

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SPLINE ile EĞRİ ve YÜZEY OLUŞTURMA

Matematik Müh. Ramazan TEKERCİOĞLU

F.B.E Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

106191

**Tez Danışmanı
Jüri Üyeleri**

: Yrd. Doç. Dr. Fatih TAŞCI
: Yrd. Doç. Dr. İbrahim EMİROĞLU
: Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

İSTANBUL, 2001

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÇİZELGE LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1 GİRİŞ	1
2 DÜZLEM EĞRİLERİ	2
2.1 Spline Fonksiyonları ile İnterpolasyon	2
2.2 Parçalı Lineer İnterpolasyon	2
2.3 Parçalı Kübik Spline'lar	4
2.4 Kübik Spline'ların Varlığı	5
2.5 Kübik Spline'ların Oluşturulması	7
3 UZAY EĞRİLERİ	11
3.1 Parametrik Kübik Spline'lar	11
3.2 Kübik Spline İçin Uç Nokta Koşulları	22
4 B-SPLİNE EĞRİLERİ	29
4.1 B-spline Baz Fonksiyonları	30
4.2 B-spline Eğrileri ve Bazlarının Özellikleri	31
4.3 Düğüm (Knot) Vektörleri	32
5 YÜZEY OLUŞTURMA	39
5.1 B-spline Yüzeyleri	39
5.2 B-spline Yüzeylerinin Özellikleri	40
6 SONUÇLAR	41
6.1 Uygulamalar	41
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGE LİSTESİ

B_i	Spline segmenti için belirlenen sabit katsayılar
B_{ik}	Parametrik kübik spline segmenti için sabit katsayılar
$B_{i,j}$	Poligon ağının düğüm noktaları
C^{k-2} ve C^{l-2}	Sırasıyla u ve w doğrultularındaki süreklilikler
F_{ik}	Blending veya ağırlık fonksiyonları
$J_{n,i}(t)$	Bezier veya Bernstein bazı veya blending fonksiyonu
k ve l	Sırasıyla u ve w yönlerindeki B-spline baz fonksiyonları mertebeleri
$\{m_k\}$	Lineer denklem sistemi katsayıları
$N_{i,k}(u)$ ve $M_{j,l}(w)$	Sırasıyla u ve w yönlerindeki B-spline baz fonksiyonları
$P(t)$	Parametrik kübik spline segmenti üzerindeki herhangi bir noktanın yer vektörü
$P_k(t)$ ve $P_{k+1}(t)$	İki bitişik kübik spline segmenti
P_1 ve P_2	Spline segmentinin uç noktalarındaki yer vektörleri
P_1' ve P_2'	Spline segmentinin uç noktalarındaki teğet vektörleri
$S(x)$	Parçalı polinom eğrisi (Kübik Spline Fonksiyonu)
$\{S_k(x)\}$	Kübik polinomlar kümesi
$\{S_{k,j}\}$	$\{S_k(x)\}$ kübik polinom katsayıları
$S'(x)$	Kübik spline'in 1.mertebe türevi
$S''(x)$	Kübik spline'in 2.mertebe türevi
$[X]$ ve $[Y]$	Düğüm (knot) vektörleri
x_i ve y_j	$x_i \leq x_{i+1}$ ilişkisini sağlayan düğüm (knot) vektörlerinin elemanları
$\{(x_k, y_k)\}$	N+1 tane noktadan oluşan küme
$Q(u, w)$	B-Spline yüzeyi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Parçalı polinom interpolasyonu	2
Şekil 2.2	Parçalı lineer interpolasyon.....	3
Şekil 3.1	Tek kübik spline segmenti	13
Şekil 3.2	İki parçalı kübik spline segmenti	15
Şekil 3.3	Çoklu parçalı kübik spline segmentleri için notasyon	16
Şekil 3.4	$t_{k+1} = 1.0$ için kübik spline blending fonksiyonları	21
Şekil 3.5	Parçalı kübik spline; (a) t_k 'nın giriş yaklaşımı kullanılarak belirlenmesi durumu, (b) $t_k = 1$ normalize durumu	22
Şekil 4.1	B-spline eğrilerinin Convex hull özellikleri	32
Şekil 4.2	Periyodik B-spline baz fonksiyonları, $[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$, $n+1=4$, $k=3$	33
Şekil 4.3	Bezier/Bernstein blending fonksiyonları. 4 poligon noktası, $n=3$	34
Şekil 4.4	Açık düzgün (open uniform) B-spline baz fonksiyonları, $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$, $k=3$, $n+1=4$	35
Şekil 4.5	Düzgün olmayan (nonuniform) baz fonksiyonları $n+1=5$, $k=3$. (a) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ (b) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 0.4 \ 2.6 \ 3 \ 3 \ 3]$ (c) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1.8 \ 2.2 \ 3 \ 3 \ 3]$ (d) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3]$ (e) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$	36
Şekil 6.1	B-spline eğrisi (R harfi), kontrol noktaları $n+1=22$, mertebe $k=3$	41
Şekil 6.2	B-spline eğrisi, kontrol noktaları $n+1=25$, mertebe $k=4$	42
Şekil 6.3	B-spline eğrisi (Araba), kontrol noktaları $n+1=29$, mertebe $k=3$	43
Şekil 6.4	B-spline eğrisi (Horoz), kontrol noktaları $n+1=81$, mertebe $k=3$	44
Şekil 6.5	B-spline yüzeyi, kontrol noktaları 4×4 ($n+1=4$, $m+1=4$), u yönündeki mertebe $k=3$, w yönündeki mertebe $l=3$	45
Şekil 6.6	B-spline yüzeyi (kadeh), kontrol noktaları 9×5 ($n+1=9$, $m+1=5$), u yönündeki mertebe $k=3$, w yönündeki mertebe $l=2$	46
Şekil 6.7	B-spline yüzeyi (kadeh), kontrol noktaları 9×4 ($n+1=9$, $m+1=4$), u yönündeki mertebe $k=3$, w yönündeki mertebe $l=2$	47

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1	Kübik spline için uç nokta kısıtları	7
Çizelge 3.1	Parametrik kübik spline uç nokta koşulları.....	27



ÖNSÖZ

Bu tezin gerçekleştirilmesinde desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Fatih TAŞÇI'ya teşekkür ederim.

Ayrıca yardımlarından dolayı Prof. Dr. Abdullah YILDIZ'a ve Yrd. Doç. Dr. İbrahim EMİROĞLU 'na teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2001

Ramazan Tekercioğlu



ÖZET

Polinom interpolasyonu ile her zaman istenilen hassasiyette sonuç elde etmek mümkün değildir. Keskin köşeleri olan, yüksek mertebeden türevlerde hızlı değişim olan fonksiyonlara ve hatta bazı düzgün fonksiyonlara bile yüksek mertebeden polinomlar ile yapılan yaklaşımlarda istenilen hassasiyet sağlanamaz.

İnterpolasyon ve veri uydurmada (data fitting) verilen datalara adapte olabilen yeteri kadar esnekliğe sahip ve bilgisayarda kolayca hesaplanabilen fonksiyonların kullanılması gerekebilir. Dolayısıyla özel bir sebep olmadığı sürece fonksiyon yaklaşımında veya veri uydurmada spline'ları kullanmak uygundur. Bu fonksiyonların özellikleri,

- Düzgün ve esnektir,
- Bilgisayarda depolamak ve işlem yapmak kolaydır,
- Türevlerini ve integrallerini hesaplamak kolaydır.

Spline fonksiyonları interpolasyon, veri uydurma, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde, eğri ve yüzey yaklaşımında, kompleks geometrik nesnelerin matematik modellemesinde sıkça kullanılırlar.

Bu çalışmada;

İkinci bölümde kübik spline'lar ve özellikleri anlatıldı. Üçüncü bölümde, parametrik kübik spline'lar incelendi. Dördüncü bölümde B-spline eğrileri ele alındı. Beşinci bölümde, B-spline yüzeyleri ve özellikleri anlatıldı.

Ayrıca, her bölümle ilgili yazılmış C kodları kullanılarak örnek uygulamalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar en son bölümde verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Spline, düğüm(knot) vektör, B-spline bazları, kontrol noktaları.

ABSTRACT

Polynomial interpolation is frequently unsatisfactory. A function with sharp corners or rapidly changing higher derivatives is less accurately approximated by a higher-order polynomial than by a low-order polynomial. Even some smooth functions can be badly approximated by higher-order polynomials.

When approximating functions for interpolation or for data fitting, it is necessary to have classes of functions which enough flexibility to adapt to the given data and can be easily evaluated on a computer. Splines are highly recommended for function approximation or data fitting whenever there is no particular reason for using a single polynomial or other elementary functions. Spline functions have the following properties:

- Smooth and flexible,
- Easy to store and manipulate on a computer,
- Easy to evaluate, along with their derivatives and integrals.

Spline functions play an important role in the solution of differential equations, modelling of data, curve and surface design and modelling of objects of complex geometric shape.

In this study, Cubic splines are introduced and their properties are developed in section 2. In section 3 describes curves based on parametric cubic spline. In section 4 discusses B-spline curves. In section 5 addresses the design of B-spline surfaces. In parallel, their practical use is demonstrated by many examples using the codes written in C.

Keywords: Spline, knot vector, B-spline basis, control points.

1. GİRİŞ

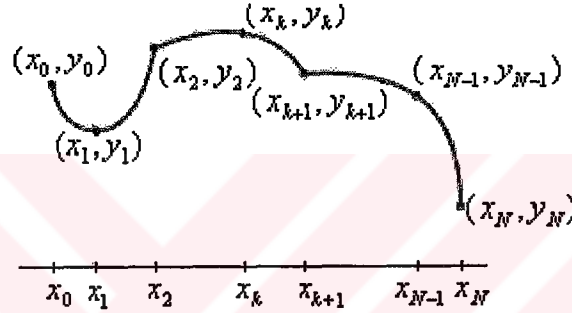
Spline fonksiyon ismi ilk defa 1946 da Schoenberg tarafından ortaya atılmıştır. Bu konuda teorik ve pratik uygulamalarda gelişme 1960'lı yılların başında olmuştur. Bu fonksiyonlar interpolasyon, veri uydurma, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde, eğri ve yüzey uydurma gibi birçok uygulamalarda yaygınca kullanılmaktadır. Yaklaşım yapılan fonksiyonun özelliklerinden dolayı yüksek mertebeden polinom interpolasyonu uygun olmayabilir. Bu durumda parçalı polinomlar kullanılır. Yani fonksiyon her bir alt aralıkta farklı bir polinom ile temsil edilir. Polinomlar aralığın uç noktalarında belirli dereceden düzgünlük garanti edilecek şekilde birleştirilir. Eğer polinomun derecesi k ise spline fonksiyonu k . dereceden $((k+1)$. mertebeden) olarak adlandırılır.



2. DÜZLEM EĞRİLER

2.1 Spline Fonksiyonları ile İnterpolasyon

$N+1$ tane noktadan oluşan $\{(x_k, y_k)\}$ noktalar kümesi için polinom interpolasyonu çoğunlukla tercih edilmez. N .dereceden bir polinom $N-1$ tane bağıl maksimum ve minimuma sahip olabilir ve polinomun grafiği bu noktalardan geçerken salınım yapabilir. Diğer bir metod derecesi daha küçük olan $S_k(x)$ polinomlarının grafiklerini birleştirmek ve (x_k, y_k) ve (x_{k+1}, y_{k+1}) ardışık düğüm noktaları arasında interpolate etmektir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Parçalı polinom interpolasyonu

Eğrinin $[x_k, x_{k+1}]$ ve $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ aralıkları arasında kalan iki kısmı sırasıyla $y = S_k(x)$ ve $y = S_{k+1}(x)$, ortak düğüm noktası olan $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ den geçerler. Grafiğin iki parçası ortak düğüm noktası olan (x_{k+1}, y_{k+1}) noktasında birleştirilir ve $\{S_k(x)\}$ fonksiyonlar kümesi parçalı bir polinom eğrisi oluşturur. Bu eğriyi $S(x)$ ile gösterelim.

2.2 Parçalı Lineer İnterpolasyon

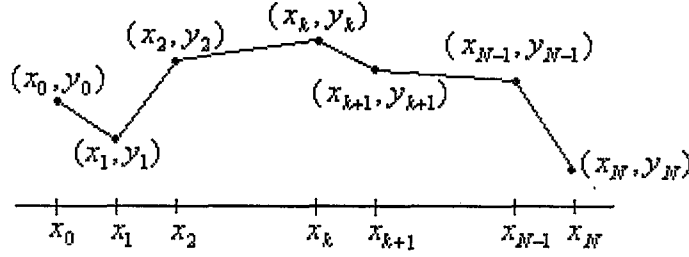
Kullanılacak en basit polinom 1.dereceden polinomdur. Lagrange polinomu, bu parçalı lineer eğriyi temsil etmek için kullanılırsa:

$$S_k(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (2.1)$$

Yukarıdakine eşdeğer ifade nokta-eğim formülü

$$S_k(x) = y_k + d_k(x - x_k)$$

doğru parçası için kullanılarak da elde edilebilir. Burada $d_k = \frac{(y_{k+1} - y_k)}{(x_{k+1} - x_k)}$ 'dir.



