

95000

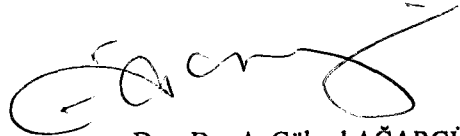
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SIFIR BÖLEN DE İÇEREBİLEN DEĞİŞMELİ
HALKALARDA ÇARPANLARA AYIRMA

Murat ALAN

F.B.E Matematik Anabilim Dalında Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ



Tez Danışmanı : Doç. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

Prof. Dr. MUSTAFA SIVRI

Prof. Dr. FUSUN URAS

İSTANBUL, 2000



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
KISALTMA LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1 GİRİŞ.....	1
2 İLGİLİLİK VE İNDİRGENEMEZLİK.....	4
2.1 Giriş.....	4
2.2 Sıfır Bölenli Halkalarda İlgililik ve İndirgenemezlik.....	4
3 ATOMİKLİK.....	23
3.1 Giriş.....	23
3.2 Sıfır Bölenli Halkalarda Atomiklik.....	23
3.3 Direkt Çarpım.....	25
3.4 Sınırlı Çarpanlarına Ayrılabilen Halkalar.....	29
4 ÇARPANLARA AYIRMA.....	34
4.1 Giriş.....	34
4.2 Tek Türlü Çarpanlara Ayrılabilen Halkalar.....	34
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	44

SİMGE LİSTESİ

$a \sim b$	a ilgili b
$a \approx b$	a kuvvetli ilgili b
$a \cong b$	a çok kuvvetli ilgili b
$a b$	a tam böler b
$U(R)$	R nin birimsel elemanlarının kümesi
$Z(R)$	R nin sıfır bölenlerinin kümesi
$\text{rad } R$	R nin Jacobson Radikali



KISALTMA LİSTESİ

ACCP	Ascending Chain Condition on Principal Ideals
SÇB	Sınırlı Çarpanlarına Ayrılabilen Bölge
SÇH	Sınırlı Çarpanlarına Ayrılabilen Halka
SPIR	Special Princial Ideal Ring
TÇB	Tek Türü Çarpanlarına Ayrılabilen Bölge
TÇH	Tek Türü Çarpanlarına Ayrılabilen Halka



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında göstermiş olduğu her türlü özverili yardımlardan ötürü Sayın Doç. Dr. A. Göksel AĞARGÜN' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ÖZET

Bu çalışmada, tamlık bölgelerindeki çarpanlara ayırma kavramlarından hangilerinin değişmeli ve birimli halkalar için aynı veya farklı olduğunu araştırıyoruz. Farklı 'ilgililik' kavramları gözönüne alınmıştır. Tamlık bölgeleri için eşdeğer olan dört farklı indirgenemezlik tanımı veriyoruz. Her farklı indirgenemez eleman tanımı farklı bir atomiklik (elemanların o tipteki indirgenemezlerin çarpımı olarak yazılması) ve tek türlü çarpanlarına ayırma kavramlarına götürür. Ayrıca değişik türdeki indirgenemezlik ve atomikliğin direkt çarpımlarla korunup korunmadığı da araştırıyoruz. Fletcher ın (1969) tanımından farklı bir Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halka (TÇH) tanımı veriyoruz ve değişmeli ve birimli bir R halkasının TÇH olması için gerek ve yeter şartın R nin ya (1) TÇB, ya (2) Special Esas İdeal Halkası ya da (3) M R nin tek maksimal ideali olmak üzere, $M^2=0$ olan quasi-lokal halka olması gerektiğini gösteriyoruz.



ABSTRACT

In this study, we investigate how the concepts of factorization for integral domains are similar to and different from the concepts for commutative rings with identity. Various notions of 'associate' are considered. We give four different forms of irreducibility which are equivalent for integral domains. Each type of 'irreducible' element leads to a form of atomicity (elements being products of that type of irreducible elements) and unique factorization. Furthermore we investigate how the various forms of irreducibility and atomicity behave with respect to direct product. We give the definition of Unique Factorization Ring (UFR) different from the definition of Fletcher (1969) and show that a commutative ring R is a UFR if and only if R is either (1) a UFD, (2) a Special Principal Ideal Ring, or (3) quasi-local with $M^2=0$ where M is the unique maximal ideal of R .



1.GİRİŞ

Bu bölümde Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Bölgelerin temel özelliklerinden ve ana metin içerisinde kullanılacak özelliklerle ilgili önceki çalışmalardan bahsedilecektir.

Bu bölümde ve tez içerisinde R halkası denilince, aksi belirtilmediği sürece, birimli halka anlaşılacaktır.

R bir tamlık bölgesi ve $R^* = R \setminus \{0\}$ olmak üzere R^* in birimsel olmayan iki a, b elemanı için eğer $a|b$ ve $b|a$ ise a ile b ye ilgilidir denir ve $a \sim b$ ile gösterilir. $U(R)$ R nin birimsel elemanlarının kümesini göstermek üzere $a \sim b$ olması için gerek ve yeter şart $a=bc \Rightarrow c \in U(R)$ olmasıdır. Bu ilgililik tanımından yararlanarak indirgenemez eleman tanımını da verebiliriz: Birimsel olmayan bir $a \in R^*$ için eğer $a=bc$ olduğunda $a \sim b$ veya $a \sim c$ oluyorsa a ya indirgenemez eleman denir. a nın indirgenemez olması için gerek ve yeter şart (a) nın öz esas idealler kümesinin maksimal elemanı olmasıdır. İndirgenemez elemanın bu şekilde karakterize edilişi Teorem 2.2.18 de gösterilmiştir. Tamlık bölgelerindeki sıfır bölen şartını kaldırdığımızda bu ilgililik ve indirgenemezlik kavramlarının ne ölçüde korunduğu ve aralarında oluşan yeni gerektirmeler 2. Bölümde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Eğer R şu iki şartı sağlıyorsa R ye Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Bölge (TÇB) denir:

TÇB1 : R^* in birimsel olmayan her elemanı indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılabilir,

TÇB2 : Bu yazılış ilgililik farkıyla tek türüdür. Yani birimsel olmayan her $a \in R^*$ in iki indirgenemez ayrışımı $a = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$ ise $m=n$ ve q_i lerin uygun bir sıralanışı ile $i=1, \dots, n$ için $p_i \sim q_i$ dir.

R nin TÇB olması için TÇB2 şartı yerine her indirgenemez elemanın asal olduğunu veya R^* in herhangi iki elemanının en büyük ortak böleninin mevcut olduğunu göstermek yeterlidir.

Ayrıca R nin TÇB olması için gerek ve yeter şart R^* in birimsel olmayan her elemanının asalların çarpımı şeklinde yazılabilmesidir. R TÇB ise $R[X]$ polinomlar halkası ve S R^* in çarpımsal kapalı alt kümesi olmak üzere, R_S kesir halkası da TÇB şartlarını sağlamaktadır.

Fakat R nin TÇB olması $R[[X]]$ kuvvet serileri halkasının da TÇB olmasını

gerektirmemektedir. Ancak R Esas İdeal Halkası ise $R[[X]]$ TÇB dir. Ayrıca R TÇB ise, P bir asal ideal olmak üzere, R/P Bölüm Halkasının da TÇB olması gerekmemektedir. Fakat R nin TÇB olmasına ilave olarak R nin iki esas idealinin kesişimi de esas ideal ise R/P de TÇB dir.

Sıfır bölenli tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalar ilk kez Fletcher tarafından 1969 yılında tanımlanmıştır. R sıfır bölenli değişmeli bir halka olsun. İlgililik tanımı tamlık bölgelerinde olduğu gibi verilir. Eğer $a|b$ ve $b|a$ ise a ile b ye ilgilidir denir. $a=a_1 \dots a_n$ a nın bir çarpanlarına ayrılışı olsun. Eğer bir i için $a_i = a a_i$ oluyorsa (yani $a|a_i$ oluyorsa) a ya indirgenemez denir. Bir $r \in R$ nin U -sınıfı $U(r) = \{ \alpha \in R | \alpha \beta r = r \quad \exists \beta \in R \}$ şeklinde tanımlanır. Bir $r \in R$ nin U -sınıfı r nin $r = (p_1', \dots, p_k')(p_1, \dots, p_n)$ şeklinde aşağıdaki üç şartı sağlayan bir indirgenemez ayrışımıdır.

i) $i=1, \dots, k$ ve $j=1, \dots, n$ için p_i' ve p_j lerin hepsi indirgenemezdir.

ii) $i=1, \dots, k$ için $p_i' \in U(p_1, \dots, p_n)$

iii) $j=1, \dots, n$ için $p_j \notin U(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n)$.

Bir elemanın U -ayrışımı mevcutsa indirgenemez ayrışımının da mevcut olduğu açıktır. Tersine bir elemanın indirgenemez ayrışımı mevcutsa U -ayrışımı da mevcuttur. Bu bilgiler Fletcher ın Tek Türlü Çarpanlara Ayrılabilen Halka tanımının alt yapısını oluşturmaktadır. Eğer R aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa R ye Tek Türlü Çarpanlara Ayrılabilen Halka denir:

TÇH1 : R nin birimsel olmayan her elemanının bir U -ayrışımı vardır.

TÇH2 : Eğer $r \in R$ nin iki U -ayrışımı $r = (p_1', \dots, p_k')(p_1, \dots, p_n) = (q_1', \dots, q_l')(q_1, \dots, q_m)$ ise $m=n$ dir ve $i=1, \dots, n$ için p_i ile q_i , gerekirse sıralamaların yeri değiştirilerek, ilgilidir.

Yukarıdaki iki şart için 0 ın hariç tutulmadığına dikkat edilmelidir. Bizim 4. Bölümde tanımını vereceğimiz TÇH tanımı bu tanımdan farklıdır ve o tanımda 0 ın 'tek türlü' çarpanlara ayrılışı gerekli tutulmamıştır. Fletcher (1970), $R_1 \oplus R_2$ nin TÇH olması için gerek ve yeter şartın R_1 ve R_2 nin de TÇH olması gerektiğini göstermiştir.

TÇB lerin ve Fletcher ın tanımladığı TÇH ların yukarıda belirttiğimiz özellikleri, Sezgin Cirit tarafından 2000 yılında YTÜ FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında hazırlanan Yüksek Lisans Tezinde ayrıntılı olarak incelendiğinden burada sadece ifade edilmekle yetinilmiştir.



2. İLGİLİLİK VE İNDİRGENEMEZLİK

2.1 Giriş

Herhangi bir R tamlık bölgesinde ilgililik ve indirgenemezlik kavramları birbirine eş olan farklı tanımlarla verilebilir : $a, b \in R$ için i) $a|b$ ve $b|a$ ii) $a = bu \exists u \in R$ iii) $a = bc \Rightarrow c \in U(R)$ şartlarından biri sağlandığında a ve b ye ilgilidir denir. R sıfır bölënli olduğunda , tamlık bölgeleri için eşdeğer olan bu ifadelerin hiçbiri birbirine denk olmamaktadır. Bu bölümde bunlar arasındaki fark ayrıntılı olarak incelenmiştir. Yine tamlık bölgelerinde $a = bc$ olduğunda eğer a, b veya c den biri ile ilgili ise a ya indirgenemez denir. Fakat R yi sıfır bölënli kabul ettiğimizde, yukarıdaki şekilde üç farklı ilgililik tanımından dolayı, üç farklı indirgenemezlik tanımına sahip oluruz. Ayrıca R tamlık bölgesi için indirgenemez eleman şöyle de karakterize edilebilir : a nın indirgenemez olması için gerek ve yeter şart (a) nın öz esas idealler kümesinin maksimal elemanı olmasıdır. Fakat bu şart da bizi sıfır bölënli halkalarda farklı bir indirgenemezlik tanımına götürmektedir. Bu bölümde bu dört farklı indirgenemezlik tanımları da ayrıntılı olarak incelenmiş ve aralarındaki bağıntılar da ortaya konmuştur.

2.2 Sıfır Bölënli Halkalarda İlgililik ve İndirgenemezlik Kavramları

Tanım 2.2.1 R değışmeli bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $a|b$ ve $b|a$ ise a ve b *igilidir* denir ve $a \sim b$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 R değışmeli bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $a = ub$ olacak şekilde bir u birimsel elemanı varsa a ve b *kuvvetli igilidir* denir ve $a \approx b$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3 R değışmeli bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer (i) a ve b ilgili (ii) $a = b = 0$ veya $a \neq 0$ ve $a = rb \Rightarrow r \in U(R)$ oluyorsa a ve b *çok kuvvetli igilidir* denir ve $a \equiv b$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımlardan $a \sim b$ ise bir u birimsel elemanı için $a = bu$ yazılabilmesi gerekmediğine dikkat edilmelidir. Aşağıdaki örnek iki elemanın ilgili olduğu halde kuvvetli ilgili olamayacağını göstermektedir.

Örnek 2.2.4 $F[X, Y, Z]$ F cismi üzerinde üç değişkenli polinomlar halkası ve $I = (X - XYZ)$ de bir ideali olmak üzere $R = F[X, Y, Z] / I$ halkasını gözönüne alalım.

$x = X + I$, $y = Y + I$, $z = Z + I$ R nin üç elemanı olsun. $X - XYZ + I = I$ olduğundan $x = xyz$ yazılabilir. Dolayısıyla $x \sim xy$ dir. Fakat $x \approx xy$ değildir. Gerçekten $f \in F[X, Y, Z]$ ve $\bar{f} = f + I$ olmak üzere $\bar{f}x = xy$ olsun. $\bar{f}$ nin hiçbir zaman birimsel olamayacağını gösterelim: $\bar{f}x = xy \Rightarrow fX - YX \in X(1 - YZ) \Rightarrow f - Y = h(1 - YZ)$ olacak şekilde bir $h \in F[X, Y, Z]$ vardır. Şu halde $f = Y + h(1 - YZ)$ şeklindedir. $\bar{f}$ nin birimsel olamayacağını göstermek için f nin birimsel olamayacağını göstermek yeterlidir. Eğer $X = 0$ ve $Y = Z$ alınırsa $(Y + h(1 - YZ), X) \neq F[X, Y, Z]$ olduğundan f hiçbir zaman birimsel olamaz.

Tamlık bölgeleri için eşdeğer olan Tanım 2.2.1, Tanım 2.2.2, Tanım 2.2.3 sıfır bölünli halkalara geçildiğinde farklı üç kavram haline gelmektedir. Ancak aralarında $a \cong b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow a \sim b$ şeklinde bir bağıntı olduğu açıktır. Bu üç tanımdan ilgililik ($\sim$), kuvvetli ilgililik ($\approx$) bağıntıları bir denklik bağıntısıdır. Fakat çok kuvvetli ilgililik bağıntısının bir denklik bağıntısı olması gerekmez. Gerçekten, sıfır ve birim elemandan farklı bir $e \in R$ idempotent elemanı için $e = ee$ olduğundan $e \cong e$ değildir. Dolayısıyla yansıma özelliğine sahip olmayabilir. $\cong$ bağıntısının R üzerinde yansıma özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $x, y \in R$ için $x = xy \Rightarrow x = 0$ veya $y \in U(R)$ olmasıdır. Bu şartı sağlayan değişmeli halkalara *presimplifiable* denir.

Teorem 2.2.5 R değişmeli bir halka olsun.

