t nin yerini değiştirelim.

$$\exp_{sX}(1) = \exp_X(s) \quad (1.33)$$

elde ederiz

2) Burada $\exp_X$, R 'den G 'ye homomorfizmadır.

$$\exp(t_1+t_2)X = \exp_X(t_1+t_2) = \exp_X t_1 \cdot \exp_X t_2 = \exp(t_1 X) \exp(t_2 X) \quad (1.34)$$

şeklinde kolayca gösterilebilir.

$$3) \exp(-tX) = \exp_X(-t) = (\exp_X(t))^{-1} = \exp(tX)^{-1} \quad (1.35)$$

Örnek 1:

A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. $\varphi : R \rightarrow GL(n, R)$ tasviri

$$\varphi(t) = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \exp(tX) \quad (1.36)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $\exp(tX) = \exp_X(t)$ 'dir. $\exp_X$, R 'nin bir homomorfizmasıdır. $d\varphi(0) = A$ 'dır. φ , $GL(n, R)$ 'nin 1-parametrelili alt grubudur. Böyle bir matris grubu için üstel fonksiyon tasviri

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (1.37)$$

bulunur. Bütün matrislerin vektör uzaylarının alt uzayları Lie cebiridir.

Örnek 2:

G , 3 boyutlu Heisenberg grubu olsun ve $\tilde{g}$ onun Lie cebiri olsun.

$$\exp : \tilde{g} \rightarrow G$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{g} \quad (1.38)$$

$X^2 = 0$ olmak üzere ;

$$\exp(tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} \quad (1.39)$$

$$(tX)^2 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0 \Rightarrow \exp(tX) = I + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

dir.

Buradan ;

$$\exp X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

bulunur.

Örnek 3:

$\tilde{h}$, n boyutlu antisimetrik reel matrislerin vektör uzayı olsun.

$$\tilde{h} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\} \quad (1.42)$$

Eğer ; $A, B \in \tilde{\mathfrak{h}}$ ise

$$[A, B] + [A, B]^t = 0 \quad (1.43)$$

olduğu kolayca görülür.

$[A, B] \in \tilde{\mathfrak{h}}$ ve $\tilde{\mathfrak{h}}(M_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$ nin Lie cebiridir.

$\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ üstel fonksiyonuna uygundur:

Her $A \in \tilde{\mathfrak{h}}$ için $\exp A$, $O_n(\mathbb{R})$ ortogonal matrislerin Lie grubu da kapsar.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid PP^t = \text{Id}\} \quad (1.44)$$

dir.

Gerçekten, buradan $AA^t = A^tA$ yazabiliriz.

$$\text{Id} = e^{A+A^t} = e^A (e^A)^t \quad (1.45)$$

elde edilir.

Özellikle, eğer $O_n(\mathbb{R})$ deki birim eleman bağlantılı parçasını $SO_n(\mathbb{R})$ ile gösterirsek

$$T_{\text{id}} SO_n(\mathbb{R}) = \tilde{\mathfrak{h}} \quad (1.46)$$

elde ederiz. Buradan,

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \quad (1.47)$$

yazılır.

$O_n(\mathbb{R})$ Lie grubu ve $SO_n(\mathbb{R})$, aynı $\tilde{\mathfrak{h}}$ Lie cebirine sahiptir.

2.6 Adjoint Gösterilim

M diferansiyellenebilen bir manifold ve G bir Lie grubu olmak üzere G 'nin M üzerinde soldan etkisi şeklinde meydana gelen diferansiyellenebilen tasvir $\mu : G \times M \rightarrow M$ şeklindedir. Öyleki bu tasvir $\sigma, \tau \in G$ ve $m \in M$ için $\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m))$; $\mu(e, m) = m$ 'dir. Eğer $\mu : G \times M \rightarrow M$ tasviri G 'nin M üzerinde soldan bir etkisi ise o takdirde sabit bir $\sigma \in G$ için tasvir $m \rightarrow \mu(\sigma, m)$ bir diffeomorfizmadır. Benzer şekilde, G 'nin M üzerinde sağdan etkisi ile meydana gelen $\mu : M \times G \rightarrow M$ tasviri de $\forall \sigma, \tau \in G$ ve $m \in M$ için $\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau)$; $\mu(m, e) = m$ şeklindedir.

2.6.1 Tanım

Bir G Lie grubunun kendi üzerinde soldan etkisi ile oluşan iç otomorfizması $\dot{I}: G \times G \rightarrow G$ olmak üzere $\dot{I}(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = \dot{I}_\sigma(\tau)$ şeklinde tanımlıdır. Birim bu etkinin sabit bir noktasıdır. Yani $\forall \sigma \in G$ için $\dot{I}_\sigma(e) = e$ dir. $\sigma \rightarrow d\dot{I}_\sigma|_e : T_e G \cong \tilde{\mathfrak{g}}$ tasviri G 'nin $\text{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}})$ içine bir gösterimidir. Bu adjoint gösterilim olarak adlandırılır ve $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}})$ şeklinde gösterilir.

$\text{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \{\psi \mid \psi : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \text{ otomorfizm}\}$ şeklindedir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki değişmeli diyagramlar vardır.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{d\rho} & \text{End}(\tilde{\mathfrak{g}}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\rho} & \text{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}}) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & \tilde{\mathfrak{g}} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\dot{I}_\sigma} & G \end{array} \quad (1.48)$$