Şekil 2.2 Parçalı lineer interpolasyon

Buradan lineer spline fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + d_0(x - x_0) & , \quad x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + d_1(x - x_1) & , \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ y_k + d_k(x - x_k) & , \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \\ \vdots & \\ y_{N-1} + d_{N-1}(x - x_{N-1}) & , \quad x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.2) ifadesi $S(x)$ 'in hesabı için (2.1) ifadesinden daha iyidir. Absislerin $x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N$ şeklinde sıralandığını farzedelim. $x - x_1, \dots, x - x_k, x - x_{k+1}$ farkları $x - x_{k+1} < 0$ olacak şekilde $(k+1)$ en küçük tamsayı oluncaya kadar hesaplanırsa sabit x değerinin yer aldığı $[x_k, x_{k+1}]$ aralığı tespit edilir ve $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ bulunur.

Spline'in değeri

$$S(x) = S_k(x) = y_k + d_k(x - x_k) \text{ 'dir} \quad , \quad x_k \leq x \leq x_{k+1} . \quad (2.3)$$

Bu teknikler daha yüksek dereceli polinomlara genişletilebilir. Örneğin tek sayıda $x_0, \dots, x_1, \dots, x_{2M}$ düğümleri verilirse bu durumda parçalı kuadratik bir polinom her bir $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ alt aralığında oluşturulabilir, $k=0,1,\dots,M-1$. Bu kuadratik spline'in dezavantajı çift düğüm noktaları x_{2k} 'daki eğriliğin kötü biçimdeki değişiminden dolayı grafikte istenmeyen eğilme ve bozulmalar olabilir. Kuadratik spline'in 2.türevi çift düğüm noktalarında süreksizdir. Eğer parçalı kübik polinomlar kullanılırsa 1. ve 2. türevlerin her ikisi de sürekli yapılabilir.

2.3 Parçalı Kübik Spline'lar

Bir data noktaları kümesine bir polinom eğri uydurma işleminin bilgisayar grafikleri ve taslak çizimi alanlarında uygulamaları vardır. Herbir $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında $S_k(x)$ kübik fonksiyonları oluşturularak $y = S(x)$ parçalı eğrisi elde edilebilir. $y = S(x)$ eğrisinin 1. ve 2. mertebeden türevleri $[x_0, x_N]$ aralığında süreklidir. $S'(x)$ 'in sürekliliği, $y = S(x)$ grafiğinde keskin köşelerin olmadığını, $S''(x)$ 'in sürekliliği ise eğrilik yarıçapının her noktada tanımlı olduğunu gösterir.

Tanım 2.1 (Kübik Spline İnterpolasyonu): $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^N$ noktalarını göz önüne alalım.

Burada $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$. Eğer aşağıdaki özelliklere sahip N tane $S_k(x)$ kübik polinomu mevcut ise, $S(x)$ fonksiyonu kübik spline olarak adlandırılır:

$$I. \quad S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + s_{k,3}(x - x_k)^3$$

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

II. Spline her data noktasından geçer;

$$S(x_k) = y_k \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

III. Spline sürekli bir fonksiyon oluşturur;

$$S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-2.$$

IV. Spline düzgün bir fonksiyon oluşturur;

$$S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) , \quad k = 0, 1, \dots, N-2.$$

V. İkinci türev süreklidir;

$$S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) , \quad k = 0, 1, \dots, N-2.$$

2.4 Kübik Spline'ların Varlığı

Yukarıdaki tüm şartları sağlayan bir kübik spline oluşturalım. Herbir kübik polinom $S_k(x)$ dört bilinmeyene sahiptir. Bu nedenle belirlenmesi gereken $4N$ tane katsayı vardır. Dolayısıyla, $4N$ tane koşul belirlememiz gerekir. II. koşuldan $N+1$ tane şart elde ederiz. III, IV ve V şartlarının herbirinden $N-1$ tane koşul elde ederiz. Bu nedenle, $N+1+3.(N-1)=4N-2$ tane koşul bellidir. İki tane koşulu keyfi olarak seçmek zorundayız. Bunlar uç nokta kısıtları olarak adlandırılır. Bu kısıtlar x_0 ve x_N noktalarında $S'(x)$ veya $S''(x)$ 'i içerir.

$S(x)$ parçalı kübik olduğundan, $S''(x)$ $[x_0, x_N]$ aralığında parçalı lineerdir. $S''(x) = S''_k(x)$ için lineer lagrange interpolasyon formülü

$$S''_k(x) = S''(x_k) \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + S''(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \text{ 'dir.} \quad (2.4)$$

$m_k = S''(x_k)$, $m_{k+1} = S''(x_{k+1})$ ve $h_k = x_{k+1} - x_k$ alalım. Bu ifadeleri (2.4)'de yerine koyarsak

$$S''_k(x) = \frac{m_k}{h_k}(x_{k+1} - x) + \frac{m_{k+1}}{h_k}(x - x_k) \quad (2.5)$$

elde ederiz. Burada $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ve $k=0,1,\dots,N-1$. (2.5) ifadesini iki defa integre eder ve elde edilen ifadeyi düzenlersek

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k}(x - x_k)^3 + p_k(x_{k+1} - x) + q_k(x - x_k) \quad (2.6)$$

elde edilir.

Burada p_k ve q_k integrasyon sabitleridir. (2.6) denkleminde x yerine x_k ve x_{k+1} yazarsak ve $y_k = S_k(x_k)$ ve $y_{k+1} = S_k(x_{k+1})$ şartlarını kullanırsak

$$y_k = \frac{m_k}{6} h_k^2 + p_k h_k \text{ ve } y_{k+1} = \frac{m_{k+1}}{6} h_k^2 + q_k h_k \quad (2.7)$$

bulunur. Bu iki denklemden p_k ve q_k 'yı bulup (2.6) denkleminde yerine yazarsak $S_k(x)$ kübik fonksiyonunu

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6h_k} (x_{k+1} - x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k} (x - x_k)^3 + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6} \right) (x_{k+1} - x) + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1} h_k}{6} \right) (x - x_k) \quad (2.8)$$

şeklinde elde ederiz. (2.8) ifadesi sadece bilinmeyen $\{m_k\}$ katsayılarını içerir. Bu değerleri bulmak için (2.8) ifadesinin türevini alalım.

$$S'_k(x) = -\frac{m_k}{2h_k} (x_{k+1} - x)^2 + \frac{m_{k+1}}{2h_k} (x - x_k)^2 - \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6} \right) + \frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1} h_k}{6} \quad (2.9)$$

(2.9) ifadesini x_k noktasında hesaplırsak

$$S'_k(x_k) = -\frac{m_k}{3} h_k - \frac{m_{k+1}}{6} h_k + d_k, \quad d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} \quad (2.10)$$

bulunur. Benzer şekilde, (2.9)'da k yerine $k-1$ yazıp $S'_{k-1}(x)$ 'i x_k 'da hesaplırsak

$$S'_{k-1}(x_k) = \frac{m_k}{3} h_{k-1} + \frac{m_{k-1}}{6} h_{k-1} + d_{k-1} \quad (2.11)$$

elde edilir.

Şimdi IV şartını, (2.10) ve (2.11) denklemlerini kullanarak m_{k-1}, m_k ve m_{k+1} 'i içeren önemli bir bağıntı elde ederiz.

$$\begin{aligned} h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} &= u_k, \\ u_k &= 6(d_k - d_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.5 Kübik Spline'ların Oluşturulması

(2.12) denklem sistemindeki bilinmeyenler $\{m_k\}$ değerleridir. (2.12) denklem sistemi $N+1$ tane bilinmeyen içeren $N-1$ tane lineer denklemden oluşmuştur. Bu nedenle iki adet denkleme ihtiyacımız vardır. Bu iki ek denklem kullanılarak (2.12) denklem sistemindeki birinci denklemden m_0 değerini $N-1$. denklemden ise m_N 'i bulabiliriz.

Çizelge 2.1 Kübik spline için uç nokta kısıtları

Uç nokta stratejisi	m_0 ve m_N 'i içeren denklemler
(i) "Clamped kübik spline": $S'(x_0)$ ve $S'(x_N)$ belirtilir (türevler biliniyorsa en iyi seçim).	$m_0 = \frac{3}{h_0} [d_0 - S'(x_0)] - \frac{m_1}{2}$ $m_N = \frac{3}{h_{N-1}} [S'(x_N) - d_{N-1}] - \frac{m_{N-1}}{2}$
(ii) "Natural kübik spline" (a "relaxed curve")	$m_0 = 0, \quad m_N = 0$
(iii) $S''(x)$ 'i uç noktalara extrapole et.	$m_0 = m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1}$ $m_N = m_{N-1} + \frac{h_{N-1}(m_{N-1} - m_{N-2})}{h_{N-2}}$
(iv) $S''(x)$ uç noktalar civarında sabittir.	$m_0 = m_1, \quad m_N = m_{N-1}$
(v) Her uç noktada $S''(x)$ 'i belirt.	$m_0 = S''(x_0), \quad m_N = S''(x_N)$

Çizelge 2.1 'deki (v) stratejisini gözönüne alalım. Eğer m_0 verilmişse $h_0 m_0$ hesaplanabilir ve (2.12) denklem sisteminin ilk denklemi ($k=1$ için) aşağıdaki gibi olur:

$$2[h_0 + h_1]m_1 + h_1 m_2 = u_1 - h_0 m_0 \quad (2.13)$$

Benzer şekilde m_N verilmişse $h_{N-1}m_N$ hesaplanabilir ve (2.12) denklem sisteminin son denklemi ($k=N-1$ için) aşağıdaki şekli alır:

$$h_{N-2}m_{N-2} + 2[h_{N-2} + h_{N-1}]m_{N-1} = u_{N-1} - h_{N-1}m_N \quad (2.14)$$

(2.12) denklem sistemi, $k=2,3,...,N-2$ (2.13) ve (2.14) denklemleri $m_1, m_2, ..., m_{N-1}$ tane katsayıyı içeren $N-1$ tane lineer denklem oluşturur.

Çizelge 2.1'deki hangi strateji seçilirse seçilsin, (2.12) denklem sistemi, $k=2,3,...,N-2$ ve (2.13) ve (2.14) denklemleri, $H.M=V$ formunda $m_1, m_2, ..., m_{N-1}$ 'i içeren tridiagonal lineer bir sistem oluşturur:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & a_{N-3} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & c_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

(2.15) denklem sistemi köşegen baskındır ve tek çözüme sahiptir. $\{m_k\}$ katsayıları belirlendikten sonra $S_k(x)$ 'in katsayıları olan $\{S_{k,j}\}$ 'ler aşağıdaki formüllerden hesaplanır:

$$\begin{aligned} s_{k,0} &= y_k, & s_{k,1} &= d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{6} \\ s_{k,2} &= \frac{m_k}{2}, & s_{k,3} &= \frac{m_{k+1} - m_k}{6h_k} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Etkili hesaplama amacı ile her bir $S_k(x)$ kübik polinomu aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$S_k(x) = [(s_{k,3}w + s_{k,2})w + s_{k,1}]w + y_k, \quad w = x - x_k \quad (2.17)$$

Ve $S_k(x)$, $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ aralığında kullanılır.

Şimdi herbir spline tipi için denklemlerin nasıl oluştuğunu gösterelim.

Lemma 2.1 (Clamped Spline). $S'(a) = d_0$ ve $S'(b) = d_N$ şartları altında aşağıdaki lineer denklem sistemi çözülür:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1\right)m_1 + h_1m_2 &= u_1 - 3[d_0 - S'(x_0)] \\ h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_km_{k+1} &= u_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-2 \\ h_{N-2}m_{N-2} + \left(2h_{N-2} + \frac{3}{2}h_{N-1}\right)m_{N-1} &= u_{N-1} - 3[S'(x_N) - d_{N-1}] \end{aligned}$$

Lemma 2.2 (Natural Spline). $S''(a) = 0$ ve $S''(b) = 0$ ile aşağıdaki denklem sistemi çözülür:

$$\begin{aligned} 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1m_2 &= u_1, \\ h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_km_{k+1} &= u_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-2 \\ h_{N-2}m_{N-2} + 2(h_{N-2} + h_{N-1})m_{N-1} &= u_{N-1}. \end{aligned}$$

Lemma 2.3 (Extrapolated spline). $S''(a)$ 'yi belirlemek için x_1 ve x_2 , $S''(b)$ 'yi belirlemek için ise x_{N-1} ve x_N kullanılırsa aşağıdaki denklem sistemiyle karşılaşılır:

$$\begin{aligned} \left(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1}\right)m_1 + \left(h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}\right)m_2 &= u_1, \\ h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_km_{k+1} &= u_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-2 \\ \left(h_{N-2} - \frac{h_{N-1}^2}{h_{N-2}}\right)m_{N-2} + \left(2h_{N-2} + 3h_{N-1} + \frac{h_{N-1}^2}{h_{N-2}}\right)m_{N-1} &= u_{N-1}. \end{aligned}$$

Lemma 2.4 (Parabolically Terminated Spline). $[x_0, x_1]$ aralığında $S''(x) \equiv 0$ ve $[x_{N-1}, x_N]$ aralığında $S''(x) \equiv 0$ alınırsa denklem sistemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} (3h_0 + 2h_1)m_1 + h_1m_2 &= u_1, \\ h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_km_{k+1} &= u_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-2 \\ h_{N-2}m_{N-2} + (2h_{N-2} + 3h_{N-1})m_{N-1} &= u_{N-1}. \end{aligned}$$

Lemma 2.5 (Endpoint Curvature-Adjusted Spline). $S''(a)$ ve $S''(b)$ belirtildiğinde aşağıdaki denklem sistemi çözülür:

$$2(h_0 + h_1)m_1 + h_1m_2 = u_1 - h_0S''(x_0),$$

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_km_{k+1} = u_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-2$$

$$h_{N-2}m_{N-2} + 2(h_{N-2} + h_{N-1})m_{N-1} = u_{N-1} - h_{N-1}S''(x_N).$$



3. UZAY EĞRİLERİ

3.1 Parametrik Kübik Splineler

Kübik Spline’da amaç verilen $(n+1)$ nokta (x_k, y_k) dan geçen düzgün bir eğrinin oluşturulmasıdır. $y = f(x)$ formunda temsil her zaman mümkün değildir. Bu yüzden $x = x(t)$, $y = y(t)$ parametrik temsilini kullanmak zorunda kalırız. $(n+1)$ noktaya karşılık gelen $t_0, t_1, \dots, t_n$ parametre değerlerinin büyüklüklerine göre sıralandığını farzedelim. Burada (t_k, x_k) ve (t_k, y_k) , $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ değerlerini interpolate eden iki spline belirleriz. Yukarıda belirtilen parametrik temsil vasıtasıyla istenilen eğriyi oluşturabiliriz.