- (1) $a, b \in R$ için $a \cong b \Rightarrow b \cong a$; yani $\cong$ simetriktir.
- (2) $a, b, c \in R$ için $a \cong b$ ve $b \sim c \Rightarrow a \cong c$ dir. Dolayısıyla $\cong$ geçişme özelliğine sahiptir. Özel olarak $a \cong a$ ve $a \sim b$ ise $a \cong b$ dir.
- (3) Aşağıdaki koşullar denktir:
 - (i) $\cong, (R, \cdot)$ monoidi üzerinde bir kongrüanstır,
 - (ii) $\cong, R$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır,
 - (iii) $\cong, R$ üzerinde yansıyandır,
 - (iv) $\sim, \approx$ ve $\cong$ R üzerinde çakışır,
 - (v) R presimplifiable dir.

İspat

(1) $a \cong b$ olsun. Bu durumda $a \sim b$ dir. $a = 0 \Rightarrow b = 0$ ve $0 \cong 0$ ve $b \cong a$ dir. $a \neq 0$ $b = sa$ olsun. $s \in U(R)$ olduğunu gösterelim. a ve b ilgili olduğundan $a = tb$, $\exists t \in R$ dir. Böylece $a = tb = t(sa) = (ts)a = (ts)tb = (tst)b$ dir. $a \cong b$ olduğundan $tst \in U(R)$ dir. Dolayısıyla $s \in U(R)$ olduğundan $b \cong a$ dir.

(2) $a \cong b$ ve $b \sim c$ olsun. $a=0$ ise $a \sim b$ ve $b \sim c$ den $b=c=0$, dolayısıyla da $a \cong c$ dir. $a \neq 0$ kabul edelim. $a=rc$ olsun. $r \in U(R)$ olduğunu göstereceğiz. $b \sim c$ olduğundan $c=sh$ olacak şekilde bir s elemanı vardır. Buradan $a=rc=r(sh)=(rs)b$ yazılabilir. $a \cong b$ olduğundan $rs \in U(R)$ ve $s \in U(R)$ dir. Dolayısıyla $a \cong c$ dir.

(3) $\cong$ R üzerinde kongrüans ise aynı zamanda denklik bağıntısı, dolayısıyla yansıyan olduğundan $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ olduğu açıktır.

$(iii) \Rightarrow (iv) \cong R$ üzerinde yansıyan olsun. $a \sim b$ olduğunu kabul edelim. (2) nin son ifadesinden dolayı $a \cong a$ ve $a \sim b \Rightarrow a \cong b$ dir. $a \cong b$ ise aynı zamanda $a \approx b$ dir. $a \cong b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow a \sim b$ tanımdan açıktır. Şu halde $\sim, \approx, \cong$ bağıntıları çakışıkır.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ $\sim, \approx, \cong$ bağıntılarının R üzerinde çakıştığını kabul edelim: $\forall a, b \in R$ için $a \sim b \Rightarrow a \cong b$ dir. $a \sim a$ olduğundan $a \cong a$ olur.

$(iii) \Rightarrow (v) \cong R$ üzerinde yansıyan olsun. R nin presimplifiable olduğunu göstereceğiz. $a = ra$ ve $a \neq 0$ olsun. $\cong$ yansıyan olduğundan r birimseldir. Dolayısıyla R presimplifiable dir.

$(v) \Rightarrow (iii)$ R presimplifiable olsun. Buna göre $\forall a, b \in R$ için $a = ka \Rightarrow a = 0$ veya $k \in U(R)$ dir. Dolayısıyla $\cong R$ üzerinde yansıyan olur.

$(iii) \Rightarrow (i) \cong R$ üzerinde yansıyan olsun. $\cong$ nın $(R, \cdot)$ üzerinde kongrüans olduğunu göstermek için denklik bağıntısı olduğu ve $a \cong b \Rightarrow ca \cong cb$ olduğu gösterilmelidir. (1) ve (2)

den $\cong$ denklik bağıntısıdır. Geriye $a \cong b \Rightarrow ca \cong cb$ olduğunu göstermemiz gerekir: $a \cong b \Rightarrow a \sim b$ ve buradan $ca \sim cb$ dir. $ca \neq 0$ olsun. $ca = r(cb)$ kabul edelim. $a \cong b$ olduğundan bir u birimsel elemanı için $a = ub$ ve $b = u^{-1}a$ dir. $ca = r(cb) = r(cu^{-1}a) = (ru^{-1})ca$ dir. $\cong$ yansıyan olduğundan $ca \cong ca$ ve $ru^{-1} \in U(R)$ dir. Buradan r birimsel olacağından $ca \cong cb$ elde edilir.

Önerme 2.2.6 R tamlik bölgesi veya quasi-lokal halka (bir tek M maksimal ideali olan halka) ise R presimplifiable dir.

İspat R tamlik bölgesi ve $x, y \in R$ için $x = xy$ ise $x(1-y) = 0$ dir. R sıfır bölensiz olduğundan $x = 0$ veya $1-y = 0$ bulunur. Buradan $x = 0$ veya y birimsel, dolayısıyla da R presimplifiable dir. R quasi-lokal halka ve $x = xy$ olsun. $y \notin M$ ise y birimsel; $y \in M$ ise $1-y$ birimsel, dolayısıyla da $x(1-y) = 0$ dan $x = 0$ elde edilir. Şu halde R presimplifiable dir.

Böylece R tamlik bölgesi veya quasi-lokal halka ise R presimplifiable olduğundan, $\sim, \approx, \cong$ bağıntıları çıkarılır. Eğer e R nin sıfırdan ve birimden farklı bir idempotent elemanı ise $e = 1.e$ yazılacağından $e \approx e$ fakat $e = e.e$ olduğundan e kendisiyle çok kuvvetli ilgili değildir.

Daha önce tanımladığımız 3 farklı ilgililik tanımından yararlanarak, 3 farklı indirgenemez eleman tanımı elde edilir :

Tanım 2.2.7 R değişmeli bir halka ve a R nin birimsel olmayan bir elemanı olsun. Eğer $a = bc$ olduğunda a ile b veya c sırasıyla ilgili, kuvvetli ilgili veya çok kuvvetli ilgili oluyorsa a ya yine sırasıyla *indirgenemez*, *kuvvetli indirgenemez* veya *çok kuvvetli indirgenemez* denir.

a çok kuvvetli indirgenemez $\Rightarrow a$ kuvvetli indirgenemez $\Rightarrow a$ indirgenemez olduğu açıktır. Fakat bu gerektirmelerin hiçbiri ters çevrilemez.

Yukarıdaki tanımda kuvvetli indirgenemezlik için 0 hariç tutulmamıştır. Buna bağlı olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 2.2.8 Değişmeli bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) R tamlık bölgesidir,
- (2) 0 çok kuvvetli indirgenemezdir,
- (3) 0 kuvvetli indirgenemezdir,
- (4) 0 indirgenemezdir.

İspat R tamlık bölgesi ise $0 = bc$ alındığında b veya c den biri sıfır olmalıdır. $0 \cong 0$ olduğundan $0 \cong b$ veya $0 \cong c$ dir. Dolayısıyla 0 çok kuvvetli indirgenemez ve aynı zamanda kuvvetli indirgenemez ve indirgenemez olur. Eğer 0 indirgenemez ise $0 = bc$ için $a \sim b$ veya $a \sim c$ olacağından b veya c sıfır, dolayısıyla R tamlık bölgesi olur.

Şimdi bu farklı indirgenemezlik tanımlarını karakterize eden teoremleri verelim.

Teorem 2.2.9 R değişmeli bir halka olsun. Sıfırdan farklı ve birimsel olmayan bir $a \in R$ için aşağıdaki koşullar denktir:

- 1) a çok kuvvetli indirgenemezdir. Yani $a = bc \Rightarrow a \cong b$ veya $a \cong c$ dir.
- 2) $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow$ bir i için $a \cong a_i$ dir.
- 3) $a = bc \Rightarrow b$ veya c birimseldir.
- 4) $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow$ biri hariç tüm a_i ler birimseldir.
- 5) $a \cong a$ dır ve $a \cong bc \Rightarrow a \cong b$ veya $a \cong c$.
- 6) $a \cong a$ ve $a \cong a_1 \dots a_n \Rightarrow$ bir i için $a \cong a_i$.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (3) $a = bc$ olsun. $a \cong b$ veya $a \cong c$ dir. $a \cong b$ ise $a = bc$ den $c \in U(R)$, $a \cong c$ ise $a = bc$ den $b \in U(R)$ bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (5) $a \sim a$ dır. $a = ra$ ise (3) den r veya a birimseldir. a birimsel olmadığından $r \in U(R)$ ve $a \cong a$ olur. $a \cong bc$ olsun. O zaman bir $u \in U(R)$ için $a = u(bc) = (ub)c$. Bu durumda hipotezden dolayı ub veya c birimsel olmalıdır. ub birimsel ise $a \sim c$, veya c birimsel ise $a \sim ub$ olur. $a \cong a$ olduğundan Teorem 2.2.4 ün (2) şartından dolayı $a \sim c$ ise $a \cong c$, veya $a \sim ub$ ise $a \cong ub$ bulunur. $a \cong ub$ ise u birimsel olduğundan $a \cong b$ dir.

(5) $\Rightarrow$ (1) $a = bc$ olsun. Hipotezden dolayı $a \cong a$ yani $a \cong bc$ dir. Yine hipotezden dolayı $a \cong b$ veya $a \cong c$ dir.

Benzer şekilde (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6) da gösterilebilir:

(2) $\Rightarrow$ (4) $a = a_1 \dots a_n$ olsun. Bir i için $a \cong a_i$ dir. $a \cong a_i$ ise $a = a_1 \dots a_i \dots a_n$ olduğundan $a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$ birimsel olur. Dolayısıyla $\forall a_j \in U(R)$, $j \neq i$.

(4) $\Rightarrow$ (6) Önce $a \cong a$ olduğunu gösterelim. $a = ra$ olsun. Hipotezde $n=2$ ve $a_1 = r$ alınırsa r veya a nın birimsel olduğu görülür. a birimsel olmadığından $r \in U(R)$ ve $a \cong a$ bulunur. $a \cong a_1 \dots a_n$ olsun. Bir $u \in U(R)$ için $a = u a_1 \dots a_n$ dir. Hipotezden dolayı $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ birimsel ve $u a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$ çarpımı da birimsel olur. Şu halde $a \cong a_i$ bulunur.

(6) $\Rightarrow$ (2) $a = a_1 \dots a_n$ olsun. $a \cong a$ olduğundan $a \cong a_1 \dots a_n$ dir. Hipotezden dolayı bir i için $a \cong a_i$ dir.

(5) $\Rightarrow$ (6) n üzerinde indüksiyon uygulayalım. $n = 2$ ise hipotezden dolayı doğrudur. $a \cong a_1 \dots a_{n-1}$ ise bir $i \in \{1, \dots, n-1\}$ için $a \cong a_i$ olduğunu kabul edelim. Şimdi $a \cong a_1 \dots a_n$ olsun. $b = (a_1 \dots a_{n-1})$, $c = a_n$ alınırsa $a \cong b = a_1 \dots a_{n-1}$ veya $a \cong c = a_n$ bulunur. $a \cong a_1 \dots a_{n-1}$ ise kabulden dolayı $a \cong a_i$ dir.

(6) $\Rightarrow$ (5) $n = 2$ için özel hal olduğu açıktır.

Teorem 2.2.10 Çok kuvvetli indirgenemez elemanla ilgili olan her eleman da çok kuvvetli indirgenemezdir.

İspat a çok kuvvetli indirgenemez ve $a \sim b$ olsun. $a = 0$ ise $a \sim b$ den $b = 0$ ve $a=b=0$ olacağından b de çok kuvvetli indirgenemezdir. $a \neq 0$ ve $b = xy$ olsun. $b \cong x$ veya $b \cong y$ olduğunu göstermemiz gerekir. a çok kuvvetli indirgenemez ise Teorem 2.2.9 un (5) şartından dolayı $a \cong a$ dir. $a \cong a$ ve $a \sim b$ olduğundan Teorem 2.2.4 den $a \cong b$ dir. O halde

$a \cong xy$ dir. Yine Teorem 2.2.9 dan $a \cong x$ veya $a \cong y$ dir. $\cong$ simetri ve geçişme özelliğine sahip olduğundan $b \cong x$ veya $b \cong y$ bulunur.

Not: Teorem 2.2.9 a $a \cong bc \Rightarrow a \cong b$ veya $a \cong c$ şartını ekleyemeyeceğimize dikkat edilmelidir. Yani (5) ve (6) şartlarındaki $a \cong a$ koşulunu kaldıramayız. Gerçekten $Z_2 \times Z_2$ de $e = (1,0)$ idempotent elemanı için, $(1,0) \cong (1,0)(1,0) \Rightarrow (1,0) \cong (1,0)$ şeklinde bu gerektirme geçerlidir. Oysa gerçekte e idempotent elemanı kendisi ile çok kuvvetli ilgili olmadığından (1) şartı ile çelişki elde edilir.

Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalar üzerine çalışmalarda indirgenemezlik tanımı farklı yazarlar tarafından farklı şekilde kullanılmıştır. Galovich (1978), makalesinde indirgenemez tanımı olarak, bizim çok kuvvetli indirgenemez tanımımıza eşdeğer olan, Teorem 2.2.9 un (3) şartını kullanmıştır. Fletcher (1969) ın kullandığı indirgenemezlik tanımı ise şöyledir : $a = a_1 \dots a_n$ yazıldığında bir i için $a_i = a a_i'$ oluyorsa a ya *indirgenemez* denir. Böylece Fletcher ın tanımı şu şekilde ifade edilebilir : $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow$ bir i için $a \sim a_i$ dir. Bizim kullandığımız indirgenemezlik tanımı bu şartın $n = 2$ için özel halidir. Aşağıdaki teoremden bu iki indirgenemezlik tanımının denk olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.2.11 R değişmeli bir halka olsun. Birimsel olmayan bir $a \in R$ için aşağıdaki koşullar denktir.

- (1) a indirgenemezdir; yani, $a = bc \Rightarrow a \sim b$ veya $a \sim c$.
- (2) a Fletcher ın kullandığı anlamda indirgenemezdir; yani $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow$ bir i için $a \sim a_i$.
- (3) $(a) = (b)(c) \Rightarrow (a) = (b)$ veya $(a) = (c)$ dir.
- (4) $(a) = (a_1) \dots (a_n) \Rightarrow$ bir i için $(a) = (a_i)$.
- (5) $a \sim bc \Rightarrow a \sim b$ veya $a \sim c$ dir.
- (6) $a \sim a_1 \dots a_n \Rightarrow$ bir i için $a \sim a_i$ dir.

İspat (2) $\Rightarrow$ (1), (4) $\Rightarrow$ (3), (6) $\Rightarrow$ (5) gerektirmelerinin $n = 2$ için özel hal olduğu açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) ve (5) $\Rightarrow$ (6) tümevarım ile gösterilebilir:

(3) $\Rightarrow$ (4) n üzerinde tümevarım uygulayalım. $n = 2$ için hipotezden dolayı koşul doğrudur. $n - 1$ uzunluk için doğru olduğunu kabul edelim. $(a) = (a_1) \dots (a_n)$ olsun. R değişmeli olduğundan $(a) = (a_1 \dots a_{n-1})(a_n)$ yazılabilir. Hipotezden dolayı $(a) = (a_1 \dots a_{n-1})$ veya $(a) = (a_n)$ dir. Eğer $(a) = (a_1 \dots a_{n-1})$ ise kabulden dolayı bir i için $(a) = (a_i)$ dir.