$$\exp t\rho(\sigma)(X) = \sigma(\exp t X)\sigma^{-1} \quad (1.49)$$

$$\exp \circ \rho_\sigma = \dot{I}_\sigma \circ \exp \quad (1.50)$$

2.7 Lie Türevi

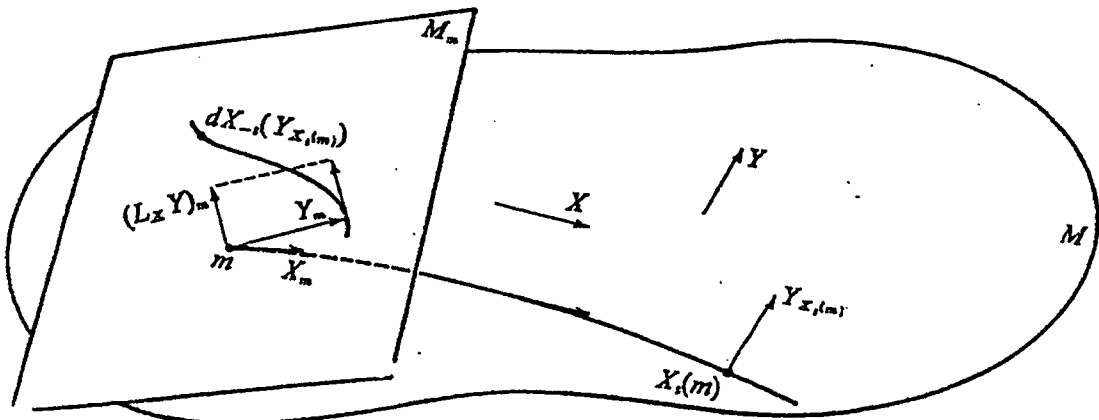
2.7.1 Tanım

Her bir $t \in \mathbb{R}$ için $X_t(m) = Y_m(t)$ seçilerek $D_t = \{m \in M \mid t \in (a(m), b(m))\}$ tanım kümesi ise bir X_t dönüşümü tanımlayalım.

$Y_m: (a(m), b(m)) \rightarrow M$; $0 \in (a(m), b(m))$ ve $Y_m(0) = m$ olacak şekilde X ' in bir integral eğrisidir.

Eğer $\forall t$ için $D_t = M$ ise M üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanı tamdır. (öyle ki her bir $m \in M$ için Y_m 'nin tanım kümesi $(-\infty, +\infty)$ dur.) Bu durumda X_t transformasyonu X 'in 1-parametrelili grubu olarak isimlendirilen reel sayılar vasıtasıyla parametrelenen M 'nin transformasyonunun bir grubu halini alır. Eğer X tam vektör alanı değil ise X_t transformasyonu bir grup halini almaz. Buradan X_t transformasyonlarının tanım kümeleri t 'ye bağlıdır. Bu durumda X 'in yerel 1-parametrelili grubu olarak X_t transformasyonlarının birleşimini alabiliriz.

M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilen X vektör alanı alalım. X_t , X ile birleşmiş transformasyonların yerel 1-parametrelili grubu olarak gösterilsin. Y de M üzerinde diğer bir diferansiyellenebilen bir vektör alanı olsun. $m \in M$ noktasında Y 'nin türevlerini X 'e göre tanımlayabiliriz. İlk olarak X in integral eğrisi üzerinde m 'den, $X(m)$ noktasına hareket edebilen ve orada Y 'nin değerini verelim. X_t difeomorfizmasının dX_t diferansiyeli yoluyla $Y_{X_t(m)}$, $T_m M$ ile geri transfer edelim. $T_m M$ de, t değerli diferansiyellenebilen $dX_t(Y_{X_t(m)})$ fonksiyon değerini düşünelim ve $t=0$ da kendi türevini alalım. Sonuç olarak, $T_m M$, m noktasında X 'e göre Y 'nin Lie türevi olarak adlandırılan bir vektör alanı elde edilir ve $(L_X Y)_m$ ile gösterilir.



Buna göre

$$(L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_{t(m)}}) - Y_m}{dt} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (dX_{-t}(Y_{X_{t(m)}})) \quad (1.51)$$

dir.

Örnek :

3 boyutlu Heisenberg grubu ve onun Lie cebirini alalım.

$$i: G \times G \rightarrow G$$

$$i(\sigma, \tau) = \sigma \tau \sigma^{-1} = i_\sigma(\tau) \quad (1.52)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ olsun ve } \tau = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (1.53)$$

olmak üzere;

$$i_\sigma(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.54)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & -c+ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.55)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & z+ay-bx \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

$$= \rho \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = di_\sigma \quad (1.57)$$

$$i_\sigma : (x, y, z) \rightarrow (x, y, z+ay-bx) \quad (1.58)$$

$H \cong \mathbb{R}^3$ yani

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong (x, y, z) \quad (1.59)$$

$$\text{Jac}(i_g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

$$\text{di}_g : (x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -bx + ay + z \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

$$d\rho(X)(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(\exp X)(Y) \quad (1.62)$$

$\rho(t, 0, 0) \in \text{Aut}(\tilde{g})$ elde edilir.

3 GENEL KONTROL SİSTEMLERİ

3.1 Giriş

M bir diferansiyellenebilen manifold olsun ve $\chi(M)$ de, M nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı tüm diferansiyellenebilen vektör alanlarının ailesini gösterebiliriz. $X: p \in U \subset M \rightarrow X_p$ şeklindeki tüm teğet vektörlerin kümesi olsun. Pürüzsüz kavramını C^∞ veya analitik olarak düşüneceğiz. Her bir $X \in \chi(M)$, M üzerinde tanımlı yerel difeomorfizmaların bir parametrelili grubunu tanımlar. Yani X için olanaklı her $t \in \mathbb{R}$ için manifoldlar üzerinde vektör alanlarının vasıtasıyla üretilmiş adi diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden dolayı $X_t: \text{dom}(X_t) \subset M \rightarrow M$ yerel difeomorfizma elde edilir. Eğer $\gamma^x(\cdot, x)$, x noktasındaki vektör alanının integral eğrisiyse o takdirde $X_t(x) = \gamma^x(t, x)$ ile tanımlıdır. Kuşkusuz, $X_{-t}: X_t(\text{dom}(X_t)) \subset M \rightarrow \text{dom}(X_t) \subset M$, X_t nin tersidir. Ayrıca tanımlandığında,

- i) $X_t \circ X_s = X_{t+s}$,
- ii) $(X_t)^{-1} = X_{-t}$
- iii) $X_0 = \text{Id}$ dir

3.1.1 İlk Tanım

Bir Σ kontrol sistemi, $\Sigma = (M, D)$ şeklinde bir ikili olarak tanımlanır. Burada M diferansiyellenebilen bir manifold ve D , $\chi(M)$ nin bir alt ailesidir.

3.1.2 Uyarılar

- i) M ye Σ nin *durum uzayı* denir.
- ii) D nin elemanları sistemin stratejileri ve Σ nin kontrolleridir.
- iii) Σ bir

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \mid X^j \in D, t_j \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}\} \quad (2.1)$$

“sözde (pseudo) grubu” tanımlar Σ tarafından M de x in yörüngesi, x de G_Σ nin etkisi (action) ile verilir:

$$G_\Sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in G_\Sigma\} \quad (2.2)$$

3.1.3 Tanım

Eğer $G_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde $x \in M$ varsa, Σ sistemine *geçişlidir*, denir.