Genelde, spline derecesi K olan ve parçalar arası ortak eklem yerlerinde $(K-1)$. mertebeye kadar türevleri sürekli olan parçalı bir polinomdur. Dolayısıyla, kübik spline ortak noktalarda ikinci mertebeye sahiptir veya birleşim noktalarında C^2 sürekliliğe sahiptir. Düşük dereceli polinomların parçalı spline’ları eğri uydurmada çok kullanışlıdır. Çünkü düşük derece polinomlar hesaplama gereksinimlerini ve ayrıca daha yüksek dereceli eğrilerde ortaya çıkan nümerik kararsızlıkları azaltır. Ortak bir eğride birkaç nokta birleştirildiği zaman bu kararsızlıklar istenmeyen salınımlara neden olur. Düşük dereceli polinomlar keyfi bir noktalar dizisini geremediğinden dolayı, bitişik polinom segmentleri kullanılır. Bunlar göz önüne alındığında ortak teknik her bir parçada iki noktayı geren kübik spline segmentlerinin bir dizisini kullanmaktır.

Parametrik kübik spline segmenti için denklem aşağıdaki şekilde verilir:

$$P(t) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.1)$$

Burada t_1 ve t_2 segmentin başlangıcında ve sonundaki parametre değerleridir. $P(t)$ kübik spline segmenti üzerindeki herhangi bir noktanın yer vektörüdür. $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$ vektör değerli bir fonksiyondur. $P(t)$ ’nin bileşenleri yer vektörünün kartezyen koordinatlarıdır. Her bileşen $P(t)$ ’ye benzer bir formülasyona sahiptir.

Yani,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^4 B_{i_x} t^{i-1} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ y(t) &= \sum_{i=1}^4 B_{i_y} t^{i-1} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ z(t) &= \sum_{i=1}^4 B_{i_z} t^{i-1} & t_1 \leq t \leq t_2 \end{aligned}$$

B_i sabit katsayıları, spline segmenti için dört sınır koşulunun belirtilmesiyle belirlenir. (3.1) denklemi aşağıdaki ifadeyi sağlar:

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.2)$$

P_1 ve P_2 , spline segmentinin başlangıç ve bitişindeki yer vektörleri olsun (Şekil 3.1). Ayrıca P'_1 ve P'_2 'de spline segmentinin uçlarındaki teğet vektörleri olsun. (3.1) denkleminin diferansiyeli aşağıdaki ifadeyi sağlar:

$$P'(t) = [x'(t) \quad y'(t) \quad z'(t)] = \sum_{i=1}^4 B_i (i-1) t^{i-2} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.3)$$

Yukarıdaki sonucu açık olarak yazarsak

$$P'(t) = B_2 + 2B_3 t + 3B_4 t^2 \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.4)$$

elde edilir. Genelliği bozmadan, $t_1 = 0$ olsun ve dört tane sınır koşulunu uygulayalım:

$$P(0) = P_1 \quad (3.5)$$

$$P(t_2) = P_2 \quad (3.6)$$

$$P'(0) = P'_1 \quad (3.7)$$

$$P'(t_2) = P'_2 \quad (3.8)$$

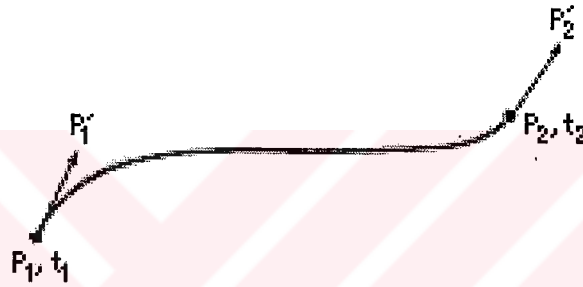
Yukarıdaki sınır koşullarından B_i bilinmeyenleri için dört denklem elde edilir.

$$P(0) = B_1 = P_1 \quad (3.9)$$

$$P'(0) = \sum_{i=1}^4 (i-1)t^{i-2} B_i \Big|_{t=0} = B_2 = P'_1 \quad (3.10)$$

$$P(t_2) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \Big|_{t=t_2} = B_1 + B_2 t_2 + B_3 t_2^2 + B_4 t_2^3 = P_2 \quad (3.11)$$

$$P'(t_2) = \sum_{i=1}^4 (i-1)t^{i-2} B_i \Big|_{t=t_2} = B_2 + 2B_3 t_2 + 3B_4 t_2^2 = P'_2 \quad (3.12)$$



Şekil 3.1 Tek kübik spline segmenti

B_3 ve B_4 hesaplanırsa

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2} \quad (3.13)$$

$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P'_1}{t_2^2} + \frac{P'_2}{t_2^2} \quad (3.14)$$

olarak elde edilir. B_1, B_2, B_3 ve B_4 'ün bu değerleri kübik spline segmentini belirler. Segmentin şekli segmentin uçlarındaki yer ve teğet vektörlerine bağlıdır. Ayrıca, her uç nokta yer ve teğet vektörleri üçer bileşene sahip olduklarından, kübik uzay eğrisi için parametrik denklem, segment sonundaki t_2 parametre değerine ve on iki tane vektör bileşenine bağlıdır.

(3.9), (3.10), (3.11), (3.12) ve (3.13), (3.14) denklemleri (3.1) denkleminde yerine konursa tek bir kübik spline segmenti için

$$P(t) = P_1 + P_1' t + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] t^3 \quad (3.15)$$

elde edilir.

(3.15) denklemi tek bir kübik spline segmenti içindir. Eğriyi tam olarak temsil etmek için bir çok segment bir araya getirilir. İki bitişik segment Şekil 3.2'de gösterilmiştir. P_1, P_2, P_3 yer vektörleri, P_1', P_2', P_3' teğet vektörleri ve t_2, t_3 parametre değerlerinin bilinmesi koşuluyla her iki segmentin her birine uygulanan (3.15) denklemi, onların şekillerini verir. Ayrıca, iki segment arasındaki birleşme noktasında P_2' teğet vektörü bilinmeyebilir. P_2' iç teğet vektörü, birleşme noktasında bir süreklilik koşulu ile belirlenebilir.

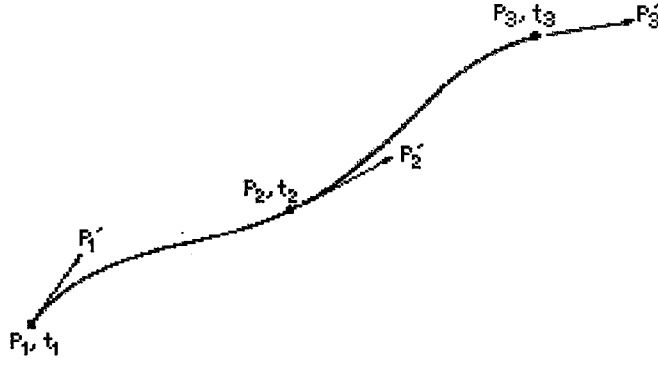
Bildiğimiz gibi K. dereceden bir parçalı spline iç birleşme noktalarında (K-1). mertebeden sürekliliğe sahiptir. O halde, bir kübik spline iç birleşme noktalarında 2.mertebeden sürekliliğe sahiptir. Yani $P_2''(t)$ birleşme noktalarında süreklidir. Buradan eğrilik birleşme noktalarında süreklidir.

(3.1) denklemini iki kez türetirsek

$$P''(t) = \sum_{i=1}^4 (i-1)(i-2)B_i t^{i-3} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.16)$$

elde edilir.

İlk kübik spline segmentinin parametre aralığı $0 \leq t \leq t_2$ 'dir. $t = t_2$ için, (3.16) denklemini hesaplırsak, $P'' = 6B_4 t_2 + 2B_3$ elde edilir.



Şekil 3.2 İki parçalı kübik spline segmenti

İkinci kübik spline segmenti için parametre aralığı $0 \leq t \leq t_3$ 'tür. $t = 0$ için (3.16) denklemini hesaplırsak, $P'' = 2B_3$ elde edilir. Bu iki sonucu eşitler ve (3.9), (3.10) ve (3.13) denklemlerini kullanırsak

$$6t_2 \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] + 2 \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] = 2 \left[\frac{3(P_3 - P_2)}{t_3^2} - \frac{2P_2'}{t_3} - \frac{P_3'}{t_3} \right]$$

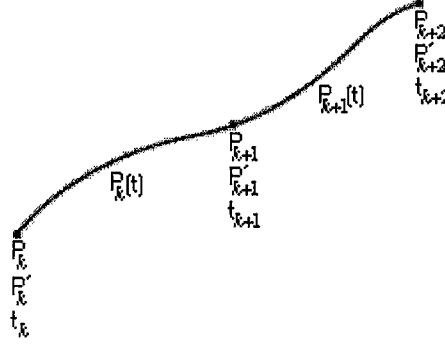
bulunur.

Burada denklemin sol tarafı 1.segmentin sonundaki eğriliği ve sağ tarafı ise 2.segment başındaki eğriliği gösterir. Yukarıdaki ifadeyi $t_2 t_3$ 'le çarpıp düzenlersek

$$t_3 P_1' + 2(t_3 + t_2) P_2' + t_2 P_3' = \frac{3}{t_2 t_3} [t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)] \quad (3.17)$$

ifadesi bulunur.

Bu denklem, iç birleşme noktasındaki bilinmeyen P_2' teğet vektörü için çözülebilir. Bu sonuçlar iç noktalarda 2.mertebe sürekliliğe sahip (n-1) adet parçalı kübik spline elde etmek için, n data noktasına genelleştirilebilir.



Şekil 3.3 Çoklu parçalı kübik spline segmentleri için notasyon.

Şekil 3.3’de gösterilen notasyonu kullanılırsa iki bitişik $P_k(t)$ ve $P_{k+1}(t)$ kübik spline segmenti için denklemler ;

İlk segment için

$$P_k(t) = P_k + P'_k t + \left[\frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2} \right] t^3 \quad (3.18)$$

ve 2.segment için

$$P_{k+1}(t) = P_{k+1} + P'_{k+1} t + \left[\frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_{k+2}^2} - \frac{2P'_{k+1}}{t_{k+2}} - \frac{P'_{k+2}}{t_{k+2}} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_{k+2}^3} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+2}^2} + \frac{P'_{k+2}}{t_{k+2}^2} \right] t^3 \quad (3.19)$$

dır. Her segment için parametre aralığı sıfırdan başlar, ilk segment için $0 \leq t \leq t_{k+1}$ ve 2.segment için $0 \leq t \leq t_{k+2}$ ’dir.

Herhangi iki bitişik spline segmenti için, ortak iç noktada ikinci türevler eşitlenirse, yani $P_k''(t_k) = P_{k+1}''(0)$ alınırsa (3.17) denkleminde eş olan

$$t_{k+2}P_k' + 2(t_{k+1} + t_{k+2})P_{k+1}' + t_{k+1}P_{k+2}' = \frac{3}{t_{k+1}t_{k+2}} [t_{k+1}^2(P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2(P_{k+1} - P_k)] \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (3.20)$$

ifadesi ile P_k ve P_{k+1} herhangi iki spline segmenti arasında, ara birleşme noktasında teğet vektörü belirlenir.

Tüm spline segmentleri üzerinde (3.20) denklemi uygulanırsa P_k' , $2 \leq k \leq n-1$ teğet vektörleri için n-2 tane denklem elde edilir. Sonuç, matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4 + t_5) & t_4 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & t_n & 2(t_n + t_{n-1}) & t_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3} \{t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)\} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{t_3^2(P_4 - P_3) + t_4^2(P_3 - P_2)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{t_{n-1}^2(P_n - P_{n-1}) + t_n^2(P_{n-1} - P_{n-2})\} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

veya $[M^*][P'] = [R]$ 'dir. n tane teğet vektör için yalnız n-2 adet denklem olduğundan $[M^*]$ kare matris değildir. Dolayısıyla tersi bulunamaz ve $[P']$ için çözüm elde edilemez. Bu nedenle uç nokta teğet vektörleri P_1' ve P_n' 'nin bilinmesi koşuluyla problem çözülür.