(5) $\Rightarrow$ (6) $n = 2$ için doğru olduğunu biliyoruz. $n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. $a \sim a_1 \dots a_n = (a_1 \dots a_{n-1})(a_n) \Rightarrow a \sim a_1 \dots a_{n-1}$ veya $a \sim a_n$ dir. $a \sim a_1 \dots a_{n-1}$ ise kabulden dolayı bir a_i için $a \sim a_i$ dir.

(4) $\Rightarrow$ (2) $a = a_1 \dots a_n$ olsun. R değişmeli olduğundan $(a) = (a_1 \dots a_n) = (a_1)(a_2) \dots (a_n)$ olur. Hipotezden dolayı $\exists a_i \in R$ için $(a) = (a_i)$ dir. $a \in (a_i)$ olacağından $a = k a_i$ $\exists k \in R$ için ve $a_i | a$ ve $a_i \in (a)$ olacağından $a_i = l a$ $\exists l \in R$ için ve $a | a_i$ dir. Buradan da $a \sim a_i$ bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (5) $a \sim bc$ olsun. $a \sim bc \Rightarrow a | bc$ ve $bc | a \Rightarrow a = kbc$ ve $bc = la$ $\exists k, l \in R \Rightarrow a \in (bc)$ ve $bc \in (a) \Rightarrow (a) = (bc) = (b)(c)$ dir. Böylece $(a) = (b)$ veya $(a) = (c)$ dir. Dolayısıyla $a \sim b$ veya $a \sim c$ dir.

(5) $\Rightarrow$ (3) $(a) = (b)(c)$ olsun. R değişmeli olduğundan $(a) = (b)(c) = (bc)$ dir. $(a) = (bc)$ ise $a \sim bc$ ve buradan da $a \sim b$ veya $a \sim c$ dir. $a \sim b \Rightarrow (a) = (b)$ veya $a \sim c \Rightarrow (a) = (c)$ dir.

(1) $\Rightarrow$ (3) $(a) = (b)(c)$ olsun. $a \in (bc)$ ve bir $r \in R$ için $a = r(bc)$ dir. $a = (rb)c = b(rc)$ yazılabilir. (1) den dolayı $a \sim rb$ veya $a \sim c$ ve $a \sim rc$ veya $a \sim b$ dir. Yani $(a) = (rb)$ veya $(a) = (c)$ ve ayrıca $a = (rc)$ veya $(a) = (b)$ dir. $(a) = (rb)$ ve $a = (rc)$ olsun. Aksi halde diğer durumlar için ispat tanımlanmış olur.

$(a) = (rb) \Rightarrow (ac) = (rbc) = (a)$ ve $(a) = (rc) \Rightarrow (ab) = (rbc) = (a)r$. Dolayısıyla $(a) = (a)(b) = (ac)(b) = (a)(bc) = (a)(a) = (a)^2$ ve $a = sa^2$ $\exists s \in R$ dir. $(sa)^2 = (sa)(sa) = s.sa^2 = sa$ olduğundan e idempotenttir. Ayrıca $a | sa$ ve $a = sa.a$ olduğundan $sa | a$ dir. Dolayısıyla $(a) = (e)$ dir.

$R_1 = eR$ ve $R_2 = (1-e)R$ olmak üzere R yi $R = R_1 \times R_2$ direk çarpımı şeklinde yazalım. $e = (1, 0)$ dir. a yı da $a = (\alpha, \beta)$ olarak alalım. $aR = eR$ olduğundan

$(\alpha, \beta) R_1 \times R_2 = (1, 0) R_1 \times R_2$ yazılabilir. Buradan bir $(r_1, r_2) \in R_1 \times R_2$ için $(1, 0) = (\alpha, \beta)(r_1, r_2) = (\alpha r_1, \beta r_2)$ ve $\alpha \in U(R_1)$ bulunur. yine bir $(r_1', r_2') \in R_1 \times R_2$ için $(\alpha, \beta) = (r_1', r_2')(1, 0)$ ve $\beta = 0$ bulunur. $a = (\alpha, \beta)$ indirgenemez olduğundan $\beta = 0$ da R_2 de indirgenemezdir (Dolayısıyla bir $u \in U(R)$ için $a = ue$ dir. Gerçekten bir $u = (\alpha, v) \in U(R)$ için $a = (\alpha, \beta) = (\alpha, v)(1, 0) = ue$ dir.). Bu ise R_2 nin tamlık bölgesi olmasını gerektirir. Öte yandan $R/R_1 \cong R_2$ olduğundan $R_1 = eR = aR$ asal olmalıdır. Böylece $aR = bR.cR$ eşitliğinden $aR = bR$ veya $aR = cR$ bulunur.

Sonuç 2.2.12 R nin indirgenemez bir elemanı ile ilgili her elemanı da indirgenemezdir.

İspat a indirgenemez ve $a \sim b$ olsun. b nin de indirgenemez olduğunu göstermek için $b = xy$ olduğunu kabul edelim. $a \sim b = xy$ olduğundan teoremin (5) şartı gereğince $a \sim x$ veya $a \sim y$ olmalıdır. İlgililik bağıntısının simetri ve geçişme özelliklerinden dolayı $b \sim x$ veya $b \sim y$ dir. Dolayısıyla b de indirgenemez olur.

Sonuç 2.2.13 $e \in R$ idempotent elemanı için e indirgenemez $\Leftrightarrow e$ kuvvetli indirgenemez $\Leftrightarrow e$ asal.

İspat Teoremin (1) $\Rightarrow$ (3) ispatında e idempotent elemanı için $aR = eR$ olduğu dikkate alınırsa e nin de, a ile birlikte, asal olduğu görülür. Ayrıca ispatta parantez içinde belirtilen ifadede e nin de kuvvetli indirgenemez olduğu görülür. Şimdi e asal ise kuvvetli indirgenemez olacağını gösterelim. (1) $\Rightarrow$ (3) ün ispatındaki gibi $e = (1, 0)$ ve $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere $e = xy$ olsun. $1 = x_1 y_1$ olduğundan x_1 ve y_1 R_1 de birimsel olur. $e \mid x$ olsun. Buradan bir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ elemanı için $(x_1, x_2) = (1, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow x_1 = \alpha_1$ birimsel ve $x_2 = 0$. Şu halde e bir $u = (\alpha_1^{-1}, u_2)$ birimsel elemanı için $e = (1, 0) = (x_1, x_2)(\alpha_1^{-1}, u_2)$ şeklinde yazılabilir. Bu ise $e \approx x$ olduğunu gösterir. Eğer $e \mid y$ ise benzer işlemlerle $e \approx y$ olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem indirgenemez bir elemanın değişik eşdeğer koşullarını vermektedir.

Teorem 2.2.14 R değişmeli bir halka ve a birimsel olmayan bir eleman olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1) a indirgenemezdir.

(2) $(a) \subset (b), (c) \Rightarrow (a) \subset (b)(c)$ dir.

(3) $S = \{b \in R \mid (a) \subset (b)\}$ kümesi R nin çarpımsal kapalı saturated alt kümesidir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2) a indirgenemez ve $(a) \subset (b), (c)$ olsun. $(a) \subseteq (b) \Rightarrow a \in (b) \Rightarrow a = bd \quad \exists d \in R \Rightarrow (a) = (d)(b)$ olduğundan Teorem 2.2.11 in (3) şartından dolayı $(a) = (b)$ veya $(a) = (d)$ dir. $(a) \subset (b)$ olduğundan $(a) \neq (b) \Rightarrow (a) = (d)(b) = (a)(b)$ olur. Benzer şekilde $(a) = (a)(c)$ ifadesi de bulunur. O zaman $(a) = (a)(c) = (a)(b)(c) \subseteq (b)(c)$ elde edilir. Eğer $(a) = (b)(c)$ ise a indirgenemez olduğundan $(a) = (b)$ veya $(a) = (c)$ nin bir çelişki olduğu kolayca görülür. O halde $(a) \subset (b)(c)$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x, y \in S$ olsun. $(a) \subset (x), (y)$ dir. Hipotezden dolayı $(a) \subset (x)(y) = (xy)$ olur. Dolayısıyla $xy \in S$ dir. Böylece S nin çarpımsal kapalı olduğu gösterilmiş olur. S nin saturated olduğunu göstermek için $xy \in S$ olduğunu kabul edelim. S kümesinin özelliğinden dolayı $(a) \subset (xy) \subseteq (x), (y)$ dir. Dolayısıyla $x, y \in S$ yani S saturated dır.

(3) $\Rightarrow$ (1) $(a) \neq (b)$ ve $(a) \neq (c)$ olmak üzere $(a) = (b)(c)$ olsun. O zaman $(a) \subset (b)$ ve $(a) \subset (c)$ olur. Hipotezden dolayı $bc \in S$ idi ve buradan $(a) \subset (bc)$ elde edilir. Halbuki $(a) = (b)(c)$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Sonuç 2.2.13 bir (x) idempotent esas idealinin indirgenemez olması için gerek ve yeter şartın (x) in asal olması gerektiğini ifade ediyordu. Aşağıdaki teoremden ise $(x) = (x)^2$ şartı ile (x) in indirgenemez olması arasındaki ilişki ortaya konulmaktadır.

Teorem 2.2.15 R değişmeli bir halka ve $x \in R$ olsun.

(1) $(x) = (x)^2$ olması için gerek ve yeter koşul $(x) \subseteq (y) \Rightarrow (x) = (x)(y)$ olmasıdır.

(2) x indirgenemez ise $(x) \subset (y) \Rightarrow (x) = (x)(y)$ şartı sağlanır.

(3) Eğer $(x) \subset (y) \Rightarrow (x) = (x)(y)$ şartı sağlanıyorsa ya $(x) = (x)^2$ dir, ya da x indirgenemezdir.

İspat

(1) $(x) = (x)^2$ ve $(x) \subseteq (y)$ olsun. $(x) = (x)^2 = (x)(x) \subseteq (x)(y) \subseteq (x) \Rightarrow (x) = (x)(y)$ dir. Bu kez $(x) \subseteq (y) \Rightarrow (x) = (x)(y)$ şartının sağlandığını kabul edelim. $(x) \subseteq (x)$ olduğundan $(x) = (x)(x) = (x)^2$ dir.

(2) $(x) \subset (y)$ olsun. $(x) = (y)(z) \exists z \in R$. x indirgenemez olduğundan Teorem 2.2.11 in (3) şartından dolayı $(x) = (y)$ veya $(x) = (z)$ dir. $(x) \neq (y)$ olduğundan $(x) = (z) \Rightarrow (x) = (x)(y)$ dir.

(3) $(x) \subset (y)$ ve $(x) \subset (z)$ olsun. O zaman hipotezden $(x) = (x)(y)$ ve $(x) = (x)(z)$ dir. $(x) = (xy)(z) \subseteq (yz)$ olur. Eğer x indirgenemez değilse, Teorem 2.2.14 den $(x) \subset (y), (z) \Rightarrow (x) \not\subseteq (yz)$ olur. O zaman $(x) = (y)(z)$ olması gerekir. O halde $(x)^2 = (x).((y)(z)) = ((x)(y)).(z) = (x)(z) = (x)$.

Aşağıdaki teoremden bir eleman kuvvetli indirgenemez olması için bazı eşdeğer koşulları veriyoruz.

Teorem 2.2.16 R değişmeli halka olsun. Birimsel olmayan bir $a \in R$ için aşağıdakiler denktir:

- (1) a kuvvetli indirgenemez, yani $a = bc \Rightarrow a \approx b$ veya $a \approx c$ dir.
- (2) $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i$ için $a \approx a_i$ dir.
- (3) $a \approx bc \Rightarrow a \approx b$ veya $a \approx c$ dir.
- (4) $a \approx a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i$ için $a \approx a_i$ dir.

İspat (2) $\Rightarrow$ (1) ve (4) $\Rightarrow$ (3) şartları $n = 2$ alınarak kolayca görülür. (3) $\Rightarrow$ (4) de tümevarım ile kolayca ispatlanır.

(3) $\Rightarrow$ (1) $a = bc$ olsun. O zaman $a = 1 \cdot bc \Rightarrow a \approx bc$ olur. Buradan $a \approx b$ veya $a \approx c$ olduğu görülür. Geriye (1) $\Rightarrow$ (3) ün ispatlanması kalır:

(1) $\Rightarrow$ (3) $a \approx bc$ olsun. $a = (ub)c \quad \exists u \in u(R)$. (1) den ya $a \approx ub$ yada $a \approx c$ olur: $a \approx ub$ olsun, $a = v \cdot (ub) = (vu)b \quad \exists v \in u(R) \Rightarrow a \approx b$.

Önerme 2.2.17 R değişmeli bir halka ve a kuvvetli indirgenemez olsun. $b \sim a$ ise $b \approx a$ dır. Yani kuvvetli indirgenemez elemanla ilgili olan her eleman da kuvvetli indirgenemezdir.

İspat a kuvvetli indirgenemez ve $a \sim b$ den $(a) = (b)$, $a = bc \quad \exists c \in R$ bulunur. $a = bc$ ise a kuvvetli indirgenemez olduğundan $a \approx b$ veya $a \approx c$ dir. $a \approx b$ ise ispat biter. $a \approx c$ olsun. $a \approx c \Rightarrow (a) = (c)$, buradan $(a) = (b)(c) = (a)(a) = (a)^2$. Teorem 2.2.11 in (1) $\Rightarrow$ (3) ispatında kullandığımız notasyon ile e idempotent, u birimsel olmak üzere $a = ue$ dir $bR = aR = eR \Rightarrow$ bir v birimseli için $b = ve \Rightarrow b = u^{-1} \cdot v a = (u^{-1} \cdot v) a \Rightarrow b \approx a$. Dolayısıyla b kuvvetli indirgenemezdir.

D tamlık bölgesinin sıfırdan farklı bir elemanı a olsun. Bu durumda ancak ve ancak (a) , D nin öz esas idealleri kümesinin maksimal elemanı ise a indirgenemezdir. Fakat bu şart sıfır bölünli halkalar için farklı bir indirgenemezlik tanımı oluşturmaktadır.

Önerme 2.2.18 D tamlık bölgesi ve $a \in D^*$ elemanının indirgenemez olması için gerek ve yeter şart (a) nın öz esas idealler kümesinin maksimal elemanı olmasıdır.

İspat a D nin bir maksimal elemanı ve S , D nin öz esas ideallerinin kümesi olsun. Bir $(y) \in S$ için $(a) \subseteq (y) \neq D$ olduğunu kabul edelim. $a \in (y)$ ve $a = yd$ olacak şekilde bir $y \in D$ vardır. a indirgenemez olduğundan y veya d birimsel olmak zorundadır. y birimsel olsa $(y) = D$ olacağından y birimsel değildir. Dolayısıyla d birimsel olmalıdır. $a = yd$ ve d birimsel olduğundan $(a) = (y)$ elde edilir. Böylece (a) S nin bir maksimal elemanıdır. Bu kez (a) nın S nin bir maksimal elemanı olduğunu kabul edelim. (a) öz esas ideal olduğundan sıfır veya birimsel değildir. $a = bc$ olsun. b veya c den birinin birimsel olduğunu göstereceğiz. $a = bc$ ise $(a) \subseteq (b), (c)$ dir. b nin birimsel olmadığını kabul edelim. $(a) \subseteq (b) \neq D$ ve (a) maksimal olduğundan $(a) = (b)$ dir. Buradan $b \in (a)$ ve bir $d \in D$ için $b = ad$ dir. $a = adc$ ve a sıfırdan farklı olduğundan dc birimsel, dolayısıyla c birimsel bulunur.

