

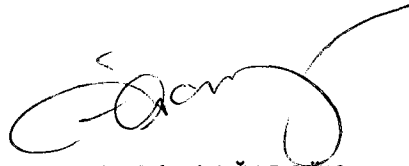
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKALARDA TEK  
TÜRLÜ ÇARPANLARA AYRILMA

Sezgin CIRIT

F.B.E Matematik Anabilim Dalında Matematik Programında  
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ



Tez Danışmanı : Doç. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

prof. Tezrin Şekline T. Çerç.  
Prof. Dr. Mehmet Ahlatcıoğlu AT

İSTANBUL, 2000

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                       | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ.....                                                                    | iii   |
| KISALTMA LİSTESİ.....                                                                 | iv    |
| ÖNSÖZ.....                                                                            | v     |
| ÖZET.....                                                                             | vi    |
| ABSTRACT.....                                                                         | vii   |
| 1 GİRİŞ.....                                                                          | 1     |
| 2 TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR.....                                                       | 4     |
| 2.1 Giriş.....                                                                        | 4     |
| 2.2 Halkalarda aritmetik.....                                                         | 4     |
| 2.3 Kuvvet Serileri ve Bölüm Halkaları.....                                           | 10    |
| 2.4 Kesir Halkası.....                                                                | 13    |
| 3 TEK TÜRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLEN BÖLGELER.....                                      | 20    |
| 3.1 Giriş.....                                                                        | 20    |
| 3.2 Tek Türli Çarpanlara Ayrılabilen Bölge Tanımı ve Denk Özellikler.....             | 20    |
| 3.3 R Halkası Kullanılarak Elde Edilen Halkaların İncelenmesi.....                    | 26    |
| 4 TEK TÜRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLEN HALKALAR.....                                      | 36    |
| 4.1 Giriş.....                                                                        | 36    |
| 4.2 Tek Türli Çarpanlara Ayrılabilen Birimli Halka Tanımı.....                        | 36    |
| 4.3 Temel İdeal Halkaları.....                                                        | 44    |
| 4.4 Pseudo Bölgeler.....                                                              | 49    |
| 5 SIFIR BÖLENLİ ve BİRİMLİ HALKALARDA İLGİLİLİK ve<br>İNDİRGENEMEZLİK KAVRAMLARI..... | 54    |
| 5.1 Giriş.....                                                                        | 54    |
| 5.2 İlgililik Tanımları.....                                                          | 54    |
| 5.3 İndirgenemez Elemanlar.....                                                       | 61    |
| KAYNAKLAR.....                                                                        | 76    |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                                         | 77    |

## SİMGE LİSTESİ

|                   |                                                           |
|-------------------|-----------------------------------------------------------|
| $a \mid b$        | $a$ böler $b$                                             |
| $a \nmid b$       | $a$ bölmez $b$                                            |
| $(a, b)$          | $a$ ve $b$ elemanlarının en büyük ortak böleni            |
| $[a, b]$          | $a$ ve $b$ elemanlarının en küçük ortak katı              |
| $\equiv$          | Çok kuvvetli ilgililik bağıntısı                          |
| $\prod R_i$       | $R$ Halkalarının direkt çarpımı                           |
| $\oplus$          | Direkt toplam                                             |
| $\in$             | Elemanıdır                                                |
| $\notin$          | Elemanı değildir                                          |
| $\exists$         | En az bir tane vardır                                     |
| $\Rightarrow$     | Gerek şart                                                |
| $\Leftrightarrow$ | Gerek ve yeter şart                                       |
| $\forall$         | Her                                                       |
| $\sim$            | İlgililik bağıntısı                                       |
| $\Delta$          | İndis kümesi                                              |
| $\times$          | Kartezyen çarpım                                          |
| $\approx$         | Kuvvetli ilgililik bağıntısı                              |
| $\sum$            | Toplam sembolü                                            |
| $U(R)$            | $R$ halkasının birimsel ( tersinir ) elemanlarının kümesi |
| $\Leftarrow$      | Yeter şart                                                |

## KISALTMA LİSTESİ

|      |                                               |
|------|-----------------------------------------------|
| EBOB | En büyük ortak bölen                          |
| EKOK | En küçük ortak kat                            |
| TB   | Tamlık bölgesi                                |
| TÇB  | Tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge        |
| TÇH  | Tek türlü çarpanlara ayrılabilen halka        |
| TÇPB | Tek türlü çarpanlara ayrılabilen Pseudo-Bölge |



## ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamamda bana yardımcı olan Öğretim Görevlisi Doç. Dr. A. Göksel Ağargün'e ve maddi desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.



## ÖZET

Bu çalışmanın amacı tamlık bölgelerinde ve değişmeli olan birimli halkalarda tek türlü çarpanlara ayrılma kavramını incelemektir.

Temel tanım ve kavramlar olarak indirgenemez eleman, asal eleman araştırılmıştır. Kuvvet serileri halkası, bölüm halkaları ve kesir halkaları hakkında kısa bilgi verilmiştir.

Tamlık bölgeleri için TÇB tanımı verilmiş ve bu tanıma denk birkaç ifade incelenmiştir. Ayrıca Temel İdeal Bölgelerinin TÇB olduğu gösterilmiştir.

Fletcher'ın (1969) TÇH tanımı incelenmiş ve tamlık bölgeleri için TÇB ile TÇH' nin denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca sonlu sayıda TÇH' nin direkt toplamının bir TÇH olduğu gösterilebilir. Böylece Temel İdeal Halkalarının TÇH olduğu ispatlanabilir. Ayrıca Pseudo-Bölge kavramı verilerek bazı özellikleri incelenmiştir.

Değişmeli (birimli) ve sıfır bölenli halkalarda çeşitli ilgililik kavramları verilebilir ve aralarındaki ilişkiler incelenebilir. Bu kavramlardan yararlanılarak çeşitli indirgenemez eleman tanımları verilir ve aralarındaki ilişkiler açıklanabilir.



## **ABSTRACT**

**The purpose of this study is to examine the concepts of unique factorization in domain and commutative rings with identity**

**Irreducible element, prime element are investigated as a basic definitions and concepts. Short information about power series ring, quotient rings and fraction rings are given**

**The definition of UFD had been given for domains and some statements which are equivalent to this definition are examined.**

**Fletcher's (1969) definition of UFR is investigated and it had been shown that UFD and UFR are equivalent for domains. Moreover, direct sum of finite number of UFR can be shown also a UFR. Thus it can be proved that Principal Ideal Rings are UFR. In addition, by giving the concept of Pseudo-Domain , it's properties are examined.**

**Various concepts of associativity can be given and relations between them can be analysed. In commutative rings (with identity) with zero divisors various definitions of irreducible elements are given by using these concepts.**



# 1 GİRİŞ

Tezin bu bölümünde diğer bölümlerde verilecek kavramlar ve özellikler için ne şekilde bir çalışma yapıldığı, açıklanacak kavramların ne tür özelliklere sahip olduğu ve bu özellikleri elde etmek için gereken önceki çalışmalar kısaca incelenecektir.

İkinci bölümümüzde tamlık bölgelerinde çarpanlara ayrılmanın ve bölünebilmenin çalışmamız için gerekli olacak birkaç özelliği incelenecektir. Bunlar; bir eleman ile sağdan ve soldan kısaltma özelliği, tersinir (veya birimsel) eleman ve birimsel elemanların kümesi olan  $U(R)$ 'nin tanımlarıdır. Bu tanımlara ek olarak  $a \mid b$  ( $a$  böler  $b$ ) tanımı ve bazı özellikleri verilecektir.  $R$  tamlık bölgesinde  $a = bu$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  varsa  $a$  ile  $b$  ilgilidir denir. Daha sonra bu tanıma denk bir ifade verilip ispatlanacaktır. Ayrıca sıfırdan farklı sonlu sayıda eleman için en büyük ortak bölen (EBOB) ve en küçük ortak kat (EKOK), asal eleman, indirgenemez eleman kavramları verilip aralarındaki ilişkiler incelenecektir.  $p \in R^*$  birimselden farklı bir eleman olmak üzere  $p = ab \Rightarrow a$  veya  $b$  birimseldir, sağlanıyorsa  $p$  elemanına indirgenemez (veya atom) denir. İndirgenemez eleman tanımı kullanacağımız temel kavramlardan biridir. İkinci bölümün diğer konuları verilen bir  $R$  halkası kullanılarak elde edilen bazı halkaların yapıları ve özellikleri ile ilgilidir. İlk olarak  $R[[x]]$  kuvvet serileri halkasının yapısı üzerinde durulacak ve verilen  $R$  halkasının durumuna göre (değişmeli, birimli, sıfır bölensiz, tamlık bölgesi) hangi özelliklere sahip olduğu incelenecek, elemanlarının ne şekilde olduğu araştırılacaktır. Daha sonra bölüm halkalarından kısaca bahsedilecek, bölüm halkaları için temel teoremlerden biri olan; “ $R$  değişmeli, birimli bir halka ve  $P (\neq R)$ ,  $R$  halkasının bir ideali olmak üzere  $P$  asal idealdir  $\Leftrightarrow R/P$  bir tamlık bölgesidir.” teoremini ispatlayacağız. Ayrıca bu bölümde kesir halkasından bahsedeceğiz. Bu konuda,  $\mathbb{Z}$  tam sayılar halkasının kesir cismi olan  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar cismi elde edilirken kullanılan yöntemlerin herhangi bir  $R$  halkası için genellemesi incelenecektir. Önce  $R$  halkasının bir  $S$  çarpımsal alt kümesi için  $R \times S$  kümesi üzerinde  $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $s_1(rs' - r's) = 0$  şeklinde bir bağıntı tanımlanıp, bir denklik bağıntısı olduğu gösterilecek ve bu denklik bağıntısına göre  $(r, s) \in R \times S$  elemanının denklik sınıflarının ne şekilde olduğu belirlenecek ve bu denklik sınıflarının bazı özellikleri incelenecektir. Bu elemanların denklik sınıflarının kümesi  $R_s$  (veya  $S^{-1}R$ ) ile gösterilir. Sonra  $S^{-1}R$  kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri tanımlanıp  $S^{-1}R$  kümesinin tanımlanan işlemlere göre bir halka yapısına sahip olduğu gösterilecektir. Bu çalışmanın bir bölümü tamlık bölgelerinde



tek türlü çarpanlarına ayrılma olduğundan  $S^{-1}R$  halkasının hangi koşullar altında bir tamlık bölgesi ve cisim özelliklerini sağladığı yine ikinci bölümün konuları arasındadır. Bu bölümde son olarak  $S^{-1}R$  kesir halkasında bir idealin ne şekildeki elemanlardan oluştuğu araştırılacaktır.

Üçüncü bölümün esas amacı tamlık bölgelerinde tek türlü çarpanlara ayrılmayı incelemektir. İlk olarak tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge (TÇB) tanımı verilip, bu tanıma denk bazı özellikler incelenecektir. Ayrıca her temel ideal bölgesinin bir TÇB olduğu ispatlanacaktır. Daha sonra ikinci bölümde bir kısmı incelenen;  $R$  halkası kullanılarak oluşturulan  $R[x]$  polinom halkası,  $R[[x]]$  kuvvet serileri halkası,  $S^{-1}R$  kesir halkası ve  $P(\neq R)$ ,  $R$  halkasında asal ideal olmak üzere  $R/P$  bölüm halkasının tek türlü çarpanlarına ayrılmalari incelenecektir. Burada, “TÇB olan bir  $R$  tamlık bölgesi verildiğinde,  $R$  kullanılarak elde edilen tamlık bölgeleri de tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge midir?” sorusuna cevap aranacaktır.  $R[[x]]$  kuvvet serileri halkasının TÇB olması  $R$  halkasının temel ideal bölgesi olması halinde doğrudur. Bunun ispatı üçüncü bölümde ayrıntıları ile verilecektir.  $S^{-1}R$  kesir halkasının TÇB olması için herhangi bir özel şart gerekmemektedir.  $S^{-1}R$  kesir halkasının TÇB olması halinde  $R$  halkasının hangi koşullar sağlandığında bir TÇB olduğu üçüncü bölümde incelenecek temel teoremlerden biridir. Bu teorem kullanılarak  $R[x]$  polinom halkasının TÇB olduğu gösterilecektir. Üçüncü bölümde son olarak  $P(\neq R)$ ,  $R$  halkasında asal ideal olmak üzere  $R/P$  bölüm halkasının TÇB olması için ne gibi ek koşulların gerektiği incelenecektir. Üstelik bu koşullar sağlanmadığı takdirde  $R/P$  bölüm halkasının TÇB olmadığına dair bir örnek verilecektir.

Dördüncü bölümde birimli, değişmeli bir  $R$  halkasının tek türlü çarpanlara ayrılması araştırılacaktır.  $R$  değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere tek türlü çarpanlara ayrılabilen halka tanımını (TÇH) Fletcher (1969) vermiştir. Fletcher’ın TÇH tanımını ve bazı sonuçlarını inceleyeceğiz. TÇH tanımını vermeden önce Fletcher’ın kullandığı indirgenemez eleman tanımını verilecek ve bu tanım kullanılarak bazı çalışmalar yapılacaktır. Bu bölümde göreceğimiz indirgenemez eleman tanımını bizim gördüğümüz tanımdan farklıdır. Burada  $U(r) = \{ \alpha \in R \mid \exists \beta \in R \text{ öyle ki } \alpha\beta r = r \}$  ile  $r \in R$  elemanının  $U$ -sınıfı gösterilecek ve bazı özellikleri incelenecektir. Bundan sonra  $r \in R$  elemanı için  $U$ -ayrışımı tanımı verilecek ve “ $r$  elemanının  $U$ -ayrışımı vardır  $\Leftrightarrow$  indirgenemez ayrışımı vardır” ifadesi

ispatlanacaktır.  $R$  birimli, değişmeli bir halka ve  $a, b \in R$  olsun, eğer  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  ise  $a$  ve  $b$  elemanlarına ilgilidir denir. Bu tanımdan yararlanarak  $U$ -ayrışımı için bazı özellikler verilecektir. Bütün bu tanımlar ve özellikler kullanılarak TÇH tanımı verilecek, tamlık bölgeleri için TÇH ve TÇB ifadelerinin denk olduğu gösterilecektir. Daha sonra sonlu sayıda TÇH' nın direkt toplamının yine bir TÇH olduğu ispatlanacaktır. Ayrıca dördüncü bölüm içinde Noetherian halka tanımı verilip bu tanıma denk birkaç ifade ispatlarıyla beraber incelenecektir. Dördüncü bölümde son olarak Pseudo-Bölgeler ile ilgilenilecektir.  $\forall 0 \neq r \in R$  için  $U(r)$ , birimsellerin sınıfı ise  $R$  halkasına Pseudo-Bölge denir. Bu tanım kullanılarak bazı özellikler ispatlanacaktır. TÇH olan bir Pseudo-Bölgeyi TÇPB ile göstereceğiz. Ayrıca bir Pseudo-Bölgede her indirgenemez elemanın asal olması halinde ne gibi özelliklerin ortaya çıkacağı araştırılacaktır.

Beřinci bölümde sıfır bölenli, değişmeli halkalarda iki elemanın ilgili olması ve indirgenemez eleman kavramlarının genelleştirilmiş şekilleri incelenip bunlar arasındaki bazı ilişkiler araştırılacaktır. Bu bölümde ilk olarak tamlık bölgeleri için iki elemanın ilgili olması ve indirgenemez eleman kavramları hatırlatılıp bunlara denk bazı kavramlar incelenecektir. Örneğın;  $D$  tamlık bölgesi ve  $a \in D$  sıfırdan, birimselden farklı bir eleman olsun. Bu takdirde  $a$  indirgenemezdir  $\Leftrightarrow (a)$  ideali  $D$ 'nin öz temel ideallerinin kümesinin maximal elemanıdır. Bu teorem  $a \in D$  için indirgenemez eleman tanımının temel idealler kullanılarak yapılabileceğini göstermektedir. Beřinci bölümde üç değişik ilgililik kavramı verilecek ve bunlar arasındaki ilişkiler ele alınılacaktır. Ayrıca bu ilgililik kavramlarının denklik bağıntısı olup, olmadıkları incelenecektir. Daha sonra değişmeli ve birimli  $R$  halkası için présimplifiable olma kavramı verilecektir. Bu kavram ilk defa Bouvier (1971) tarafından incelenmiştir. Bir  $R$  halkası için présimplifiable olma koşuluna denk ifadeler verilip ispatlanacaktır. Verdiğimiz üç değişik ilgililik tanımını kullanarak üç farklı indirgenemez eleman tanımı ortaya çıkaracağız. Ayrıca bu tanımlar arasındaki ilişkiler incelenecektir. Daha sonra verdiğimiz indirgenemez eleman tanımlarına denk bazı ifadeler verilip ispatlanacaktır. İndirgenemez elemanlar için temel idealleri kullanarak bazı denk ifadeler verilecektir. Beřinci bölüm içerisinde de birimli ve değişmeli halkalar için temel idealler kullanılarak bir indirgenemez eleman tanımı daha yapılacak ve diğer indirgenemez eleman tanımları ile aralarındaki ilişkiler incelenecektir. Bu bölümde son olarak verdiğimiz çeşitli ilgililik ve indirgenemez eleman tanımlarının değişmeli ve birimli halkaların direkt çarpımlarında nasıl bir yapıya ve özelliklere sahip oldukları incelenecektir

## 2 TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

### 2.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak halkalarda aritmetiğin temel kavramları, asal eleman, indirgenemez eleman tanımları açıklanacak ve bu kavramların anlaşılabilmesi için birkaç örnek verilecektir. Bu bölümde ilgileneceğimiz ikinci konu; verilen bir  $R$  halkası kullanılarak elde edilen  $R[[x]]$  kuvvet serileri halkası ve  $P (\neq R)$ ,  $R$  halkasının bir asal ideali olmak üzere  $R/P$  bölüm halkalarının yapılarıdır. Son olarak yine  $R$  halkası kullanılarak elde edilen  $S^{-1}R$  kesir halkası üzerinde durulacaktır.