Bu durumda matris formu

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\
 t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & . & . & . & . \\
 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & . & . & . \\
 0 & 0 & t_5 & 2(t_4 + t_5) & t_4 & 0 & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & 0 & t_n & 2(t_n + t_{n-1}) & t_{n-1} \\
 . & . & . & . & . & . & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 P'_1 \\
 P'_2 \\
 P'_3 \\
 . \\
 . \\
 . \\
 . \\
 P'_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 P'_1 \\
 \frac{3}{t_2 t_3} \{t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)\} \\
 \frac{3}{t_3 t_4} \{t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2)\} \\
 . \\
 . \\
 . \\
 \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2})\} \\
 P'_n
 \end{bmatrix}
 \quad (3.22)$$

veya $[M][P'] = [R]$ 'dir. Burada $[M]$ artık kare matristir, tersi alınabilir. Ve, $[M]$ tridiagonaldır ayrıca $[M]$ köşegen baskın bir matristir. Dolayısıyla $[M]$ tekil değildir, tersi vardır ve çözümü tektir. Buradan $[P']$ için çözüm aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$[P'] = [M]^{-1} [R] \quad (3.23)$$

P'_k 'ların bilinmesiyle her spline segmenti için B_i katsayıları belirlenebilir. (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) - (3.18) denklemleri genelleştirilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
 B_{1k} &= P_k \\
 B_{2k} &= P'_k \\
 B_{3k} &= \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}} \\
 B_{4k} &= \frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2}
 \end{aligned}$$

P_k lar ve P'_k ler vektör değerlidir dolayısıyla B_i 'ler de vektör değerlidir. Yani, eğer P_k lar ve P'_k ler x, y, z bileşenlerine sahip iseler, B_i katsayıları da x, y, z bileşenlerine sahiptirler.

Herhangi bir kübik spline segmenti k için bu denklemler matris formda

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}} & \frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{1}{t_{k+1}} \\ \frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

şeklindedir.

Verilen n yer vektörü P_k , $1 \leq k \leq n$ yardımıyla uç teğet vektörleri P'_1 ve P'_n olan parçalı kübik spline üretmek için (3.23) denklemi kullanılarak iç teğet vektörler P'_k , $2 \leq k \leq n-1$ belirlenir. Her parçalı kübik spline segmenti için uç nokta yer ve teğet vektörleri (3.24) denkleminde kullanılarak istenen segment için B_{ik} 'lar belirlenir, $1 \leq i \leq 4$. Son olarak (3.1) denklemi genelleştirilirse

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^4 B_{ik} t^{i-1} \quad 0 \leq t \leq t_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.25)$$

ifadesi spline segmenti üzerindeki noktaları belirlemede kullanılır.

(3.25) denklemi matris formunda aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$P_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq t_{k+1} \quad (3.26)$$

(3.24) denklemini yerine yazarsak ve düzenlersek

$$P_k(\tau) = \begin{bmatrix} F_1(\tau) & F_2(\tau) & F_3(\tau) & F_4(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \quad 0 \leq \tau \leq 1, 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.27)$$

elde edilir. Burada $\tau = (t/t_{k+1})$.

$$F_{1k}(\tau) = 2\tau^3 - 3\tau^2 + 1 \quad (3.28)$$

$$F_{2k}(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2 \quad (3.29)$$

$$F_{3k}(\tau) = \tau(\tau^2 - 2\tau + 1)t_{k+1} \quad (3.30)$$

$$F_{4k}(\tau) = \tau(\tau^2 - \tau)t_{k+1} \quad (3.31)$$

Yukarıdaki fonksiyonlar blending veya ağırlık fonksiyonları olarak adlandırılırlar.

Ağırlık fonksiyonları tanımı kullanılarak (3.27) denklemini matris formunda aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$P_k(\tau) = [F][G] \quad (3.32)$$

Burada $[F]$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1(\tau) & F_2(\tau) & F_3(\tau) & F_4(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

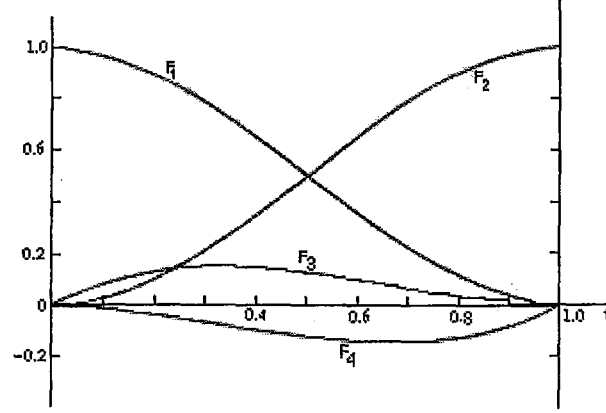
ile verilen blending fonksiyon matrisidir ve

$$[G]^T = \begin{bmatrix} P_k & P_{k+1} & P'_k & P'_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

geometrik bilgi içerir.

(3.32) formundaki denklemler eğri ve yüzey tanımlamalarında sıkça ortaya çıkar.

(3.28), (3.29), (3.30) ve (3.31) denklemlerinin hepsi kübiktir. Bir kübik spline segmentindeki herhangi bir nokta , uç nokta yer ve teğet vektörlerinin ağırlıklı toplamıdır. F_{ik} 'lar blending veya ağırlık fonksiyonları gibi davranır. Şekil 3.4 $t_{k+1} = 1.0$ olmak üzere F_i 'leri gösterir.



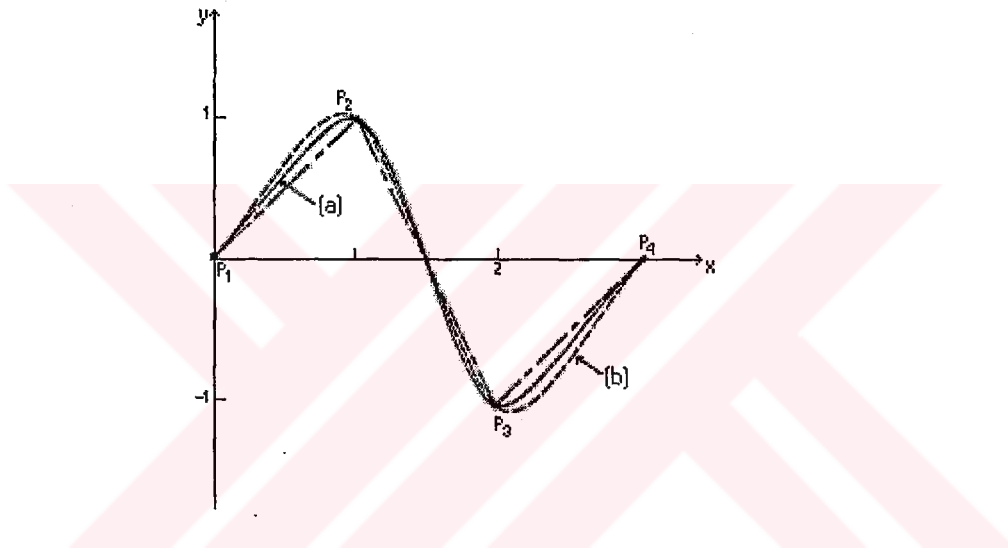
Şekil 3.4 $t_{k+1} = 1.0$ için kübik spline blending fonksiyonları.

Şekil 3.4 'den $F_1(0) = 1$ ve $F_2(0) = F_3(0) = F_4(0) = 0$ olduğu görülür. O halde, eğri uç nokta yer vektörü P_1 'den geçer. Benzer şekilde $F_2(1) = 1$ ve $F_1(1) = F_3(1) = F_4(1) = 0$ 'dır. Bu durumda, eğri ayrıca uç nokta yer vektörü P_2 'den geçer. Dikkat edilirse, F_1 , F_2 ile F_3 , F_4 ile simetriktir. $F_2(\tau) = 1 - F_1(\tau)$ 'dır. Sonuç olarak, F_1 ile F_2 ile F_3 ile F_4 'ün bağıl büyüklük ilişkileri dikkate alınmalıdır. Büyüklükteki fark genelde, uç yer vektörlerinin uç teğet vektörlerinden daha fazla etkiye sahip olduğunu gösterir.

Parçalı kübik spline eğrisi, yer vektörleri, teğet vektörleri ve parametre değerleriyle belirlenir, yani her segmentin uç noktasındaki t_k 'larla belirtilir. t_k 'ların seçimi eğrinin düzgünlüğünü etkiler.

Ara birleşme noktalarındaki 2.türevlerin sürekliliği tek başına eğri boyunca minimum eğrilik anlamında düzgün bir kübik spline üretmez. Minimum eğrilikte ve maksimum düzgünlükte bir kübik spline oluşturmak için her segmente t_k 'lar uygun olarak seçilerek her segment için B_3 ve B_4 katsayıları minimize edilmelidir. Bu ilave hesaplamaları yapmak gerekmez. Bunun yerine daha basit metodlar kullanılır.

t_k 'ları belirlemede kullanılan bir yaklaşım, parametre değerleri ardışık data noktaları arasındaki giriş uzunluklarına eşit olarak alınır. Düzgün eğriler bu teknik kullanılarak pratik olarak elde edilirler. İkinci bir yaklaşım her kübik segment için $t_k = 1$ seçerek değişimi normalize etmektir. Bu seçim hesap gereksinimlerini basitleştirir. Önceki denklemlerden görüleceği gibi her t_k seçimi farklı katsayı değerleri, ayrıca verilen data noktalarından geçen farklı eğriler üretir. (3.28), (3.29), (3.30) ve (3.31) denklemleri ile verilen blending fonksiyonları spline segmentinin şeklinde uç teğet vektörlerinin uç yer vektörlerine göre daha az etkiye sahip olduğunu gösterir.



Şekil 3.5 Parçalı kübik spline. (a) t_k 'nın giriş yaklaşımı kullanılarak belirlenmesi durumu; (b) $t_k = 1$ normalize durumu.

3.2 Kübik Spline İçin Uç Nokta Koşulları

Bundan önce parçalı kübik spline'ın uç noktalarındaki P_1' ve P_n'' teğet vektörlerinin bilindiğini kabul etmiştik. Bu sınır koşulu clamped uç nokta koşulu olarak isimlendirilir. Bilinmeyen ara teğet vektörleri için çözüm (3.22) denkleminde belirtilen tridiagonal $[M]$ matrisinin tersiyle verilir.

Eğer yalnızca birkaç data noktası biliniyorsa veya fiziksel kısıtlar uç noktalarda eğri yüzeyinin tam olarak kontrolünü gerektiriyorsa başka sınır koşulları istenebilir.

Bir alternatif spline uç noktalarında eğriliği belirtmektir. Eğriliğin sıfır olması durumunda relaxed veya natural uç koşulu elde edilir. 2. türev ile eğriliğe yaklaşırsak (3.16) denkleminde

$$P''(t) = \sum_{i=1}^4 (i-1)(i-2)B_i t^{i-3} \quad 0 \leq t \leq t_{k+1}$$

elde edilir. İlk spline segmentinin başlangıcında $t = 0$ 'dır. Burada, yalnızca $i = 3$ terimi sonuca katkıda bulunur. (3.24) denklemini kullanılırsa;

$$P''(0) = 2B_3 = 2\left(\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2}\right) = 0$$

ve tekrar düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir:

$$P'_1 + \frac{P'_2}{2} = \frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1) \quad (3.35)$$

$[M]$ ve $[R]$ matrislerinin ilk satırı (3.22) denkleminde aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} [P'] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1) \end{bmatrix}$$

son segmentin uç noktasında $t = t_n$, $k = n-1$ 'dir. Burada denklem (3.16) 'daki $i = 3$ ve $i = 4$ terimleri sonuca katkıda bulunur. Özel olarak ;

$$P''(t_n) = 2B_3 + 6B_4 t_n = 0$$

veya (3.24) denklemini kullanılırsa;

$$\frac{6}{t_n^2}(P_{n-1} - P_n) + \frac{2P'_{n-1}}{t_n} + \frac{4P'_n}{t_n} = 0$$

olur.

Yukarıdaki ifade tekrar düzenlenirse

$$2P'_{n-1} + 4P'_n = \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \quad (3.36)$$

bulunur.

$[M]$ ve $[R]$ matrislerinin son satırı (3.22) denkleminde aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} [P'_n] = \left[\frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \right]$$

clamped ve relaxed uç nokta koşulları verilen bir parçalı kübik spline eğrisi için karışık olabilir.

Diğer iki sınır koşulu cyclic ve anticyclic uç nokta koşullarıdır. Cyclic spline kapalı bir eğri veya aralıklarda tekrar eden bir eğrinin bir parçasını üretmek için kullanılır. Cyclic uç nokta koşulu, teğet vektörü ve eğriliğin her ikisinde de iki uç noktada eşit olmasını gerektirir. Yani,

$$P'_1(0) = P'_n(t_n) \quad (3.37)$$

$$P''_1(0) = P''_n(t_n) \quad (3.38)$$

(3.3) ve (3.16) denklemlerinden ve (3.24) 'yi kullanırsak (3.37) denklemini

$$\begin{aligned} P'_1 - P'_{n-1} = 2t_n & \left[\frac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \frac{2P'_{n-1}}{t_n} - \frac{P'_n}{t_n} \right] \\ & + 3t_n \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P'_{n-1}}{t_n^2} + \frac{P'_n}{t_n^2} \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.38) denklemi

$$2 \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2} \right] = 2 \left[\frac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \frac{2P'_{n-1}}{t_n} - \frac{P'_n}{t_n} \right] + 6t_n \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P'_{n-1}}{t_n^2} + \frac{P'_n}{t_n^2} \right] \quad (3.40)$$

formunu alır.