Yukarıdaki şekilde karakterize edilen indirgenemezlik tanımı, tamlık bölgeleri için verilen diğer indirgenemezlik tanımları ile çakışır. Ancak sıfır bölünli halkalara geçtiğimizde, bu ifade ayrı bir indirgenemezlik tanımı olarak karşımıza çıkmaktadır.

Tanım 2.2.19 R değişmeli halka ve a R nin birimsel olmayan bir elemanı olsun. (a) R nin öz esas idealler kümesinin maksimal elemanı ise a ya m -indirgenemez denir.

Teorem 2.2.20 R değişmeli halka ve a R nin birimsel olmayan bir elemanı olsun.

- (1) a nın m -indirgenemez olması için gerek ve yeter şart $a = bc \Rightarrow b \in U(R)$ veya $a \sim b$ olmasıdır.
- (2) $a \neq 0$ çok kuvvetli indirgenemez ise a m -indirgenemezdır.
- (3) a m -indirgenemez ise a kuvvetli indirgenemezdır.
- (4) a m -indirgenemez ve $a \sim b$ ise $a \approx b$ ve b de m -indirgenemezdır.
- (5) a indirgenemez olsun. O halde $S = \{ b \mid (a) \subseteq (b) \}$ çarpımsal kapalıdır ve $a/1$ R_s de m -indirgenemez dir.

İspat (1) $(\Rightarrow)$ $a = bc$ olsun. $(a) \subseteq (b)$ olur. (a) R nin öz esas idealleri kümesinin maksimal elemanı olduğundan $(b) = R$ veya $(a) = (b)$ dir. $(b) = R$ ise $b \in U(R)$; $(a) = (b)$ ise $a \sim b$ dir.

$(\Leftarrow)$ Herhangi bir $b \in R$ için $(a) \subseteq (b)$ olsun. O zaman $a = bc \exists c \in R$. Hipotezden $b \in U(R)$ veya $a \sim b$ olmalı $b \in U(R) \Rightarrow (b) = R$ ve (a) , R nin öz esas idealleri kümesinin maksimal elemanı; $a \sim b \Rightarrow (a) = (b)$ olur ki bu da bizi aynı sonuca götürür.

(2) $a \neq 0$ nın çok kuvvetli indirgenemez olduğunu kabul edelim. $(a) \subseteq (b)$ olsun. $a = bc \exists c \in R$. $a \neq 0$ çok kuvvetli indirgenemez olduğundan $a \cong b$ veya $a \cong c$ dir.

Eğer $a \cong b \Rightarrow (a) = (b)$ yani (a) istenen kümenin maksimal elemanıdır. Eğer $a \cong c \Rightarrow \exists u \in U(R)$ için $c = ua$ ve $a = bc = b.ua$. Buradan da $a \neq 0$ olduğundan $bu \in U(R)$ olmalı. Dolayısıyla $b \in U(R)$ yani $(b) = R$ dir. Şu halde a m -indirgenemezdır.

(3) a m -indirgenemez olsun. $a = bc$ alalım. O zaman $(a) \subseteq (b)$, (c) dir. $(b) = R$ veya $(c) = R \Rightarrow a \approx c$ veya $a \approx b$ dir. Eğer $(a) = (b) = (c) \Rightarrow (a) = (b)(c) = (a)^2$ ve (a)

Eğer $a \cong b \Rightarrow (a) = (b)$ yani (a) istenen kümenin maksimal elemanıdır. Eğer $a \cong c \Rightarrow \exists u \in U(R)$ için $c = ua$ ve $a = bc = b.ua$. Buradan da $a \neq 0$ olduğundan $bu \in U(R)$ olmalı. Dolayısıyla $b \in U(R)$ yani $(b) = R$ dir. Şu halde a m -indirgenemezdir.

(3) a m -indirgenemez olsun. $a = bc$ alalım. O zaman $(a) \subseteq (b), (c)$ dir. $(b) = R$ veya $(c) = R \Rightarrow a \approx c$ veya $a \approx b$ dir. Eğer $(a) = (b) = (c) \Rightarrow (a) = (b)(c) = (a)^2$ ve (a) idempotent olur. Buradan a indirgenemez olacağından, Teorem 2.2.11 in (1) $\Rightarrow$ (3) ispatında olduğu şekilde, asaldır. Ve Sonuç 2.2.13 den a kuvvetli indirgenemez olur.

(4) a m -indirgenemez olsun. (3) den a kuvvetli indirgenemez olur ve $a \sim b$ olduğundan Teorem 2.2.16 dan $b \approx a$ çıkar. Eğer $a \sim b$ ise $(a) = (b)$ olduğundan (b) de esas idealler kümesinin maksimal elemanı yani b de m -indirgenemezdir.

(5) a indirgenemez olsun. $S = \{ b \mid (a) \subset (b) \}$ kümesi Teorem 2.2.14 den çarpımsal kapalıdır. $(a) \cap S = \emptyset$ dir. Zira $(a) \cap S \neq \emptyset$ olsa $b \in (a), b \in S \Rightarrow b \in R$. Yani $(b) \subseteq (a)$ için $b \in S$ olur. Bu ise S kümesinin tanımlanışı ile çelişir. Şu halde $(a) \cap S = \emptyset$ ve $a \notin S$. Dolayısıyla $(a)_s$ R_s nin bir öz esas idealdir. $(a)_s \subseteq (c)_s$ olsun. Şu halde $\exists r \in R$ ve $\exists s \in S$ için $(a/1) = (r/s).(c/1)$ dir. O zaman bir $t \in S$ için $t sa = trc$ olur. $ts \in S$ olduğundan $(a) \subset (ts)$ ve a indirgenemez olduğundan Teorem 2.2.15 gereğince $(a) = (ts)(a) = (tsa)$ bulunur. Dolayısıyla $(a) = (tsa) = (trc) \subseteq (c)$ olur. Eğer $(a) = (c)$ ise $(a)_s = (c)_s$ dir. Eğer $(a) \subset (c)$ ise $c \in S$ olur ki buradan da $(c)_s = R_s$ sonucu çıkar.

Teorem 2.2.21 R değişmeli bir halka olsun. 0 m -indirgenemez $\Leftrightarrow 0$ maksimal ideal $\Leftrightarrow R$ cisimdir.

İspat 0 m -indirgenemez olsun. $(0) \subset I \subseteq R$ şeklinde bir I idealinin olduğunu varsayalım. O halde $0 \neq x \in I$ vardır. Buradan $0 \subset (x)$ olur. 0 m -indirgenemez yani öz esas idealler kümesinin maksimal elemanı olduğundan x birimsel, dolayısıyla da $I = R$ olur. Şu halde 0 maksimal idealdir.

Bu kez 0 maksimal ideal olsun. $0 \neq x \in R$ için $(0) \subset (x) \subseteq R$ olacağından $(x) = R$ dir. Böylece bir y elemanı için $xy = 1$ yazılabileceğinden, x birimsel ve R de cisimdir.

R bir cisim ve $(0) \subset I \subseteq R$ olsun. $I \neq (0)$ ise bir $0 \neq x \in I$ vardır. R cisim olduğundan x birimseldir ve $xy=I$ olsun. $\forall r \in R \quad r=ryx \in I$ olacağından $I=R$, (0) maksimal idealdir. Dolayısıyla 0 ın öz esas idealler kümesinin maksimal elemanı, yani m -indirgenemez olacağı, açıktır.

$a=0$ için, a indirgenemez $\Leftrightarrow a$ kuvvetli indirgenemez $\Leftrightarrow a$ çok kuvvetli indirgenemez $\Leftrightarrow a$ asal olduğunu Önerme 2.2.8 de görmüştük. Fakat $a=0$ m -indirgenemez $\Leftrightarrow 0$ maksimal ideal yani R cisimdir. Ayrıca Teorem 2.2.20 den $a \neq 0$ için a çok kuvvetli indirgenemez $\Rightarrow a$ m -indirgenemez $\Rightarrow a$ kuvvetli indirgenemez $\Rightarrow a$ indirgenemez olduğu görülür. Fakat bu gerektirmelerin hiçbiri ters çevrilemez. Hatta tamlık bölgesinde bile bir indirgenemez elemanın (dolayısıyla çok kuvvetli indirgenemez elemanın) asal olması gerekmez. Bunları aşağıdaki teoremle özetleyebiliriz.

Teorem 2.2.22 R değişmeli bir halka ve a R nin sıfırdan farklı bir elemanı ise a çok kuvvetli indirgenemez $\Rightarrow a$ m -indirgenemez $\Rightarrow a$ kuvvetli indirgenemez $\Rightarrow a$ indirgenemez ve a asal $\Rightarrow a$ indirgenemazdir. Ve üstelik bu gerektirmelerin hiçbiri ters çevrilemez. Değişmeli bir R halkası için 0 çok kuvvetli indirgenemez $\Leftrightarrow 0$ kuvvetli indirgenemez $\Leftrightarrow 0$ indirgenemez $\Leftrightarrow 0$ asaldır. Ayrıca 0 m -indirgenemez $\Leftrightarrow R$ cisimdir.

Teorem 2.2.23 R değişmeli bir halka ve S R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Eğer $I, J \cap S = \emptyset$ şeklindeki idealler kümesinin maksimal elemanı ise I asal idealdir.

İspat $a, b \in I$ olsun. $a \in I$ veya $b \in I$ olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim: $a, b \notin I$ olsun. $I \subset (I, a)$ olur. I maksimal eleman olduğundan $(I, a) \neq \emptyset$ dir. Şu halde S nin bir s_1 elemanı için $s_1 \in (I, a)$ ve benzer şekilde $s_2 \in (I, b)$ dir. Böylece $s_1 = i_1 + xa$, $s_2 = i_2 + xb$ $i_1, i_2 \in I$. Buradan $s_1.s_2 \in I$ olduğu görülür. Fakat bu $I \cap S = \emptyset$ olması ile çelişir.

Teorem 2.2.24 R değişmeli bir halka olsun. R nin bir S kümesi için aşağıdakiler denktir:

(1) S saturated çarpımsal kapalı bir kümedir.

(2) P_i ler R nin tüm asal idealleri olmak üzere $R \setminus S = \tilde{S} = \cup P_i$ dir.

İspat

(2) $\Rightarrow$ (1) $a, b \in S$ olsun. $a, b \notin \tilde{S} = \cup P_i \Rightarrow$ her i için $a, b \notin P_i \Rightarrow ab \notin P_i \Rightarrow ab \in S$. Dolayısıyla S çarpımsal kapalıdır. S nin saturated olduğunu göstermek için $ab \in S$ olduğunu kabul edelim. $ab \notin \tilde{S} = \cup P_i \Rightarrow$ her i için $ab \notin P_i \Rightarrow a, b \notin P_i \Rightarrow a, b \in S$.

(1) $\Rightarrow$ (2) $x \in \tilde{S}$ olsun. S saturated olduğundan $(x) \cap S = \emptyset$ dir. $\{(x) \mid (x) \cap S = \emptyset\}$ kümesini göz önüne alalım. Zorn lemması ile bir maksimal elemanı vardır ve I olsun. Şu halde bir önceki teoremden dolayı I asaldir. Dolayısıyla $\forall x \notin S$ için x i içeren bir P asal ideali vardır.

Teorem 2.2.25 R değişmeli bir halka ve P R nin bir asal ideali olsun. Eğer $\Rightarrow (a) = (b)$ oluyorsa a indirgenemezdir. Tersine $a \in R$ indirgenemez olsun. O takdirde $a \in P$ olacak şekilde öyle bir P asal ideali vardır ki $(a) \subseteq (b) \subseteq P \Rightarrow (a) = (b)$ dir.

İspat $(a) \subseteq (b) \subseteq P \Rightarrow (a) = (b)$ şartının sağlandığını yani (a) nın, P de içeren esas idealler kümesinin maksimal elemanı olduğunu kabul edelim. $a = bc$ olsun. O zaman $(a) \subseteq (b)$ ve $(a) \subseteq (c)$ dir. $bc = a \in P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ dir. $b \in P$ olduğunu kabul edelim. Şu halde $(a) \subseteq (b) \subseteq P$ olur. Hipotezden dolayı $(a) = (b)$ dir. Dolayısıyla da $a \sim b$ ve a indirgenemezdir. Bu kez a indirgenemez olsun. $S = \{b \in R \mid (a) \subset (b)\}$ kümesini göz önüne alalım. Teorem 2.2.14 den dolayı S çarpımsal kapalı saturated kümedir. Ayrıca Teorem 2.2.24 den $a \notin S$ olduğu için, $a \in P$ olacak şekilde bir P asal ideali vardır ve $P \cap S = \emptyset$ dir. Eğer $(a) \subset (b) \subseteq P$ ise $b \in P \cap S$ olur ki bu da $P \cap S = \emptyset$ oluşuyla çelişir. Dolayısıyla $(a) \subseteq (b) \subseteq P \Rightarrow (a) = (b)$ olmalıdır.

Teorem 2.2.26 $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ değişmeli halkasının bir ailesi, $R = \prod R_\alpha$ ve $a = (a_\alpha)$ ve $b = (b_\alpha) \in R$ olsun.

(1) $\forall \alpha \in \Lambda$ için $a \sim b \Leftrightarrow a_\alpha \sim b_\alpha$ dir.

(2) $\forall \alpha \in \Lambda$ için $a \approx b \Leftrightarrow a_\alpha \approx b_\alpha$ dir.

(3) $\forall \alpha \in \Lambda$ için $a \cong b \Leftrightarrow a_\alpha \cong b_\alpha$ ve bir $a_\alpha = 0$ ise tüm a_α lar 0 dir.

(4) a nın sırasıyla indirgenemez, kuvvetli indirgenemez, m -indirgenemez ve asal olması için gerek ve yeter şart bir a_{α_0} bileşeni hariç tüm a_α ların birimsel ve a_{α_0} ın da R_{α_0} da sırasıyla indirgenemez, kuvvetli indirgenemez, m -indirgenemez ve asal olmasıdır.

(5) a nın çok kuvvetli indirgenemez olması için gerek ve yeter şart bir a_{α_0} bileşeni hariç tüm a_α ların birimsel ve a_{α_0} ın da R_{α_0} da çok kuvvetli indirgenemez olmasıdır. Ancak $|\Lambda|=1$ ve R_{α_0} tamlık bölgesi değilse $a_{\alpha_0}=0$ olamaz.

İspat

(1) $a \sim b$ olsun. $a = (a_\alpha)$ ve $b = (b_\alpha)$ olduğundan $(a_\alpha) \sim (b_\alpha)$ dır. $(a_\alpha) | (b_\alpha)$ bir $(c_\alpha) \in R$ için $(b_\alpha) = (a_\alpha)(c_\alpha) = (a_\alpha c_\alpha)$ yazılabilir. Buradan her α için $b_\alpha = a_\alpha c_\alpha$ ve $a_\alpha | b_\alpha$ dır. $(b_\alpha) | (a_\alpha)$ için de bezer işlemlerle $b_\alpha | a_\alpha$ bulunur. Şu halde her α için $a_\alpha \sim b_\alpha$ dır. Bu kez her α için $a_\alpha \sim b_\alpha$ olduğunu kabul edelim. $a_\alpha | b_\alpha$ ise $b_\alpha = a_\alpha c_\alpha$ olacak şekilde bir $c_\alpha \in R_\alpha$ vardır. Bu eşitlik her α için geçerli olduğundan $(b_\alpha) = (a_\alpha c_\alpha) = (a_\alpha)(c_\alpha) \Rightarrow (a_\alpha) | (b_\alpha)$ dır. $b_\alpha | a_\alpha$ için yine benzer işlemlerle $(b_\alpha) | (a_\alpha)$ bulunur. Şu halde her α için $a_\alpha \sim b_\alpha$ ise $a \sim b$ dir.