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in G_{\Sigma}(x) \quad (2.3)$$

ile G_{Σ} ile M üzerinde “ $\sim$ ” bağıntısını tanımlayalım. Elbette, “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısıdır.

Özellikle, eğer Σ geçişli ise o takdirde

$$G_{\Sigma}(x) = M, \quad \forall x \in M \quad (2.4)$$

dir, ayrıca Σ ile birleşmiş,

$$S_{\Sigma} = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \mid X^j \in D, t_j \geq 0, r \in \mathbb{N}\} \quad (2.5)$$

“sözde-yarı (*pseudo-semi*) grubu” elde edilir ve x den Σ nin “ulaşılabilirlik(*accessibility*) kümesi” denilen Σ ile M deki x in pozitif yörüngesi

$$S_{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in S_{\Sigma}\} \quad (2.6)$$

dir.

3.1.4 Uyarılar

i) Kuşkusuz, $S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x)$, $\forall x \in M$ dir.

ii) S_{Σ} tarafından tanımlanan M üzerindeki “ $\sim$ ” bağıntısı simetrik bir bağıntı değildir.

Gerçektende $t > 0$ ise , o takdirde X_{-t} nin S_{Σ} ya ait olması gerekmez. Diğer bir deyişle,

$$X \in D \not\Rightarrow -X \in D \quad (2.7)$$

dir. Kontrol Teorideki temel problemlerden biri $S_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde bir D , dinamiği $x \in M$ altındaki koşulları bulmaktır. x başlangıç noktası ile başlanırsa Σ nin D dinamiği ile verilen negatif olmayan stratejilerle M nin her noktasına ulaşmaktır.

$$S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x) \subset M \quad (2.8)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, Σ nin geçişliliği bu problemi çözmek için gerekli bir koşuldur, ancak yeterli değildir. Örneğin, eğer

$$\Sigma = \left(R, \left\{ \frac{d}{dx} \right\} \right) \quad (2.9)$$

alınırsa, o zaman,

$$S_{\Sigma}(0) = [0, \infty) \subsetneq G_{\Sigma}(0) = \mathbb{R} \quad (2.10)$$

olur (Ayala, 1995).

3.2 Kontrol Edilebilirlik

3.2.1 Tanım

$\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ya :

- i) eğer $S_\Sigma(x) = M$ ise, x de *kontrol edilebilirdir*,
- ii) eğer Σ , M nin her elemanı üzerinde kontrol edilebilir ise, *kontrol edilebilirdir* denir.

Burada genel kontrol sistemleri için teorik açıdan çok önemli bir sonucu vereceğiz. Bu sonuca, sistemin dinamiği hakkındaki tüm bilgileri koruyan M deki herhangi bir başlangıç koşulu için durum (state) uzayının yörüngesine indirgenmesine olanak veren yörünge (orbit) teoremi adı verilir.

3.2.2 Teorem (Yörünge Teoremi)

Eğer $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ ise, o takdirde $G_\Sigma(x)$ yörüngesi bir diferansiyellenebilen manifold yapısına sahiptir (Sussmann,1973).

3.3 Gözlenebilirlik

3.3.1 İkinci Tanım

Gözlemeli bir Σ kontrol sistemi

$$\Sigma = (M, D, h, N) \quad (2.11)$$

ile belirlidir. Burada, M diferansiyellenebilen manifold ve D dinamik, N diferansiyellenebilen manifold ve $h : M \rightarrow N$ bir diferansiyellenebilen fonksiyondur. N ye gözleme (observation) uzayı ve h ye Σ nın çıkış(output) tasviri denir.

3.3.2 Tanım

Σ bir kontrol sistemi olsun. $x, y \in M$ noktalarına, eğer

$$h \circ \varphi(x) = h \circ \varphi(y), \quad \forall \varphi \in S_\Sigma \quad (2.12)$$

ise, Σ için *ayırıl edilemez* denir.

3.3.3 Uyarı

$x \sim y \Leftrightarrow x$ ve y ayırd edilemez, bağıntısı genel olarak bir denklik bağıntısı değildir. Bu durum, D 'ye bağlıdır.

Eğer D sadece analitik vektör alanlarını kapsıyorsa ya da D ileri tam ise, yani her bir $X \in D$ için, X_t her bir $t \geq 0$ için iyi tanımlı ise, o takdirde “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısıdır. Sonuçta bu özelliği kabul edeceğiz ve x in denklik sınıfını $\tilde{x}$ ile göstereceğiz.

3.3.4 Tanım

Σ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ya :

- i) Eğer $\tilde{x} \cap U = \{x\} (\forall x \in M)$ olacak şekilde x in bir U komşuluğu varsa, $x \in M$ de $(M$ üzerinde) *yerel gözlenebilir* dir.
- ii) Eğer $\tilde{x} \cap U = \{x\} (\forall x \in M)$ ise, $x \in M$ de $(M$ üzerinde) *gözlenebilir* dir, denir.

Diğer bir deyişle, eğer uygulamaların $h \circ S_\Sigma$ ailesi x i $(M$ üzerindeki noktaları), M nin herhangi bir noktasından ayırıyorsa, Σ , $x \in M$ de $(M$ üzerinde) *gözlenebilir* dir.

3.3.5 Örnekler

1) R^n üzerindeki diferansiyel denklemlerin

$$D = \{ \dot{x} = Ax + Bu \mid u \in R^k \} \quad (2.13)$$

ailesini göz önüne alalım. Burada $A \in M_n(R)$, $B \in M_{n \times k}(R)$ dir.

$G_\Sigma(0) = S_\Sigma(0) = \text{Im}(B)$ yi içeren R^n 'nin A -invariant alt uzay olduğunu ispatlamak olanaklıdır. Buradan $\Sigma = (R^n, D)$ kontrol sisteminin kontrol edilebilirliği için Kalman rank koşulu çıkar. Yani

$$\Sigma, R^n \text{ de kontrol edilebilirdir} \Leftrightarrow \text{rank}(BABA^2B \cdots A^{n-1}B) = n \quad (2.14)$$

(Kalman, Ho ve Narendra, 1962).