### 2.2 Halkalarda Aritmetik

Bu bölümde, aksi belirtilmedikçe,  $R$  bir tamlık bölgesi (TB) ve  $R^* = R \setminus \{0\}$  olarak ele alınacaktır.

**Teorem 2.2.1**  $R$  bir halka ve  $c \neq 0$  olsun.  $\forall a, b \in R$  için  $ac = bc$  (veya  $ca = cb$ )  $\Rightarrow a = b$  sağdan (veya soldan) kısaltma özelliği sağlanır.

**İspat**  $\forall a, b \in R$  için  $ac = bc$  olsun  $\Rightarrow ac - bc = 0 \Rightarrow (a - b)c = 0$  elde edilir.  $R$  TB ve  $c \neq 0$  olduğundan  $a - b = 0$  olmalıdır. Böylece  $a = b$  elde edilir ve sağdan kısaltma özelliği sağlanır. Diğer de benzer şekilde yapılır.

**Tanım 2.2.2**  $R$  bir halka olsun.  $a \in R$  için  $ab = ba = 1_R$  olacak şekilde bir  $b \in R$  bulunabilirse  $a$  elemanına tersinirdir (veya birimseldir) denir.  $R$  halkasının bütün birimsellerinin kümesi  $U(R)$  ile gösterilir ve  $U(R) = \{a \in R \mid \exists b \in R \text{ öyle ki } ab = ba = 1_R\}$  ile verilir.  $(U(R), \cdot)$  nın bir grup olduğu kolayca gösterilebilir.

**Tanım 2.2.3**  $R$  bir halka olsun.  $0 \neq a \in R$  için  $b = ax$  olacak şekilde bir  $x \in R$  varsa “ $a$   $b$ ’yi böler” denir ve  $a \mid b$  ile gösterilir.

**Teorem 2.2.4**  $R$  bir halka olsun.  $a, b \in R$  için  $a \mid b \Leftrightarrow (b) \subset (a)$  dır.

**İspat “ $\Rightarrow$ ”:**  $a \mid b$  olsun  $\Rightarrow \exists c \in R$  için  $b = ac \in (a) \Rightarrow (b) \subset (a)$  elde edilir.

**“ $\Leftarrow$ ”:**  $(b) \subset (a)$  olsun  $\Rightarrow b = b1_R \in (b) \subset (a) \Rightarrow \exists s \in R$  için  $b = sa \Rightarrow a \mid b$  elde edilir.

**Tanım 2.2.5**  $R$  bir halka olsun.  $a, b \in R$  için  $a = bu$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  varsa  $a$  ile  $b$  ilgilidir denir.

**Teorem 2.2.6**  $R$  bir halka,  $a, b \in R$  ve  $b \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $a \mid b$  ve  $b \mid a \Leftrightarrow a$  ile  $b$  ilgilidir.

**İspat “ $\Rightarrow$ ”:**  $b \neq 0$ ,  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  olsun.  $a \mid b \Rightarrow \exists r \in R$  için  $b = ra$  ve  $b \mid a \Rightarrow \exists s \in R$  için  $a = sb \Rightarrow a = sb = s(ra) = (sr)a \Rightarrow 1_R = sr \Rightarrow s \in U(R)$  ve  $a = sb$  olduğundan  $a$  ile  $b$  ilgilidir.

**“ $\Leftarrow$ ”:**  $a$  ile  $b$  ilgili olsun  $\Rightarrow \exists u \in U(R)$  için  $a = ub \Rightarrow b \mid a$  elde edilir.  $u \in U(R) \Rightarrow u^{-1} \in R$  ve  $uu^{-1} = u^{-1}u = 1_R$ .  $a = ub \Rightarrow u^{-1}a = u^{-1}(ub) = (u^{-1}u)b = b \Rightarrow b = u^{-1}a \Rightarrow a \mid b$ . Sonuç olarak  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  elde edilir.

**Tanım 2.2.7**  $R$  bir halka ve  $a, b \in R^*$  olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $d \in R$  elemanına  $a$  ve  $b$  elemanlarının EBOB’ni denir.

(i)  $d \mid a$  ve  $d \mid b$ .

(ii)  $\forall t \in R$  öyle ki  $t \mid a$  ve  $t \mid b \Rightarrow t \mid d$ .

**Not**  $a, b \in R^*$  için her zaman EBOB bulunmayabilir. Eğer  $a, b \in R^*$  için EBOB var ise  $(a, b) = d$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.8**  $R$  bir halka ve  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R^*$  olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $d \in R$  elemanına  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elemanlarının EBOB’ni denir.

(i)  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  için  $d \mid a_i$ .

(ii)  $\forall t \in R$  öyle ki  $t \mid a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )  $\Rightarrow t \mid d$ .

**Tanım 2.2.9**  $R$  bir halka ve  $a, b \in R^*$  olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $c \in R$  elemanına  $a$  ve  $b$  elemanlarının EKOK'ı denir.

$$(i) a \mid c \text{ ve } b \mid c.$$

$$(ii) \forall k \in R \text{ öyle ki } a \mid k \text{ ve } b \mid k \Rightarrow c \mid k.$$

**Not**  $a, b \in R^*$  için her zaman EKOK bulunmayabilir. Eğer  $a, b \in R^*$  için EKOK var ise  $[a, b] = c$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.10**  $R$  bir halka ve  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R^*$  olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $c \in R$  elemanına  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elemanlarının EKOK'ı denir.

$$(i) \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ için } a_i \mid c.$$

$$(ii) \forall k \in R \text{ öyle ki } a_i \mid k \text{ (} i=1, 2, \dots, n \text{)} \Rightarrow c \mid k.$$

**Örnek**  $A = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in 2\mathbb{Z} \text{ } i = 1, 2, \dots, n \}$  bir tamlık bölgesidir. Üstelik  $[2, 2x]$  mevcut değildir. Gerçekten; kabul edelim ki  $[2, 2x]$  mevcut olsun ve bunu  $f$  ile gösterelim. EKOK tanımının ikinci şartına göre  $i = 1, 2, \dots, n$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_i \in A$  olmak üzere  $2 \mid g_i$  ve  $2x \mid g_i$  ise  $f \mid g_i$  olmalıdır.  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $d^0 f < d^0 g_i$  ve  $f \mid g_i$  olduğundan  $\exists k = 1, 2, \dots, n$  öyle ki  $g_k = [(2m+1)x]f$  şeklinde yazılabilir. Fakat  $(2m+1)x \notin A$  olduğundan bir çelişki elde edilir. Varsayımımız yanlıştır, yani  $[2, 2x]$  mevcut değildir.

**Teorem 2.2.11**  $R$  bir halka olsun.  $R^*$ 'in sonlu sayıdaki elemanları için EBOB var ise ilgililik düşünülmeksizin tek türdür.

**İspat** Varsayalım  $R^*$ 'in sonlu sayıdaki elemanları için iki tane EBOB olsun. Bunlara  $d$  ve  $d'$  diyelim.  $d$ 'yi EBOB ve  $d'$ 'nüde bir ortak bölen olarak göreceğ olursak  $d' \mid d$  olur. Benzer şekilde  $d'$ 'nü EBOB  $d$ 'yi de bir ortak bölen olarak dikkate alırsak  $d \mid d'$  elde edilir. Böylece Teorem 2.2.6 dan dolayı  $d$  ve  $d'$ ' nün ilgili olduğu görülür.

**Teorem 2.2.12**  $R$  bir halka olsun.  $R^*$ 'in sonlu sayıdaki elemanları için EKOK var ise ilgililik düşünülmeksizin tek türdür.

**İspat** EKOK tanımı kullanılarak Teorem 2.2.11 in ispatına benzer şekilde yapılır.

**Teorem 2.2.13**  $R$  bir halka ve  $a, b \in R^*$  olsun.

$$(i) (a) \cap (b) = (c) \Leftrightarrow c = [a, b].$$

$$(ii) (a) + (b) = (d) \Rightarrow d = (a, b).$$

(iii) Eğer  $[a, b]$  var ise  $(a, b)$  vardır. Fakat tersi doğru değildir.

**İspat** (i) " $\Rightarrow$ ":  $a, b \in R^*$  için  $(a) \cap (b) = (c)$  olsun  $\Rightarrow (c) \subseteq (a) \cap (b) \Rightarrow (c) \subseteq (a)$  ve  $(c) \subseteq (b) \Rightarrow a \mid c$  ve  $b \mid c$  bulunur. Şimdi  $c'$ ,  $a$  ve  $b$  elemanlarının başka bir ortak katı yani  $a \mid c'$  ve  $b \mid c'$  olsun  $\Rightarrow (c') \subseteq (a) \cap (b) = (c) \Rightarrow (c') \subseteq (c) \Rightarrow c \mid c'$  bulunur. EKOK tanımına göre  $c = [a, b]$  elde edilir.

" $\Leftarrow$ ":  $a, b \in R^*$  için  $c = [a, b]$  ve  $t \in (c)$  herhangi bir eleman olsun. Bu takdirde  $t = cr$  olacak şekilde bir  $r \in R^*$  vardır. Buradan  $c \mid t$  elde edilir.  $c = [a, b]$  olduğundan  $a \mid c$  ve  $b \mid c$  olduğunu biliyoruz.  $a \mid c$  ve  $c \mid t \Rightarrow a \mid t \Rightarrow t \in (a)$ ,  $b \mid c$  ve  $c \mid t \Rightarrow b \mid t \Rightarrow t \in (b)$  bulunur. Böylece  $t \in (a) \cap (b)$  ve  $(c) \subseteq (a) \cap (b)$  elde edilir. Şimdi  $d \in (a) \cap (b)$  olsun  $\Rightarrow d \in (a)$  ve  $d \in (b) \Rightarrow a \mid d$  ve  $b \mid d$  bulunur.  $c = [a, b]$  olduğundan  $c \mid d$  ve  $d \in (c)$  olduğu görülür. O halde  $(a) \cap (b) \subseteq (c)$  dir. Sonuç olarak  $(a) \cap (b) = (c)$  elde edilir.

(ii)  $a, b \in R^*$  için  $(a) + (b) = (d)$  olsun.

$(d) = (a) + (b) = \{ ax + by \mid x, y \in R \}$  şeklindedir.  $(a) + (b) \subseteq (d) \Rightarrow \forall x, y \in R$  için  $ax + by \in (d)$  olduğu görülür.  $y = 0 \in R$  için  $ax + b0 \in (d) \Rightarrow ax \in (d) \Rightarrow (a) \subseteq (d) \Rightarrow d \mid a$  bulunur.  $x = 0$  için benzer şekilde yapılarak  $d \mid b$  elde edilir.

Şimdi  $d' \in R$  için  $d' \mid a$  ve  $d' \mid b$  olsun.  $d' \mid a \Rightarrow \forall x \in R$  için  $d' \mid ax$  ve  $d' \mid b \Rightarrow \forall y \in R$  için  $d' \mid by \Rightarrow d' \mid ax + by$  elde edilir.

$d \in (d) = (a) + (b) = \{ ax + by \mid x, y \in R \} \Rightarrow \exists x, y \in R$  öyle ki  $d = ax + by$  şeklinde olduğu görülür.

$d' \mid ax + by = d \Rightarrow d' \mid d$  elde edilir. Sonuç olarak  $d = (a, b)$  bulunur.

(iii)  $a, b \in R^*$  için  $[a, b]$  mevcut olsun ve bunu  $c$  ile gösterelim.  $d = \frac{ab}{c}$  alalım.  $d \in R^*$  dır.

Gerçekten;  $ab \in (a) \cap (b) \Rightarrow (i)$ ' den dolayı  $ab \in (c) \Rightarrow ab = tc$  olacak şekilde  $t \in R^*$  vardır.  $d = \frac{ab}{c} = \frac{ct}{c} \Rightarrow cd = ct \Rightarrow d = t \in R^*$  elde edilir.

$c = [a, b] \Rightarrow a \mid c$  ve  $b \mid c \Rightarrow c = ak$  ve  $c = bt$  olacak şekilde  $k, t \in R^*$  vardır.

$d = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{ak} \Rightarrow akd = ab \Rightarrow kd = b \Rightarrow d \mid b$  ve  $d = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{bt} \Rightarrow tdb = ab \Rightarrow td = a \Rightarrow d \mid a$  elde edilir.

Varsayalım  $d' \mid a$  ve  $d' \mid b$  olsun. Bu takdirde  $a = d'k$  ve  $b = d'l$  olacak şekilde  $k, l \in R^*$  mevcuttur. Böylece  $al = d'kl = d'lk = bk$  olduğu görülür. (i)'den dolayı  $[a, b] = c$  ise  $(a) \cap (b) = (c)$  olduğu biliniyor.  $al \in (a)$ ,  $bk \in (b)$  ve  $al = bk \Rightarrow al = bk \in (a) \cap (b) \Rightarrow al = bk \in (c) \Rightarrow al = bk = ct$  olacak şekilde  $t \in R^*$  vardır  $\Rightarrow d = \frac{ab}{c} = \frac{ad'l}{c} = \frac{ald'}{c} = \frac{ctd'}{c} \Rightarrow cd = ct d' \Rightarrow d = t d' \Rightarrow d' \mid d$  ve  $(a, b) = d$  bulunur.

Tersinin doğru olmadığına dair bir örnek verelim.  $A = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in 2\mathbb{Z}, i=1,2,\dots,n\}$  bir tamlık bölgesidir.  $A$  da  $(2, 2x) = 1$  dir, fakat  $[2, 2x]$  yoktur.

**Tanım 2.2.14**  $R$  bir halka ve  $p \in R^*$  birimselden farklı bir eleman olsun.

(i) Eğer  $a, b \in R^*$  için  $p = ab$  olduğunda  $a$  veya  $b$  birimsel oluyorsa  $p$  elemanına indirgenemezdir denir.

(ii) Eğer  $p \mid ab$  olduğunda  $p \mid a$  veya  $p \mid b$  oluyorsa  $p$  elemanına asaldır denir.

**Teorem 2.2.15**  $R$  bir halka olsun.  $R$  halkasının her asal elemanı indirgenemezdir.

**İspat**  $p \in R^*$  asal ve  $a, b \in R^*$  için  $p = ab$  olsun.  $p \mid p = ab$  ve  $p$  asal olduğundan  $p \mid a$  veya  $p \mid b$  olur. Varsayalım  $p \mid a$  olsun. Bu takdirde  $a = px$  olacak şekilde  $x \in R^*$  vardır.

$p = ab = pxb \Rightarrow 1_R = xb \Rightarrow b$  birimseldir. Böylece  $p \in R^*$  elemanının indirgenemez olduğu bulunur.



**Not** Ters her zaman doğru değildir. Yani her indirgenemez eleman asal değildir.

### Örnek 2.2.16

1)  $\mathbb{Z}$  tamlık bölgesinde 7 hem bir asal eleman, hemde bir indirgenemez elemandır.

2)  $D = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  kümesi  $\mathbb{C}$  deki toplama ve çarpma işlemlerine göre bir tamlık bölgesidir.

$\varphi: D \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $a + b\sqrt{-5} \in D$  için  $\varphi(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$  şeklinde tanımlansın.

$u, v \in D$  için  $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$  olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi  $D$ 'nin birimsel elemanlarını belirleyelim.

Varsayalım  $a + b\sqrt{-5} \in D$  birimsel eleman olsun. Bu takdirde  $(a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) = 1$  olacak şekilde bir  $c + d\sqrt{-5} \in D$  vardır. Her iki tarafa birden  $\varphi$  dönüşümünü uygulayalım.

$$\varphi((a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})) = \varphi(1) \Rightarrow (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) = 1$$

$a, b \in \mathbb{Z}$  için  $a^2 + 5b^2$  pozitif bir tamsayıdır ve  $a^2 + 5b^2 \mid 1$  olduğundan  $a^2 + 5b^2 = 1$  olmalıdır. Buradan  $b = 0$  ve  $a = \pm 1$  elde edilir. Yani  $D$ 'nin birimsel elemanlarının yalnızca  $\pm 1$  olduğu görülür.