(2) $a \approx b$ olsun. $a = bu$ olacak şekilde bir $u \in U(R)$ vardır. $u = (u_\alpha) \in U(R) \Rightarrow$ her α için $u_\alpha \in U(R)$ dir. Buradan $(a_\alpha) = (u_\alpha)(b_\alpha) = (u_\alpha b_\alpha) \Rightarrow a_\alpha = u_\alpha b_\alpha \Rightarrow a_\alpha \approx b_\alpha$ bulunur. Bu kez her α için $a_\alpha \approx b_\alpha$ olsun. Her α için $a_\alpha \approx b_\alpha \Rightarrow a_\alpha = u_\alpha b_\alpha \Rightarrow (a_\alpha) = (u_\alpha b_\alpha) = (u_\alpha)(b_\alpha) \Rightarrow$ bir $u = (u_\alpha) \in U(R)$ için $a = ub$ yazılabilir. Dolayısıyla $a \approx b$ dir.

(3) $a \equiv b$ olsun. $a \sim b$ olduğundan (1) den dolayı her α için $a_\alpha \sim b_\alpha$ dır. Eğer $a=0$ ise durum aşikardır. $a \neq 0$ ve $a_\alpha = r_\alpha b_\alpha$ olsun. $r = (r_\alpha)$ olarak alınırsa $a \equiv b$ olduğundan $r \in U(R)$ ve $r_\alpha \in U(R_\alpha)$ dır. Şu halde $a_\alpha \equiv b_\alpha$ dır.

Bir $a_\alpha = 0$ olsun. Tüm a_α ların aynı anda sıfır olmadığını varsayalım. Gösterim kolaylığı açısından $a_{\alpha_0} = a_1 = 0$ olsun. $a \equiv b$ olduğundan $b_1 = 0$ olur. Buradan

$$(0, a_2, \dots, a_n) = (0, u_2, \dots, u_n)(0, b_2, \dots, b_n)$$

yazılabilir. Fakat $(0, u_2, \dots, u_n) \notin U(R)$ olduğundan bu eşitlik $a \equiv b$ olması ile çelişir.

Dolayısıyla her α için $a_\alpha = 0$ olmalıdır.

Bu kez her α için $a_\alpha \cong b_\alpha$ ve $a_\alpha \neq 0$ olsun. Her α için ise (1) den dolayı $a \sim b$ dir. $a = rb$ olsun. $(a_\alpha) = (r_\alpha)(b_\alpha) = (r_\alpha b_\alpha)$ olduğundan her α için $a_\alpha = r_\alpha b_\alpha$ ve $a_\alpha \cong b_\alpha$ olduğundan her α için $r_\alpha \in U(R_\alpha)$ dir. Buradan $r \in U(R)$ olacağından $a \cong b$ dir.

(4) $a = (a_1, \dots, a_n) \in R$ indirgenemez olsun. Her α için $u_\alpha, v_\alpha \in U(R_\alpha)$ olmak üzere

$$a = (a_1, \dots, a_n) = (u_1, a_2, \dots, u_n) \dots (v_1, \dots, v_{n-1}, a_n)$$

şeklinde yazılabilir. $(a_1, \dots, a_n)$ indirgenemez olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki çarpanlardan biri ile ilgili olmalıdır. $(w_1, \dots, w_{\alpha_0-1}, a_{\alpha_0}, w_{\alpha_0+1}, \dots, w_n)$ ile ilgili ise birimseldir.

Şimdi a_{α_0} in da R_{α_0} da indirgenemez olduğunu gösterelim :

$a_{\alpha_0} = b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}$ olsun. $(a_1, \dots, a_{\alpha_0}, \dots, a_n) = (a_1, \dots, b_{\alpha_0}, \dots, a_n) (1, \dots, 1, c_{\alpha_0}, 1, \dots, 1)$ şeklinde yazılabilir. a indirgenemez olduğundan sağdaki çarpanlardan biri ile ilgilidir. (1) den dolayı $a_{\alpha_0} \sim b_{\alpha_0}$ veya $a_{\alpha_0} \sim c_{\alpha_0}$ dır. Dolayısıyla a_{α_0} da indirgenemez olur. $\alpha = \alpha_0$ hariç her α için $a_\alpha \in U(R_\alpha)$ ve $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$ da indirgenemez olmak üzere

$a = (u_1, \dots, u_{\alpha_0-1}, a_{\alpha_0}, u_{\alpha_0+1}, \dots, u_n)$ olsun. a nın indirgenemez olduğunu göstermek için $a = bc$ olduğunu kabul edelim.

$$a = (u_1, \dots, u_{\alpha_0-1}, a_{\alpha_0}, u_{\alpha_0+1}, \dots, u_n) = (b_1, \dots, b_n) (c_1, \dots, c_n) = (b_1 c_1, \dots, b_n c_n)$$

eşitliğinden $u_\alpha = b_\alpha c_\alpha$ ve $a_{\alpha_0} = b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}$ yazılabilir. Böylece $a_{\alpha_0} \sim b_{\alpha_0}$ veya $a_{\alpha_0} \sim c_{\alpha_0}$ dır ve her α için $b_\alpha, c_\alpha \in U(R_\alpha)$ dır. Şu halde $a \sim b$ veya $a \sim c$ olacağından a indirgenemezdir. a nın diğer indirgenemezlik türleri için ispatı da benzer yöntemle yapılabilir.

(5) a nın çok kuvvetli indirgenemez olduğunu kabul edelim. a aynı zamanda indirgenemez olacağından (4) den dolayı bir a_{α_0} hariç tüm a_α lar birimseldir. $a_{\alpha_0} = b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}$ olsun

$$a = (a_1, \dots, a_{\alpha_0}, \dots, a_n) = (a_1, \dots, b_{\alpha_0}, \dots, a_n) (1, \dots, 1, c_{\alpha_0}, 1, \dots, 1) = bc$$

şeklinde yazılabilir. a çok kuvvetli indirgenemez olduğundan b veya c birimsel olmalıdır.

Dolayısıyla b_α veya c_α birimsel olacağından a_{α_0} da R_α da indirgenemez olur. Şimdi $a_{\alpha_0} = 0$ özel halini gözönüne alalım. R_α tamlık bölgesi ve Teorem 2.2.9 dan dolayı $a \cong a$ dır.

Ayrıca (3) den dolayı tüm a_α lar $a_\alpha = 0$ olmalıdır. $a = (0, \dots, 0)$ çok kuvvetli indirgenemez

$\Rightarrow R_1 \times \dots \times R_n$ tamlık bölgesi $\Rightarrow n=1$ olduğundan Bu ancak $|\Lambda|=1$ olması ile mümkündür.

Bu kez u_α ların R_α da birimsel ve bir a_{α_0} da R_{α_0} da çok kuvvetli indirgenemez olduğu $(u_1, \dots, u_{\alpha_0-1}, a_{\alpha_0}, u_{\alpha_0+1}, \dots, u_n) = a$ elemanın R de çok kuvvetli indirgenemez olduğunu gösterelim. $n=1$ ise $a=a_{\alpha_0}$ ın çok kuvvetli indirgenemez olduğu açıktır. $n>1$ olduğunu kabul edelim. $a=bc$ olsun. u_α lar birimsel olduğundan $b_\alpha, c_\alpha \in U(R_\alpha)$ ve $a_{\alpha_0} = b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}$ dır. a_{α_0} R_{α_0} da çok kuvvetli indirgenemez olduğundan $a_{\alpha_0} \cong b_{\alpha_0}$ veya $a_{\alpha_0} \cong c_{\alpha_0}$ ve böylece $a \cong b$ veya $a \cong c$ dir. Şu halde a çok kuvvetli indirgenemezdir.

3. ATOMİKLİK

3.1. Giriş

R tamlik bölgesi olduğunda eğer sıfırdan ve birimselden farklı her eleman, indirgenemez elemanların çarpımı olarak yazılabiliyorsa R ye atomik denir. R yi sıfır bölënli aldığımızda, dört farklı indirgenemez eleman tanımından yararlanarak, dört farklı (asal elemanların çarpımı olarak yazılabilmeyi de ayrı bir atomiklik tanımı olarak alınmasıyla beş farklı) atomiklik tanımı elde ederiz. Bu bölümde bu dört farklı atomik halkanın özellikleri incelenmektedir. Tamlik bölgelerinde olduğu gibi sıfır bölënli halkalarda da esas idealler için artan zincir şartının R nin atomik olmasını gerektirdiği gösterilmiştir. Ayrıca bu dört farklı atomikliğin direkt çarpımlarla korunup korunmadığı da araştırılmıştır.

3.2. Sıfır Bölënli Halkalarda Atomiklik

Tanım 3.2.1 Değişmeli bir R halkasında, eğer R nin sıfırdan ve birimselden farklı her elemanı sırasıyla indirgenemez, kuvvetli indirgenemez, çok kuvvetli indirgenemez, m -indirgenemez veya asal elemanların sonlu çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa R ye yine sırasıyla *atomik*, *kuvvetli atomik*, *çok kuvvetli atomik*, *m -atomik* veya *p -atomik* denir.

Not : Bu atomiklik tanımlarında sadece sıfırdan ve birimselden farklı elemanların , uygun tipteki indirgenemezlerin sonlu çarpımı şeklinde yazılabildiğini ifade ettik. Sıfır için ise durum biraz özeldir: Eğer R tamlik bölgesi değil ise, a ve b birimselden farklı olmak üzere $0 = ab$ yazılabilir. a ve b yi uygun tipteki indirgenemez elemanların sonlu çarpımı şeklinde yazarak, sıfır için de uygun tipteki bir indirgenemez ayrışım elde edilir. Bu kez R nin tamlik bölgesi olduğunu varsayalım. 0 çok kuvvetli indirgenemez ve asal olduğu için atomik , kuvvetli atomik, çok kuvvetli atomik ve p -atomik tanımlarında sadece birimselden farklı her elemanın uygun tipteki indirgenemezlerin çarpımı olarak yazılabildiğini ifade etmek yeterlidir. Fakat m -atomik için durum biraz farklıdır. Çünkü Teorem 2.2.21 de gösterildiği gibi 0 m -indirgenemez $\Leftrightarrow 0$ R nin maksimal ideali $\Leftrightarrow R$ cisim olur.

Ayrıca uygun tipteki indirgenemezlik tanımlarına paralel olarak atomiklik tanımları için de şunu ifade edebiliriz : R çok kuvvetli atomik $\Rightarrow R$ m -atomik $\Rightarrow R$ kuvvetli atomik $\Rightarrow R$ atomik ve R p -atomik $\Rightarrow R$ atomik .

Tanım 3.2.2 R değişmeli bir halka ve $I_1, I_2, \dots$ R nin idealleri olsun. Bu ideallerin $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ şeklindeki dizisi için eğer $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa R ye *Artan Zincir Şartını* sağlıyor denir. Tanımdaki şart eğer esas idealler için sağlanıyorsa R ye *Esas İdealler İçin Artan Zincir Şartını* (*Ascending Chain Condition on Principal Ideals ACCP*) sağlıyor denir.

Tamlık bölgelerinde olduğu gibi eğer R esas idealler için artan zincir şartını sağlıyorsa atomiktir. Şimdi bunu aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.2.3 R değişmeli bir halka olsun. Eğer R esas idealler için artan zincir şartını sağlıyorsa, R atomiktir.

İspat R nin sıfırdan ve birimselden farklı bazı elemanlarının indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılamadığını varsayalım, ve bu elemanlarla üretilen esas ideallerin kümesini de S ile gösterelim :

$S = \{ (a) \mid 0 \neq a, R \text{ nin birimselden farklı ve indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılamayan bir elemanı} \}$

R esas idealler için artan zincirini sağladığından S nin bir maksimal elemanı vardır ve $(a) \in S$ bu maksimal eleman olsun. a indirgenemez olmadığından, $(a) \neq (b)$ ve $(a) \neq (c)$ olacak şekilde iki b, c elemanı için $a = bc$ dir. Buradan $(a) \subset (b)$ ve $(a) \subset (c)$ dir. (a) nın maksimal olmasından dolayı b ve c indirgenemezlerin çarpımı şeklindedir. Dolayısıyla a da indirgenemezlerin çarpımı şeklindedir. Bu çelişki R nin sıfırdan ve birimselden farklı her elemanının indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılabildiğini gösterir. Dolayısıyla R atomiktir.

Teorem 3.2.4 R değişmeli bir halka olsun. Eğer 0 indirgenemez elemanların sonlu çarpımı şeklinde ise R ayrıştırılmaz halkaların sonlu direkt çarpımı olarak yazılabilir.

İspat Her a_i indirgenemez olmak üzere $0 = a_1 \dots a_n$ olsun. Eğer $n = 1$ ise 0 indirgenemez olduğundan R tamlık bölgesi olur. Dolayısıyla R ayrıştırılmazdır. $n > 1$ kabul edelim. R_i ler ayrıştırılmaz olması gerekmeyen değişmeli halkalar olmak üzere $R = R_1 \times \dots \times R_m$ olsun. Teorem 2.2.26 ya göre $R = R_1 \times \dots \times R_m$ direk çarpımının her indirgenemez elemanı biri hariç tüm koordinatları birimsel olan elemanlardır. Dolayısıyla

$0 = (0, \dots, 0)$ bu direk çarpımda indirgenemez elemanların çarpımı olarak m den az elemanla ifade edilemez. Öte yandan hipotez gereği 0 n tane indirgenemez elemanın çarpımı şeklinde olduğundan $m \leq n$ olmalıdır. Şu halde R en fazla n tane ayrıştırılmaz halkanın direkt çarpımıdır.

3.3 Direkt Çarpım

Bu kısımda değişik türdeki atomikliğin direkt çarpımlarla korunup korunmadığı araştırılmaktadır.

Teorem 3.3.1 $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ değişmeli halkaların bir ailesi ve $R = \prod R_\alpha$ olsun. Eğer R esas idealler için artan zincir şartını sağlıyorsa veya herhangi bir atomiklik formunda ise Λ sonludur.

$R_1, R_2, \dots, R_n$ değişmeli halkalar ve $R = R_1 \times \dots \times R_n$ olsun.

- (1) R nin esas idealler için artan zincir şartını sağlaması ve sırasıyla atomik, kuvvetli atomik ve p -atomik olması için gerek ve yeter şart tüm R_i lerin de esas idealler için artan zincir şartını sağlaması ve yine sırasıyla atomik, kuvvetli atomik ve p -atomik olmasıdır.
- (2) R nin m -atomik olması için gerek ve yeter şart i) Tüm R_i lerin de m -atomik olması ve ii) $n > 1$ ve bir R_i tamlik bölgesi ise R_i nin cisim olmasıdır.
- (3) R nin çok kuvvetli atomik olması için gerek ve yeter şart i) Tüm R_i lerin de çok kuvvetli atomik olması ve ii) çarpımdaki bir R_i tamlik bölgesi ise $n = 1$ olmasıdır.