2) Bu örnekte kontrol edilebilirliği karar vermek için rank koşulunu kullanıyoruz.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \mid u \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.15)$$

ile $\Sigma=(\mathbb{R}^2, D)$ kontrol edilemezdir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\text{rank}(BAB) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1 \quad (2.17)$$

$\text{rank}(BAB) = 2$ olmadığından $\Sigma=(\mathbb{R}^2, D)$ kontrol edilemezdir.

$$3) D = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \mid u \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.18)$$

ile $\Sigma=(\mathbb{R}^2, D)$ kontrol edilebilirdir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\text{rank} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2 \quad (2.20)$$

olduğundan kontrol edilebilirdir.

4) $M=\mathbb{R}^2$ ve

$$D = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.21)$$

göz önüne alalım.

O takdirde $\Sigma=(M, D)$ 'nin yörüngeleri

i) $b > 0, G_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y > 0\}$

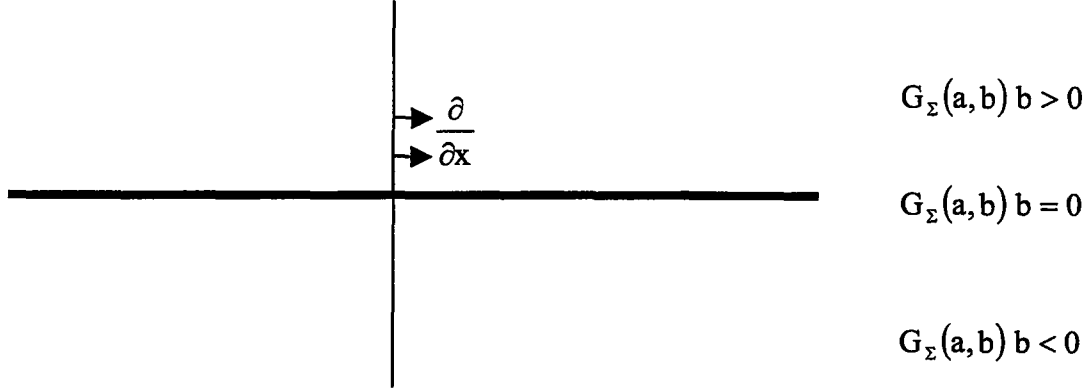
ii) $b = 0, G_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y = 0\}$

iii) $b < 0, G_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y < 0\}$

Σ 'nin pozitif yörüngeleri

i) $b \geq 0, S_{\Sigma}(a, b) = \left\{ (x, y) \mid \frac{ab}{x} \leq y \leq b, x \geq a \right\}$

ii) $b < 0$, $S_x(a, b) = \left\{ (x, y) \mid b \leq y \leq \frac{ab}{x}, x \geq a \right\}$ dir.



$$5) G = SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \quad (2.22)$$

grubunu ve

$$L(G) = sl_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr} A = 0\} \quad (2.23)$$

Lie Cebirini göz önüne alalım.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

olmak üzere

$$D = \{X + uY \mid u \in \mathbb{R}\} \subset sl_2(\mathbb{R}) \quad (2.25)$$

dinamiğini göz önüne alalım.

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \quad (2.26)$$

dır.

$\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ için

$$G_\Sigma(a, b) = \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}, \quad \text{ve} \quad (2.27)$$

$$\text{eğer } a^2 + b^2 \neq 0 \text{ ise, } G_\Sigma(0, 0) = \{(0, 0)\} \quad (2.28)$$

elde edilir. Oysa Σ kontrol edilemezdir. Örneğin $a > 0, b > 0$ ise

$$S_\Sigma(a, b) = \{(x, y) \mid x \geq a\} \quad (2.29)$$

dır.

6) G , 3 boyutlu Heisenberg grubu yani

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.30)$$

olsun.

G üzerinde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

invariant vektör alanlarını yani G 'nin

$$L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.32)$$

Lie Cebirindeki elemanlarını göz önüne alalım.

$$D = \{X + uY \mid u \in \mathbb{R}\} \quad (2.33)$$

yi tanımlayalım.

$\Sigma = (G, D)$ sistemi geçişlidir.

$$\Delta(e) = \text{geren}\{X, Y, [X, Y]\} = L(G) \quad (2.34)$$

dir.

Özellikle G 'nin etkisiz elemanın yörüngesi G ile çakışır. Σ kontrol edilemez. Yani

$$S_\Sigma(e) \subset G, \quad S_\Sigma(e) \neq G \quad (2.35)$$

dir (Ayala, 1995).

7) $\mathbb{R}^n$ üzerinde gözlemeli bir lineer kontrol sistemini göz önüne alalım.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.36)$$

ve

$$y(x) = C \cdot x \in \mathbb{R}^s, \quad C \in M_{s \times n}(\mathbb{R}) \quad (2.37)$$

olsun.

$$\lambda_1 C + \lambda_2 CA + \lambda_3 CA^2 + \dots + \lambda_n CA^{n-1} = 0, \quad \tilde{0} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Ker}(C \cdot A^i) \quad (2.38)$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\Sigma = (\mathbb{R}^n, D, h, \mathbb{R}^s) \quad (2.39)$$

lineer kontrol sisteminin gözlenebilirliği için rank koşulu çıkar.

Σ gözlenebilirdir $\Leftrightarrow \Sigma$ yerel gözlenebilirdir $\Leftrightarrow$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (2.40)$$

(İsodori, 1989).

8) $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D, h, \mathbb{R})$ sistemini göz önüne alalım.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \mid u \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.41)$$

Aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

I) $h(x, y) = x$ olsun.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \quad \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad (2.42)$$

bu durumda Σ gözlenebilirdir.

II) $h(x, y) = y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \quad \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad (2.43)$$

dir.

Σ gözlenemezdir.

$$9) \Sigma = (\mathbb{R}^2, D, h, R) \quad (2.44)$$

sistemi

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.45)$$

şeklinde tanımlı olsun. Σ geçişli değildir. Gerçekten,

- i) $b > 0, G_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y > 0\}$
- ii) $b = 0, G_{\Sigma}(a, b) = \{(a, 0)\}$
- iii) $b < 0, G_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y < 0\}$ dır.

Bundan başka $a > 0, b > 0$ ise,

$$S_{\Sigma}(a, b) = \{(x, y) \mid y > 0, x \geq a\} \quad (2.46)$$

dır.

Σ kendi yörüngesi üzerinde kontrol edilemezdir. Etkisiz noktanın denklik sınıfı h 'nin çekirdeği ile çakışır. Böylece sistem gözlenemezdir.