(3.40) denklemi t_n 'le çarpılır ve (3.39) denkleminden çıkarılarak bu iki denklem birleştirilirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$P'_1 - P'_{n-1} - 2t_n \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2} \right] = 3t_n^2 \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P'_{n-1}}{t_n^2} + \frac{P'_n}{t_n^2} \right] - 6t_n^2 \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P'_{n-1}}{t_n^2} + \frac{P'_n}{t_n^2} \right]$$

$P'_1 = P'_n$ olduğundan terimleri tekrar düzenlersek

$$2 \left(1 + \frac{t_n}{t_2} \right) P'_1 + \frac{t_n}{t_2} P'_2 + P'_{n-1} = 3 \frac{t_n}{t_2^2} (P_2 - P_1) - \frac{3}{t_n} (P_{n-1} - P_n) \quad (3.41)$$

Ara birleşme noktalarındaki teğet vektörler (3.22) denklemi kullanılarak tekrar elde edilir. Bu arada tüm teğet vektörleri artık bağımsız değildirler ($P'_1 = P'_n$). $[M]$ matrisi birinci satırı (3.41) denkleminin katsayıları ile verilen $(n-1) \times (n-1)$ lik bir matristir.

Yani,

$$\begin{bmatrix} 2(1+\frac{t_n}{t_2}) & \frac{t_n}{t_2} & 0 & 0 & . & 1 \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & t_n & 2(t_n+t_{n-1}) & t_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ . \\ . \\ P'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\frac{t_n}{t_2^2}(P_2-P_1)-\frac{3}{t_n}(P_{n-1}-P_n) \\ \frac{3}{t_2t_3}\{t_2^2(P_3-P_2)+t_3^2(P_2-P_1)\} \\ \frac{3}{t_3t_4}\{t_3^2(P_4-P_3)+t_4^2(P_3-P_2)\} \\ . \\ . \\ \frac{3}{t_{n-1}t_n}\{t_{n-1}^2(P_n-P_{n-1})+t_n^2(P_{n-1}-P_{n-2})\} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Matris artık tridiagonal değildir. Anticyclic spline

$$P'_1(0) = -P'_n(t_n) \quad (3.43)$$

$$P''_1(0) = -P''_n(t_n) \quad (3.44)$$

hariç cyclic spline'a benzerdir.

Cyclic uç nokta koşulları için aynı yol izlenirse

$$2(1+\frac{t_n}{t_2})P'_1 + \frac{t_n}{t_2}P'_2 - P'_{n-1} = 3\frac{t_n}{t_2^2}(P_2-P_1) + \frac{3}{t_n}(P_{n-1}-P_n) \quad (3.45)$$

elde edilir.

(3.45) denklemi, anticyclic uç nokta koşulunun koyulmasıyla, $[M]$ matrisinde $M(1, n-1)$ 'deki 1'in işaretinin değiştirdiğini ve (3.42) denklemindeki $R(1,1)$ 'de 2.terimin işaretinin değiştirdiğini gösterir.

Çizelge 3.1 Kübik spline uç nokta koşulları

Uç nokta koşulu	$[M]$ matrisinin ilk ve son satırlarındaki sıfırdan farklı elemanlar	$[R]$ matrisinin ilk ve son satırları
Clamped	$M(1,1) = 1$ $M(n,n) = 1$	$R(1,1) = P_1'$ $R(n,1) = P_n'$
Relaxed	$M(1,1) = 1$ $M(1,2) = \frac{1}{2}$ $M(n,n-1) = 2$ $M(n,n) = 4$	$R(1,1) = \frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1)$ $R(n,1) = \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1})$
Cyclic	$M(1,1) = 2(1 + \frac{t_n}{t_2})$ $M(1,2) = \frac{t_n}{t_2}$ $M(1, n-1) = 1$	$R(1,1) = 3(\frac{t_n}{t_2})(P_2 - P_1)$ $- \frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n)$ $R(n,1) \quad \text{tanımsız}$
Anticyclic	$M(1,1) = 2(1 + \frac{t_n}{t_2})$ $M(1,2) = \frac{t_n}{t_2}$ $M(1, n-1) = -1$	$R(1,1) = 3(\frac{t_n}{t_2})(P_2 - P_1)$ $+ \frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n)$ $R(n,1) \quad \text{tanımsız}$

Kübik spline eğrileri, herhangi bir uç nokta koşullarıyla sürekli 1. ve 2. mertebeden türevlere sahiptirler. Bununla birlikte, eğer data noktaları sayısı fazla ise teğet vektör matrisinin tersini almak fazla zaman alabilir. Parametrik parçalı kübik spline eğrileri birçok uygulama alanına sahiptirler. Örneğin, otomotiv, gemi inşaat ve havacılık sanayinde uygulanmakta olmasına rağmen yine de bazı dezavantajları vardır. Parametrik kübik spline'lar tam olarak bir konik kesite indirgenmez. Asimptotik eğrilere daha yakındırlar ve dikkatlice kontrol edilmezlerse salınımlar gösterirler. Kübik spline'lar eğri üzerindeki her noktadan yerel olarak etkilendiklerinden dolayı salınımlar oluşur ve 3. mertebeden türev sadece parçalı sabittir. Üçüncü mertebeden türevdeki süreksizlikler eğri üzerinde istenmeyen durumlara yol açar. Bir salınım eğrisi 2.mertebe sürekliliğe sahip olmasına rağmen düzgün değildir.

Salınımların oluşumunu azaltmanın bir yolu spline eğrisi doğrultusu boyunca gerilme eklemektir.



4. B-SPLINE EĞRİLERİ

Matematiksel açıdan, eğri ve poligon arasında bir ilişki kurmak için poligonun köşelerini kullanarak üretilen eğri interpolasyona veya yaklaşım metoduna bağlıdır. Bu durum baz fonksiyonlarının seçimi ile sağlanır. Örneğin Bernstein bazı ile Bezier eğrileri üretilir.

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.1)$$

Bernstein bazlarının iki karakteristiği, eğrilerin esnekliğini sınırlar. İlk olarak poligonun düğüm noktalarının sayısı, elde edilecek polinomun derecesini belirler. Altı düğüm noktalı bir polinom daima 5. dereceden bir eğri üretir. Eğrinin derecesini düşürmenin tek yolu düğüm noktaları sayısını düşürmek, eğrinin derecesini yükseltmenin tek yolu ise düğüm noktaları sayısını artırmaktır.

İkinci sınırlama, Bernstein bazlarının global özelliğine bağlıdır. Yani (4.2) denklemi ile verilen $J_{n,i}(t)$ blending fonksiyonun (ağırlık fonksiyonu) değeri, eğri üzerindeki tüm parametre değerleri için sıfırdan farklıdır.

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (0)^0 \equiv 1 \text{ ve } 0! \equiv 1 \quad (4.2)$$

Bezier eğrisi üzerindeki herhangi bir nokta, tüm düğüm noktalarının bir sonucu olduğundan, bir uçtaki değişim eğri boyunca hissedilir. Bu durum eğri üzerinde yerel bir değişikliği üretme kabiliyetini ortadan kaldırır. Yerel kontrolün bu eksikliği bazı uygulamalarda zararlıdır.

Bernstein bazı özel bir durum olarak içeren ve B-spline bazı olarak isimlendirilen başka bazlarda vardır. Bu bazlar genellikle global değildir. B-spline bazlarının global olmayan bu davranışı her bir B_i ucunun tek bir baz fonksiyonu ile ilgili olmasıdır. Buradan her bir uç, sadece ilgili baz fonksiyonunun sıfır olmadığı parametre değerlerinin aralığı üzerinde eğrinin şeklini etkiler. B-spline bazları aynı zamanda baz fonksiyonlarının derecesinin değiştirilmesine dolayısıyla poligon düğüm noktalarının sayısını değiştirmeksizin eğrinin derecesinin değiştirilmesine izin verir. B-spline teorisi ilk olarak Schoenberg tarafından önerilmiştir.

Nümerik hesaplamalar için kullanışlı bir rekürsif tanımlama birbirlerinden bağımsız olarak Cox ve de Boor tarafından bulunmuştur. Gordon ve Riesenfeld B-spline bazlarını eğri tanımına uygulamışlardır.

$P(t)$ eğri boyunca olan yer vektörü olsun. B-spline eğrisi

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \quad 2 \leq k \leq n+1 \quad (4.3)$$

ile verilir. Burada B_i , $n+1$ tane poligon düğüm noktalarının yer vektörleridir ve $N_{i,k}$ normalize edilmiş B-spline baz fonksiyonlarıdır.

4.1 B-spline Baz Fonksiyonları

k mertebeli ($k-1$ dereceli) i . normalize edilmiş B-spline baz fonksiyonu için $N_{i,k}(t)$ baz fonksiyonları

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i) N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (4.5)$$

formülleri ile tanımlanır.

x_i 'nin değeri $x_i \leq x_{i+1}$ ilişkisini sağlayan düğüm (knot) vektörlerinin elemanıdır. t parametresi $P(t)$ eğrisi boyunca $t_{\min}$ 'den $t_{\max}$ 'a kadar değişir. Burada $\frac{0}{0} = 0$ olarak alınmıştır.

Formal olarak bir B-spline eğrisi, aşağıdaki iki koşulu sağladığından, k mertebeli polinom spline fonksiyonu olarak tanımlanır.

$P(t)$ fonksiyonu her bir $x_i \leq t \leq x_{i+1}$ aralığı üzerinde $k-1$ dereceli bir polinomdur.

$P(t)$ ve onun $1,2,\dots,k-2$ mertebeden türevleri eğri boyunca süreklidirler.

4.2 B-spline Eğrileri ve Bazlarının Özellikleri

i) Herhangi t parametresi için

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) \equiv 1 \quad (4.6)$$

ii) tüm parametre değerleri için her bir baz fonksiyonu sıfır veya pozitifdir, yani $N_{i,k} \geq 0$.

iii) $k=1$ hariç her bir baz fonksiyonunun bir maksimum değeri vardır.

iv) Eğrinin maksimum mertebesi poligon düğüm noktalarının sayısına eşittir.

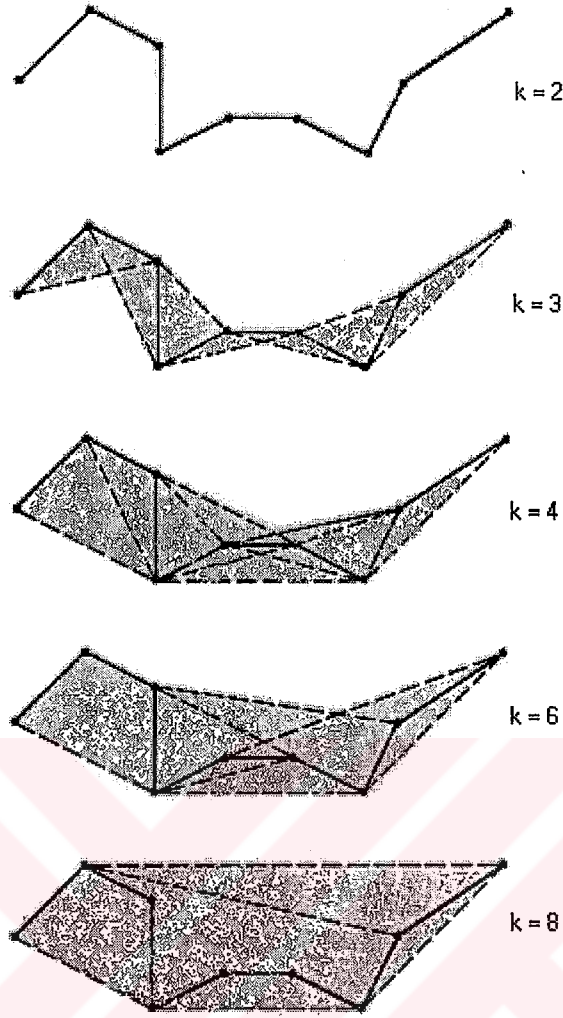
v) Eğri variation diminishing özelliği gösterir. Böylece eğri kendisini tanımlayan poligondan daha fazla düzgün doğru civarında salınmaz.

vi) Eğri genel olarak poligonun şeklini takip eder.

vii) Eğri düğüm noktalarının dönüşümü ile transformasyon edilebilir.

viii) Eğri onu tanımlayan poligonun convex hull'nun içinde kalır.

Gerçekte, B-spline eğrilerinin convex hull özelliği Bezier eğrilerinden daha güçlüdür. k mertebeli bir B-spline eğrisi için eğri üzerindeki bir nokta, k komşu noktalarının convex hull'u üzerindedir. Böylece B-spline eğrisi üzerindeki tüm noktalar, k ardışık poligon düğüm noktaları alınarak oluşturulmuş tüm convex hull'lerin birleşiminde yer alır. Convex hull gölgeli gösterildiği Şekil 4.1 'de farklı k değerleri için bu etki görülmektedir. Özellikle $k=2$ durumuna dikkat edersek convex hull tanımlanan poligonun kendisidir. Buradan B-spline eğri aynı zamanda tanımlanan poligonun kendisidir.



Şekil 4.1 B-spline eğrilerinin Convex hull özellikleri

Convex hull özelliğini kullanarak, poligon düğüm noktalarının tümü aynı doğru üzerinde ise B-spline eğrisi tüm k lar için bir doğrudur.