İspat Eğer $R = \prod R_\alpha$ esas idealler için artan zincir şartını veya herhangi bir atomiklik şartını sağlıyorsa 0 da sonlu sayıda indirgenemez elemanın çarpımı şeklindedir. Eğer 0 n tane indirgenemez elemanın çarpımı şeklinde ise Teorem 3.2.4 den dolayı $|\Lambda| \leq n$ dir.

(1) I_i ler R_i nin esas idealleri olmak üzere $R_1 \times \dots \times R_n$ nin esas idealleri $I_1 \times \dots \times I_n$ şeklindedir. Dolayısıyla ancak ve ancak R esas idealler üzerinde artan zincir şartını sağlıyorsa R_i ler de sağlar. Teoremin diğer ifadesi Teorem 2.2.26 nın bir sonucudur.

(2) $n > 1$ ve R m -atomik olsun. R_i nin birimselden farklı bir a elemanını göz önüne alalım.

$(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1) \in \prod R_i = R$ elemanı R nin sıfırdan ve birimselden farklı bir elemanıdır. Hipotezden dolayı bu eleman R nin m -indirgenemez elemanlarının sonlu çarpımı şeklinde yazılabilir. Teorem 2.2.26 dan dolayı a_j ler R_i nin m -indirgenemez elemanları olmak üzere $a = a_1 \dots a_k$ şeklindedir. Dolayısıyla R_i nin her birimsel olmayan elemanı m -indirgenemezlerin çarpımı şeklindedir.

Bu kez tüm R_i lerin m -atomik olduğunu varsayalım. O zaman a , R_i nin birimselden farklı bir elemanı olmak üzere R nin $(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1)$ şeklindeki her elemanı da m -indirgenemezlerin çarpımı şeklindedir. R nin her elemanı da bu şekildeki elemanların çarpımı olduğundan R her elemanı da m -indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla R de m -atomik olur.

Eğer bir R_i tamlık bölgesi ise i . bileşen sıfır olmak üzere $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ şeklindeki eleman da R nin sıfırdan ve birimselden farklı bir elemanıdır. R m -atomik olduğundan 0 da R_i de m -indirgenemez olur. Dolayısıyla R_i cisimdir.

(3) R çok kuvvetli atomik olsun. Her bir R_i nin de çok kuvvetli atomik olduğunu gösterelim. R nin birimselden farklı bir a elemanını gözönüne alalım. $(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1)$ elemanı R nin sıfırdan ve birimselden farklı bir elemanı olduğundan çok kuvvetli indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılabilir :

$(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1) = (1, \dots, 1, a_1, 1, \dots, 1) \dots (1, \dots, 1, a_k, 1, \dots, 1)$ dir. Dolayısıyla, $a_1, \dots, a_k$ R nin çok kuvvetli indirgenemezleri olmak üzere, $a = a_1 \dots a_k$ şeklindedir. Böylece R nin birimsel olmayan her elemanının çok kuvvetli indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılabildiği görülür. Şimdi de bir R_i nin tamlık bölgesi olduğunu kabul edelim. Eğer $n > 1$ ise i . bileşen sıfır olmak üzere $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ elemanı indirgenemez olduğu halde, idempotent olduğu için, çok kuvvetli indirgenemez değildir. Bu ise R nin çok kuvvetli atomik olması ile çelişir. Dolayısıyla $n = 1$ olmalıdır.

Bu kez her bir R_i nin çok kuvvetli atomik olduğunu kabul edelim. Eğer bir R_i tamlık bölgesi ise $n = 1$ olduğundan R nin kendisi tamlık bölgesi, dolayısıyla da çok kuvvetli atomik olur. Hiç bir R_i nin tamlık bölgesi olmadığını varsayalım. $a \in R_i$ çok kuvvetli indirgenemez olsun. $a = 0$ ise 0 çok kuvvetli indirgenemez olduğundan R_i tamlık bölgesi olur. Bu yüzden $a \neq 0$

ve $(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1)$ elemanı da çok kuvvetli indirgenemezdir. R nin birimselden farklı her elemanı bu şekildeki elemanların çarpımı olarak yazılabildiğinden R de çok kuvvetli atomik olur.

Sonuç 3.3.2 R değişmeli bir halka olsun. Eğer R esas idealler için artan zincir şartını sağlıyorsa veya sırasıyla atomik, kuvvetli atomik, m -atomik, çok kuvvetli atomik veya p -atomik ise R yine esas idealler için artan zincir şartını sağlayan veya atomik, kuvvetli atomik, çok kuvvetli atomik veya p -atomik olan ayrıştırılamaz halkaların sonlu direk çarpımı şeklindedir.

İspat Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 ün ispatlarının birleştirilmesi yeterlidir.

Uyarı: Yukarıdaki teoremin (2) ve (3) şartlarındaki ayrıntıya dikkat edilmelidir: (2) şartından R_i ler m -atomik ise ΠR_i nin de m -atomik olması gerektiği çıkartılmamalıdır. Z m -atomik olduğu halde $Z \times Z$ m -atomik değildir (Çünkü, Teorem 2.2.26 dan da anlaşılacağı gibi, $(1,0)$ elemanı indirgenemez olduğu halde m -indirgenemez değildir.). Bunun sebebi Z nin tamlık bölgesi olmasına rağmen cisim olmamasıdır. (3) şartına örnek olarak da yine $Z \times Z$ kartezyen çarpımını alabiliriz. Z çok kuvvetli atomik olduğu halde $Z \times Z$ çok kuvvetli atomik değildir. Dolayısıyla kartezyen çarpımında bir tamlık bölgesi varsa $n \neq 1$ için bu çok kuvvetli atomik olması gerekmemektedir.

Tanım 3.3.3 R bir esas ideal halkası olsun. Eğer R nin bir tek $P(\neq R)$ asal ideali varsa ve bir $n > 1$ tamsayısı için $P^n = 0$ ise R ye *Special Esas İdeal Halkası* (*Special Principal Ideal Ring* SPIR) denir.

Not : Yukarıdaki tanımda P tek asal ideal olduğundan, P her zaman için tek maksimal idealdir. Eğer $n = 1$ ise 0 maksimal ideal olacağından R cisimdir. $n > 1$ ise R sıfır bölenli halka olacağından tamlık bölgesi dahi olmamaktadır.

SPIR ler çarpanlarına ayırma konusunda önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle SPIR lerin, sonraki teoremlerde kullanacağımız özelliklerini aşağıdaki teorem ile veriyoruz.

Teorem 3.3.4. R bir SPIR ve P tek asal ideali olsun. Eğer $P^m = 0$ olacak şekildeki en küçük tamsayı m ise R nin sıfırdan farklı her elemanı, u birimsel olmak üzere, up^k ($0 \leq k \leq m-1$) şeklinde tek türlü yazılabilir.

İspat a R nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Eğer a birimsel ise $k=0$ alınır. Eğer a birimsel değilse (p) tek maksimal ideal olduğundan, $a \in (p)$ ve bir a_1 elemanı için $a = p a_1$ yazılabilir. Bu eşitlikte eğer a_1 elemanı birimsel değilse yine $a_1 \in (p)$ olacağından bir $a_2 \in R$ için $a_1 = p a_2$ şeklinde yazılabilir ve $a = p^2 a_2$ elde edilir. Bu işlemlerin aynı şekilde devam ettirilmesiyle, $p^k | a$ şeklindeki en büyük k tamsayısı için, up^k şeklinde yazılabilir. Bu yazılışın tek türlü olduğunu göstermek için $a = up^k = vp^t$ ve $0 \leq t < k < m$ olduğunu kabul edelim. $up^k = vp^t$ eşitliğinden $p^{m-k+t} = 0$ elde edilir. Bu ise $P^m = 0$ şeklindeki en küçük tamsayının m olması ile çelişir. Şu halde bu yazılış, ilgililik farkıyla, iki türlü olamaz.

Tanım 3.3.5 R değişmeli bir halka olsun. R nin her öz esas ideali asal ideallerin çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa π -halkası denir. Eğer R tamlik bölgesi ise R ye π -domain denir.

Anderson D.D. ve Valdes-Leon S. (1996), değişmeli bir R halkasının π -halkası olması için gerek ve yeter şartın R nin SPIR ve π -domainlerin sonlu direk çarpımı şeklinde olması gerektiğini belirtmişlerdir.

Teorem 3.3.6 R değişmeli bir halka olmak üzere aşağıdakiler denktir:

- 1) R p -atomiktir.
- 2) R SPIR ve TÇB lerin sonlu direkt çarpımıdır.
- 3) Her öz esas ideal (Sıfırdan farklı olmak üzere), öz asal ideallerin çarpımı şeklindedir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (3) (a) bir öz esas ideal olsun. a sıfırdan ve birimselden farklı olduğundan $a = p_1 \dots p_n$ ise $(a) = (p_1 \dots p_n) = (p_1) \dots (p_n)$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) R , $R = R_1 \times \dots \times R_n$ şeklinde SPIR ve TÇB lerin sonlu direkt çarpımı şeklinde olsun. Eğer bir R_i TÇB ise her indirgenemez eleman asal olduğundan R_i nin p -atomik olduğu açıktır. Eğer R_i SPIR ise ilgili olmayan tek asal ideal vardır. Teorem 3.3.4 den dolayı R_i nin her elemanı u birimsel olmak üzere up^k şeklinde yazılabileceğinden R_i p -atomik olur. Teorem 3.3.1 gereğince p -atomik halkaların direkt çarpımı da p -atomik olduğundan R de p -atomik olur.

(3) $\Rightarrow$ (2) İstenen π -halkalarının yukarıda belirtilen özelliğinden çıkar.

3.4 Sınırlı Çarpanlarına Ayrılabilen Halkalar

Tanım 3.4.1 R tamlık bölgesi ve R nin sıfırdan ve birimselden farklı her a elemanı için , a_i ler birimselden farklı ve $a = a_1 \dots a_n$ olacak şekilde bir $n \leq N(a)$ doğal sayısı varsa R ye *Sınırlı Çarpanlara Ayrılabilen Bölge* (SÇB) denir.

Sınırlı Çarpanlarına Ayrılabilen Halka (SÇH) da R yi değişmeli ve birimli alarak aynı şekilde tanımlanır. Tamlık bölgelerinde olduğu gibi eğer R SÇH ise R esas idealler için artan zincir şartını sağlar.

Teorem 3.4.2 R SÇH ise esas idealler için artan zincir şartını sağlar.

İspat R nin esas idealler için artan zincir şartını sağlamadığını varsayalım. $(a_1) \subset (a_2) \subset \dots \subset (a_n) \subset \dots$ esas ideallerin bir artan zinciri olsun. $a_{i-1} \in (a_i)$ ve $a_{i-1} = a_i r_i$ $\exists r_i \in R$ yazılabilir. Ayrıca r_i lerin birimsel olmayacağı açıktır. Çünkü aksi halde $(a_i) = (a_{i+1})$, $a_1 \in (a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 r_2$ olacak şekilde birimselden farklı bir $r \in R$ vardır. Buradan a_1 için $a_1 = r_2 r_3 \dots r_n a_n$ şeklinde birimsel olmayan elemanların, n e bağlı uzunlukta, bir çarpımı elde edilir. Dolayısıyla R esas idealler için artan zincir şartını sağlamıyorsa SÇH olması ile çelişki elde edilir.

Teorem 3.4.3 R SÇH ise presimplifiable dır.

İspat R nin presimplifiable olmadığını varsayalım. $x, y \in R$ için $0 \neq x = xy \Rightarrow y \notin U(R)$ dir. $x = xy$ eşitliğinin her iki tarafını y ile çarparak $xy = xy^2$ elde edilir. Aynı şekilde devam edilirse $x = xy = xy^2 = \dots$ şeklinde sonsuza kadar devam eden bir eşitlik elde edilir. Böylece x in istenildiği uzunlukta birimsel olmayan elemanlara çarpanlara ayrılışı elde edilir. Bu ise R nin SÇH olması ile çelişir. Dolayısıyla R presimplifiable dır.

Daha önce belirtildiği gibi R presimplifiable ise $\sim, \approx, \cong$ ilgililikleri çakıştığından indirgenemez, kuvvetli indirgenemez ve çok kuvvetli indirgenemez kavramları da çakışır.

Bu nedenle bir R halkası SÇH ise presimplifiable olduğundan, her indirgenemez eleman çok kuvvetli indirgenemezdir. Buradan her SÇH ın çok kuvvetli atomik olduğu anlaşılır.

Tanım 3.4.4 R bir halka, M R -modülü olsun. $\exists 0 \neq x \in M$ için $rx = 0$ şeklindeki $r \in R$ ye M için sıfır bölen denir ve tüm M için sıfır bölenlerin kümesi $Z(M)$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.5 R Noetherian bir halka ve I R nin bir öz ideali olsun.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0_{1-I} = \{x \in R \mid xi = x, \exists i \in I\} \text{ dir (Burton, 1970).}$$

Not: $x \in R$ olmak üzere $R/(x)$ bir R -modülüdür ve sıfır bölenlerinin kümesi de

$$Z(R/(x)) = \{r \in R \mid r(a+(x)) = (x), \exists (a+(x)) \in R/(x) \text{ ve } a \notin (x)\}$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla $ra \in (x)$ ve $a \notin (x)$ şeklindeki elemanlar $Z(R/(x))$ yi oluşturur.

Teorem 3.4.6 Noetherian bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir :

- 1) R SÇH dir.
- 2) R presimplifiable dir.
- 3) Her birimselden farklı $y \in R$ için $\bigcap_{n=1}^{\infty} (y^n) = 0$
- 4) R nin her öz I ideali için $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2) Teorem 3.4.3 de belirtilmişti.

(4) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (2) $x, y \in R$ in $x=xy$ ve $y \notin U(R)$ olsun.

$$x=xy=xy^2=\dots \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (y^n) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ve } R \text{ presimplifiable dir.}$$

(2) $\Rightarrow$ (4) Krull kesişim teoreminden $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0_{1-I} = \{x \in R \mid xi = x, \exists i \in I\}$

yazılabilir. R presimplifiable olduğundan $x=xi \Rightarrow x=0$ veya $i \in U(R)$ dir. I öz ideal olduğundan $\forall i \in I$ için $i \notin U(R)$ dir. Dolayısıyla $x=0$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$ dır.

(4) $\Rightarrow$ (1) R nin birimsel olmayan bir $0 \neq x$ elemanını gözönüne alalım. $R/(x)$ bir R -modülüdür ve R Noetherian olduğundan, P_i ler asal olmak üzere, $Z(R/(x)) = P_1 \cup \dots \cup P_n$ dir. Burada $x \in Z(R/(x))$ dir. a birimselden farklı olmak üzere $x=ab$ olsun. $b \in (x)$ olsa $x=a(xk)$ olacak şekilde bir k elemanı vardır. Buradan $x \in a(x)$ ve

$$x \in (a)(x) \subseteq (x) \Rightarrow (x) = (a)(x) \Rightarrow (x) = (a)(x) = (a^2)(x) = \dots \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n) = 0$$

ve $x=0$ bulunur ki bu çelişkidir. Dolayısıyla $b \notin (x)$ olduğu görülür. Böylece $x=ab \in Z(R/(x))$ için, $a \notin U(R)$ olmak üzere, $b \notin (x)$ ve $ab \in (x)$ olduğundan $a \in Z(R/(x)) = P_1 \cup \dots \cup P_n$, yani bir i birimseli için $a \in P_i$ olur.

Şimdi x in istenildiği uzunlukta birimsel olmayan elemanların çarpımı olarak yazılabildiğini varsayalım.