4 LİE GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN GÖZLENEBİLİRLİĞİ

4.1 Giriş

Bu bölümde, bir G Lie grubu üzerindeki Σ lineer kontrol sistemi için gözlenebilirlik problemini ve Σ nın yerel ve global olarak gözlenebilirliğini karakterize eden cebirsel koşulları inceliyoruz. $G, L(G)$ Lie cebirli bağlantılı bir Lie grubu olsun. Bu kısımda, G üzerinde bir Σ lineer kontrol sistemi aşağıdaki tarzda belirlenmiştir:

$$\Sigma = (G, D, h, V) \quad (3.1)$$

Burada, D

$$\dot{g}(t) = X(g(t)) + \sum_{j=1}^m u_j(t) Y^j(g(t)) \quad (3.2)$$

$$y = h(g) \in V, \quad u \in U \quad (3.3)$$

diferansiyel denklemlerin ailesi ile üretilen vektör alanlarının bir kümesidir. X vektör alanı G nin sonsuz küçük(infinitesimal) bir otomorfizmidir. $Y^1, \dots, Y^m \in L(G)$ leri sağ-invariant vektör alanları olarak göz önüne alıyoruz ve u kısıtlanmayan parçalı sabit kontrollerin sınıfı olan U nun bir elemanı, yani $u \in U$ dur. V çıkış uzayı bir Lie grubudur ve çıkış tasviri

$$h : G \rightarrow V \quad (3.4)$$

Lie gruplarının bir homomorfizmidir. Bu çalışmada,

$$D = \left\{ X + \sum_{j=1}^m u_j Y^j \mid u \in \mathbb{R}^m \right\} \quad (3.5)$$

ile verilen Σ nın dinamiği G üzerinde tüm analitik vektör alanlarının Lie cebiri olan $X(G)$ nin bir altkümesidir. Kontrol sistemlerinin bu türü, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki gözlemeli lineer hali kapsar. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer halde olduğu gibi bu özelliklerin $Y^1, \dots, Y^m$ kontrol vektörlerinden bağımsız olduğunu göstereceğiz. Dolayısıyla,

$$\Sigma = (G, X, h, V) \quad (3.6)$$

lineer kontrol sistemlerinde yani $u = 0$ ile incelemeye çalışacağız. G nin etkisiz elemanının “ayrıl edilemeyen” I denklik sınıfının kapalı Lie altgrup yapısı kullanılmaktadır.

$$\Delta : g \in G \rightarrow \Delta(g) = (R_g)^* I \quad (3.7)$$

şeklinde G üzerinde bir sağ-invariant dağılım tanımlayalım. Burada I , I nin Lie cebiri ve R_g , G üzerindeki g ile sağ öteleme dönüşümüdür.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer halde, $\mathbb{R}^n$ in I vektör altuzayının yerel ve global gözlenebilirliği karakterize ettiği bilinmektedir. Yerel gözlenebilirliği incelemek için Δ yı bilmenin yeterli olduğunu göstereceğiz. Ancak, global gözlenebilirliği belirlemek için X sapan (drift) vektör alanlarının 1-parametrelili grubu tarafından üretilen etkiyle(action) sabit noktaların kümesini analiz etmek gereklidir.

$\Sigma = (G, D, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Σ ,

$$G_{\Sigma} = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k \mid Z^i \in D, t_i \in \mathbb{R}\}, \quad (3.8)$$

G üzerinde global difeomorfizmlerin

$$G_{\Sigma} = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k \mid Z^i \in D, t_i \in \mathbb{R}\} \quad (3.9)$$

grubunu ve

$$S_{\Sigma} = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k \mid Z^i \in D, t_i \geq 0\} \quad (3.10)$$

yarı-grubunu üretir.

Her bir $g \in G$ için $G_{\Sigma}(g)$ yörüngesi diferansiyellenebilen manifold yapısına sahiptir.

Dolayısıyla Σ yı yörüngeler üzerinde kısıtlamak mümkündür. Aşağıdaki özellikleri hatırlatalım:

i) $g_1, g_2 \in G$ elemanları, eğer

$$h \circ \varphi(g_1) = h \circ \varphi(g_2), \quad \forall \varphi \in S_{\Sigma} \quad (3.11)$$

ise, Σ vasıtasıyla “ayır edilemez” dir,

ii) Eğer G nin “ayır edilemeyen” hiç iki noktası yoksa Σ ya gözlenebilirdir ve eğer U daki her bir eleman g den “ayır edilemeyen” olmayacak şekilde g nin bir U komşuluğu varsa, Σ ya $g \in G$ de yerel gözlenebilirdir, denir.

$$\tilde{\Sigma} = (\tilde{G}, \tilde{D}, \tilde{h}, \tilde{V}) \quad (3.12)$$

ile tanımlı Σ için bir $\tilde{\Sigma}$ minimal gerçekleştirme (realization) geçişli ve gözlenebilir bir sistemdir. Burada

$$\pi : G \rightarrow \tilde{G} \quad (3.13)$$

her $Z \in D$, π nin π^* türevi tarafından izdüşürülebilir olacak şekilde bir pürüzsüz (smooth), üzerine altdaldırma (submersion) dır. Bundan başka $\pi^*(D) = \tilde{D}$ ve $\tilde{h} \circ \pi = h$ dır.

Aşağıdaki kısımda, esas olarak yerel ve global gözlenebilirlik , için gerek ve yeter koşulları arayacağız.

4.2 Gözlenebilirlik

“ $\sim$ ” ile “ayrıl edilemeyen” denklik bağıntısını ve $\tilde{g}$ ile $g \in G$ nin denklik sınıfını gösterelim.