$2, 3, 1 - \sqrt{-5}, 1 + \sqrt{-5} \in D$  indirgenemez elemandırlar. Gerçekten; varsayalım 2 indirgenebilir olsun. Bu takdirde  $a + b\sqrt{-5}, c + d\sqrt{-5} \in D$  için  $2 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})$  şeklinde yazılabilir  $\Rightarrow \varphi(2) = \varphi(a + b\sqrt{-5})\varphi(c + d\sqrt{-5}) \Rightarrow 4 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$

Varsayalım ki  $a + b\sqrt{-5} \in D$  birimsel olmasın. Bu takdirde  $a^2 + 5b^2 \neq 1$  olur. Buradan  $a^2 + 5b^2 = 2$  veya  $a^2 + 5b^2 = 4$  olduğu görülür.  $a^2 + 5b^2 = 2$  olamayacağı aşıkardır. Yani  $a^2 + 5b^2 = 4$  olmalıdır. Bu takdirde  $c^2 + 5d^2 = 1$  olur. Bu  $c + d\sqrt{-5}$  elemanının birimsel olduğunu gösterir. Böylece iki çarpandan birisinin mutlaka birimsel olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir, yani 2 indirgenemez olmalıdır. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi bu elemanların asal olmadıklarını göstermeye çalışalım.

$6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$  şeklinde yazılabilir  $\Rightarrow 2 \mid 6 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$  bulunur. Fakat 2 elemanı ne  $(1 - \sqrt{-5})$  elemanını ne de  $(1 + \sqrt{-5})$  elemanını bölmez. Bu takdirde 2 asal eleman değildir. Diğerlerinin de asal eleman olmadığı benzer şekilde gösterilebilir.



### 2.3 Kuvvet Serileri ve Bölüm Halkaları

Bu bölümde kuvvet serileri halkasının ve bölüm halkasının yapıları ve bazı özellikleri kısaca incelenecektir.

**Teorem 2.3.1**  $R$  bir halka olsun.  $R$  halkasının elemanlarının  $(a_0, a_1, \dots)$  şeklindeki bütün serilerinin kümesini  $R[[x]]$  ile gösterelim.

(i)  $R[[x]]$  kümesinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlansın,  $(a_0, a_1, \dots), (b_0, b_1, \dots) \in R[[x]]$  için  $(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$  ve

$(a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots)$ , burada  $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{k+j=n} a_k b_j$ .  $R[[x]]$  bu şekilde

tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka yapısına sahiptir.

(ii)  $R[x]$  polinom halkası  $R[[x]]$  halkasının bir alt halkasıdır.

(iii)  $R$  sırasıyla değişmeli, birimli, sıfır bölensiz ve tamlık bölgesi ise  $R[[x]]$  halkası da sırasıyla değişmeli, birimli, sıfır bölensiz ve tamlık bölgesidir.

**İspat** (i)  $a = (a_0, a_1, \dots), b = (b_0, b_1, \dots)$  olsun.  $a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) \in R[[x]]$  olur. Çünkü  $R$  halka olduğundan  $\forall i = 0, 1, 2, \dots$  için  $a_i + b_i \in R$  dir.

$a \cdot b = (c_0, c_1, \dots) \in R[[x]]$  sağlanır. Çünkü,  $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{k+j=n} a_k b_j$  ve  $R$  halka olduğundan

$\forall i = 0, 1, 2, \dots$  için  $c_i \in R$  olduğu görülür.

Böylece  $R[[x]]$  kümesinin toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olduğu elde edilir. Ayrıca  $R$  halka olduğundan dolayı da  $R[[x]]$  toplama işlemine göre değişme ve birleşme özelliklerini gerçekler, üstelik  $0 \in R$  olduğu bilindiği için  $(0, 0, 0, \dots) \in R[[x]]$  olduğu söylenebilir ve bu eleman  $R[[x]]$  kümesinin sıfır elemanıdır.  $-a = (-a_0, -a_1, \dots) \in R[[x]]$  için  $a + (-a) = (a_0 + (-a_0), a_1 + (-a_1), \dots) = (0, 0, 0, \dots)$  olduğundan  $R[[x]]$  kümesinde her elemanın toplamaya göre tersinin olduğu görülür. Böylece  $R[[x]]$  kümesinin tanımlanan toplama işlemine göre bir değişmeli grup olduğu elde edilir. Şimdi çarpma işleminin birleşmeli olduğunu görelim.  $a = (a_0, a_1, \dots), b = (b_0, b_1, \dots), d = (d_0, d_1, \dots) \in R[[x]]$  elemanları için  $(ab)d = a(bd)$  olduğunu göstermeliyiz.  $ab$  çarpımının  $i$  koordinatını  $(ab)_i$  ile gösterelim.  $\forall t \geq 0$  için  $((ab)d)_t = (a(bd))_t$  olduğunu gösterirsek  $R[[x]]$  kümesinin çarpma işlemine göre birleşme özelliğini sağladığı görülür.

$$((ab)d)_i = \sum_{i+j=t} (ab)_i d_j = \sum_{i+j=t} \left( \sum_{u+v=i} a_u b_v \right) d_j = \sum_{u+v+j=t} a_u b_v d_j$$

$$(a(bd))_i = \sum_{u+k=t} a_u (bd)_k = \sum_{u+k=t} a_u \left( \sum_{v+j=k} b_v d_j \right) = \sum_{u+v+j=t} a_u b_v d_j$$

Böylece  $((ab)d)_i = (a(bd))_i$  olduğu elde edilir. Benzer şekilde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılıma özelliklerinin gerçekleştiği gösterilebilir. Sonuç olarak  $R[[x]]$  kümesinin bir halka olduğu elde edilir.

(ii)  $R \neq \emptyset$  olduğundan  $R[x] \neq \emptyset$  olmalıdır. Şimdi  $a, b \in R[x]$  herhangi iki eleman olsun.

Bu takdirde öyle  $m, n \in \mathbb{N}$  doğal sayıları vardır ki  $a = (a_0, a_1, \dots, a_m, 0, 0, \dots), b = (b_0, b_1, \dots, b_n, 0, 0, \dots)$  şeklindedir.  $r = \max\{m, n\}$  ise  $i > r$  için  $a_i - b_i = 0$  olur. Böylece  $a - b \in R[x]$  elde edilir.  $ab = (c_0, c_1, \dots)$ , her  $s \geq 0$  için  $c_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j$  şeklinde olduğunu biliyoruz. Her  $s > m+n+1$  için  $c_s = 0$  ve böylece  $ab \in R[x]$  elde edilir. Sonuç olarak  $R[x]$  polinom halkası  $R[[x]]$  halkasının bir alt halkasıdır.

(iii)  $a = (a_0, a_1, \dots), b = (b_0, b_1, \dots) \in R[[x]]$  herhangi iki eleman olsun.  $R$  değişmeli ise çarpma işleminin tanımından  $R[[x]]$  halkasının da değişmeli olduğu kolayca gösterilebilir.  $1_R \in R$  ise  $(1_R, 0, \dots, 0, \dots) \in R[[x]]$  olup  $R[[x]]$  halkasının birim elemanıdır.  $R$  sıfır bölensiz ise yine çarpma işleminin tanımı kullanılarak  $R[[x]]$  halkasının da sıfır bölensiz olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu üç ifadenin sonucu olarak eğer  $R$  halkası bir tamlık bölgesi ise  $R[[x]]$  halkasının bir tamlık bölgesi olduğu söylenebilir.

**Tanım 2.3.2** Yukarıdaki teoremde bir halka olduğu gösterilen  $R[[x]]$  kümesine  $R$  üzerindeki kuvvet serileri halkası veya kısaca kuvvet serileri halkası, elemanlarına ise kuvvet serileri denir.

**Teorem 2.3.3**  $R$  birimli bir halka olsun. Bu takdirde  $x = (0, 1_R, 0, \dots) \in R[[x]]$  elemanına belirsiz denir. Bu şekilde verilen  $R$  halkası için aşağıdakiler gerçekleşir.

(i) Her  $n \geq 1$  için  $1_R, (n+1)$  inci eleman olmak üzere  $x^n = (0, 0, \dots, 0, 1_R, 0, \dots)$  dır.

(ii)  $r \in R$  ise her  $n \in \mathbb{N}$  için  $r, (n+1)$  inci eleman olmak üzere  $r x^n = x^n r = (0, 0, \dots, 0, r, 0, \dots)$  dır.  $x^0 = 1_R$  olarak alınır.

(iii) Her  $0 \neq f \in R[[x]]$  için öyle  $a_0, a_1, \dots \in R$  elemanları vardır ki  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$  şeklindedir ve bu gösterim tek türdür.

**İspat** (i) Tümevarım yöntemini uygulayarak görmeye çalışalım.

$n=1$  için  $x$  elemanının tanımından dolayı doğrudur.

Kabul edelim ki  $n = k > 1$  için iddia doğru olsun.

Şimdi  $n = k + 1$  için doğru olduğunu gösterelim. Tümevarım kabulüne göre  $(x^k)_{k+1} = 1_R$  ve  $i \neq k + 1$  için  $(x^k)_i = 0$  olduğunu biliyoruz.  $(x^{k+1})_{k+2} = 1_R$  ve  $i \neq k + 2$  için  $(x^{k+1})_i = 0$  olduğunu göstermeliyiz.

$$x^{k+1} = x^k x = (c_0, c_1, \dots), \text{ burada } c_n = \sum_{i=0}^n (x^k)_i x_{n-i} = \sum_{i+j=n} (x^k)_i x_j$$

$i \neq k + 1$  için  $(x^k)_i = 0$  ve  $i \neq 1$  ise  $x_i = 0$  olduğundan  $n \neq k + 2$  ise  $(x^{k+1})_n = 0$  dır.  $n = k + 2$  ise  $(x^{k+1})_{k+2} = (x^k)_{k+1} x_1 = 1_R$  olduğu elde edilir.

(ii) Tümevarım yöntemi ile (i)'ye benzer şekilde yapılır.

(iii)  $f = (a_0, a_1, \dots) \in R[[x]]$  olsun. (i) ve (ii) kullanılarak

$0 \neq f = (a_0, a_1, \dots) = a_0(1_R, 0, \dots) + a_1(0, 1_R, 0, \dots) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 0, 1_R, 0, \dots) + \dots$  şeklinde

yazılabilir.  $x$  elemanının tanımı ve (i) den dolayı  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

olduğu görülür. Şimdi bu şekildeki yazılışın tek türlü olduğunu gösterelim. Varsayalım tek olmasın. Yani  $f \in R[[x]]$  elemanının başka bir gösterimi

$f = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$  olsun. Bu takdirde

$f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = (b_0, b_1, \dots, b_m, \dots)$  olur. Serilerin eşitliğinden dolayı  $i \geq 0$  için  $a_i = b_i$  olduğu elde edilir. Yani yazılış tek türlü olmalıdır.

Eğer yukarıdaki teoremde bahsedilen  $R$  halkasının birim elemanı yok ise, önce  $R$  halkasını birimli bir  $S$  halkası içine gömeriz. Böylece  $x = (0, 1_S, 0, \dots)$  olmak üzere her  $0 \neq f \in R[[x]]$

elemanı  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  şeklinde yazılabilir. Fakat burada  $x$  artık

$R[[x]]$  halkasının bir elemanı değildir.

**Tanım 2.3.4**  $(a_0, a_1, \dots) \in R[[x]]$  kuvvet serisinde  $a_i \in R$  elemanlarına katsayılar ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) ve  $a_0$  elemanına sabit terim denir.

Şimdi  $R$  bir halka ve  $I$ ,  $R$  halkasının bir ideali olmak üzere  $R/I$  bölüm halkasının temel özelliklerini kısaca hatırlayalım.  $(R, +)$  değişmeli olduğundan  $I$ ,  $R$  halkasının bir normal alt grubudur.  $a + I, b + I \in R/I$  olmak üzere  $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$  şeklinde tanımlanan toplama işlemine ve  $(a + I)(b + I) = ab + I$  şeklinde tanımlanan çarpma işlemine göre  $R/I$  nın bir halka yapısına sahip olduğu biliniyor.  $R$  değişmeli veya birimli ise  $R/I$  halkası da değişmeli veya birimlidir. Ayrıca  $1_R \in R$  ise  $1_R + I$ ,  $R/I$  nın birimidir.

**Tanım 2.3.5**  $R$  bir halka ve  $I$ ,  $R$  halkasının bir ideali olsun.  $R/I$  halkasına  $R$  halkasının  $I$  idealine göre bölüm halkası veya kısaca bölüm halkası denir.

**Teorem 2.3.6**  $R$  değişmeli ve birim elemanlı bir halka olsun.  $P (\neq R)$ ,  $R$  halkasının bir ideali olmak üzere  $P$  asal idealdir  $\Leftrightarrow R/P$  bir tamlık bölgesidir.

**İspat “ $\Rightarrow$ ”:**  $P (\neq R)$ ,  $R$  halkasının bir asal ideali olsun.  $R$  birimli ve değişmeli olduğundan  $R/P$  bölüm halkası birimli ve değişmelidir. Şimdi  $R/P$  bölüm halkasının sıfır bölensiz olduğunu gösterelim. Sıfırdan farklı  $a + P, b + P \in R/P$  için  $(a + P)(b + P) = 0 + P$  olsun. Bu takdirde  $ab + P = P \Rightarrow ab \in P \Rightarrow a \in P$  veya  $b \in P \Rightarrow a + P = P$  veya  $b + P = P \Rightarrow R/P$  bölüm halkası sıfır bölensizdir.

**“ $\Leftarrow$ ”:**  $R/P$  bir tamlık bölgesi olsun. Biz biliyoruz ki  $1_R + P \neq 0 + P$  dir. Bu taktirde  $1_R \notin P \Rightarrow P \neq R$  elde edilir. Varsayalım  $ab \in P$  olsun  $\Rightarrow ab + P = P \Rightarrow (a + P)(b + P) = P \Rightarrow a + P = P$  veya  $b + P = P \Rightarrow a \in P$  veya  $b \in P \Rightarrow P$  asal idealdir.

## 2.4 Kesir Halkası

Bu bölümde  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkasının kesir cismi olan  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar cismi elde edilirken kullanılan özelliklerin herhangi bir halka için uygulanması incelenecek ve birtakım sonuçları ele alınacaktır.

**Tanım 2.4.1**  $R$  bir halka ve  $S \neq \emptyset$ ,  $R$  halkasının bir alt kümesi olsun.  $a, b \in S$  için  $ab \in S$  sağlanıyorsa  $S$  kümesine çarpımsaldır denir.

### Örnek

1) Sıfırdan farklı ve birimli bir halkada sıfır bölen olmayan bütün elemanların kümesi çarpımsaldır. Gerçekten;  $a, b$  sıfır bölen olmayan iki eleman ve  $(ab)c = 0$  olsun. Bu ifade sadece  $c = 0$  olması halinde sağlanır. Yani  $ab$  sıfır bölen değildir.

2) Bir tamlık bölgesinde bütün sıfırdan farklı elemanların kümesi çarpımsaldır.  $a \neq 0, b \neq 0$  olmak üzere  $R$  tamlık bölgesi olduğundan  $ab \neq 0$  olmalıdır.

$\mathbb{Z}$  tamsayılar halkası,  $S$  tüm sıfırdan farklı tamsayıların kümesi olsun.  $S$  kümesinin  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkasının çarpımsal bir alt kümesi olduğu kolayca gösterilebilir. Üstelik  $\mathbb{Q}$  kümesinin  $a \in \mathbb{Z}, b \in S$  olmak üzere  $a/b$  şeklindeki bütün kesirleri içerdiği görülebilir. Burada  $a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$  (veya  $ad - bc = 0$ ) bağıntısı geçerlidir. Daha kesin bir ifade ile  $\mathbb{Q}$  şu şekilde oluşturulabilir.  $\mathbb{Z} \times S$  kümesi üzerinde  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times S$  için  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$  şeklinde bir bağıntı tanımlıyalım. “ $\sim$ ” bağıntısının denklik bağıntısı olduğu kolayca ispatlanabilir.  $\mathbb{Q}$ , “ $\sim$ ” denklik bağıntısına göre  $\mathbb{Z} \times S$  nin denklik sınıflarının kümesi olarak tanımlanabilir.  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times S$  elemanının denklik sınıfı  $a/b$  ile gösterilsin ve  $a/b, c/d \in \mathbb{Z} \times S$  için  $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$  ve  $(a/b)(c/d) = ac/bd$  şeklinde toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın. Bu işlemler iyi tanımlıdır ve  $\mathbb{Q}$  tanımlanan bu işlemlere göre bir cisim yapısına sahiptir. Üstelik,

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$a \mapsto \varphi(a) = a/1$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir monomorfizmadır. Böylece  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkası, yine  $\mathbb{Z}$  kullanılarak elde edilen  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar cismi içine gömülmüş olur.

Şimdi bu yapıyı herhangi bir değişmeli halkaya uygulayalım.

**Teorem 2.4.2**  $R$  değişmeli bir halka ve  $\emptyset \neq S \subset R$  çarpımsal bir alt küme olsun.

$R \times S$  kümesi üzerinde  $(r, s), (r', s') \in R \times S$  için  $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki

$s_1(rs' - r's) = 0$  şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca  $R$  sıfır bölensiz ve  $0 \notin S$  ise  $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' - r's = 0$  sağlanır.