$x = a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n} \dots a_{kn} \dots a_m$, $m \geq kn$ olacak şekilde birimsel olmayan a_i lerin çarpımı şeklinde olsun. Her a_i birimselden farklı olduğunda, her $a_i \in P_1 \cup \dots \cup P_n$ birleşimdeki asal ideallerden birindedir. Dolayısıyla bir $1 \leq i \leq n$ aralığındaki bir i için $x \in P_i^k$ dır. Böylece her k için, $x \in P_{i(k)}^k$ olacak şekilde bir $1 \leq i(k) \leq n$ vardır. Şu halde bir $1 \leq l \leq n$ için, $i(k) = l$ olacak şekilde sonsuz çoklukta k vardır. Buradan $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} P_l^m = 0$ bulunur. Bu çelişki $0 \neq x$ in birimsel olmayan elemanların çarpımı olarak istenildiği uzunlukta yazılamayacağını gösterir. Dolayısıyla R SÇH olmalıdır.

Tanım 3.4.7 R değişmeli bir halka olsun. R nin tüm maksimal ideallerinin kesişimine R nin *Jacobson Radikali* denir ve $\text{rad } R$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.8 R değişmeli bir halka olsun. $a \in \text{rad } R$ olması için gerek ve yeter şart $\forall r \in R$ için $1 - ra$ nın birimsel olmasıdır.

İspat $a \in \text{rad } R$ olsun. $1 - ra$ birimsel değilse bir M maksimal idealinin elemanıdır. $a \in M$ ve $1 - ra \in M$ olduğundan $1 \in M$ olur. Bu ise $M = R$ olmasını gerektirdiğinden, M nin maksimal ideal olması ile çelişir.

Bu kez $\forall r \in R$ için $1 - ra$ nin birimsel olduğunu kabul edelim. Eğer $a \notin \text{rad } R$ ise $a \notin M$ olacak şekilde bir M maksimal ideali vardır. $M \subset (M, a)$ olduğundan, M nin maksimalliğinden dolayı $(M, a) = R$ olmalıdır. Buradan bir $r \in R$ ve $m \in M$ için $1 = m + ra$ yazılabilir. O halde $m = 1 - ra \in M$ olmalıdır. Bu ise yine M nin maksimalliği ile çelişir. Şu halde $\forall r \in R$ için $1 - ra$ birimsel ise $a \in \text{rad } R$ olmalıdır.

Teorem 3.4.9 R değişmeli bir halka ve R nin her I ideali için $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{x \in R \mid x = xi \quad \exists i \in I\}$ olsun. Aşağıdaki koşullar denktir :

- (1) R nin her öz I ideali için $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$ dır.
- (2) R nin birimselden farklı her y elemanı için $\bigcap_{n=1}^{\infty} (y^n) = 0$ dır.
- (3) $Z(R) \subseteq \text{rad } R$ dir.
- (4) R presimplifiable dır.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2) aşıkardır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ olsun. Teoremin ifadesinden bir $i \in I$ için $z = zi$ dir. $z = zi = zi^2 = \dots \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (i^n) = 0 \Rightarrow z = 0$ dır.

(2) $\Rightarrow$ (4) $x = xy$ ve $y \notin U(R)$ olsun. R nin presimplifiable olduğunu göstermek için $x = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x = xy = xy^2 = \dots \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (y^n) = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (2) $y \notin U(R)$ ve $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (y^n)$ olsun. Teoremin hipotezinden $x = x(r y^n)$ $\exists r \in R$ ve $n \geq 1$ olur. $y \notin U(R)$ olduğundan $ry^n \notin U(R)$ dir. R presimplifiable olduğundan $x = 0$ dolayısıyla da $\bigcap_{n=1}^{\infty} (y^n) = 0$ dır.

(4) $\Rightarrow$ (3) $x \in Z(R)$ olsun. $x = 0$ ise $0 \in \text{rad } R$. $x \neq 0$ olsun. x sıfır bölen olduğundan bir $0 \neq y$ elemanı için $xy = 0$ dir. $x \notin \text{rad } R$ olduğunu varsayalım. $x \notin M_i$ olacak şekilde bir M_i maksimal ideal vardır. Dolayısıyla $M_i + (x) = R$ ve $\exists m \in M_i$ için $m + xr = 1$ yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanını y ile çarparak $my = y \neq 0$ bulunur. R presimplifiable olduğundan m birimsel olmalıdır. Buradan $M_i = R$ çelişkisi elde edilir. Şu halde R presimplifiable ise $Z(R) \subseteq \text{rad } R$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (4) : $x, y \in R$ için $x = xy$ olsun. $x(1-y) = 0$ dir. $x \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $1-y \in Z(R) \subseteq \text{rad } R$ dir. $1-y \in \text{rad } R$ olduğundan, bir önceki teoremden dolayı, $\forall r \in R$ için $1-r(1-y)$ birimseldir. $r=1$ alınırsa $(1-(1-y))u = yu = 1 \quad \exists u \in R$. Dolayısıyla y birimsel olduğundan R presimplifiable dir.



4. ÇARPANLARA AYIRMA

4.1 Giriş

Bu bölümde daha önce tanımladığımız indirgenemezlik ve ilgililik tanımlarından yararlanarak, değişmeli ve birimli halkalar için Tek Türlü Çarpanlara Ayrılabilen Halka tanımını ve bu tanıma eşdeğer olan koşulları vereceğiz.

4.2 Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halkalar

Tanım 4.2.1 R değişmeli bir halka ve a birimsel olmayan bir eleman olsun. a nın birimsel olmayan elemanlara iki çarpanlara ayrılışı $a = a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_m$ olsun. Eğer $n = m$ ve sırasıyla $a_i \sim b_{\sigma(i)}$, $a_i \approx b_{\sigma(i)}$, $a_i \cong b_{\sigma(i)}$ olacak şekilde bir $\sigma \in S_n$ permütasyonu varsa, yukarıdaki iki çarpanlara ayrılışa yine sırasıyla *izomorfik*, *kuvvetli izomorfik* ve *çok kuvvetli izomorfik* denir.

Tanım 4.2.2 R değişmeli bir halka ve a birimsel olmayan bir eleman olsun. a nın birimsel olmayan elemanlara iki çarpanlara ayrılışı $a = a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_m$ olsun. Eğer her $i \in \{1, \dots, n\}$ için sırasıyla $a_i \sim b_j$, $a_i \approx b_j$, $a_i \cong b_j$ olacak şekilde bir $j \in \{1, \dots, m\}$ ve her $i \in \{1, \dots, m\}$ sırasıyla $b_i \sim a_j$, $b_i \approx a_j$, $b_i \cong a_j$ olacak şekilde bir $j \in \{1, \dots, n\}$ varsa yukarıdaki iki çarpanlara ayrılışa sırasıyla *homomorfik*, *kuvvetli homomorfik* ve *çok kuvvetli homomorfik* denir.

Atomiklik ve izomorfikliğin her farklı kombinasyonu bizi, aşağıdaki şekilde tanımlanan biçimde farklı tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka tanımlarına götürür.

Tanım 4.2.3 R değişmeli halka ve $\alpha \in \{\text{atomik, kuvvetli atomik, çok kuvvetli atomik, } m\text{-atomik, } p\text{-atomik}\}$ ve $\beta \in \{\text{izomorfik, kuvvetli izomorfik, çok kuvvetli izomorfik}\}$ olsun. Eğer (1) R , α özelliğine sahip ve (2) R nin sıfırdan ve birimselden farklı her elemanının α yı tanımlamak için kullanılan tipteki iki indirgenemez ayrışımı β özelliğine sahip ise R ye (α, β) -Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halka (TÇH) denir.

Teorem 4.2.4 α ve β nın herhangi seçimi için (α, β) -TÇH presimplifiable dir.

İspat Bunun için R presimplifiable değil ise R nin herhangi bir (α, β) -TÇH olamayacağını gösterelim:

$x \neq 0$ ve y birimselden farklı olmak üzere $xy = x$ olsun. y birimsel olmadığından x de birimsel olamaz. Şu halde x ve y yi uygun bir tipteki indirgenemezlere ayrıştırabiliriz: $x = a_1 \dots a_n$, $y = c_1 \dots c_m$. Böylece x in uygun tipteki iki indirgenemez ayrışımı olarak $a_1 \dots a_n = x = xy = a_1 \dots a_n c_1 \dots c_m$ elde edilir. Fakat bu iki çarpanlarına ayrılış, uzunlukları farklı olduğu için, hiçbir β özelliğini sağlamaz. Bu ise R nin (α, β) -TÇH olması ile çelişir. Dolayısıyla R presimplifiable dır.

R presimplifiable iken ilgili, kuvvetli ilgili, çok kuvvetli ilgili kavramları çakıştığından herhangi bir (α, β) -TÇH için de bu kavramlar çakışır. Dolayısıyla buna bağlı olarak herhangi bir (α, β) -TÇH için izomorfik, kuvvetli izomorfik ve çok kuvvetli izomorfik kavramları ile indirgenemez, kuvvetli indirgenemez, m -indirgenemez ve çok kuvvetli indirgenemez kavramları da çakışır. Böylece $\alpha = p$ -atomik olması hariç, α ve β nin herhangi bir seçimi için (α, β) -TÇH ifadesi çakışıktır. Bundan sonra Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halka ifadesi bunlardan herhangi biri için kullanılacaktır.

Tanım 4.2.5 R değişmeli bir halka olsun. Eğer R bir (α, β) için (dolayısıyla α nın p -atomik olması hariç diğer hepsi için) bir (α, β) -TÇH ise R ye Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halka (TÇH) denir.

Teorem 4.2.6 R sıfır bölünli atomik bir halka olsun. Eğer R nin sıfırdan ve birimselden farklı herhangi bir elemanının iki indirgenemez ayrışımı homomorfik ise R nin her indirgenemez elemanı sıfır bölendir.

İspat R sıfır bölünli olduğundan $0 = ab$ olacak şekilde sıfırdan ve birimselden farklı a, b elemanları vardır. R atomik olduğundan a ve b yi indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazabiliriz. Şu halde R nin sıfır bölünli olan indirgenemez elemanı vardır. $r \in R$ bu şekildeki indirgenemez elemanlardan biri olsun. $rt = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq t$ elemanı vardır. t_i ler sıfır bölünli ve indirgenemez olmak üzere $t = t_1 \dots t_n$ şeklinde yazılabilir. s nin sıfır bölünli olmayan bir indirgenemez eleman olduğunu kabul edelim. $0 \neq sr = (s+t)r$ dir ve c_i ler

indirgenemez olmak üzere $s+t=c_1...c_m$ şeklinde yazılabilir. $s r = c_1...c_m r$ ayrışımı homomorfik olduğundan $s \sim r$ veya $s \sim c_i$ dir. Eğer $s \sim r$ ise s sıfır bölendir. Eğer $s \sim c_i$ d ise $c_i \in (s) \Rightarrow s+t=c_1...c_m \in (s) \Rightarrow t \in (s)$ bulunur. Buradan bir $d \in R$ için $t = sd$ dir. d yi $d=d_1...d_k$ şeklinde indirgenemezlere ayırarak, $t_1...t_n = s d_1...d_k$ homomorfik ayrışımından dolayı, bir t_i için $s \sim t_i$ elde edilir. Bu ise t nin sıfır bölen olması ile çelişir. Şu halde R nin her indirgenemez elemanı , dolayısıyla da birimsel olmayan her elemanı, sıfır bölendir.

Sonuç 4.2.7 R sıfır bölümlü TÇH ise R nin her indirgenemez elemanı sıfır bölendir.

İspat R nin iki indirgenemez ayrışımı izomorfik ise aynı zamanda homomorfik olacağından yukarıdaki teoremin ispatı R nin sıfır bölümlü TÇH olduğu durum için de geçerli olur.

Teorem 4.2.8 R sıfır bölümlü ayrıştırılmaz atomik bir halka olsun. Eğer R nin sıfırdan ve birimselden farklı herhangi bir elemanının iki indirgenemez ayrışımı homomorfik ise R nin her indirgenemez elemanı nilpotenttir.

İspat Bir önceki teoremden R nin her indirgenemez elemanının sıfır bölen olduğunu biliyoruz. r herhangi bir indirgenemez olsun. $rx = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq x$ elemanı vardır. R TÇH olduğundan r ve x elemanları $r = r_1$ ve $x = r_2 ... r_n$ şeklinde indirgenemez elemanların çarpımı olarak yazılabilir. Buradan $r_1 r_2 ... r_n = 0$ eşitliğini, $r = r_1$ ve $i \neq j$ için $r_i \sim r_j$ olmayacak şekilde, ilgilileri biraraya toplayarak $r_1^{a_1} ... r_m^{a_m} = 0$ şeklinde yazabiliriz. Eğer $m = 1$ ise $r = r_1$ nilpotenttir. $m > 1$ olduğunu kabul edelim. $z = r_1^{a_1} + (r_2^{a_2} ... r_m^{a_m})$ olsun. $x \neq 0$ olduğundan $r_2^{a_2} ... r_m^{a_m} \neq 0$ dır. Eğer $r_1 \mid z \Rightarrow r_1 \mid r_2^{a_2} ... r_m^{a_m}$ $r_2^{a_2} ... r_m^{a_m} = r_1 t$ olacak şekilde bir t elemanı vardır. Bu eşitlikte t de indirgenemez elemanların çarpımı şeklinde yazılırsa, bu ayrışım homomorfik olacağından bir j için $r_1 \sim r_j$ bulunur. Bu çelişkidenden dolayı r_1, z yi tam bölmez. Şimdi

$$r_1^{a_1} z = r_1^{2a_1} + r_1^{a_1} r_2^{a_2} ... r_m^{a_m} = r_1^{2a_1}$$

eşitliğini gözönüne alalım. Eğer $r_1^{a_1} z = r_1^{2a_1}$ eşitliğinde z sıfırdan ve birimselden farklı ise indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılabilir. O zaman bu iki ayrışımın homomorfik

olmasından dolayı $r_1 \sim z$ çelişkisine ulaşılır. Şu halde z ya sıfır yada birimsel olmalıdır. Eğer z birimsel ise $e = r_1^{a_1} z^{-1}$ idempotent olur. R ayrıştırılmaz olduğundan $e = 0$ olmalıdır. Çünkü aksi halde $R = eR \times (1 - e)R$ şeklinde ayrıştırılabilir. Dolayısıyla da $r_1^{a_1} = 0$ dır. Eğer z birimsel değilse $r_1^{2a_1} = 0$ dır. Şu halde R nin indirgenemez elemanı nilpotenttir.

Sonuç 4.2.9 R deki birimsel olmayan her eleman nilpotenttir.

Sonuç 4.2.10 Eğer R sıfır bölünli TÇH ise R nin birimsel olmayan her elemanı nilpotenttir.

İspat Yukarıdaki teoremden R nin ayrıştırılmaz olması yerine izomorfikliğin kullanılmasının yeterli olacağını gösterelim. Teoremin ispatıyla aynı şekilde $r_1^{a_1} z = r_1^{2a_1}$ eşitliğinde z nin sıfır veya birimsel olmalıdır. z birimsel ise bu $r_1^{a_1} z = r_1^{2a_1}$ eşitliğinde ayrışımaların izomorfik olması ile çelişeceğinden (ayrışımaların uzunlukları farklı olduğundan) $z = 0 = r_1^{2a_1}$ olmalıdır. Şu halde R nin indirgenemez her elemanı, dolayısıyla da birimsel olmayan her elemanı nilpotent olmalıdır.