Ayrıca, $I = \tilde{e}$ dir.

$$\varphi = Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k \in G_\Sigma \quad (3.14)$$

olsun. her bir $i = 1, 2, \dots, k$ için ve her bir $g \in G$ için

$$Z_{t_i}^i(g) = X_{t_i}(\beta_i(t) \cdot g) \quad (3.15)$$

olacak şekilde diferansiyellenebilen bir

$$\beta_i : \mathbb{R} \rightarrow G \quad (3.16)$$

eğrisi vardır. h bir homomorfizm olduğundan, basit bir hesaplama

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow h(X_t(g_1)) = h(X_t(g_2)), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.17)$$

$$\Leftrightarrow X_t(g_1 \cdot g_2^{-1}) \in \text{Ker}(h), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.18)$$

olduğunu gösterir.

$$I = \{g \in G \mid X_t(g) \in \text{Ker}(h), \quad \forall t \geq 0\} \quad (3.19)$$

elde edilir. Bundan başka, her bir $g \in G$ için $\tilde{g} = Ig$ dir. Gerçekten,

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2 \in Ig_1 \quad (3.20)$$

dir. $\mathbb{R}^n$ halinde olduğu gibi, yerel gözlenebilirlik ve gözlenebilirlik özellikleri için genel lineer kontrol sistemleri $Y^1, Y^2, \dots, Y^m$ kontrol vektörlerinden bağımsızdırlar. Bu da, X de inceleme yapmamıza olanak sağlar. Bundan sonra sistemi

$$\Sigma = (G, D, h, V) \quad (3.21)$$

ile göstereceğiz ve aynı zamanda Σ ya G üzerinde bir lineer kontrol sistemi diyeceğiz. Eğer G bağlantılı ise, o takdirde G nin otomorfizm grubu olan $\text{Aut}(G)$ nin bir Lie grubu yapısına sahip olduğunu hatırlatalım

4.3 Teorem

$\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde $I = \tilde{e}$

a) $I, \text{Ker}(h)$ 'nin normal, kapalı bir lie alt grubudur.

b) I, G_Σ -invariant dır (Ayala ve Kara, 1997).

İspat:

$$a) I = \{g \in G \mid X_t(g) \in \text{Ker}(h), \forall t \geq 0\} \quad (3.22)$$

ilk önce I 'nin grup olduğunu gösterelim.

$$g_1, g_2 \in I \Rightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in I \text{ olmalıdır.}$$

$$X_t(g_1 \cdot g_2^{-1}) \in \text{Ker}(h) \quad (3.23)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$X_t(g_1), X_t(g_2) \in \text{Ker}(h)$ ve $g_2 \in G$, G grup olduğundan $g_2^{-1} \in G$ dir. $X_t(g_2^{-1}) \in \text{Ker}(h)$ olacaktır.

$$X_t(g_1) \cdot X_t(g_2^{-1}) = X_t(g_1 \cdot g_2^{-1}). \quad (3.24)$$

X_t homomorfizma olduğundan eşitliğin sol tarafı $\text{Ker}(h)$ 'in elemanıdır. Dolayısıyla sağ tarafta $\text{Ker}(h)$ 'nin elemanı olacaktır. Buradan $g_1 \cdot g_2^{-1} \in I$ olacaktır. I bir gruptur.

Bu grup yapısının normal olduğunu gösterelim.

$\forall g \in G, \ell \in I$ için $g\ell g^{-1} \in I$ olduğunu göstermeliyiz.

$$X_t(g) \cdot X_t(\ell) \cdot X_t(g^{-1}) = X_t(g\ell g^{-1}) \quad (3.25)$$

yukarıdaki gibi eşitliğin sol tarafının $\text{Ker}(h)$ 'nin elemanı olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $X_t(g\ell g^{-1}) \in \text{Ker}(h)$ olacaktır. Buradan $g\ell g^{-1} \in I$ dir. Buradan I , G 'nin normal bir alt grubudur.

Şimdi I 'nin kapalı olduğunu gösterelim

$\{g_n\} \in I$ dizisi için $g_n \rightarrow g \in I$ olduğunu göstermeliyiz. g ye yakınsayan I 'da herhangi bir $\{g_n\}$ dizisi alındığında her sabit t için X_t 'nin sürekliliğinden $X_t(g_n) \rightarrow X_t(g)$ elde edilir.

Çekirdek kapalı olduğundan $X_t(g) \in \text{Ker}(h)$ dir. Dolayısıyla $g \in I$ dir.

$$b) g \sim e \Rightarrow \varphi(g) \sim e, \forall \varphi \in G_\Sigma \quad (3.26)$$

olduğunu ispatlamalıyız. Tanımdan dolayı, I , S_Σ –invarianttır ve I 'nin formundan dolayı

$$g \sim e \Rightarrow X_t(g) \in \text{Ker}(h), \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.27)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $u \equiv 0$ sabit kontrolü ile

$$X_t \in \text{Aut}(I), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.28)$$

elde edilir. $\alpha(t) = X_t$ ile tanımlı

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(G) \quad (3.29)$$

analitik eğrisi,

$$\alpha(\mathbb{R}^+) \subset \text{Aut}(I) \quad (3.30)$$

yi sağlar. $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}$ 'nin açık alt kümesi olduğundan,

$$\alpha(\mathbb{R}) \subset \text{Aut}(I) \quad (3.31)$$

elde edilir. Böylece, I, G_Σ – invarianttır.

4.4 Teorem

$\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. o takdirde $I, L(G)$ 'nin X -invariant alt cebiridir. Yani

$$\text{ad}^i(X)(I) \subset I, \quad \forall i \geq 0 \quad (3.32)$$

dir.

İspat:

Tanımdan dolayı $\text{ad}^0(X), L(G)$ üzerinde özdeşlik tasviridir.

$$\text{ad}^1(X)(Y) = [X, Y] \quad (3.33)$$

dir ve $i > 1$ için

$$\text{ad}^i(X)(Y) = \text{ad}^{i-1}(X)([X, Y]) \quad (3.34)$$

dir. Tümevarımdan dolayı, $i=1$ için ispatlamak yeterlidir.

$$Y \in L(G) \Rightarrow [X, Y] \in L(G) \quad (3.35)$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan,

$$X_t : I \rightarrow I, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.36)$$

dir.

Her bir $Y \in I$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $\exp(sY) \in I$ dir. Burada,

$$X_{\exp(sY)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X_t(\exp(sY)) \in (R_{\exp(sY)})_*(I), \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (3.37)$$

dir. Bir önceki formülden ve parantez tanımından

$$[X, Y](e) \in I \quad (3.38)$$

olduğu sonucu çıkar. Bu işlemin tekrar uygulanmasıyla

$$\text{ad}^i(X)(Y) \in I, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad i \geq 0 \quad (3.39)$$

yazılmasına olanak verir ki bu da ispatı tamamlar.

4.5 Teorem

$\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi ve n , G 'nin boyutu olsun. O takdirde

$$I = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{ad}^{-i}(X)(\kappa) \quad (3.40)$$

dır (Ayala ve Kara, 1997).