4.3 Düğüm (Knot) Vektörleri

(4.4) ve (4.5) denklemleri, düğüm vektörlerinin seçiminin $N_{i,k}(t)$ B-spline baz fonksiyonları dolayısıyla B-spline eğrileri üzerinde önemli etkiye sahip olduğunu gösterir. Düğüm vektörü sadece $x_i \leq x_{i+1}$ bağıntısını sağlamasıdır. Temelde üç çeşit düğüm (knot) vektörü kullanılır: düzgün (uniform), açık düzgün (open uniform) ve düzgün olamayan (nonuniform).

Düzgün düğüm vektöründe düğüm değerleri düzgün aralıklıdır.

Örneğin,

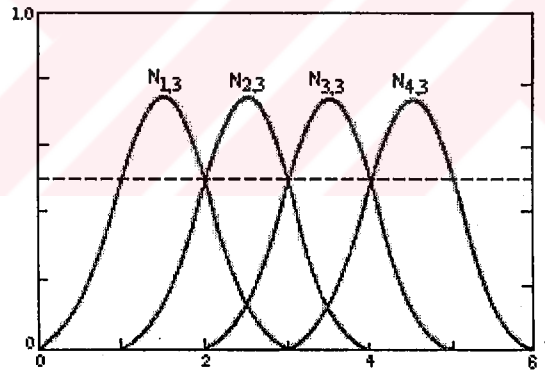
$$[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$$

$$[-0.2 \ -0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0.2].$$

Pratikte düzgün düğüm vektörleri genellikle sıfırdan başlar ve maksimum değerlerine kadar 1'er artırılır veya 0 ve 1 aralığında normalize edilirler. Yani eşit ondalık aralıklar. Örneğin,

$$[0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1.0].$$

Verilen bir k mertebesi için düzgün düğüm vektörleri, $N_{i,k}(t) = N_{i-1,k}(t-1) = N_{i+1,k}(t+1)$ olan periyodik düzgün baz fonksiyonlarını verir. Buradan herbir baz fonksiyonu diğerinin ötelemesidir. Şekil 4.2 bu durumu gösterir.



Şekil 4.2 Periyodik B-spline baz fonksiyonları, $[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$, $n+1=4$, $k=3$.

Açık düzgün düğüm vektörü, uç noktalarda B-spline baz fonksiyonunun mertebesi k ya eşit katlı düğüm değerlerine sahiptir. Ara düğüm değerleri düzgün olarak dizilmiştir. Tam sayı artımlar kullanılmış örnekler:

$$k=2 \quad [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$$

$$k=3 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$k=4 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$$

veya normalize edilmiş artımlar için örnekler:

$$k=2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k=3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k=4 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

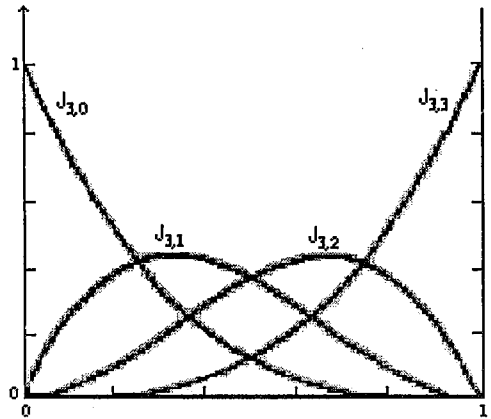
Açık düzgün düğüm vektörü aşağıdaki gibi verilir:

$$x_i = 0 \quad 1 \leq i \leq k$$

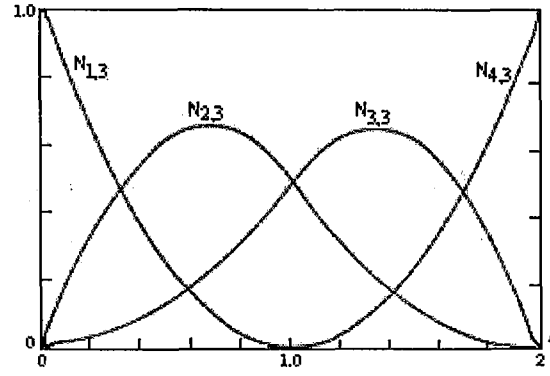
$$x_i = i - k \quad k+1 \leq i \leq n+1$$

$$x_i = n - k + 2 \quad n+2 \leq i \leq n+k+1$$

Sonuç açık düzgün baz fonksiyonları Bezier eğrilerine çok yakın davranış gösteren eğrileri verirler. Gerçekte, tanımlanan poligon düğüm noktaları sayısı B-spline bazı mertebesine eşitse ve bir açık düzgün düğüm vektörü kullanılırsa, B-spline bazıları Bernstein bazlarına indirgenir. Bu nedenle, B-spline eğrisi bir Bezier eğrisidir. Bu nedenden dolayı, düğüm vektörü sadece k sıfırları ve bunları takip eden birlerden oluşur. Örneğin, dört poligon düğüm noktası için, 4.mertebe ($k = 4$) açık düzgün düğüm vektörü $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ 'dir. Bir kübik Bezier/B-spline eğrisi elde edilir. İlgili açık düzgün baz fonksiyonları Şekil 4.3'te gösterilmiştir. İlave açık düzgün baz fonksiyonları Şekil 4.4'de gösterilmiştir.



Şekil 4.3 Bezier/Bernstein blending fonksiyonları. 4 poligon noktası, $n = 3$.



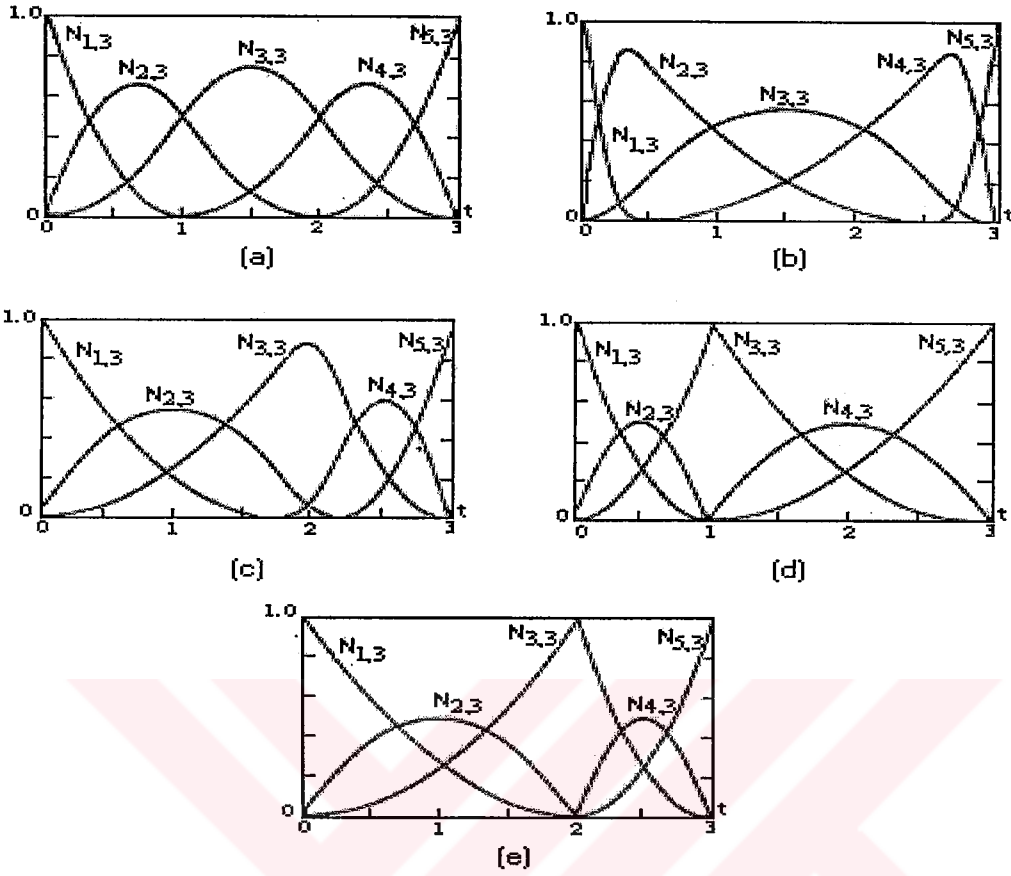
Şekil 4.4 Açık düzgün B-spline baz fonksiyonları, $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$, $k = 3$, $n+1=4$

Düzgün olmayan düğüm vektörleri ya eşit olmayan ve/veya katlı ara düğüm değerlerine sahip olabilir. Periyodik veya açık olabilirler. Bazı örnekler:

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$$

$$[0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4]$$

$$[0 \ 0.28 \ 0.5 \ 0.72 \ 1]$$



Şekil 4.5 Düzgün olmayan baz fonksiyonları $n+1=5$, $k=3$.

$$(a)[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(b)[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.4 & 2.6 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c)[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.8 & 2.2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(d)[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(e)[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

B-spline baz fonksiyonlarını hesaplamak için kullanılan (4.5) Cox-deBoor formülü bir rekürisif bağıntı olduğundan dolayı k mertebeli baz fonksiyonu mertebesi 1 'e kadar düşen daha düşük mertebe baz fonksiyonlarına bağlıdır. Verilen bir $N_{i,k}$ baz fonksiyonu için, bu bağımlılık üçgensel bir durum oluşturur;

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & N_{i,k} & & & & \\
 N_{i,k-1} & & N_{i+1,k-1} & & & & \\
 N_{i,k-2} & & N_{i+1,k-2} & & N_{i+2,k-2} & & \\
 & \cdot & & & \cdot & & \\
 & \cdot & & & \cdot & \cdot & \\
 N_{i,1} & & N_{i+1,1} & & N_{i+2,1} & & N_{i+3,1} & \cdot & N_{i+k-1,1}
 \end{array}$$

Ters bağımlılık, yani 1.mertebe tek bir baz fonksiyonu $N_{i,1}$ 'in daha yüksek mertebe baz fonksiyonları üzerindeki etkisi

$$\begin{array}{ccccccc}
 N_{i-k+1,k} & \cdot & N_{i+k-1,k} & N_{i,k} & N_{i+1,k} & \cdot & N_{i+k-1,k} \\
 & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & N_{i-1,2} & N_{i,2} & N_{i+1,2} & & \\
 & & & N_{i,1} & & &
 \end{array}$$

şeklinde verilir.

Düğüm vektörü seçiminin B-spline baz fonksiyonlarının şekilleri üzerinde ve dolayısıyla B-spline eğrisinin şekli üzerinde önemli etkisi vardır.

B-spline eğrileri esnek olduğundan eğrinin şeklini değiştirmek mümkündür. Bu işlem;

- i) Düğüm vektörü ve baz fonksiyonunun tipi değiştirilerek: periyodik düzgün, açık düzgün, düzgün olmayan,
- ii) Baz fonksiyonunun k mertebesi değiştirilerek,
- iii) Poligon düğüm noktalarının yeri ve sayısı değiştirilerek,

iv) Katlı poligon düğüm noktaları kullanılarak,

v) Düğüm vektöründe katlı düğüm değerleri kullanılarak yapılır.



5. YÜZEY OLUŞTURMA

5.1 B-Spline Yüzeyleri

B-spline yüzeyi

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot M_{j,l}(w) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $N_{i,k}(u)$ ve $M_{j,l}(w)$ sırasıyla (5.2), (5.3) ve (5.4), (5.5) denklemleriyle ifade edilen u ve w yönlerindeki B-spline baz fonksiyonlarıdır.

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & x_i \leq u \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i) N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u) N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (5.3)$$

$$M_{i,1}(w) = \begin{cases} 1 & y_i \leq w \leq y_{i+1} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$M_{i,k}(w) = \frac{(w - y_i) N_{i,k-1}(w)}{y_{i+k-1} - y_i} + \frac{(y_{i+k} - w) N_{i+1,k-1}(w)}{y_{i+k} - y_{i+1}} \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada x_i ve y_j düğüm vektörlerinin elemanlarıdır. $B_{i,j}$ ler poligon ağının düğüm noktalarıdır. n ve m indisleri sırasıyla, u ve w yönlerinde tanımlanan düğüm noktaları sayısından bir eksiktirler.

5.2 B-Spline Yüzeylerinin Özellikleri

Bir B-spline yüzeyinin karakter ve şekli, B-spline eğrilerinde olduğu gibi, $[X]$ ve $[Y]$ düğüm vektörlerinden önemli ölçüde etkilenir. Açık, periyodik ve düzgün olmayan düğüm vektörleri kullanılır. Her iki parametrik doğrultuda aynı tip düğüm vektörü kullanılması yaygın olmasına rağmen böyle bir zorunluluk yoktur.

i) Yüzeyin her bir parametrik doğrultuda maksimum mertebesi o doğrultuda tanımlanan poligon düğüm noktaları sayısına eşittir.

ii) Yüzeyin her bir parametrik doğrultudaki sürekliliği o doğrultudaki mertebeden iki düşüktür, yani u ve w doğrultularındaki süreklilikler sırasıyla C^{k-2} ve C^{l-2} dir.