**İspat** (i)  $(r, s) \in R \times S$  ve  $s_1 \in S$  için  $s_1(rs - rs) = s_1 \cdot 0 = 0$  olduğundan  $(r, s) \sim (r, s)$  dir. Yani “ $\sim$ ” bağıntısı yansıyandır.

(ii)  $(r, s), (r', s') \in R \times S$  için  $(r, s) \sim (r', s')$  olsun  $\Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $s_1(rs' - r's) = 0$   
 $\Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $s_1[-(r's - rs')] = 0 \Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $(-s_1)(r's - rs') = 0 \Leftrightarrow (r', s') \sim (r, s)$  dir. Yani “ $\sim$ ” bağıntısı simetriktir.

(iii)  $(r, s), (r', s'), (x, y) \in R \times S$  için  $(r, s) \sim (r', s')$  ve  $(r', s') \sim (x, y)$  olsun  $\Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $s_1(rs' - r's) = 0$  ve  $\exists s_2 \in S$  öyle ki  $s_2(r'y - xs') = 0$  olur.

Birinci eşitliğin her iki tarafını  $s_2s'y$  ile çarparsak;  $s_2s'ys_1(rs' - r's) = 0$  ( $s_2s'y \in S$ )

İkinci eşitliğin her iki tarafını  $s_1ss'$  ile çarparsak;  $s_1ss's_2(r'y - xs') = 0$  ( $s_1ss' \in S$ )

elde edilir. Şimdi bu iki eşitliği taraf tarafa toplayalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$s_2s'ys_1rs' - s_2s'ys_1r's + s_1ss's_2r'y - s_1ss's_2xs' = 0 \Leftrightarrow$$

$$s_2s's_1s'ry - s_2s's_1yr's + s_2s's_1yr's - s_2s's_1xs' = 0 \Leftrightarrow$$

$$s_2s's_1s'(ry - xs) = 0 \Leftrightarrow (r, s) \sim (x, y) \text{ sağlanır } (s_2s's_1s' \in S). \text{ Yani “}\sim\text{” bağıntısı geçişkendir.}$$

(i), (ii), (iii) den dolayı “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısıdır.

Şimdi  $R$  sıfır bölensiz ve  $0 \notin S$  olsun.  $(r, s), (r', s') \in R \times S$  için  $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $s_1(rs' - r's) = 0 \Leftrightarrow s_1 = 0$  veya  $rs' - r's = 0 \Leftrightarrow rs' = r's$  dir.

**Tanım 2.4.3**  $R$  değişmeli bir halka,  $\emptyset \neq S \subset R$  çarpımsal bir alt küme ve “ $\sim$ ” bir önceki teoremden verilen denklik bağıntısı olsun.  $(r, s) \in R \times S$  elemanının denklik sınıfı  $r/s$  ile ve “ $\sim$ ” denklik bağıntısı altında  $R \times S$  nin denklik sınıflarının kümesi  $S^{-1}R$  veya  $R_S$  ile gösterilecektir.

**Teorem 2.4.4**  $R$  değişmeli bir halka ve  $S \subset R$  çarpımsal bir alt küme olsun. Bu takdirde  $S^{-1}R$  kümesi aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i)  $r/s, r'/s' \in S^{-1}R$  için  $r/s = r'/s' \Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $s_1(rs' - r's) = 0$  dir.

(ii) Her  $r \in R$  ve  $s, t \in S$  için  $tr/ts = r/s$  dir.

**İspat** (i)  $r/s, r'/s' \in S^{-1}R$  için  $r/s = r'/s'$  olsun  $\Leftrightarrow (r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $s_1(rs' - r's) = 0$  sağlanır.

(ii) “ $\sim$ ” denklik bağıntısı olduğundan  $(r, s) \sim (r, s)$  dir  $\Rightarrow \exists s_1 \in S$  öyle ki  $s_1(rs - rs) = 0 \Rightarrow t \in S$  keyfi elemanı için  $ts_1(rs - rs) = 0 \Rightarrow s_1(trs - trs) = 0 \Rightarrow (tr, ts) \sim (r, s) \Rightarrow$  Her  $r \in R$  ve  $s, t \in S$  için  $tr/ts = r/s$  elde edilir.

**Teorem 2.4.5**  $R$  değişmeli bir halka,  $\emptyset \neq S \subset R$  çarpımsal bir alt küme ve  $S^{-1}R$  Teorem 2.4.2 de verilen denklik bağıntısına göre  $R \times S$  nin denklik sınıflarının kümesi olsun.

(i)  $S^{-1}R$  kümesinde toplama ve çarpma işlemleri  $r/s, r'/s' \in S^{-1}R$  için  $r/s + r'/s' = (rs' + r's)/ss'$  ve  $(r/s)(r'/s') = rr'/ss'$  şeklinde tanımlansın.  $S^{-1}R$  tanımlanan bu işlemlere göre değişmeli ve birimli bir halkadır.

(ii) Eğer  $R$  sıfırdan farklı, sıfır bölensiz bir halka ve  $0 \notin S$  ise  $S^{-1}R$  bir tamlık bölgesidir.

(iii) Eğer  $R$  sıfırdan farklı, sıfır bölensiz bir halka ve  $S, R$  halkasının bütün sıfırdan farklı elemanlarının kümesi ise  $S^{-1}R$  bir cisimdir.

**İspat** (i) Öncelikle tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerinin iyi tanımlı olduklarını gösterelim.  $r/s = r_1/s_1$  ve  $r'/s' = r'_1/s'_1$  olsun  $\Rightarrow \exists s_2 \in S$  öyle ki  $s_2(rs_1 - r_1s) = 0$  ve  $\exists s_3 \in S$  öyle ki  $s_3(r's'_1 - r'_1s') = 0$  olur. Birinci eşitliği  $s_3s'_1s' \in S$  ile ve ikinci eşitliğide  $s_2ss_1 \in S$  ile çarpıp taraf tarafa toplarsak  $s_3s'_1s'_2rs_1 - s_3s'_1s'_2r_1s + s_2ss_1s_3r's'_1 - s_2ss_1s_3r'_1s' = 0$  elde edilir. Son eşitliği düzenlersek,  $s_2s_3[(rs' + r's)s_1s'_1 - (r_1s'_1 + r'_1s_1)ss'] = 0 \Rightarrow (rs' + r's, ss') \sim (r_1s'_1 + r'_1s_1, s_1s'_1) \Rightarrow (rs' + r's)/ss' = (r_1s'_1 + r'_1s_1)/s_1s'_1 \Rightarrow r/s + r'/s' = r_1/s_1 + r'_1/s'_1$  elde edilir. Bu ise toplama işleminin iyi tanımlı olduğunu gösterir. Yine  $r/s = r_1/s_1$  ve  $r'/s' = r'_1/s'_1$  olsun.  $rr'/ss' = (r/s)(r'/s') = (r_1/s_1)(r'_1/s'_1) = r_1r'_1/s_1s'_1$  sağlandığından çarpma işlemi iyi tanımlıdır.

Şimdi  $S^{-1}R$  kümesinin halka aksiyomlarını sağladığını gösterelim.  $(S^{-1}R, +)$  değişmeli bir gruptur. Gerçekten; her  $s, s' \in S$  için  $0/s = 0/s'$  ve  $0/s$  toplama işlemine göre etkisiz elemanıdır,  $r/s \in S^{-1}R$  elemanının toplama işlemine göre tersi  $-r/s \in S^{-1}R$  elemanıdır.  $r/s, r'/s' \in S^{-1}R$  için  $r/s + r'/s' = (rs' + r's)/ss' = (r's + rs')/s's = r'/s' + r/s$  olduğundan toplama işlemi değişmelidir.

$r/s, r'/s', x/y \in S^{-1}R$  için



$$(r/s + r'/s') + x/y = (rs' + r's)/ss' + x/y = ((rs' + r's)y + xss')/ss'y = rs'y + r'sy + xss'/ss'y = r/s + (r'y + xs')/s'y = r/s + (r'/s' + x/y) \text{ olduğundan toplama işlemi birleşmelidir.}$$

$S^{-1}R$  kümesinin çarpma işlemine göre birleşme özelliğini sağladığı çarpmanın tanımını kullanılarak kolayca gösterilebilir.

$$r/s, r'/s' \in S^{-1}R \text{ olsun. } (r/s)(r'/s') = rr'/ss' = r'r/s's = (r'/s')(r/s) \Rightarrow S^{-1}R \text{ değişmelidir.}$$

$S^{-1}R$  değişmeli olduğundan çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliklerinden birisini göstermek yeterlidir.  $r/s, r'/s', x/y \in S^{-1}R$  olsun.

$$(r/s)[r'/s' + x/y] = (r/s)(r'y + xs'/s'y) = r(r'y + xs')/s(s'y) = r'r'y + rxs'/ss'y = srr'y + srxs'/sss'y = rr'sy + rxss'/ss'sy = rr'/ss' + rx/sy = [(r/s)(r'/s')] + [(r/s)(x/y)].$$

Sonuç olarak,  $S^{-1}R$  toplama ve çarpma işlemlerine göre değişmeli bir halkadır. Ayrıca  $s, s' \in S$  için  $s/s = s'/s'$  olup  $s/s \in S^{-1}R$  elemanı çarpma işlemine göre birim (etkisiz) elemandır.

(ii)  $R$  sıfır bölensiz ve  $0 \notin S$  olsun. Bu takdirde  $r/s = 0/s \Leftrightarrow rs = 0 \Leftrightarrow r = 0$  elde edilir. Şimdi  $r/s \neq 0/s$  ve  $r'/s' \neq 0/s$  olmak üzere  $S^{-1}R$  de  $(r/s)(r'/s') = 0$  olsun. Bu takdirde  $S^{-1}R$  de  $rr'/ss' = 0$  elde edilir. Buradan  $R$  halkasında  $rr' = 0$  bulunur.  $R$  sıfır bölensiz olduğundan ya  $r = 0$  ya da  $r' = 0$  olmalıdır. Böylece  $S^{-1}R$  de ya  $r/s = 0$  ya da  $r'/s' = 0$  olmalıdır. Bu da  $S^{-1}R$  halkasının bir tamlık bölgesi olduğunu gösterir.

(iii) Eğer  $r \in R$  için  $r \neq 0$  ise  $r \in S$  dir ve  $r/s \in S^{-1}R$  elemanının çarpma işlemine göre tersi  $s/r$  elemanıdır. Böylece  $S^{-1}R$  halkasının sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre tersi vardır. Yani  $S^{-1}R$  bir cisim yapısına sahiptir.

**Tanım 2.4.6** Teorem 2.4.5 de verilen  $S^{-1}R$  halkasına kesirlerin halkası denir. Teorem 2.4.5

(iii) de verilen  $S^{-1}R$  cismine de tamlık bölgesinin kesir cismi denir.

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$a \rightarrow \varphi(a) = a/1$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün monomorfizma olduğunu ve böylece  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkasının  $\mathbb{Q}$  içine gömüldüğünü söylemiştik. Şimdi herhangi bir değişmeli  $R$  halkası için bu özelliğin ne şekilde olduğunu görelim.



**Teorem 2.4.7**  $R$  değişmeli bir halka ve  $\emptyset \neq S \subset R$  çarpımsal bir alt küme olsun. Bu takdirde aşağıdakiler gerçekleşir.

(i) Herhangi bir  $s \in S$  için

$$\varphi_s : R \rightarrow S^{-1}R$$

$$r \rightarrow \varphi_s(r) = rs/s$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm iyi tanımlı bir halka

homomorfizmasıdır. Ayrıca  $\forall s \in S$  için  $\varphi_s(s) = ss/s$  elemanı  $S^{-1}R$  halkasında birimseldir.

(ii) Eğer  $0 \notin S$  ve  $S$  hiç sıfır bölen eleman içermiyorsa  $\varphi_s$  bir monomorfizmadır. Böylece her tamlık bölgesi bir cisim içerisine gömülebilir.

(iii) Eğer  $R$  birimli ve  $S$  birimselleri içeriyorsa  $\varphi_s$  bir izomorfizmadır.

**İspat** (i)  $r_1, r_2 \in R$  için  $r_1 = r_2 = r$  olsun. Eğer  $s, s' \in S$  ise  $\varphi_s(r_1) = \varphi_{s'}(r_2)$  olduğunu, yani  $r_1s/s = rs/s = rs'/s' = r_2s'/s'$  olduğunu göstermeliyiz.

$$rs = rs \Rightarrow s'rs = s'rs \Rightarrow rss' = rs's \Rightarrow rss' - rs's = 0 \Rightarrow \exists t \in S \text{ öyle ki } t(rss' - rs's) = 0 \Rightarrow$$

$$rs/s = rs'/s' \Rightarrow \varphi_s(r) = \varphi_{s'}(r) \Rightarrow \varphi_s \text{ iyi tanımlıdır.}$$

$r, r' \in R$  olsun.

$$\begin{aligned} \varphi_s(r + r') &= (r + r')s/s = rs + r's/s = ((rs + r's)/s)(s/s) = (rss + r'ss)/ss \\ &= rs/s + r's/s = \varphi_s(r) + \varphi_s(r') \end{aligned}$$

$$\varphi_s(rr') = (rr')s/s = ((rr')s/s)(s/s) = (rs)(r's)/ss = (rs/s)(r's/s) = \varphi_s(r)\varphi_s(r')$$

$\varphi_s$  toplama ve çarpma işlemlerini koruduğundan bir halka homomorfizmasıdır.

$S^{-1}R$  nin birim elemanının  $\forall s \in S$  için  $s/s$  olduğunu biliyoruz.  $\forall s \in S$  için  $\varphi_s(s) = ss/s = s^2/s$  nin çarpma işlemine göre tersi  $s/s^2$  dir. Gerçekten;  $(s^2/s)(s/s^2) = s^3/s^3 = (s/s)^3 = 1_{S^{-1}R}$  olduğundan  $\forall s \in S$  için  $\varphi_s(s) = ss/s = s^2/s$  elemanı  $S^{-1}R$  de birimseldir.

(ii)  $\text{Ker}\varphi_s = \{ r \in R \mid \varphi_s(r) = 0_{S^{-1}R} \}$  şeklinde tanımlanır. Şimdi  $r \in \text{Ker}\varphi_s$  olsun. Bu takdirde

$$\varphi_s(r) = rs/s = 0_{S^{-1}R} \Rightarrow rs/s = 0/s \Rightarrow \exists s_1 \in S \text{ öyle ki } s_1(rss - 0s) = 0 \Rightarrow \exists s_1 \in S \text{ öyle ki}$$

$rs^2s_1 = 0$  elde edilir.  $s^2s_1 \in S$  ve  $S$  sıfır bölen içermediğinden  $r = 0$  olmalıdır. Böylece

$\text{Ker}\varphi_s = \{0\}$  bulunur. Yani  $\varphi_s$  birebirdir. (i) şıkkını da dikkate alırsak  $\varphi_s$  dönüşümü bir monomorfizma olur. Sonuç olarak her tamlık bölgesinin bir cisim içerisine gömülebileceğini görmüş olduk.

(iii)  $s \in S$   $R$  halkasında birimsel olmak üzere  $r/s \in S^{-1}R$  elemanını göz önüne alalım.  $r/s = rs^{-1}s/s = \varphi_s(rs^{-1})$  ve  $rs^{-1} \in R$  olduğundan  $\varphi_s$  örtendir. (i) ve (ii) ifadelerini de dikkate alırsak  $\varphi_s$  dönüşümünün bir izomorfizma olduğu görülür.

Teorem 2.4.7(ii) de  $R$  tamlık bölgesini  $\varphi_s$  altındaki görüntüsü ile bir tutacak olursak (2.4.7(iii) den  $\varphi_s$  bir izomorfizma) ve  $R$  halkasını kesir cisminin bir alt halkası olarak düşünersek, bu durumda  $1_R \in S$  olacağından  $r \in R$  elemanının  $r/1_R \in S^{-1}R$  ile özdeşleştirilmesi sonucu  $R$  kesir cismi içerisine gömülmüş olur.

**Teorem 2.4.8**  $R$  değişmeli bir halka ve  $\emptyset \neq S \subset R$  çarpımsal bir alt küme olsun. Bu takdirde  $I$ ,  $R$  nin bir ideali ise  $I_S = \{ a/s \mid a \in I, s \in S \}$  kümesi  $S^{-1}R$  kesir halkasının bir idealidir.  $I_S$  idealine  $I$  nın  $S^{-1}R$  içerisindeki genişlemesi denir.

**İspat**  $I \neq \emptyset$  olduğundan  $I_S \neq \emptyset$  olur. Şimdi  $a/s, b/s' \in I_S$  olsun.  $a/s - b/s' = as' - bs/ss' \in I_S$  ( $I$  ideal ve  $S$  çarpımsal bir küme)  
 $a/s \in I_S$  ve  $r/s' \in S^{-1}R$  olsun.  $(r/s')(a/s) = ra/s's$  ve  $(a/s)(r/s') = ar/ss'$  elde edilir. Şimdi  $I$  ideal olduğundan  $ra, ar \in I$  ve  $ss' \in S$  dir. Böylece  $ra/s's, ar/ss' \in I_S$  elde edilir.  $I_S$  hem sol hem de sağ ideal olur. Yani  $I_S$ ,  $S^{-1}R$  kesir halkasının bir idealidir.