İspat:

Eğer h birebirse o takdirde $I = \text{Ker}(h)$ 'dır. Dolayısıyla $\kappa \neq 0$ kabul edilebilir. Böylece, κ üzerinde $\text{ad}^i(X)$ – etkisi ile üretilen $L(G)$ nin yeni elemanlarının sadece $i=(n-1)$ -inci adıma kadar olması olanaklıdır. $I \subset \kappa$ olduğundan Önerme 3.4. den dolayı,

$$F = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{ad}^{-i}(X)(\kappa) \subset I \quad (3.41)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$$\text{ad}(X)(I) \subset I \subset \kappa \quad (3.42)$$

$$\text{ad}^i(X)(I) \subset \kappa \quad i=1 \dots (n-1) \quad (3.43)$$

$$I \subset \text{ad}^{-i}(X)(\kappa) \subset \kappa \quad \forall i \geq 0 \quad (3.44)$$

$$I \subset \bigcap \text{ad}^{-i}(X)(\kappa) \quad (3.45)$$

$$Y \in \text{ad}^{-i}(X)(\kappa) \Rightarrow \text{ad}^i(X)(Y) \in \kappa \quad (3.46)$$

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{(X_t)^*} & L(G) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{X_t} & G \end{array} \quad (3.47)$$

bu tablodan yararlanarak

$$X_t(\exp(sY)) = \exp(X_t)_*(sY) \quad (3.48)$$

standart Lie serisi açılımından

$$(X_t)_*(sY) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \text{ad}^i(X)(sY) \quad (3.49)$$

buradan

$$\text{ad}^i(X)(Y) \in \kappa \quad \forall i \geq 0 \quad (3.50)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_t(\exp(sY)) = (X_t)_*(sY) \quad (3.51)$$

$$X_t(\exp(sY)) \in \text{Ker}(h) \quad (3.52)$$

$$Y \in T \Leftrightarrow \exp(sY) \in I \quad (3.53)$$

böylece ispat tamamlanır.

$L(G)$ 'nin her A altcibri, TG teğet demeti üzerinde $\Delta_A(g) = (R_g)_*(A)$, $g \in G$ ile tanımlanan Δ_A dağılımını üretir. Bu dağılım düzenlidir. Yani bu dağılımın boyutu $g \in G$ den bağımsızdır. Bundan başka A altcebir olduğundan

$$X, Y \in \Delta_A \Rightarrow [X, Y] \in \Delta_A \quad (3.54)$$

elde edilir. Bu dağılım involutive'dir. Frobenious teoremi bu dağılımın integrallenebilirliğini pekiştirir. Bu durumda $g \in G$ noktasından geçen Δ_A 'nın $\text{In}_{\Delta_A}(g)$ integral manifold

$$\text{In}_{\Delta_A}(g) = Ag \quad (3.55)$$

ile verilir.

Burada A, A Lie cebirli G 'nin bağlantılı Lie alt grubudur.

4.6 Teorem

$\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde,

$$\Sigma \text{ yerel gözlenebilirdir} \Leftrightarrow I = 0 \quad (3.56)$$

dir (Ayala ve Kara, 1997).

İspat:

Eğer Δ sıfır (null) olmayan bir dağılım ise, o takdirde etkisiz elemandan geçen integral manifold $I = \tilde{e}$, G nin açık (trivial) bir altgrubu değildir. Bundan başka, her bir $g \in G$ ve g nin her bir U komşuluğu için

$$\tilde{g} \cap U = Ig \cap U \quad (3.57)$$

olduğundan I , g yi içeren G nin apaçık (trivial) bir altmanifoldu değildir. Σ nın yerel gözlenebilir olmadığı sonucuna varılır. Geriye $T = 0$ ın gerekliliğini ispatlamak kalıyor. Eğer $T = 0$ ise, o takdirde I , G nin bir ayıktık (discrete) Lie altgrubudur. Sonuç olarak, her bir $g \in G$ için,

$$\tilde{g} \cap U = \{g\} \quad (3.58)$$

olacak şekilde g nin bir U komşuluğu vardır ve böylece Σ yerel gözlenebilirdir. Kuşkusuz, yerel gözlenebilirlik için gerekli bir koşuldur. Ancak, R^n haline aykırı, $I = \{0\}$ koşulu I nın apaçık (trivial) altgrup olmasını gerektirmez. Gerçekten, R^n in hiçbir ayırtık (discrete) reel vektör altuzayı yoktur. Bundan başka, keyfi Lie grubu ayırtık (discrete) altgrubu kapsayabilir. Dolayısıyla, Σ nın gözlenebilirliğine global bir sonuç elde etmek için G nin özel bir altgrubu olan G üzerinde $T = (X_t)_{t \in R}$ -etkisi (action) ile sabit noktaları incelemek gerekiyor. Daha kesin olarak, iyi tanımlı bir

$$\psi : R \times G \rightarrow G \quad (3.59)$$

$$(t, g) \rightarrow \psi(t, g) = X_t(g) \quad (3.60)$$

etkisi (action) vardır. I , T -invariant olduğundan

$$\psi(R \times I) \subset I \quad (3.61)$$

elde edilir. G üzerindeki T -etkisi (action) ile sabit noktaların kümesini

$$\text{Fix}(T) = \{g \mid X_t(g) = g, \forall t \in R\} \quad (3.62)$$

ile gösterelim. X , G nin bir sonsuz küçük (infinitesimal) otomorfizmi olduğundan, $\text{Fix}(T)$ nin G nin kapalı bir Lie altgrubu olduğu sonucu çıkar.

4.7 Teorem

$\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. o takdirde, Σ gözlenebilirdir. $\Leftrightarrow$

a) $T = 0$,

b) $\text{Fix}(T) \cap \text{Ker}(h) = \{e\}$ dir

(Ayala ve Kara, 1997).

İspat: $(\Rightarrow) I = \{e\}$ olduğunu varsayalım. O zaman T sıfır (null) olmalıdır. Eğer $g \in \text{Ker}(h)$ T -etkisi (action) ile sabit nokta ise,

$$X_t(g) \in \text{Ker}(h), \quad \forall t \in R \quad (3.63)$$

dir ve sonuç olarak, $g = e$ dir.