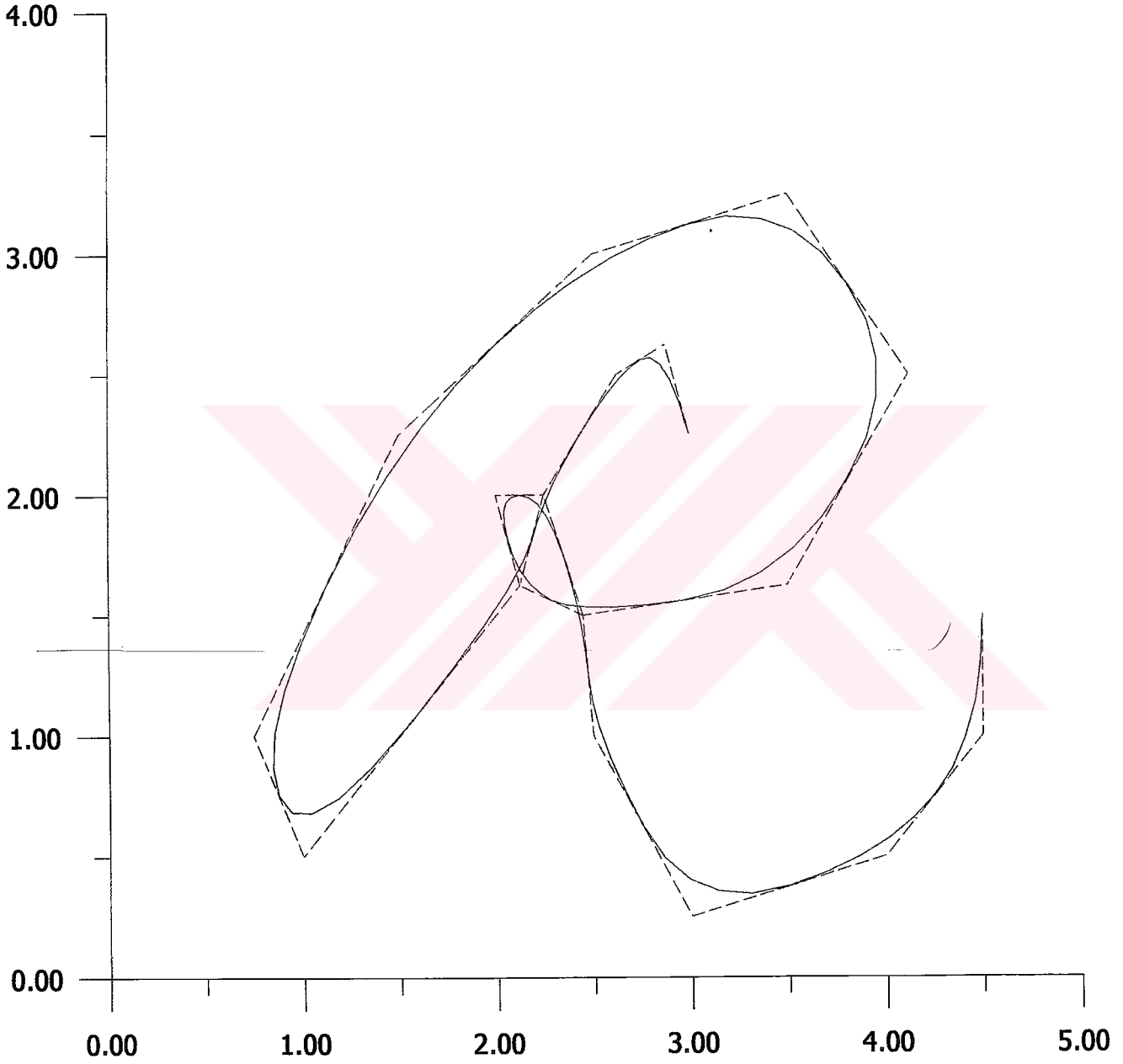
iii) Yüzey Affine dönüşümüne göre değişmezdir, yani poligon ağı üzerindeki dönüşüm ile yüzey transformasyon edilir.

iv) Tek bir poligon ağının düğüm noktasının etkisi, her bir parametrik doğrultuda $\pm k/2$, $\pm l/2$ ye sınırlıdır.

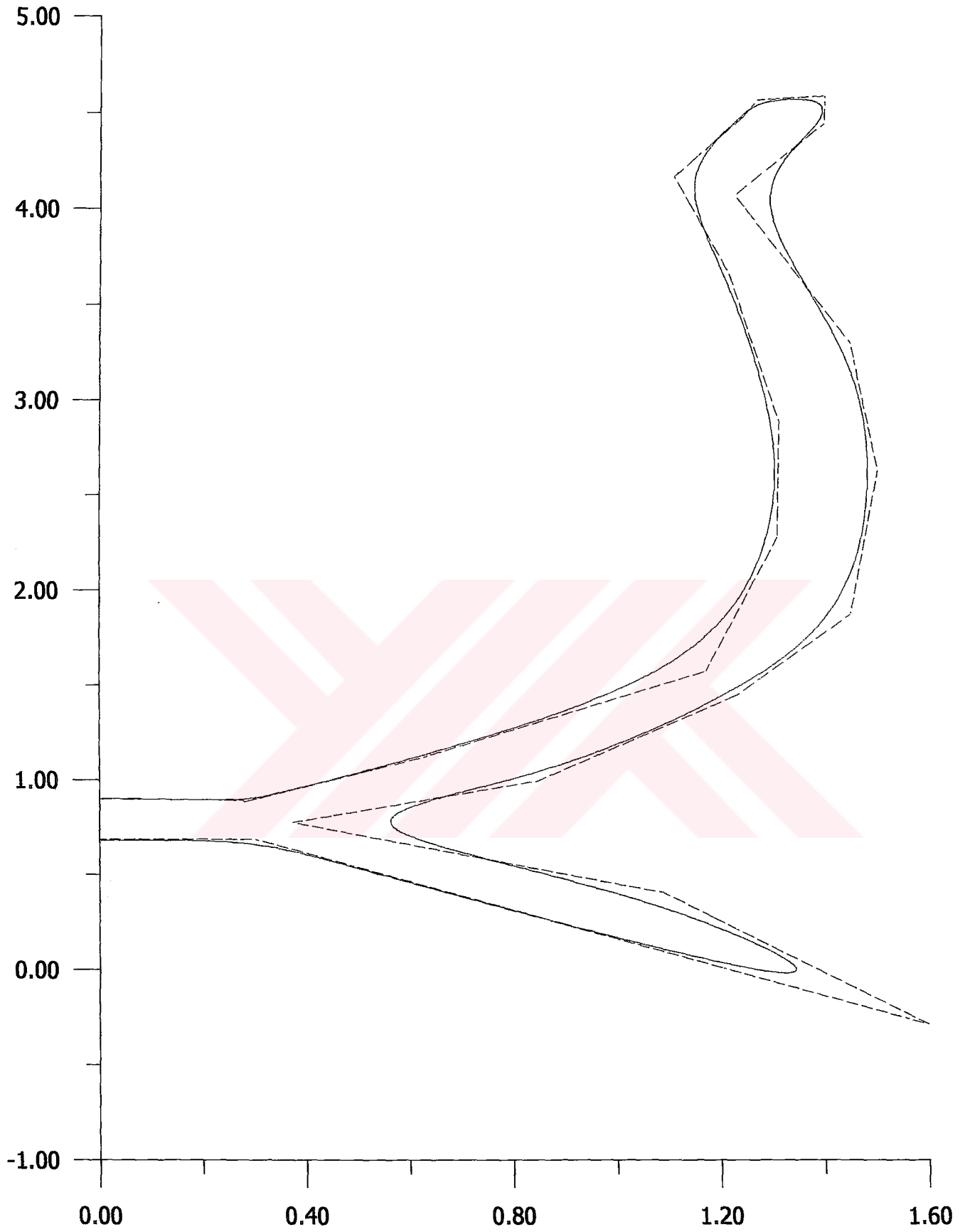
Eğer poligon ağı düğüm noktaları sayısı her bir parametrik doğrultudaki mertebeye eşitse ve hiçbir iç düğüm noktası yoksa, B-spline yüzeyi Bezier yüzeyine indirgenir.

6. SONUÇLAR

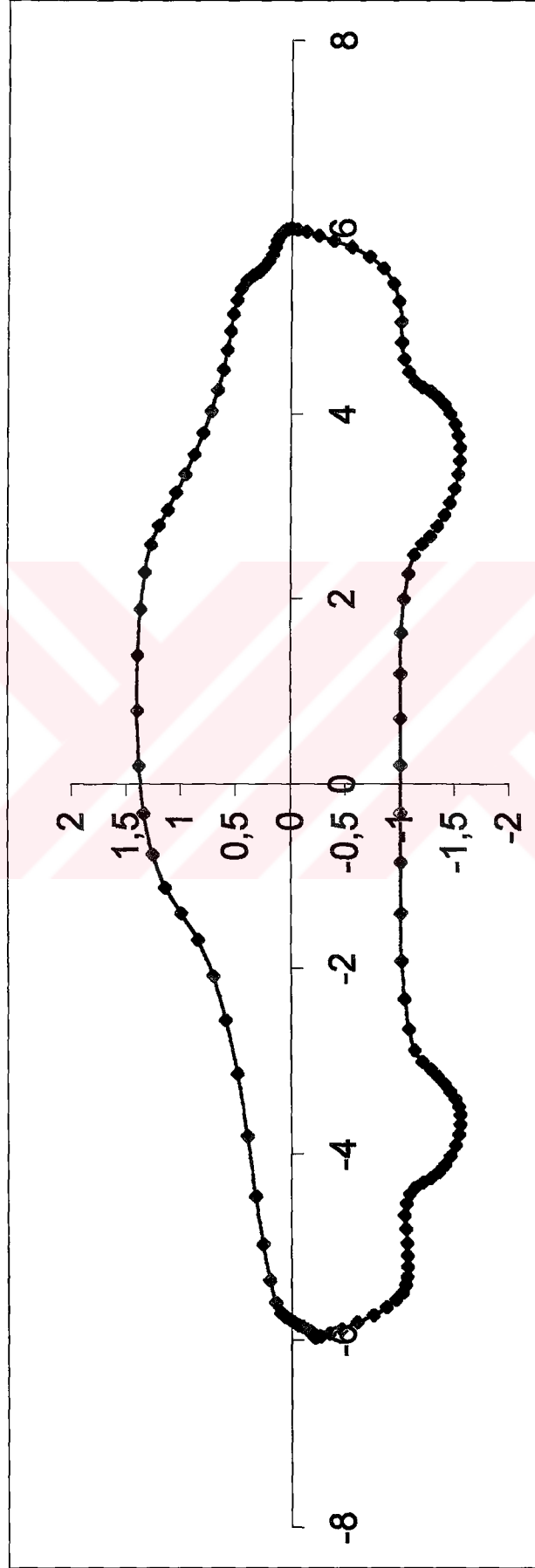
6.1 Uygulamalar



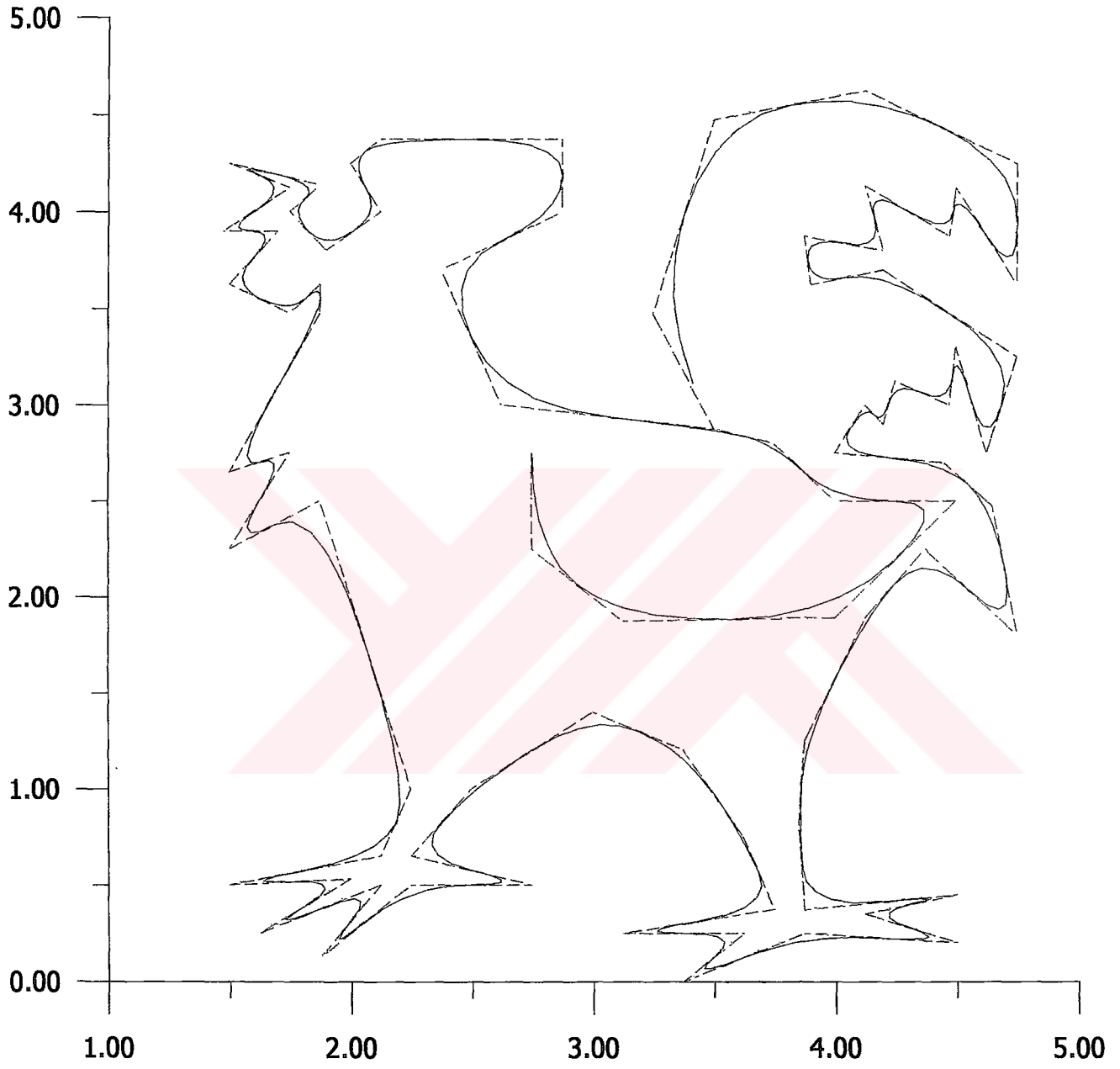
Şekil 6.1 B-spline eğrisi (R harfi), kontrol noktaları $n+1 = 22$, mertebe $k=3$