### 3 TEK TüRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLEN BÖLGELER

Bu bölümde, aksi belirtilmedikçe,  $R$  halkası bir tamlık bölgesi (TB) ve  $R^* = R \setminus \{0\}$  olarak ele alınacaktır.

#### 3.1 Giriş

Bu bölümde öncelikle tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge (TÇB) tanımı verilip bu tanıma denk bazı ifadeler ispatlanacaktır. Ayrıca temel ideal bölgelerinin tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge oldukları gösterilecektir. Daha sonra tek türlü çarpanlara ayrılabilen bir  $R$  tamlık bölgesi verildiğinde,  $R$  halkası kullanılarak elde edilen; polinom halkası, kuvvet serileri halkası, kesir halkası ve bölüm halkalarının hangi koşullar altında tek türlü çarpanlara ayrılabilen halka oldukları incelenecektir.

#### 3.2 Tek Türlü Çarpanlara Ayrılabilen Bölge Tanımı ve Denk Özellikler

**Tanım 3.2.1** Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $R$  halkasına tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge denir ve kısaca TÇB ile gösterilir;

**TÇB1:**  $R^*$  kümesinin birimselden farklı her elemanı indirgenemez elemanların bir çarpımı olarak ifade edilebilir.

**TÇB2:**  $r = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$ ,  $r \in R^*$  elemanının iki indirgenemez ayrışımı ise  $m = n$  ve  $q$  elemanlarının uygun bir şekilde düzenlenmesinden sonra  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $p_i$  ve  $q_i$  ilgilidir.

**Teorem 3.2.2**  $R$  bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i)  $R$  bir TÇB dir.
- (ii)  $R$  halkası TÇB1 koşulunu sağlar, ve  $R$  de herhangi iki temel idealin kesişimi yine bir temel idealdir. Yani  $R^*$  ' ın herhangi iki elemanının bir en küçük ortak katı vardır.
- (iii)  $R$  halkası TÇB1 koşulunu sağlar, ve  $R^*$  ' ın herhangi iki elemanının bir en büyük ortak böleni vardır.
- (iv)  $R$  halkası TÇB1 koşulunu sağlar, ve  $R$  de her indirgenemez eleman asaldır.

**İspat** (i)  $\Rightarrow$  (ii): (i) şikkından dolayı  $R$  halkası TÇB1 koşulunu sağlar.

Şimdi (a) ve (b)  $R$  halkasında herhangi iki temel ideal olmak üzere  $(a) \cap (b) = I$  olsun.  $a = 0$  veya  $b = 0$  alındığında  $I = (0)$  olup istenen sağlanır. Varsayalım  $a \neq 0$  ve  $b \neq 0$

olsun. Keyfi bir  $0 \neq x \in I$  elemanını ele alalım,  $x$  aynı zamanda  $R$  halkasının da bir elemanı olduğundan bir indirgenemez ayrışımı vardır.  $x = p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$ ,  $0 \neq x \in I$  elemanının indirgenemez ayrışımı olsun.  $x \in I = (a) \cap (b) \Rightarrow x \in (a)$  ve  $x \in (b) \Rightarrow x = ak$  ve  $x = bl$  olacak şekilde  $k, l \in R^*$  bulunabilir,  $a, b \in R^*$  elemanlarının indirgenemez ayrışimleri  $a = q_1 \dots q_m$  ve  $b = r_1 \dots r_s$  olsun. Bu ifadeleri yerlerine yazarsak;  $x = ak \Rightarrow p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n} = q_1 \dots q_m k$  ve  $x = bl \Rightarrow p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n} = r_1 \dots r_s l$  elde edilir. Burada  $R$  halkasının TÇB2 özelliğini kullanırsak,  $u, v$  birimseller ve  $0 \leq \psi_i, \beta_i \leq \alpha_i$  olmak üzere  $q_1 \dots q_m = u p_1^{\psi_1} \dots p_n^{\psi_n}$  ve  $r_1 \dots r_s = v p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$  elde edilir.  $\sigma_i = \max\{\psi_i, \beta_i\}$  olmak üzere  $c = p_1^{\sigma_1} \dots p_n^{\sigma_n}$  olsun.  $\sigma_i = \max\{\psi_i, \beta_i\} \leq \alpha_i$  olduğundan  $c \mid x$  ve  $x \in (c) \Rightarrow I \subset (c)$  elde edilir.

$a = q_1 \dots q_m = u p_1^{\psi_1} \dots p_n^{\psi_n}$  ve  $\psi_i \leq \sigma_i$  olduğundan  $a \mid c$  ve  $c \in (a)$ ,  $b = r_1 \dots r_s = v p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$  ve  $\beta_i \leq \sigma_i$  olduğundan  $b \mid c$  ve  $c \in (b)$  olduğu görülür. Bu takdirde  $c \in (a) \cap (b) = I \Rightarrow (c) \subset I$  bulunur. Sonuç olarak  $I = (c)$  elde edilir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): (ii) ve Teorem 2.2.13 (iii) kullanılarak kolayca gösterilebilir.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv):  $R$ , hipotezden dolayı TÇB1 koşulunu sağlar. Şimdi, varsayalım  $p \in R^*$  indirgenemez ve  $p \mid ab$  yani  $ab \in (p)$  olsun.

$a = 0 \Rightarrow a = 0 = 0b = ab \in (p) \Rightarrow a \in (p) \Rightarrow p \mid a$  olduğundan  $a \neq 0$  ve  $b \neq 0$  kabul edebiliriz.  $ap, ab \in R^*$  için hipotezden dolayı bir EBOB vardır. Bunu  $d$  ile gösterelim, yani  $(ap, ab) = d$  olsun. Bu taktirde  $d \mid ap$  ve  $d \mid ab \Rightarrow ap = dk, ab = dl$  olacak şekilde  $k, l \in R^*$  elemanları vardır.  $p \mid ab$  ve  $p \mid ap \Rightarrow p \mid (ab, ap) = d \Rightarrow d = pr$  olacak şekilde  $r \in R^*$  vardır. Aynı şekilde  $a \mid ab$  ve  $a \mid ap \Rightarrow a \mid (ab, ap) = d \Rightarrow d = as$  olacak şekilde  $s \in R^*$  vardır.  $ap = dk$  ve  $d = as \Rightarrow ap = (as)k = a(sk) \Rightarrow p = sk$  elde edilir.  $p$  indirgenemez olduğundan  $s$  veya  $k$  birimseldir. Varsayalım  $s$  birimsel olsun. Bu taktirde;  $d = pr = as \Rightarrow a = prs^{-1} \in (p) \Rightarrow p \mid a$  elde edilir. Eğer  $k$  birimsel ise;  $ap = dk \Rightarrow d = apk^{-1}$  ve  $ab = dl = apk^{-1}l \Rightarrow b = pk^{-1}l \in (p) \Rightarrow p \mid b$  bulunur. Böylece  $p \in R^*$  indirgenemez elemanının asal olduğu görülür.

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Hipotezden  $R$  halkasının TÇB1 koşulunu sağladığı görülür. Geriye TÇB2' nin ispatlanması kalır. Bunu indirgenemez ayrışımın uzunluğu üzerine tümevarım uygulayarak görmeye çalışalım.

İndirgenemez ayrışımın uzunluğu 1 olsun. Bu takdirde ayrışımın tek olduğu açıktır. İndirgenemez ayrışımın uzunluğu  $n-1$  olduğunda ayrışımın tek olduğunu kabul edelim ve  $n$  için indirgenemez ayrışımın tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki birimselden farklı  $r \in R^*$  için,  $m \geq n$  olmak üzere,  $r = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$  şeklinde iki indirgenemez ayrışım olsun. Hipotezden dolayı  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $p_i$  ve  $j = 1, 2, \dots, m$  için  $q_j$  elemanları asaldırlar.

$p_1 \mid p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m \Rightarrow \exists j = 1, 2, \dots, m$  öyle ki  $p_1 \mid q_j$  dir, varsayalım  $p_1 \mid q_1$  olsun. Bu takdirde  $p_1$  ve  $q_1$  ilgilidir. Böylece bir  $u$  birimsel elemanı için  $q_1 = u p_1$  elde edilir. Bu ifadeleri yukarıda yerine yazacak olursak;

$p_1 \dots p_n = u p_1 q_2 \dots q_m \Rightarrow p_2 \dots p_n = u q_2 \dots q_m$  elde edilir. Tümevarım kabulüne göre  $n-1 = m-1$  ve  $q$  elemanlarının uygun bir düzenlenmesinden sonra  $i = 2, 3, \dots, n$  için  $p_i$  ve  $q_i$  ilgilidir. Böylece,  $m \geq n$  olmak üzere,  $r = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$  şeklinde iki indirgenemez ayrışım olduğunda  $m = n$  ve  $q$  elemanlarının uygun bir şekilde düzenlenmesinden sonra  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $p_i$  ve  $q_i$  ilgili olduğu elde edilir.

Sonuç olarak her  $n$  için indirgenemez ayrışım tektir. Böylece  $R$  halkasının TÇB olduğu elde edilir.

**Teorem 3.2.3**  $R$  bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i)  $R$  bir TÇB dir
- (ii)  $R^*$  kümesinin birimselden farklı her elemanı asal elemanların bir çarpımı olarak ifade edilebilir.
- (iii) Sıfırdan ve  $R$  halkasından farklı her asal ideal sıfırdan farklı bir temel asal ideal içerir.

**İspat** (i)  $\Rightarrow$  (ii):  $R$ , TÇB olduğundan  $R^*$  kümesinin birimselden farklı her elemanı indirgenemez elemanların çarpımı olarak ifade edilebilir. Teorem 3.2.2(iv) den dolayı her indirgenemez asaldır. Sonuç olarak  $R^*$  kümesinin birimselden farklı her elemanı asal elemanların bir çarpımı olarak ifade edilebilir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii):  $P (\neq R)$  sıfırdan farklı,  $R$  halkasının bir asal ideali olsun. Bu takdirde  $P$  idealinin sıfırdan ve birimselden farklı olan bir  $a \in P$  elemanı vardır. (ii) ifadesinden dolayı

$i = 1, 2, \dots, n$  için  $p_i$  asal olmak üzere  $a = p_1 \dots p_n$  şeklinde ifade edilebilir.  $a = p_1 \dots p_n \in P \Rightarrow \exists i = 1, 2, \dots, n$  öyle ki  $p_i \in P \Rightarrow (p_i) \subset P$  elde edilir.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii): Varsayalım asalların ve birimsellerin bütün sonlu çarpımlarının kümesi  $S$  olsun.  $a, b \in S$  için  $a$  ve  $b$  asalların ve birimsellerin sonlu çarpımları olacağından  $ab$  çarpımı da asalların ve birimsellerin sonlu çarpımı olur. Böylece  $ab \in S$  elde edilir.  $S$  kümesi çarpımsal kapalıdır. Üstelik  $S$  kümesi saturated bir kümedir. Yani  $ab \in S$  olduğunda  $a \in S$  ve  $b \in S$  elde edilir. Gerçekten;  $ab \in S$  olsun. Bu takdirde  $ab$  asalların ve birimsellerin bir sonlu çarpımıdır, yani bir asal ayrışımı vardır. Bu ayrışımın uzunluğu üzerine tümevarım uygulayalım.

$n = 1$  için;  $ab = p_1$  olsun  $\Rightarrow p_1 \mid p_1 = ab \Rightarrow p_1 \mid a$  veya  $p_1 \mid b$  dir. Varsayalım  $p_1 \mid a$  olsun. Bu taktirde  $a = p_1 k$  olacak şekilde  $k \in R^*$  vardır. Bu eşitliği yerine yazacak olursak;  $ab = p_1 \Rightarrow p_1 kb = p_1 \Rightarrow kb = 1 \Rightarrow k$  ve  $b$  birimseldir.  $k$  birimsel olduğu için  $a$  bir asal ve bir birimselin sonlu çarpımı ve  $b$  birimsel olduğundan,  $a \in S$  ve  $b \in S$  elde edilir. Eğer  $p_1 \nmid a$  ise  $p_1 \mid b$  olur ve benzer şekilde yapılır.

$n - 1$  için doğru olsun, yani  $ab = p_1 \dots p_{n-1}$  olduğunda  $a \in S$  ve  $b \in S$  olsun.

$n$  için doğru olduğunu gösterelim.  $ab = p_1 \dots p_n$  bir asal ayrışım olsun.

$p_n \mid p_1 \dots p_n = ab \Rightarrow p_n \mid a$  veya  $p_n \mid b$  olur. Varsayalım  $p_n \mid a$  olsun. Bu taktirde  $a = p_n t$  olacak şekilde bir  $t \in R^*$  vardır. Elde edilenleri yukarıda yerine yazarsak;

$ab = p_1 \dots p_n \Rightarrow p_n tb = p_1 \dots p_n \Rightarrow tb = p_1 \dots p_{n-1}$  elde edilir. Tümevarım kabulüne göre  $t \in S$  ve  $b \in S$  dir. Böylece  $a \in S$  ve  $b \in S$  elde edilir.

Her  $n$  için iddia doğrudur.

Eğer  $S = R^*$  olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Varsayalım  $S \neq R^*$  olsun. Bu taktirde  $a \notin S$  olacak şekilde bir  $0 \neq a \in R$  vardır.

$(a) \cap S = \emptyset$  olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki  $(a) \cap S \neq \emptyset$  olsun Bu durumda  $\exists s \in (a) \cap S \Rightarrow s \in (a)$  ve  $s \in S \Rightarrow s = at$  ve  $s \in S (\exists t \in R^*) \Rightarrow at \in S$  ve  $S$  saturated olduğundan  $a \in S$  ve  $t \in S$  dir. Bu ise  $a \notin S$  olduğundan bir çelişkidir. Yani  $(a) \cap S = \emptyset$  olmalıdır.  $S$  ile kesişimleri boş olan bütün ideallerin kümesini  $A$  ile gösterelim.  $(a) \in A$  olduğundan  $A \neq \emptyset$  tur.  $A$  ideallerin artan zincir koşulunu sağlar. Gerçekten; aksini varsayalım, yani  $A$  kümesinin ideallerinin artan zinciri sonlu olmasın. Şimdi  $A$  kümesinin

ideallerinin  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots I_n \subseteq \dots$  şeklinde artan bir sonsuz zincirini dikkate alalım.  $J = \bigcup_{i \geq 1} I_i$

olsun.  $x \in J \Rightarrow \exists m \geq 1$  öyle ki  $x \in I_m \Rightarrow J \subseteq I_m$  ve  $m \geq 1$  için  $I_m \subseteq J \Rightarrow J = \bigcup_{i \geq 1} I_i = I_m$

elde edilir.  $m+1 \geq 1 \Rightarrow I_{m+1} \subseteq J = \bigcup_{i \geq 1} I_i = I_m \Rightarrow I_{m+1} \subseteq I_m$  olur ki bu bir çelişkidir.  $A'$ 'nin

ideallerinin artan zinciri sonlu olmalıdır. Varsayımımız yanlıştır. Yani  $A$  kümesi ideallerin artan zincir koşulunu sağlar. Zorn Lemmasına göre  $A$  kümesinin  $S$  ile kesişimi boş olan bir maximal  $I$  ideali vardır.  $I$  ideali  $R$  halkasında bir asal idealdir. Gerçekten; varsayalım

$x, y \notin I$  olsun.  $I \subseteq (I, x) \Rightarrow (I, x) \notin A$  ve  $I \subseteq (I, y) \Rightarrow (I, y) \notin A \Rightarrow (I, x) \cap S \neq \emptyset$  ve  $(I, y) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow \exists s_1 \in (I, x) \cap S \Rightarrow i_1 \in I$  için  $s_1 = i_1 + xr_1$ , ( $r_1 \in R$ ,  $s_1 \in S$ )

$\exists s_2 \in (I, y) \cap S \Rightarrow i_2 \in I$  için  $s_2 = i_2 + yr_2$ , ( $r_2 \in R$ ,  $s_2 \in S$ )

$\Rightarrow s_1 s_2 = (i_1 + xr_1)(i_2 + yr_2) = i_1(i_2 + yr_2) + xr_1 i_2 + xr_1 yr_2$

Burada  $xy \in I \Rightarrow s_1 s_2 = (i_1 + xr_1)(i_2 + yr_2) = i_1(i_2 + yr_2) + xr_1 i_2 + xr_1 yr_2 \in I \cap S$  olur ki bu bir çelişkidir. Yani  $xy \notin I$  olmalıdır. Böylece  $I$  idealinin bir asal ideal olduğu görülür.