($\Leftarrow$) Karşıt olarak, $T = 0$, T nin $\text{Ker}(h)$ nin bir ayırtık (discrete) Lie altgrubu olduğunu gösterir. Burada, $g \in I$ alalım ve ψ nin $\mathbb{R} \times \{g\}$ ye kısıtlanması olan $\psi|_{\mathbb{R} \times \{g\}}$ sürekli tasvirini gözönüne alalım. $\psi|_{\mathbb{R} \times \{g\}}$ nin tanım bölgesi bağlantılı olduğundan,

$$\text{Im}(\psi_g) = \{X_t(g) | t \in \mathbb{R}\} \quad (3.64)$$

de bağlantılıdır. Ancak, X_0 , G nin özdeşlik tasviridir ve I , T -invarianttır. O zaman

$$g \in \text{Im}(\psi_g) \subset I \quad (3.65)$$

dir. I ayırtıktır(discrete) olduğundan,

$$\{g\} = \text{Im}(\psi_g) \quad (3.66)$$

elde edilir. Buradan, $g \in \text{Fix}(T)$ olduğu sonucu çıkar. Öte yandan, $I \subset \text{Ker}(h)$ olup, sonuç olarak $g = e$ dir ve Σ gözlenebilirdir.

4.8 Örnekler

G , 3-boyutlu Heisenberg grubu, yani

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.67)$$

olsun. G nin Lie cebiri

$$L(G) = \text{geren}_{L.A.} \left\{ Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.68)$$

ile veriliyor. Bu durumda,

$$[Y_1, Y_2] = Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

dir.

$$X \left[\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = bY_3 \quad (3.70)$$

ile G üzerinde tanımlı sonsuz küçük (infinitesimal) X otomorfizmini ve aşağıdaki lineer kontrol sistemlerini gözönüne alalım:

a) $\Sigma = (G, X, \pi_2, R)$, burada

$$\pi_2 \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = b \quad (3.71)$$

dir.

$$\text{Ker}(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.72)$$

$$\beta = \{Y_1, Y_2\} \quad (3.73)$$

$$\beta^\perp = \{\omega = Y_2^*\} \quad (3.74)$$

elde edilir. Basit bir hesaplama

$$[X, Y_1] = 0, \quad [X, Y_2] = Y_3, \quad [X, Y_3] = 0 \quad (3.75)$$

olduğunu gösterir.

$$L_X(\omega)(\cdot) = \langle \omega, [X, \cdot] \rangle \quad (3.76)$$

olduğundan

$$L_X(\omega) = 0 \quad (3.77)$$

sonucu çıkar, o zaman her $i=0,1,\dots$ için

$$\text{ad}^i(X)(\beta^\perp) \subset \kappa^\perp \quad (3.78)$$

dir. Sonuç olarak,

$$I = \kappa$$

dir. Böylece, Σ yerel gözlenemezdir.

b) $\Sigma = (G, X, \pi, G/\exp(RY_1))$, burada

$$\pi : G \rightarrow G/\exp(RY_1) \quad (3.79)$$

kanonik izdüşümdür.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

$$X_g = bZ \quad (3.81)$$

$$\text{Ker}\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.82)$$

şeklindedir.

$$\kappa = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \right\} \quad (3.83)$$

dir.

$$\text{Fix } T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.84)$$

Görüldüğü üzere,

$$\text{Ker } \pi \cap \text{Fix } T = \{e\} \quad (3.85)$$

olur.

$T = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$\text{ad}(X) \ T \subset T \subset \kappa$ olduğundan $T \subset \kappa$ dir.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I \right] \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \quad (3.86)$$

dir.

$$[X, Y] = Z \quad [X, X] = 0 \quad [X, Z] = 0 \quad (3.87)$$

olduğundan

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

dır.

$T = 0$ olduğundan Σ lokal gözlenebilirdir. Dolayısıyla Teorem 3.7. ye göre global gözlenebilirdir (Ayala ve Kara, 1997).

5 SONUÇLAR

Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin Lie grupları üzerinde gözlenebilirliği konusu incelenmiştir. Bunun için ön bilgiler olarak diferansiyellenebilen manifold, Lie grupları ve Lie cebirleri gibi temel kavramlar verildikten sonra genel kontrol sistemleri hakkında genel bilgiler verilmiştir. Bağlantılı Lie grupları için lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliğini karakterize eden “Observable Linear Pairs” adlı ikinci referans makalesinin incelenmesini işleyen bu çalışmanın ilerisinde farklı çıkış fonksiyonları için de bu problem global olarak incelenebilir.



KAYNAKLAR

Agrachev, A. A., Gamkrelidze, R. V., ve Sarychev, A. V., (1989), "Local Invariant of Smooth Control Systems", *Acta Applicandae Mathematicae* 14, 191-237.

Ayala, V., ve Kara, H. A., (1997), "Observable Linear Pairs" *Computational and Applied Mathematics*, Vol., 16, No:3.

Ayala, V., ve Kara, H. A., (1996), "Examples of Linear Control Systems on Lie Groups", *Pro-Mathematica*, Vol., X, No. 19-20, 230-249.

Ayala, V., ve Kara, H. A., "Observability of Linear Control Systems on Lie Groups", IC/95/2, International Centre For Theoretical Physics, ICTP, Trieste, Italy.

Isidori, A., (1989) "Nonlinear Control Systems : an introduction", Springer Verlag.

Kalman, R., Ho, Y., and Narendra, K., (1962) "Controllability of Linear Dynamical Systems" *Contrib. To Diff. Equations*, 189-213.

Kara, H. A., (1996), "Linear Control Systems on Lie Groups", Ph.D. Thesis, Institute of Pure and Applied Science of Y.T.U., Istanbul/Turkey.

Kara, H. A., (1994), "A Controllability Theorem for Invariant Systems on Lie Groups", *Mathematics Diploma Course Project*, International Centre for Theoretical Physics, ICTP, Trieste, Italy.

Sussmann, H., (1973) "Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions", *Trans. American Math. Soc.*, 180.

Sussmann, H., ve Jurdevic, V., (1972) "Control Systems on Lie Groups", *Journal of Differential Equations* 12, 313-329.

Varadarajan, V., (1974) "Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations", Prentice-Hall Inc.

Warner, F., (1971), "Foundations of Differentiable Manifolds on Lie Groups", Scott Foreman and Company, Glenview Illinois.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 20.04.1975

Doğum yeri İstanbul

Lise 1990-1994 Haydarpaşa Anadolu Meslek Lisesi
Makina Bölümü

Lisans 1995-1999 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 1999-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri
Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı

Çalıştığı kurumlar

1999-Devam ediyor Şişli Endüstri Meslek Lisesi Matematik
Öğretmeni

TC YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