4.3 Denk Koşullar

Teorem 4.3.1 Değişmeli bir R halkası için aşağıdaki iki koşul denktir :

- (1) R TÇH dır.
- (2) R şu üç halka yapısından birine sahiptir :
 - i) R TÇB dir.
 - ii) R SPIR dir.
 - iii) R $M^2 = 0$ olan (R, M) quasi-lokal halkadır.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2) Eğer R sıfır bölensiz ise R tamlık bölgesidir. R nin sıfır bölünli olduğunu kabul edelim. Sonuç 4.2.7 den dolayı R nin her indirgenemez elemanı ve dolayısıyla da birimsel olmayan her elemanı nilpotenttir. M R nin tüm birimsel olmayan elemanlarının kümesi olsun. M R nin tek maksimal idealidir. Şu halde R quasi-lokal halka dır. Şimdi $M^2 = 0$ olduğunu veya R nin SPIR olduğunu gösterelim :

Eğer R nin ilgilileri hariç tek indirgenemez elemanı varsa R SPIR dır.

r ve s R nin ilgili olmayan iki indirgenemez elemanı ve $r^m = 0 = s^n$ şeklindeki en küçük tamsayılar m ve n olsun. $rs \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $0 \neq rs = r(r^{m-1} + s)$ ve $r^{m-1} + s$ yi indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazarak, R TÇH olduğundan dolayı, $s \mid r^{m-1} + s$ bulunur. Buradan $s \mid r^{m-1}$ ve $r^{m-1} \neq 0$ olduğundan $s \mid r$ elde edilir. Böylece bir x elemanı için $r = sx$ yazılabilir. x birirmsel değil ise izomorfik olmayan iki ayrışım elde edileceğinden x birimseldir ve $r \sim s$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $rs = 0$ olmalıdır. Şimdi de $m=n=2$ olduğunu gösterelim:

$m \neq n$ olduğunu kabul edelim. $m < n$ olsun $rs = 0$ olduğundan $(r+s)^m = r^m + s^m = s^m \neq 0$ dır. $r+s$ indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılırsa, s bu indirgenemezlerden biri ile de ilgili olacağından, $s \mid r+s$ ve $s \mid r$ bulunur. $n < m$ için de benzer işlem yapılarak aynı çelişki elde edileceğinden $m = n$ dir. Eğer $m = n > 2$ ise $r(r+s) = r^2 = r.r \neq 0$ olduğundan yine $r \sim s$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla r, s R nin ilgili olmayan iki indirgenemezi ise $r^2 = s^2 = rs = 0$, yani $M^2 = 0$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1)

i) R TÇB ise aynı zamanda TÇH olduğu açıktır.

ii) R $M^2=0$ olan (R, M) quasi-lokal halka olsun. x, y birirmsel olmayan iki eleman ise $xy \in M^2$ olacağından $xy = 0$ dır. Dolayısıyla birirmsel olmayan her eleman indirgenemezdır. Ayrıca indirgenemez ayrışımaların uzunlukları da 1 olduğundan izomorfiklik şartının sağlandığı açıktır. Şu halde R TÇH dır.

iii) R nin SPIR olduğunu kabul edelim. $P=(p)$ R nin tek asal ideali olsun. Teorem 3.3.4 den p nin çok kuvvetli indirgenemez ve sıfırdan farklı her elemanın, u birirmsel olmak, üzere up^k şeklinde tek türlü yazılabildiği görülür. Dolayısıyla her SPIR TÇH koşullarını sağlar.

Teorem 4.3.2 Değişmeli bir R halkası için aşağıdakiler denktir :

(1) R aşağıdaki üç halka yapısından birine sahiptir :

i) R TÇB dır.

ii) R $M^2 = 0$ olan, (R, M) quasi-lokal halkadır.

iii) R SPIR ve cisimlerin sonlu direkt çarpımıdır.

(2) R atomiktir ve sıfırdan ve birimselden farklı her elemanın iki indirgenemez ayrışımı homomorfiktir.

(3) R m -atomik ve R nin sıfırdan ve birimselden farklı her elemanın m -indirgenemezlere iki ayrışımı kuvvetli homomorfiktir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (3) R TÇB ise R nin sıfırdan ve birimselden farklı her elemanı indirgenemezlerin çarpımı şeklinde tek türlü yazılabileceğinden ve R sıfır bölensiz olduğundan tüm indirgenemezlik tanımları çakışacağından, R aynı zamanda m -atomik ve sıfırdan ve birimselden farklı her elemanın m -indirgenemezlere ayrışımı da homomorfiktir.

$R, M^2 = 0$ olan, (R, M) quasi-lokal halka olsun. Sıfırdan ve birimselden farklı bir $x \in R$ için $x = ab$ olsun. Eğer a ve b nin ikisi de birimselden farklı ise $a, b \in M$ olacağından $x = ab = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla a veya b den biri birimsel olacağından x çok kuvvetli indirgenemez, dolayısıyla da m -indirgenemez olur. Şu halde R m -atomiktir. Üstelik her $x \in M$ de m -indirgenemezdur. Sıfırdan ve birimselden farklı her elemanı iki m -indirgenemezlere ayrışımı da, aşıkarak sadece kendisi olacağından, homomorfiktir.

Bu kez R nin SPIR ve cisimlerin sonlu direkt çarpımı olduğunu kabul edelim: $R = R_1 \times \dots \times R_n$. R_i SPIR ve (p) tek asal ideal olsun. Bu durumda (p) aynı zamanda maksimal olacağından, p m -indirgenemezdur ve sıfırdan farklı her eleman, u birimsel olmak üzere up^k şeklinde, yani m -indirgenemezlerin çarpımı şeklinde tek türlü belirlidir. p den başka, ilgilileri hariç, m -indirgenemez yoktur. Çünkü $0 \neq a, p$ ile ilgili olmayan bir m -indirgenemez olsun. $a \in (p)$ olduğundan $(a) \subseteq (p)$ ve $(a) \neq (p)$ olduğundan $(a) \subset (p)$ bulunur. Bu da a nın m -indirgenemez olması ile çelişir. Dolayısıyla R_i m -atomik ve iki m -indirgenemez ayrışım da homomorfik olur. R_i cisim ise sıfırdan farklı ve birimsel olmayan hiçbir eleman bulunmadığından (3) şartlarının sağlandığı açıktır. Dolayısıyla bu şekildeki m -atomik halkaların direk çarpımları da Teorem 3.3.1 den dolayı m -atomiktir.

(3) $\Rightarrow$ (2) R nin her m -indirgenemez elemanı aynı zamanda indirgenemez olacağından (2) şartlarının sağlandığı açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) R_i ler ayrıştırılmaz olmak üzere $R = R_1 \times \dots \times R_n$ olsun. Tüm R_i lerin de (2) şartlarını sağladığı açıktır. Dolayısıyla R yi ayrıştırılmaz olarak kabul edip direkt

çarpımlarının (1) şartlarını sağladığını gösterebiliriz. R sıfır bölensiz ise TÇB dir. R yi sıfır bölünli kabul edelim. Sonuç 4.2.9 dan R nin birimsel olmayan her elemanı nilpotenttir. M R nin tüm nilpotent elemanlarının kümesi ise M R nin tek maksimal ideali olur. Teorem 4.3.1 in ispatında gösterildiği gibi R ya SPIR yada $M^2 = 0$ olan quasi-local halkadır. Dolayısıyla R_i ler ya TÇB, ya $M^2 = 0$ olan quasi-local halka yada SPIR olmak üzere $R = R_1 \times \dots \times R_n$ dir. $n > 1$ olsun. SPIR veya cisim olmayan bir R_i nin $M^2 = 0$ olan, (R, M) quasi-lokal halka olduğunu kabul edelim. $r, s \in R_i$ nin ilgili olmayan iki indirgenemez elemanı olsun: $r^2 = s^2 = 0$. $(1, \dots, 1, r, 1, \dots, 1)$ ve $(1, \dots, 1, s, 1, \dots, 1)$ elemanları da indirgenemezdir. Buradan $(0, \dots, 0) \neq (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) = (1, \dots, 1, r, 1, \dots, 1)(1, \dots, 1, r, 1, \dots, 1) \neq (1, \dots, 1, s, 1, \dots, 1)(1, \dots, 1, s, 1, \dots, 1)$ şeklinde homomorfik olmayan iki ayrışım elde edilir. Şu halde $n = 1$ ve R nin kendisi $M^2 = 0$ olan, (R, M) quasi-lokal halkadır. Bu kez R_i nin cisim olmayan bir tamlık bölgesi olduğunu kabul edelim. $0 \neq r \in R_i$ bir indirgenemez eleman olsun. Bu durumda da $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)(1, \dots, 1, r, 1, \dots, 1)$ şeklinde homomorfik olmayan iki indirgenemez ayrışım elde edilir. Dolayısıyla yine $n = 1$ olmalıdır. Böylece $n > 1$ ise R_i SPIR veya cisimdir.

Tanım 4.3.3 R değişmeli bir halka ve $a \in R$ birimsel olmayan bir eleman olsun. Eğer (a) idealinin $(a) = (a_1) \dots (a_n)$ şeklindeki yazılışı

(1) $\forall a_i$ indirgenemez

(2) Her i için $(a) \subset (a_1) \dots (\hat{a}_i) \dots (a_n)$

şartlarını sağlıyorsa (a) idealinin bu şekildeki yazılışına ' (a) nın *İndirgenmiş Çarpım Temsili*' denir.

Tanım 4.3.4 (a) nın $(a) = (a_1) \dots (a_n) = (b_1) \dots (b_m)$ şeklindeki iki indirgenmiş çarpım temsili için eğer $n = m$ ve gerekirse sıralamaların yeri değiştirilerek $(a_i) = (b_i)$ oluyorsa bu temsile *izomorfiktir*; Eğer $\{(a_1), \dots, (a_n)\} = \{(b_1), \dots, (b_m)\}$ oluyorsa bu temsile *homomorfiktir* denir.

Teorem 4.3.5 R atomik halka ve her öz esas idealin herhangi iki indirgenmiş çarpım temsili homomorfik olsun. R nin her indirgenemez elemanı asaldir.

İspat $r \in R$ indirgenemez olsun. $r=0$ ise R tamlık bölgesi ve $r=0$ asaldır. $r \neq 0$ olsun. İspatı r nin sıfır bölen olup olmamasına bağlı olarak iki durum için yapacağız :

1. Hal : r sıfır bölen ve $0 \neq a$ için $ra = 0$ olsun. $(a) = (a_1) \dots (a_n)$ (a) nin indirgenmiş çarpım temsili olsun. Bu durumda 0 ın indirgenmiş çarpım temsili de $0 = (a_1) \dots (a_n)(r)$ olur. Ayrıca bu temsilden (r) yi silemeyiz. Eğer (r) silinebilseydi $(a_1) \dots (a_n) = 0$ olacağından $a = 0$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla hipotez gereği indirgenmiş çarpım temsilleri homomorfik olduğundan, 0 ın her indirgenmiş çarpım temsiliinde (r) bulunmalıdır. Bu bilgiyi ispatın ileri kısmında kullanacağız.

$ef \in (r)$ olsun. $ef = cr$ olacak şekilde bir c elemanı vardır. c birimsel olsa r indirgenemez olduğundan, $r \sim e$ veya $r \sim f$ dir. Buradan $e \in (r)$ veya $f \in (r)$ olacağından r asaldır. c nin birimsel olmadığını kabul edelim. $(c) = (c_1) \dots (c_l)$ (c) nin indirgenmiş çarpım temsili olsun. Eğer $(r) = (cr)$ nin indirgenmiş çarpım temsiliinde bulunuyorsa, (e) ve (f) nin ayrı ayrı indirgenmiş çarpım temsillerini bulup çarptıktan sonra indirgeyebiliriz. Bu temsil (cr) nin temsili ile homomorfik olduğundan, (r) nin (e) veya (f) nin indirgenmiş çarpım temsillerinden birine ait olduğu görülür. Yani $(e) = (e_1) \dots (e_l)(r) \subseteq (r) \Rightarrow e \in (r)$ veya aynı şekilde $f \in (r)$ dir. Şu halde (r) nin (cr) nin indirgenmiş çarpım temsiliinde bulunmadığını varsayalım : $(cr) = (c)$ dir. Şimdi baştaki a yı da gözönüne alarak $(a_1) \dots (a_n)(c_1) \dots (c_l) = (a)(c) = (a)(cr) = 0$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $(a_1) \dots (a_n)(c_1) \dots (c_l)$ yi indirgeyerek 0 ın bir indirgenemez çarpım temsiliini elde ederiz. 0 ın herhangi indirgenemez çarpım temsiliinde (r) bulunmalı idi. Dolayısıyla $(a_1) \dots (a_n)(c_1) \dots (c_l)$ çarpımında bazı $(a_i) = (r)$ olacaktır. Bu şekildeki (a_i) leri $(a_1) \dots (a_n)(c_1) \dots (c_l)$ dan silebiliriz. Böylece 0 ın (r) yi içermeyen bir çarpım temsili elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

2. Hal: r sıfır bölen olmayan bir indirgenemez eleman ve $ab \in (r)$ olsun. R sıfır bölenli olduğu için, $a+sr, b+tr$ sıfır bölen olmayacak şekilde $s, t \in R$ vardır. $ab \in (r)$ olduğundan $(a+sr)(b+tr) \in (r)$ dir. Ayrıca $(a+sr) \in (r)$ veya $(b+tr) \in (r)$ dir. Şu halde $a \in (r)$ veya $b \in (r)$ dir. Dolayısıyla a ve b yi sıfır bölen olmayan elemanlar olarak alabiliriz. $ab \in (r) \Rightarrow$ bir $c \in R$ için $ab = cr$. c sıfır bölen olsa ab de sıfır bölen olacağından c sıfır bölen değildir. Dolayısıyla $(r), (cr)$ nin indirgenmiş çarpım temsiliinde

bulunur. (a) ve (b) nin indirgenemez çarpım temsillerini çarpıp indirgeyerek (ab) nin indirgenmiş çarpım temsili elde edilir. (cr) nin indirgenmiş çarpım temsili de (r) , (r) nin (a) veya (b) nin indirgenemez çarpım temsillerinden birinde bulunur. $a \in (r)$ veya $b \in (r)$ dir. Dolayısıyla da (r) asaldır.



KAYNAKLAR

Anderson, D.D. ve Valdes-Leon, S., (1996), 'Factorization in Commutative Rings with Zero Divisors ', Rocky Mountain Journal of Mathematics, 26(2): 439-480.

Burton, D.M., (1970), A First Course in Rings and Ideals, Addison-Wesley Publishing Company, London.

Cohn, P.M., (1958), Algebra, Volume II, London.

Fletcher, C.R., (1969), 'Unique Factorization Rings', Proc. Camb. Phil.Soc., 65:579-583.

Fletcher, C.R., (1970), ' The Sturcture of Unique Factorization Rings', Proc. Camb. Phil.Soc., 67:535-540.

Galovich, S., (1978), 'Unique Factorization Rings with Zero Divisors', Mathematics Magazine, 51:276-283.

Hungerford, T.W., (1974), Algebra, Springer-Verlag, New York.

Zariski, O ve Samuel, P., (1958), Commutative Algebra, Volume I, Princeton.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 22.09.1971

Doğum yeri İstanbul

Lise 1985-1988 Paşabahçe Ferit İnal Lisesi

Lisans 1989-1994 YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 1998-2000 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1998-Devam ediyor YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Araştırma Görevlisi