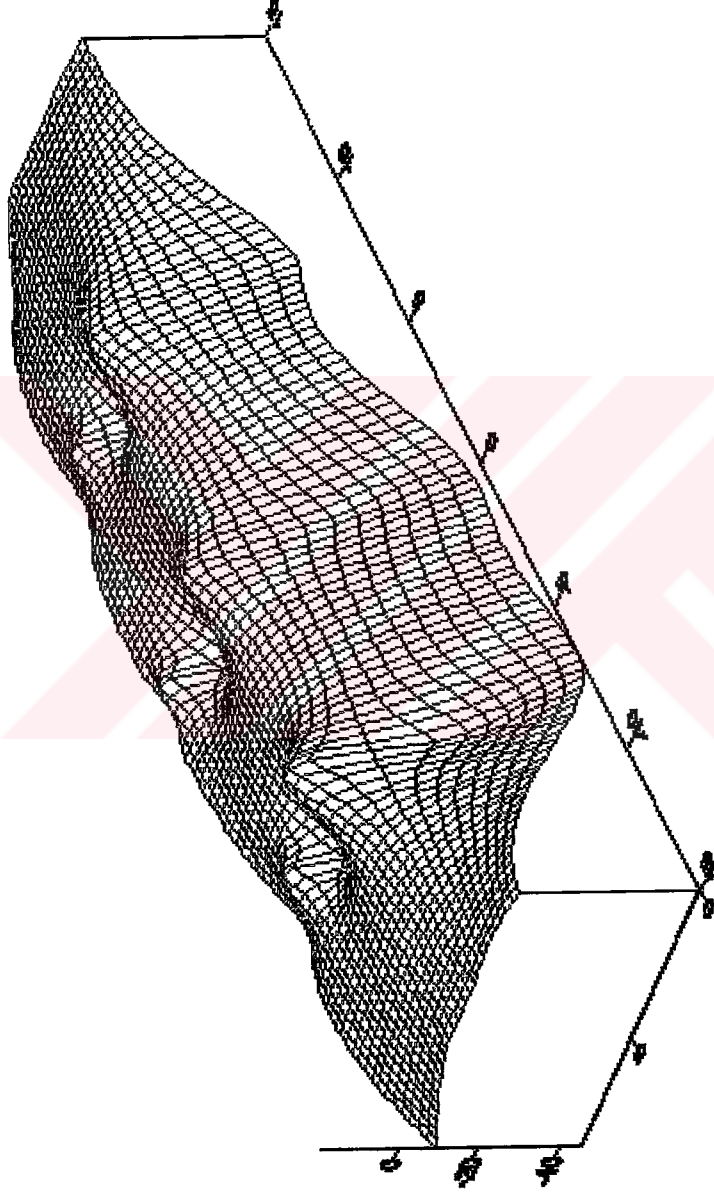
Şekil 6.2 B-spline eğrisi, kontrol noktaları $n+1 = 25$, mertebe $k = 4$



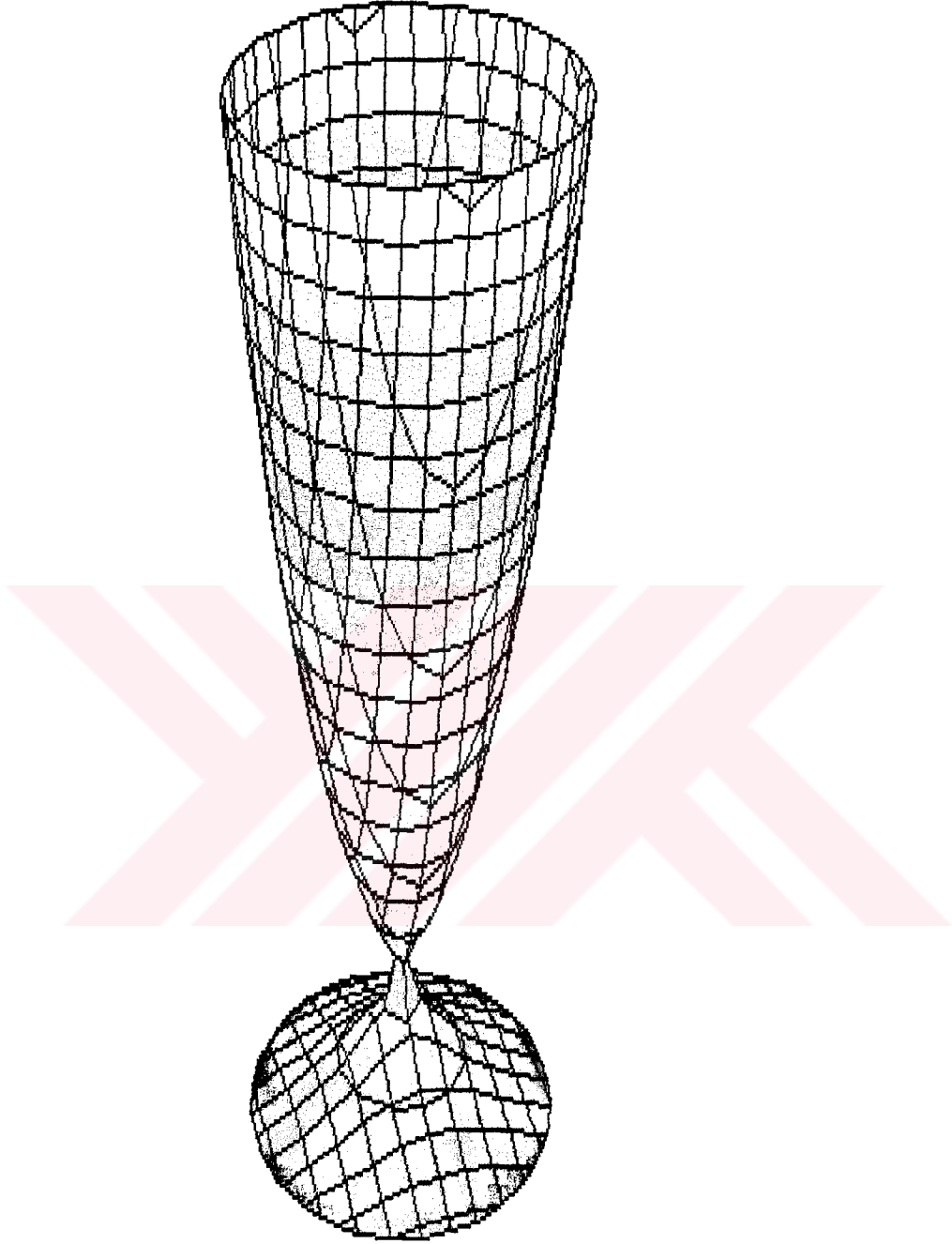
Şekil 6.3 B-spline eğrisi (Araba), kontrol noktaları $n+1=29$, mertebe $k=3$.



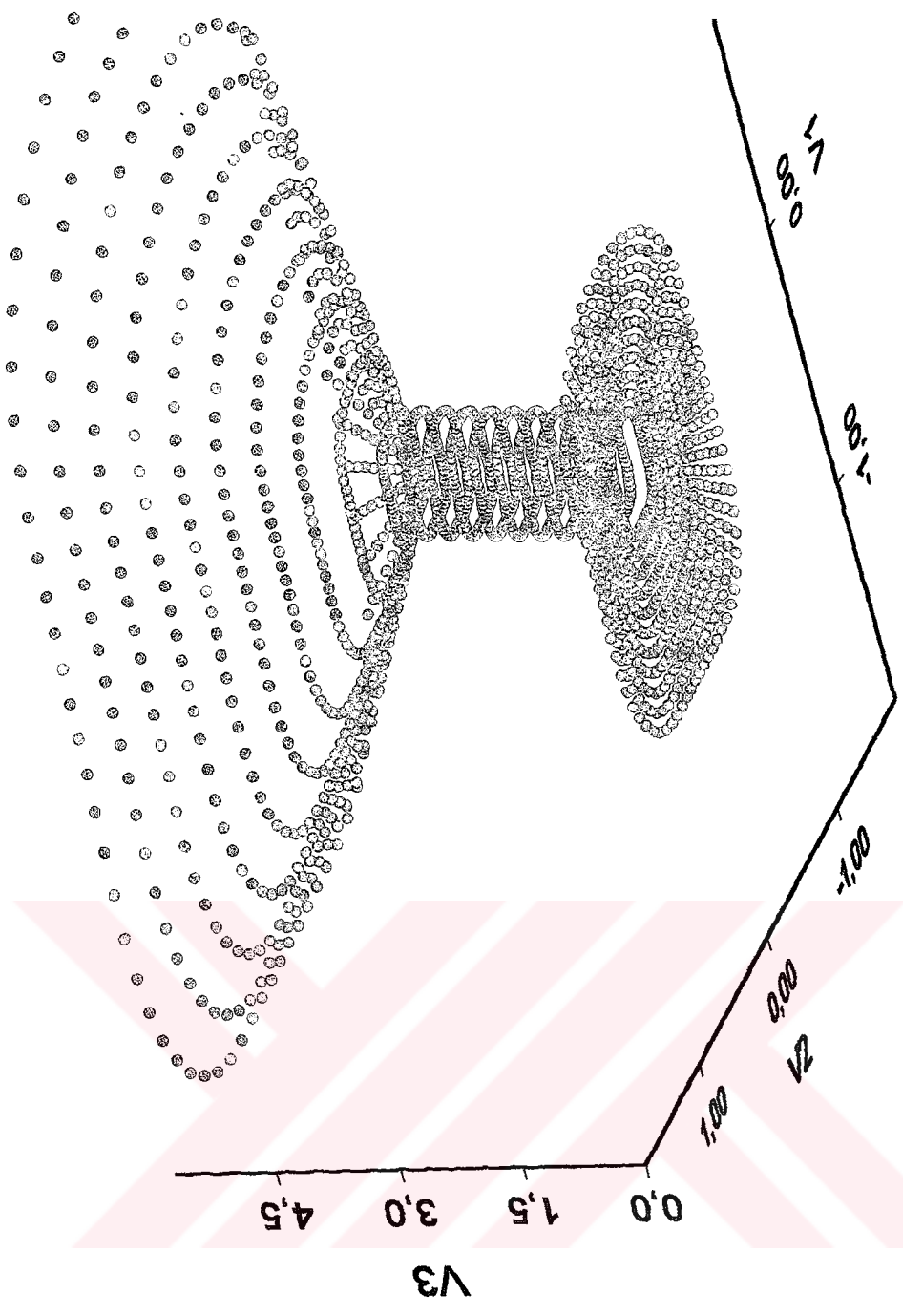
Şekil 6.4 B-spline eğrisi (Horoz), kontrol noktaları $n+1 = 81$, mertebe $k = 3$



Şekil 6.5 B-spline yüzeyi, kontrol noktaları 4×4 ($n+1 = 4$, $m+1 = 4$), u yönündeki merteye $k = 4$, w yönündeki merteye $l = 3$.



Şekil 6.6 B-spline yüzeyi, kontrol noktaları 9×5 ($n+1 = 9$, $m+1 = 5$), u yönünde merteye $k=3$, w yönünde merteye $l=2$.



Şekil 6.7 B-spline yüzeyi, kontrol noktaları 9×4 ($n+1$ u yönünde merteye $k = 3$, w yönündeki mei

KAYNAKLAR

Barsky, B. A., (1982), "End Conditions and Boundary Conditions for uniform B-spline Curve and Surface Representations, " Comp. in Indus., Vol. 3, pp. 17-29.

Hill, F. S. Jr., (1990), Computer Graphics Using Open GL , Prentice Hall, New Jersey.

Kincaid, D. and Cheney, W., (1991), Numerical Analysis, Brooks/Cole Publishing Company, California.

Mathews, J. H., (1992), Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Piegl, L. and Tiller, W., (1997), The Nurbs Book, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Rogers, D. F. and Adams, J. A., (1990), Mathematical Elements For Computer Graphics, McGraw-Hill Publishing Company, New York.

Schwarz, H. R., (1989), Numerical Analysis, John Wiley&Sons, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	20.09.1973	
Doğum yeri	Çorum	
Lise	1989-1993	Ziya Kalkavan Anadolu Denizcilik Meslek Lisesi
Lisans	1993-1997	Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fak. Matematik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1998-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Müh. Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1999-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