Hipotezden dolayı  $\exists 0 \neq p \in R$  asal elemanı öyle ki  $(p) \subseteq I$  dır. Böylece  $p \in I$  ve  $I \cap S = \emptyset$  olduğundan  $p \notin S$  elde edilir. Bu ise  $S$  kümesinin tanımıyla çelişir. Varsayımımız yanlıştır.  $S = R^*$  olmalıdır.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Her asal elemanın indirgenemez olduğu dikkate alınır. TÇB1' in sağlandığı görülür. Şimdi her indirgenemezın asal olduğunu gösterirsek Teorem 3.2.2(iv)' den dolayı ispat biter.

$q \in R$  herhangi bir indirgenemez eleman olsun. Hipotezden dolayı  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $p_i$  elemanları asal olmak üzere  $q = p_1 \dots p_n$  şeklinde ifade edilebilir.

$p_1 \mid p_1 \dots p_n = q \Rightarrow q = p_1 k \quad (\exists k \in R^*)$

$q$  indirgenemez ve  $p_1$  asal olduğundan  $q$  ve  $p_1$  ilgilidir.  $q = p_1 \dots p_n$  ve  $q$  ile  $p_1$  ilgili olduğundan  $p_2, p_3, \dots, p_n$  elemanları birimseldir. Böylece  $n = 1$  ve  $q = p_1$  olarak alabiliriz. Sonuç olarak  $q$  keyfi indirgenemez elemanının asal olduğu elde edilir.

**Teorem 3.2.4**  $R$  bir temel ideal bölgesi ve  $(a_1) \subset (a_2) \subset \dots$ ,  $R$  halkasının ideallerinin bir zinciri olsun. Bu taktirde  $\exists n \in \mathbb{N}^*$  öyle ki  $\forall j \geq n$  için  $(a_j) = (a_n)$  dir.



**İspat**  $A = \bigcup_{i \geq 1} (a_i)$  birleşimini ele alalım.

**iddia:**  $A$  bir idealdir.

$b, c \in A$  olsun  $\Rightarrow \exists i, j \geq 1$  öyle ki  $b \in (a_i), c \in (a_j)$  sağlanır. Burada ya  $i \leq j$  ya da  $i \geq j$  olmalıdır. Varsayalım  $i \geq j$  olsun. Böylece  $(a_j) \subset (a_i)$  ve  $b, c \in (a_i)$  elde edilir.  $(a_i)$  ideal olduğundan  $b - c \in (a_i) \subset A$  olur. ( $i \leq j$  için benzer şekilde yapılır.)

Benzer şekilde  $r \in R$  ve  $b \in A$  olsun  $\Rightarrow \exists i \geq 1$  öyle ki  $b \in (a_i)$  ve  $(a_i)$  bir ideal olduğundan  $rb \in (a_i) \subset A$  ve  $br \in (a_i) \subset A$  elde edilir. Böylece  $A$  bir idealdir.

$R$  temel ideal bölgesi olduğundan  $\exists a \in R$  öyle ki  $A = (a)$  dır.  $a \in (a) = A = \bigcup_{i \geq 1} (a_i)$  olduğundan  $\exists n \geq 1$  öyle ki  $a \in (a_n) \Rightarrow (a) \subset (a_n)$  elde edilir. Böylece

$\forall j \geq n$  için  $(a) \subset (a_n) \subset (a_j) \subset A = (a) \Rightarrow \forall j \geq n$  için  $(a_n) = (a_j)$  olduğu görülür.

### **Teorem 3.2.5 (Recursion Teoremi)**

$S$  bir küme,  $a \in S$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $f_n : S \rightarrow S$  bir fonksiyon ise  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow S$  öyle ki  $\varphi(0) = a$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\varphi(n+1) = f_n(\varphi(n))$  şeklinde tanımlı bir tek  $\varphi$  fonksiyonu vardır.

### **Teorem 3.2.6** Her temel ideal bölgesi bir TÇB dir.

**İspat**  $R$  bir temel ideal bölgesi ve  $S$  de  $R$  halkasının, indirgenemez elemanların bir sonlu çarpımı olarak ifade edilemeyen, sıfırdan ve birimselden farklı bütün elemanlarının kümesi olsun.  $S$  kümesinin boş olduğunu gösterirsek TÇB1 sağlanır. Varsayalım  $S \neq \emptyset$  olsun. Bu taktirde bir  $a \in S$  vardır.  $a \in S$  birimselden farklı olduğundan  $(a)$  bir temel idealdir. Birimli, sıfırdan farklı bir  $R$  halkasının her ideali bir maximal idealde içerildiğinden  $(a) \subset (c)$  olacak şekilde bir  $(c)$  maximal ideali vardır. Aynı zamanda  $(c)$   $R$  halkasının öz temel ideallerinin kümesinin de maximal elemanıdır. Bu taktirde  $c \in R$  indirgenemezdir.  $(a) \subset (c)$  olduğundan  $c \mid a$  elde edilir. Böylece seçme aksiyomundan dolayı  $\forall a \in S$  elemanı için indirgenemez bir  $c_a$  böleni seçilebilir.  $R$  bir tamlık bölgesi olduğundan,  $c_a$  için  $c_a x_a = a$  olacak şekilde tek türlü belirli  $x_a \in R$  vardır.  $x_a \in S$  dir. Gerçekten;  $x_a$  birimsel olsaydı  $c_a x_a = a$  ifadesinden  $a$  indirgenemez elde edilirdi ki, bu bir çelişkidir. Eğer  $x_a$  birimselden farklı ve  $S$  kümesinde değilse  $x_a$  indirgenemezlerin çarpımı olarak çarpanlarına ayrılışa sahiptir. Bu taktirde  $a$  elemanı da indirgenemez elemanların bir çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu  $a \in S$  olduğundan



bir çelişkidir. Böylece  $x_a \in S$  olmalıdır. Üstelik  $x_a \mid a$  olduğundan  $(a) \subsetneq (x_a)$  elde edilir. Gerçekten; eğer  $(a) = (x_a)$  olsa idi  $\exists y \in R$  öyle ki  $x_a = ay$  olur. Bu taktirde  $a = x_a c_a = ay c_a \Rightarrow 1 = y c_a$  olup  $c_a \in R$  elemanının birimsel olduğu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani  $(a) \subsetneq (x_a)$  olmalıdır.

$f : S \rightarrow S$   
 $a \rightarrow f(a) = x_a$  şeklinde tanımlı dönüşüm iyi tanımlıdır. Recursion teoremine göre

$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow S$ ,  $\varphi(0) = a$  ve  $\varphi(n+1) = f(\varphi(n)) = x_{\varphi(n)}$  ( $n \geq 0$ ) şeklinde tanımlı tek türlü belirli bir  $\varphi$  fonksiyonu vardır. Burada  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $f = f_n$  dir. Eğer  $\varphi(n)$ ' i  $a_n$  ile gösterirsek  $S$ ' nin  $a, a_1, a_2, \dots$  elemanlarının  $a_1 = x_a; a_2 = x_{a_1}; \dots; a_{n+1} = x_{a_n}$  şeklinde bir serisini elde ederiz. Bundan dolayı  $(a) \subsetneq (a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq \dots$  şeklinde temel ideallerin sonsuz bir artan zincirini elde ederiz. Temel ideal bölgesi öz temel ideallerin artan zincir koşulunu

sağladığından bu bir çelişkidir. Böylece  $S$  kümesi boş olmalıdır.

Eğer  $a = c_1 \dots c_n = d_1 \dots d_m$ ,  $a \in R$  elemanının iki indirgenemez ayrışımı ise  $\exists i = 1, 2, \dots, m$  öyle ki  $c_1 \mid d_i$  ve  $c_1$  birimselden farklı olduğundan  $c_1$  ve  $d_i$  ilgilidir. Bu şekilde devam ederek tümevarım ile indirgenemez ayrışımın tekliği kolayca gösterilebilir.

### 3.3 R Halkası Kullanılarak Elde Edilen Halkaların İncelenmesi

Burada TÇB olan bir  $R$  halkası verildiğinde,  $R$  halkasından yararlanılarak elde edilen polinom halkası, kuvvet serileri halkası, kesir halkası ve bölüm halkalarının da TÇB olup olmadıkları incelenecektir.

**Teorem 3.3.1**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  bir TÇB ise  $R[x]$  polinom halkası da bir TÇB dir.

**İspat** Bu teoremin ispatı Sonuç 3.3.6 da verilecektir.

**Teorem 3.3.2**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  bir TÇB ise  $R[[x]]$  kuvvet serileri halkasının bir TÇB olması gerekmez.

**İspat** Pierre Samuel (1961) aksi bir örnek vermiştir.

**Teorem 3.3.3**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  bir temel ideal bölgesi ise  $R[[x]]$  kuvvet serileri halkası bir TÇB dir.

**İspat** Bunun ispatını Teorem 3.2.3' ü kullanarak yapmaya çalışalım.  $P$ ,  $R[[x]]$  kuvvet serileri halkasında sıfırdan farklı bir asal ideal olsun.

$$\psi : R[[x]] \rightarrow R$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \rightarrow \psi \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) = a_0 \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

$\psi$  iyi tanımlıdır. Gerçekten;  $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ,  $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$  için  $f = g$  olsun. Bu taktirde

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \Rightarrow \forall i = 0, 1, 2, \dots \text{ için } a_i = b_i \text{ dir. Böylece } \psi(f) = a_0 = b_0 = \psi(g)$$

olduğundan  $\psi$  iyi tanımlıdır.

Şimdi  $\psi$  dönüşümünün bir halka homomorfizması olup olmadığını inceleyelim.

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]] \text{ elemanları için toplama ve çarpma işlemlerinin}$$

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i, \quad f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \text{ ve } c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \text{ şeklinde}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\psi(f + g) = a_0 + b_0 = \psi(f) + \psi(g) \Rightarrow \psi \text{ toplamayı korur.}$$

$$\psi(f \cdot g) = c_0 = a_0 b_0 = \psi(f) \psi(g) \Rightarrow \psi \text{ çarpmayı korur.}$$

Sonuç olarak  $\psi$  bir halka homomorfizmasıdır.

$$\text{Ker } \psi = \left\{ f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]] \mid \psi \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) = a_0 = 0_R, a_i \in R, i = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$$

$$= \left\{ f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R, i = 1, 2, \dots \right\}$$

$$\text{Ker } \psi \subset (x) \text{ dir. Gerçekten; } a_1 x \in (x); a_2 x^2 \in (x); \dots; a_n x^n \in (x); \dots \Rightarrow$$

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \in (x) \Rightarrow \text{Ker } \psi \text{ ' in her bir elemanı } (x) \text{ idealindedir.}$$

$$\text{Şimdi } t \in (x) \text{ olsun. Bu taktirde } \exists f' \in R[[x]] \text{ öyle ki } t = f' x \Rightarrow t \in \text{Ker } \psi \Rightarrow (x) \subset \text{Ker } \psi$$

Sonuç olarak  $\text{Ker } \psi = (x)$  elde edilir.

$$\forall a_0 \in R \text{ için } \exists f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]] \text{ öyle ki } \psi(f) = a_0 \Rightarrow \psi \text{ örtendir.}$$

Homomorfi Teoremine göre  $R[[x]]/(x) \cong R$  olduğunu söyleyebiliriz.  $R$  bir tamlık bölgesi olduğundan ona izomorf olan  $R[[x]]/(x)$  bölüm halkası da bir tamlık bölgesidir. Böylece  $(x)$  ideali  $R[[x]]$  halkasının bir asal idealidir.  $x \in P \Rightarrow (x) \subset P$  olduğundan Teorem 3.2.3 (iii) den dolayı  $R[[x]]$  bir TÇB dir. Şimdi varsayalım ki  $x \notin P$  olsun.  $P$ ,  $R[[x]]$  halkasının bir ideali ve  $\psi$  örten halka homomorfizması olduğundan  $\psi(P)$ ,  $R$  halkasının bir idealidir.  $R$  bir temel ideal bölgesi olduğundan  $\psi(P) = (\alpha)$  olacak şekilde bir  $\alpha \in R$  vardır.

$\alpha \in (\alpha) = \psi(P) \Rightarrow \exists f \in P$  öyle ki  $\alpha = \psi(f)$ . Eğer  $P = (f)$  olduğunu gösterirsek ispat biter.

$g \in P$  ( $P$ ,  $R[[x]]$  de sıfırdan farklı bir asal ideal) ve  $g = a + a_1x + \dots$  olsun.

$\psi(g) = a \in \psi(P) = (\alpha) \Rightarrow \exists k \in R$  öyle ki  $a = k\alpha$

$g - kf \in P$  için  $\psi(g - kf) = \psi(g) - k\psi(f) = a - k\alpha = a - a = 0 \Rightarrow g - kf \in \text{Ker } \psi = (x)$

$\Rightarrow \exists h \in R[[x]]$  öyle ki  $g - kf = xh \in P$  dir.  $P$  asal ideal ve  $x \notin P$  kabul edildiğinden  $h \in P$

elde edilir.  $h \in P$  için  $h = b + b_1x + \dots$  olsun.  $\psi(h) = b \in \psi(P) = (\alpha) \Rightarrow b = l\alpha$  olacak şekilde bir  $l \in R$  vardır.  $P$  ideal ve  $h, f \in P$  olduğundan  $h - lf \in P$  dir.

$\psi(h - lf) = \psi(h) - l\psi(f) = b - l\alpha = b - b = 0 \Rightarrow h - lf \in \text{Ker } \psi = (x) \Rightarrow \exists m \in R[[x]]$  öyle ki  $h - lf = xm$  elde edilir.

$g - kf = xh = x(xm + lf) = x^2m + xlf \Rightarrow g = (k + lx)f + x^2m$  olur. Bu şekilde devam edilirse  $g \in P$  elemanı  $f$ 'nin terimleri ile ifade edilebilir. Böylece  $g \in (f)$  olduğu görülür.

Buradan  $P \subset (f)$  bulunur. Diğer taraftan  $f \in P \Rightarrow (f) \subset P$  olduğundan  $P = (f)$  elde edilir.

Böylece Teorem 3.2.3 (iii) den dolayı  $R[[x]]$  bir TÇB elde edilir.

Şimdi  $R$  bir halka,  $\emptyset \neq S$   $R$  halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi olmak üzere  $S^{-1}R$  kesir halkasının durumunu inceleyelim.

**Teorem 3.3.4**  $R$  bir halka ve  $\emptyset \neq S$ ,  $R^*$ 'ın herhangi bir çarpımsal alt kümesi olsun. Bu takdirde  $R$  bir TÇB ise  $S^{-1}R$  kesir halkası da bir TÇB dir.

**İspat** İlk olarak  $p \in R$  indirgenemez olduğunda  $p/s$  birimselden farklı elemanının  $S^{-1}R$  de asal olduğunu gösterelim.

$p/s, a/s_1, b/s_2 \in S^{-1}R$  için  $p/s \mid a/s_1, b/s_2$  olsun  $\Rightarrow \frac{ab}{s_1 s_2} = \frac{pt}{ss_3}$  olacak şekilde  $t/s_3 \in S^{-1}R$

vardır  $\Rightarrow pts_1 s_2 = abss_3 \Rightarrow pk = abs'$  ( $k = ts_1 s_2 \in R, s' = ss_3 \in S$ )  $\Rightarrow p \mid abs'$

$p$  indirgenemez ve  $R$  TÇB olduğundan  $p$  asaldır. Böylece  $p \nmid s'$  veya  $p \mid ab$  dir.

$p \mid s'$  olsun  $\Rightarrow p \mid ss_3 \Rightarrow ss_3 = pr$  ( $\exists r \in R^*$ )  $\Rightarrow p/s, S^{-1}R$  halkasında birimsel olur ki bu bir çelişkidir. Yani  $p \mid s'$  olsun varsayımımız yanlıştır. Böylece  $p \mid ab$  ifadesi doğrudur.

Yine  $p$  elemanın asal olduğunu kullanırsak  $p \mid a$  veya  $p \mid b$  elde edilir.  $p \mid a$  olsun  $\Rightarrow a = pt \Rightarrow ss'a = ptss' \Rightarrow a/ss' = pt/ss' \Rightarrow a/s_1 = (p/s)(t/s') \Rightarrow p/s \mid a/s_1$  elde edilir.

Böylece  $p$  indirgenemez olduğunda  $p/s$  birimselden farklı elemanı  $S^{-1}R$  halkasında asaldır.

$s, t \in S$  için  $ss/t \in S^{-1}R$  elemanının tersi  $t/ss \in S^{-1}R$  olduğundan  $ss/t \in S^{-1}R$  de birimseldir.  $ps/t = (p/s)(ss/t)$  olduğundan asal eleman tanımına göre  $ps/t$  bir asal elemandır.  $a/s \in S^{-1}R$  sıfırdan ve birimselden farklı bir eleman olsun. Bu taktirde  $a \in R$  birimselden ve sıfırdan farklıdır.  $R$  TÇB olduğundan  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) indirgenemezler olmak üzere  $a \in R$  'nin  $a = p_1 \dots p_n$  şeklinde bir indirgenemez ayrışımı vardır.

$a/s = (p_1/s)(p_2/s) \dots (p_n/s)$  ifadesi  $a/s \in S^{-1}R$  elemanının  $S^{-1}R$  de bir asal ayrışımıdır.

Teorem 3.2.3(ii) den dolayı  $S^{-1}R$  halkasının bir TÇB olduğu elde edilir.

**Teorem 3.3.5** Bir  $R$  halkası TÇB1' i sağlasın ve  $S$  asalların çarpımını içeren  $R^*$  ' in çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Bu taktirde  $S^{-1}R$  bir TÇB ise  $R$  bir TÇB dir.

**İspat** Hipotezden  $R$  halkasının TÇB1'i sağladığı biliniyor. Şimdi  $R$  halkasındaki her indirgenemez elemanın asal olduğunu gösterirsek Teorem 3.2.2(iv) den dolayı  $R$  halkasının bir TÇB olduğu görülür. Varsayalım  $p \in R$  indirgenemez olsun. Bu taktirde  $p/s \in S^{-1}R$  halkasında ya indirgenemezdir yada birimseldir. Gerçekten; eğer  $s \in S$  olmak üzere  $p \mid s$  ise  $s = pt$  olacak şekilde  $t \in R^*$  vardır. Böylece  $p/s$  nin  $S^{-1}R$  halkasında birimsel olduğu elde edilir. Şimdi varsayalım  $\forall s \in S$  için  $p \nmid s$  ve  $S^{-1}R$  de  $p/s = (a/s_1)(b/s_2)$  olsun. Bu taktirde  $ps_1 s_2 = sab$  elde edilir.  $s_1 s_2, s \in S$  olduğundan her biri asalların bir çarpımı olarak ifade edilebilir.  $s_1 s_2 = q_1 \dots q_m$  ve  $s = r_1 \dots r_n$  olsun  $p q_1 \dots q_m = a b r_1 \dots r_n$  elde edilir.

$r_1 \mid abr_1 \dots r_n = pq_1 \dots q_m \Rightarrow \exists j=1,2,\dots,m$  öyle ki  $r_1 \mid q_j$  olur.

(Burada  $i=1,2,\dots,n$  için  $r_i \nmid p$  dir. Gerçekten; eğer  $r_i \mid p \Rightarrow p=r_i k$  şeklindedir.

$$s=r_1 \dots r_i \dots r_n \Rightarrow sk=r_1 \dots r_i k \dots r_n = r_1 \dots p \dots r_n \Rightarrow p \mid r_1 \dots p \dots r_n = sk$$

iddia:  $p \nmid k$

$p \mid k \Rightarrow k=pt \Rightarrow p=r_i k=r_i pt \Rightarrow r_i t=1 \Rightarrow r_i$  birimsel olur ki bu  $r_i$ 'nin asal olması ile çelişir. Böylece  $(p,k)=1$  ve  $p \mid sk \Rightarrow p \mid s$  elde edilir ki bu bir çelişkidir. Yani  $i=1,2,\dots,n$  için  $r_i \nmid p$  olmalıdır.)

$r_1 \mid q_1$  olsun  $\Rightarrow r_1$  ve  $q_1$  asal olduklarından ilgilidir. Böylece bir  $u_1$  birimsel elemanı için  $q_1=r_1 u_1$  şeklindedir  $\Rightarrow pq_1 \dots q_m = abr_1 \dots r_n \Rightarrow pr_1 u_1 q_2 \dots q_m = abr_1 \dots r_n \Rightarrow pu_1 q_2 \dots q_m = abr_2 \dots r_n$

Benzer şekilde  $q$  elemanları bitinceye kadar devam eder ve  $p$ 'nin yanındaki birimselleri de öbür tarafa atarsak  $p=a'b'$  elde edilir.  $p \in R$  indirgenemez olduğundan  $a'$  veya  $b'$  birimsel olmalıdır. Bu taktirde  $a$  veya  $b$  birimsel elde edilir. Böylece  $a/s_1$  veya  $b/s_2$   $S^{-1}R$  halkasında birimsel olmalıdır  $\Rightarrow p/s$   $S^{-1}R$  de indirgenemez olur.

Şimdi aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

(i)  $p/s$ ,  $S^{-1}R$  halkasında indirgenemezdir. Aynı zamanda  $S^{-1}R$  bir TÇB olduğundan  $p/s$   $S^{-1}R$  halkasında asaldır. Şimdi  $a$  ve  $b$  birimselden farklı olmak üzere  $R$  halkasında  $p \mid ab$  olsun. Bu taktirde  $ab=pk$  olacak şekilde bir  $k \in R$  vardır. Böylece  $abss=pkss \Rightarrow (a/s)(b/s)=(p/s)(k/s) \Rightarrow S^{-1}R$  de  $p/s \mid (a/s)(b/s)$  elde edilir.  $p/s$   $S^{-1}R$  halkasında asal olduğundan  $S^{-1}R$  de  $p/s \mid a/s$  veya  $p/s \mid b/s$  dir.  $p/s \mid a/s$  olsun  $\Rightarrow a/s=(p/s)(k/t)$  olacak şekilde bir  $k/t \in S^{-1}R$  elemanı vardır  $\Rightarrow at=pk$  elde edilir.  $t \in S$  olduğundan  $t=q_1 \dots q_m$  olacak şekilde  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) asal elemanları vardır  $\Rightarrow aq_1 \dots q_m = pk$  elde edilir.  $p \nmid t$  olmalıdır. Aksi taktirde  $p/s$   $S^{-1}R$  de birimsel olur ki bu  $p/s$  elemanının indirgenemez olması ile çelişir.

$i=1,2,\dots,m$  için  $q_i \nmid p$  olduğu yukarıda ki gibi gösterilebilir.

$aq_1 \dots q_m = pk$  ve  $i=1,2,\dots,m$  için  $q_i \nmid p$  olduğundan  $q_1 \mid aq_1 \dots q_m = pk \Rightarrow q_1 \mid k \Rightarrow k=q_1 k_1 \Rightarrow aq_1 \dots q_m = pq_1 k_1 \Rightarrow aq_2 \dots q_m = pk_1$

Benzer şekilde  $q$  elemanları bitinceye kadar işleme devam edecek olursak  $a=pk'$  yani

$p \mid a$  bulunur. Bu taktirde  $p$ ,  $R$  halkasında asaldır.

(ii)  $p/s$ ,  $S^{-1}R$  halkasında birimseldir. Bu taktirde  $p \mid t$  olacak şekilde bir  $t \in S$  elemanı vardır.  $\exists k \in R$  öyle ki  $t = kp$  yazılır.  $t \in S$  olduğundan  $t = t_1 \dots t_r$  olacak şekilde  $t_i$  ( $i=1,2,\dots,r$ ) asal elemanları vardır. Böylece  $t_1 \dots t_r = kp$  olduğu görülür.  $t \in S$  elemanının asal çarpanları birer birer incelendiği zaman bu asal çarpanlardan en az biri  $p$ 'yi böler. Varsayalım  $t_1 \mid p$  olsun  $\Rightarrow p = t_1 s_1$  elde edilir. Bu ifadeyi yukarıda yerine yazarsak  $t_1 \dots t_r = kp \Rightarrow t_1 \dots t_r = k t_1 s_1 \Rightarrow t_2 \dots t_r = k s_1$  elde edilir. Diğer asal çarpanlarda teker teker yok edilirse  $p$  elemanının  $t_1$  asal elemanı ile ilgili olduğu görülür. Böylece  $p$ 'nin kendisi asaldır.

**Sonuç 3.3.6**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  bir TÇB ise  $R[x]$  polinom halkası da bir TÇB dir.

**İspat**  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı olan bütün elemanlarını içerdiğinden Teorem 2.4.5(iii) den dolayı  $R_{R^*}$  bir cisimdir ve buna kesir cismi denir. Şimdi  $K = R_{R^*}$  kesir cismini dikkate alalım.  $K$  bir cisim olduğundan  $K[x] = R[x]_{R^*}$  Euclid bölgesidir. Böylece  $K[x] = R[x]_{R^*}$  bir TÇB dir. Şimdi  $f(x) \in R[x]$  indirgenemez olsun.  $R[x] \subset K[x]$  ve  $K[x]$  TÇB olduğundan  $f(x) \in K[x]$  indirgenemez elemanı  $K[x]$  halkasında asaldır.

$R$  bir TÇB olduğundan,  $S$  asalların çarpımlarını içermek üzere  $K[x] = R[x]_{R^*} = R[x]_S$  de bulunan asallar Gauss Lemmasına göre  $R[x]$  halkasında da asaldırlar. Burada  $S = R^*$  olduğu daha önceden yapıldığı gibi gösterilebilir. Böylece  $f(x) \in R[x]$  indirgenemez elemanının  $R[x]$  halkasında da asal olduğu görülür. Şimdi  $R[x]$  halkasının TÇB1'i sağladığını gösterirsek bir önceki teoremden dolayı ispat tamamlanır.

$R[x]$  halkasında birimselden farklı derecesi sıfır olan her polinomun bir indirgenemez ayrışımı vardır. Çünkü derecesi sıfır olan polinomlar sabitlerdir ve  $R$  halkasının elemanlarıdır.  $R$  TÇB olduğundan bu elemanların indirgenemez ayrışimleri vardır. İndirgenemez ayrışımında bulunan bütün elemanlar  $R \subset R[x]$  olduğundan  $R[x]$  halkasında da indirgenemez elemanlardır.

Derecesi  $n$ 'den küçük olan bütün polinomların  $R[x]$  halkasında bir indirgenemez ayrışımı olduğunu kabul edelim.

$f \in R[x]$  derecesi  $n$  olan ( $n > 0$ ) bir polinom olsun. Bu taktirde  $f = cf'$  olacak şekilde  $c \in R$  ve  $f' \in R[x]$  ilkel polinomu vardır.  $c \in R$  olduğundan  $c$ 'nin  $R[x]$  halkasında bir

indirgenemez ayrışımı vardır. Bu yüzden  $f' \in R[x]$  ilkel polinomunun bir indirgenemez ayrışımına sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer  $f' \in R[x]$  indirgenemez kabul edilirse ispat biter. Şimdi varsayalım  $f' \in R[x]$  indirgenebilir olsun. Bu taktirde  $f' = gh$  olacak şekilde  $g, h \in R[x]$  polinomları vardır. Üstelik  $g$  ve  $h$  sabitten farklıdırlar. Gerçekten; varsayalım  $g \in R[x]$  sabit olsun. Böylece  $c(f') = c(gh) = g$  olur ki bu  $f' \in R[x]$  polinomunun ilkel olması ile çelişir. Buradan  $0 < d^o g, d^o h < n$  elde edilir. Tümevarım kabulüne göre  $g$  ve  $h$  polinomlarından her birinin  $R[x]$  halkasında bir indirgenemez ayrışımı olduğu görülür. Böylece  $f'$  bir indirgenemez ayrışımına sahiptir. Yani  $R[x]$  TÇB1'i sağlar.

Bu bölümde son olarak  $P(\neq R)$ ,  $R$  halkasının bir asal ideali olmak üzere  $R/P$  bölüm halkasının TÇB olma durumunu inceleyelim.

**Teorem 3.3.7**  $R$  bir halka ve  $P(\neq R)$ ,  $R$  halkasının bir asal ideali olsun.  $R$  bir TÇB ise  $R/P$  bölüm halkasının bir TÇB olması gerekmez.

**İspat** Aksi bir örnek vererek görmeye çalışalım.  $R = \mathbb{Z}[x]$  ve  $P = (x^2 + 4)$  olsun.

$$f(x) = x^2 + 4 \in \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \text{ ve } d^o f = 2$$

$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  halkasında indirgenebilir olsun. Bu taktirde  $f(\alpha_0) = 0$  olacak şekilde bir

$\alpha_0 \in \mathbb{Q}$  vardır. Buradan  $f(\alpha_0) = \alpha_0^2 + 4 = 0 \Rightarrow \alpha_0^2 = -4$  elde edilir.  $\alpha_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}$ ,

$$(p, q) = 1 \text{ öyle ki } \alpha_0 = \frac{p}{q} \Rightarrow \alpha_0^2 = \frac{p^2}{q^2} = -4 \Rightarrow p^2 \text{ ve } q^2 \text{ zıt işaretli olmalı} \Rightarrow (p^2 < 0 \text{ ve } q^2 > 0) \text{ veya } (p^2 > 0 \text{ ve } q^2 < 0) \text{ olmalı.}$$

Hiç bir tamsayının karesi sıfırdan küçük olamayacağından her iki durumda da bir çelişki elde edilir. Böylece  $f(x) = x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$  de

indirgenemez olmalıdır.  $\mathbb{Z}$  bir TÇB ve  $f(x) = x^2 + 4 \in \mathbb{Z}[x]$  ilkel olduğundan  $\mathbb{Z}[x]$

halkasında da indirgenemezdir.  $\mathbb{Z}$  bir TÇB olduğundan Sonuç 3.3.6 dan dolayı  $\mathbb{Z}[x]$  bir TÇB

dir. Böylece  $f(x) = x^2 + 4 \in \mathbb{Z}[x]$  indirgenemez polinomu  $\mathbb{Z}[x]$  de asaldır.

Burada  $g \in \mathbb{Z}[x]$  polinomunun kalan sınıfını  $\bar{g}$  ile gösterelim.

$$\begin{aligned} \bar{x} \bar{x} &= [x + (x^2 + 4)] [x + (x^2 + 4)] = x^2 + (x^2 + 4) = [x^2 + 4 - 4] + (x^2 + 4) = -4 + (x^2 + 4) \\ &= [-2 + (x^2 + 4)] [2 + (x^2 + 4)] = (-\bar{2}) \bar{2} \end{aligned}$$



Burada  $\bar{2}$ ,  $-\bar{2}$ ,  $\bar{x}$  indirgenemez elemanlar ve birbirleri ile ilgili olmadıkları kolayca görülür.

Sonuç olarak  $-\bar{4} \in \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 4)$  elemanının birbirleri ile ilgili olmayan indirgenemez elemanlarla iki değişik şekilde yazılabileceğini gördük. Böylece  $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 4)$  bir TÇB değildir.

**Teorem 3.3.8**  $R$  bir halka ve  $P (\neq R)$ ,  $R$  halkasının bir asal ideali olsun.  $R$  bir TÇB ve  $R$  halkasının herhangi iki temel idealinin toplamı yine  $R$  halkasının bir temel ideali oluyorsa  $R/P$  bölüm halkası da bir TÇB dir.

**İspat**  $p \in R$  indirgenemez eleman ve  $p + P$  sıfırdan ve birimselden farklı olmak üzere  $p + P = (a + P)(b + P)$  olsun  $\Rightarrow p + P = ab + P \Rightarrow p - ab \in P \Rightarrow p = ab + k$  olacak şekilde bir  $k \in P$  vardır.  $b, k \in R^*$  için hipotezden dolayı  $(b) + (k) = (d)$  olacak şekilde bir  $d \in R$  vardır.  $p = ab + k \in (b) + (k) = (d) \Rightarrow p \in (d) \Rightarrow d \mid p$  bulunur.  $p \in R$  indirgenemez eleman ve  $R$  TÇB olduğundan  $p \in R$  asaldir. Böylece  $d \in R$  ya birimsel ya da  $p$  elemanının ilgilisidir. Eğer  $d$  birimsel ise  $dd' = 1_R$  olacak şekilde bir  $d' \in R$  vardır. Buradan  $1_R = dd' \in (d) \Rightarrow (d) = R \Rightarrow (b) + (k) = (d) = R$  elde edilir.  $1_R \in (d) = (b) + (k)$  olduğundan  $1_R = bs + kt$  olacak şekilde  $s, t \in R$  bulunabilir.  $k \in P$  ve  $P$  ideal olduğundan  $kt \in P$  dir  $\Rightarrow 1_R - bs = kt \in P \Rightarrow 1_R - bs + P = P \Rightarrow$

$$1_R + P = bs + P \Rightarrow 1_R + P = (b + P)(s + P) \Rightarrow b + P \quad R/P \text{ bölüm halkasında birimseldir.}$$

Eğer  $d, p$  elemanının ilgilisi ise  $d \mid p$  ve  $p \mid d$  olur. Bu taktirde  $(p) \subset (d)$  ve  $(d) \subset (p) \Rightarrow (p) = (d)$  elde edilir  $\Rightarrow (b) + (k) = (d) = (p)$  olduğu görülür. Teorem 2.2.13(ii) den dolayı  $b, k \in R^*$  için  $(b, k) = p$  dir.  $p \mid b \Rightarrow b = ps$  olacak şekilde bir  $s \in R$  vardır.  $ps = b \Rightarrow ps - b = 0$  bulunur. Biz  $R/P$  bölüm halkasında sıfır elemanının  $0 + P = P$  şeklinde olduğunu biliyoruz. Bulduğumuz değerleri yerine yazarsak;

$$0 + P = P \Rightarrow (ps - b) + P = P \Rightarrow ps + P = b + P \Rightarrow (p + P)(s + P) = b + P \Rightarrow p + P \mid b + P$$

$$(p + P) = (a + P)(b + P) = (a + P)(p + P)(s + P) \Rightarrow 1_R + P = (a + P)(s + P) \Rightarrow a + P$$

birimseldir.

Her iki durumda da  $p + P \in R/P$  indirgenemezdir. Böylece  $p \in R$  indirgenemez olduğunda  $p + P \in R/P$  elemanının indirgenemez olduğu görülür.



Şimdi sıfırdan ve birimselden farklı  $r + P \in R/P$  keyfi elemanını dikkate alalım. Bu taktirde  $r \in R$  elemanı sıfırdan ve birimselden farklıdır.  $R$  bir TÇB olduğundan  $r \in R$  elemanının  $r = q_1 \dots q_m$  şeklinde bir indirgenemez ayrışımı vardır. Buradan

$r + P = (q_1 \dots q_m) + P = (q_1 + P) \dots (q_m + P)$  elde edilir. Burada  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $q_i$  elemanları indirgenemez olduğundan ispatın birinci kısmından dolayı  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $q_i + P$  elemanları da indirgenemezdir. Böylece sıfırdan ve birimselden farklı  $r + P \in R/P$  keyfi elemanının bir indirgenemez ayrışımı elde edilir ve TÇB1' in sağlandığı görülür.

TÇB2 için  $R/P$  bölüm halkasındaki her indirgenemez elemanın asal olduğunu göstereyim.

$p \in R$  indirgenemez olmak üzere herhangi bir  $p + P \in R/P$  indirgenemez elemanını dikkate

alalım. Burada  $p \in R$  elemanı aynı zamanda asaldır. Varsayalım  $p + P \mid (a + P)(b + P)$  yani

$$(a + P)(b + P) = (p + P)(k + P) \text{ olsun } \Rightarrow ab + P = pk + P \Rightarrow ab - pk \in P \Rightarrow ab = pk + l$$

olacak şekilde bir  $l \in P$  vardır. Hipotezden dolayı  $p, a \in R^*$  için  $(p) + (a) = (d)$  olacak

şekilde bir  $d \in R$  bulunabilir. Teorem 2.2.13(ii) den dolayı  $(p, a) = d$  olur. Böylece  $d \mid p$

olduğu görülür.  $p \in R$  asal olduğundan  $d$  ya birimseldir ya da  $p$  elemanının ilgisidir. Eğer

$d$  birimsel ise yukarıda yapıldığı gibi hareket edilerek  $(p) + (a) = (d) = R$  olduğu bulunur.

$1_R \in (d) = (p) + (a) = R \Rightarrow 1_R = pt + as$  olacak şekilde  $t, s \in R$  elemanları vardır. Her iki

tarafı  $b$  ile çarparsak;  $b = bpt + bas = bpt + (pk + l)s = bpt + pks + ls = p(bt + ks) + ls$  elde

edilir. Burada  $l \in P$  ve  $P$  ideal olduğundan  $ls \in P$  dir.

$$b - p(bt + ks) \in P \Rightarrow b + P = p(bt + ks) + P \Rightarrow b + P = (p + P)[(bt + ks) + P] \Rightarrow p + P \mid b + P.$$

Eğer  $p$  ve  $d$  ilgili ise yine yukarıda yapıldığı gibi  $(p) = (d)$  elde edilir. Böylece

$(p) + (a) = (d) = (p)$  olduğu görülür. Yine Teorem 2.2.13(ii) den dolayı  $(p, a) = p$  dir.

Buradan da  $p \mid a$  olur.  $p \mid a \Rightarrow a = pt$  olacak şekilde  $t \in R^*$  bulunabilir. Böylece  $a - pt = 0$

elde edilir.

$$0 + P = P \Rightarrow (a - pt) + P = P \Rightarrow a + P = pt + P \Rightarrow a + P = (p + P)(t + P) \Rightarrow p + P \mid a + P.$$

Buradan  $p + P \mid (a + P)(b + P)$  olduğunda  $p + P \mid a + P$  veya  $p + P \mid b + P$  olduğu, yani

$p + P \in R/P$  elemanının asal olduğu elde edilir. Sonuç olarak  $p \in R$  indirgenemez olmak

üzere  $p + P$  asaldır.

Şimdi kabul edelim ki  $c + P \in R/P$  herhangi bir indirgenemez eleman olsun. Bu taktirde

$c \in R$  sıfırdan ve birimselden farklıdır.  $R$  TÇB olduğundan  $c \in R$  elemanının  $c = q_1 \dots q_m$

şeklinde bir indirgenemez ayrışımı vardır. Böylece

$$c + P = (q_1 \dots q_m) + P = (q_1 + P) \dots (q_m + P) \text{ olur.}$$

$i = 1, 2, \dots, m$  için  $q_i$  elemanları indirgenemez olduğundan  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $q_i + P$  elemanları indirgenemez ve aynı zamanda da asaldırlar.

$$c + P = (q_1 \dots q_m) + P = (q_1 + P) \dots (q_m + P) \text{ olduğundan } \exists i = 1, 2, \dots, m \text{ öyle ki}$$

$$q_i + P \mid c + P \text{ dir. Varsayalım } q_1 + P \mid c + P \text{ olsun. Bu taktirde } c + P = (q_1 + P)(s + P)$$

olacak şekilde  $s + P \in R/P$  vardır.  $c + P$  indirgenemez ve  $q_1 + P$  asal olduğundan  $s + P$  birimsel olmalıdır. Böylece  $c + P$  indirgenemez elemanı  $q_1 + P$  asal elemanı ile ilgili olur.

Asal elemanın ilgilisi de asal olduğundan  $c + P \in R/P$  elemanının asal olduğu görülür.

Böylece  $R/P$  bölüm halkasındaki her indirgenemez elemanın asal olduğu, yani TÇB2 elde edilir.



## 4 TEK TÜRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLEN HALKALAR

Bu bölümde, aksi belirtilmedikçe, bir halka ifadesinden değişmeli ve birimli bir halka anlaşılacaktır.

### 4.1 Giriş

nc bölümde tamlık bölgeleri için tek türlü çarpanlara ayrılma özelliğini inceledik. Bu bölümde ise değişmeli ve birimli halkalar için tek türlü çarpanlarına ayrılmayı inceleyeceğiz.

İlk olarak, Fletcher'ın (1969) vermiş olduğu tek türlü çarpanlara ayrılabilen halka ( TH ) tanımını verip bazı teoremleri inceleyeceğiz. Bir tamlık bölgesi için TH tanımı ile TB tanımının denk olduğu ve sonlu sayıda TH' nın direkt toplamının yine bir TH olduğunun gösterilmesi inceleyeceğimiz teoremlerin bazısıdır. Daha sonra Noetherian halka tanımını verip, bir halkanın Noetherian halka olmasına denk birkaç koşul inceleyeceğiz. Ayrıca temel ideal halkalarının birkaç özelliğinden bahsedeceğiz. Üstelik her temel ideal halkasının bir TH olduğunu göstereceğiz. Bu bölümde son olarak Pseudo-Bölge kavramını verip bazı özellikleri üzerinde duracağız.

### 4.2 Tek Türlü arpanlara Ayrılabilen Birimli Halka Tanımı

**Tanım 4.2.1**  $R$  bir halka olsun.  $r \in R$  elemanın  $r = a_1 \dots a_n$  şeklindeki bir çarpanlarına ayrılışın refinement' ı  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $a_i$  elemanlarının bir veya daha fazla çarpanlarına ayrılışı ile elde edilir.

**Tanım 4.2.2**  $R$  bir halka ve  $p \in R$  birimselden farklı bir eleman olsun. Eğer  $p$ 'nin her çarpanlarına ayrılışı  $p$ 'yi içeren bir refinement' e sahip ise  $p \in R$  elemanına indirgenemez denir. Yani  $p = a_1 \dots a_n$  birimselden farklı  $p$  elemanın bir çarpanlarına ayrılışı ise  $\exists i = 1, 2, \dots, n$  öyle ki  $a_i = pa'_i$  özelliğini sağlar.

**Teorem 4.2.3**  $R$  bir tamlık bölgesi ise, bir önceki tanımda verilen indirgenemez eleman tanımı tamlık bölgeleri için verilen indirgenemez eleman tanımına denktir.

**İspat**  $p \in R$  birimselden farklı bir eleman ve  $a, b \in R^*$  olmak üzere  $p = ab$ ,  $p$  elemanın

bir çarpanlarına ayrılışı olsun. Hipotezden  $a$  veya  $b$ ,  $p$  elemanını içeren bir refinement' e sahiptir. Yani  $a = pa'$  veya  $b = pb'$  olmalıdır.  $a = pa'$  olsun  $\Rightarrow p = ab = pa'b \Rightarrow 1_R = a'b \Rightarrow b$  birimsel elde edilir.

Eğer  $b = pb' \Rightarrow p = ab = apb' \Rightarrow 1_R = ab' \Rightarrow a$  birimsel elde edilir.

Sonuç olarak  $p = ab$  olduğunda bir önceki tanımdan dolayı  $a$  veya  $b$  birimsel bulunur. Bu da tamlık bölgeleri için verilen indirgenemez eleman tanımına denktir.

Şimdi varsayalım  $p \in R$  tamlık bölgeleri için verilen indirgenemez eleman tanımını sağlasın ve  $a, b \in R^*$  olmak üzere  $p = ab$ ,  $p$  elemanının bir çarpanlarına ayrılışı olsun. Bu taktirde  $a$  veya  $b$  birimseldir. Varsayalım  $a$  birimsel olsun. Böylece  $aa' = 1_R$  olacak şekilde bir  $a' \in R$  vardır.  $p = ab \Rightarrow a'p = a'ab \Rightarrow a'p = 1_R b \Rightarrow b = a'p$ , yani  $b$  elemanının  $p$ ' yi içeren bir refinement'e sahip olduğu elde edilir. Eğer  $b$  birimsel ise benzer şekilde yapılarak  $a$  elemanının  $p$ ' yi içeren bir refinement' e sahip olduğu görülür.

Böylece tamlık bölgeleri için indirgenemez eleman tanımının bir önceki tanımda verilen indirgenemez eleman tanımına denk olduğu elde edilir.

Şimdi sıfır elemanının indirgenemezlik durumunu inceleyelim.

**Teorem 4.2.4**  $R$  bir halka olsun. Eğer sıfır elemanı Tanım 4.2.2 ye göre  $R$  halkasında indirgenemez ise  $R$  halkası bir tamlık bölgesidir.

**İspat**  $R$  halkası birimli ve değişmeli alındığından biz sadece  $R$ ' nin sıfır bölensiz olduğunu göstermeye çalışalım.  $a \neq 0$  ve  $b \neq 0$  için  $ab = 0$  olsun. Hipotezden dolayı sıfır indirgenemez olduğundan sıfırın  $0 = ab$  şeklindeki bir çarpanlarına ayrılışı için ya  $a = 0a'$  ya da  $b = 0b'$  şeklindedir. Bu taktirde  $a = 0a' = 0$  veya  $b = 0b' = 0$  olur. Böylece  $a = 0$  veya  $b = 0$  olduğu görülür.  $R$  sıfır bölensizdir. Böylece  $R$ ' nin bir tamlık bölgesi olduğu elde edilir.

**Tanım 4.2.5**  $R$  bir halka ve  $r \in R$  olsun.  $r \in R$  elemanının  $U$  - sınıfı  $U(r)$  ile gösterilir ve  $U(r) = \{ \alpha \in R \mid \exists \beta \in R \text{ öyle ki } \alpha \beta = r \}$  şeklinde tanımlanır.

**Teorem 4.2.6** (i)  $\alpha, \beta \in U(r) \Rightarrow \alpha \beta \in U(r)$  dir.

(ii)  $\alpha \in U(rs)$  ve  $r \in U(s) \Rightarrow \alpha \in U(s)$  dir.

(iii)  $U(r) \subseteq U(rs)$  dir.

(iv) Sıfır bölen olmayan bir  $a \in R$  elemanı için  $U(ar) = U(r)$  dir.

**İspat** (i)  $\alpha \in U(r) \Rightarrow \exists \alpha_1 \in R$  öyle ki  $\alpha \alpha_1 r = r$  ve  $\beta \in U(r) \Rightarrow \exists \beta_1 \in R$  öyle ki  $\beta \beta_1 r = r$   
 $\alpha \alpha_1 r = r \Rightarrow \alpha \alpha_1 \beta \beta_1 r = r \Rightarrow (\alpha \beta)(\beta_1 \alpha_1) r = r \Rightarrow \alpha \beta \in U(r)$  elde edilir. Burada  $\beta_1 \alpha_1 \in R$  olduğu açıktır.

(ii)  $\alpha \in U(rs) \Rightarrow \exists \alpha_1 \in R$  öyle ki  $\alpha \alpha_1 rs = rs$ ,  $r \in U(s) \Rightarrow \exists r_1 \in R$  öyle ki  $rr_1 s = s$   
 $\alpha \alpha_1 rs = rs \Rightarrow \alpha \alpha_1 rr_1 s = rr_1 s \Rightarrow \alpha \alpha_1 s = s \Rightarrow \alpha \in U(s)$  elde edilir.

(iii)  $\alpha \in U(r)$  herhangi bir eleman olsun. Bu taktirde  $\alpha \beta r = r$  olacak şekilde bir  $\beta \in R$  vardır. Şimdi her iki tarafı  $s \in R$  ile çarparsak;  $\alpha \beta rs = rs \Rightarrow \alpha \in U(rs) \Rightarrow U(r) \subseteq U(rs)$  olduğu görülür.

(iv)  $a \in R$  sıfır bölen olmayan bir eleman ve  $\alpha \in U(ar)$  olsun. Bu taktirde  $\exists \beta \in R$  öyle ki  $\alpha \beta ar = ar \Rightarrow a(\alpha \beta r - r) = 0 \Rightarrow \alpha \beta r - r = 0 \Rightarrow \alpha \beta r = r \Rightarrow \alpha \in U(r) \Rightarrow U(ar) \subseteq U(r)$  elde edilir. Şimdi de  $\alpha_1 \in U(r)$  olsun. Bu taktirde  $\exists \beta_1 \in R$  öyle ki  $\alpha_1 \beta_1 r = r \Rightarrow \alpha_1 \beta_1 r - r = 0 \Rightarrow a(\alpha_1 \beta_1 r - r) = 0 \Rightarrow \alpha_1 \beta_1 ar - ar = 0 \Rightarrow \alpha_1 \beta_1 ar = ar \Rightarrow \alpha_1 \in U(ar) \Rightarrow U(r) \subseteq U(ar)$ .  
 Sonuç olarak  $U(ar) = U(r)$  olduğu elde edilir.

**Tanım 4.2.7**  $R$  bir halka ve  $r \in R$  olsun.  $r \in R$  için  $r = (p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n)$  şeklindeki çarpanlarına ayrılışı için

(i)  $i = 1, 2, \dots, k$  ve  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $p'_i$  ve  $p_j$  elemanları indirgenemezdirler.

(ii)  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $p'_i \in U(p_1 \dots p_n)$

(iii)  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $p_j \notin U(p_1 \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n)$

koşulları gerçekleşiyorsa  $r = (p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n)$  şeklindeki çarpanlara ayrılışa  $r \in R$  elemanının bir  $U$  - ayrışımı denir.

Eğer bir elemanın  $U$  - ayrışımı tanımında ilk parantez boş ise  $r = ( ) (p_1 \dots p_n)$  yazılır.

Ayrıca  $U$  - ayrışımı tanımından bir elemanın  $U$  - ayrışımı var ise indirgenemez ayrışımı olduğu açıkça görülür. Tersini için aşağıdaki teoremi inceleyelim.

**Teorem 4.2.8**  $R$  bir halka olsun.  $r \in R$  elemanının indirgenemez ayrışımı var ise  $U$  - ayrışımı vardır.

**İspat** Varsayalım  $r \in R$  elemanının indirgenemez ayrışımı  $r = p_1 \dots p_n$  olsun. Buradan ya  $r = ( ) (p_1 \dots p_n)$  dir ve  $r \in R$  elemanının bir  $U$  - ayrışımı vardır deriz, veya  $\exists i = 1, 2, \dots, n$  öyle ki  $p_i \in U(p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n)$  sağlanır. Eğer ikincisi sağlanıyor ise, varsayalım  $p_1$  bu özelliği sağlasın, yani  $p_1 \in U(p_2 \dots p_n)$  olsun. Benzer şekilde  $p_2 \in U(p_3 \dots p_n)$  olmak üzere  $p_2$  bu özelliği sağlar. Böyle devam ederek, varsayalım ki sadece  $p_1, p_2, \dots, p_k$  elemanları bu özelliği sağlayan  $p_i$  elemanları olsun. Bu taktirde  $r = (p_1 \dots p_k)(p_{k+1} \dots p_n)$  yazılışının  $r \in R$  elemanının bir  $U$  - ayrışımı olduğunu söyleriz. Gerçekten; varsayımdan dolayı  $j = k+1, \dots, n$  için  $p_j \notin U(p_{k+1} \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n)$  ve  $g = 1, \dots, k$  için  $p_g \in U(p_{g+1} \dots p_n)$   $p_1 \in U(p_2 p_3 \dots p_{k-1} p_k p_{k+1} \dots p_n)$  ve  $p_2 \in U(p_3 \dots p_{k-1} p_k p_{k+1} \dots p_n)$  olduğundan Teorem 4.2.6(ii) den  $p_1 \in U(p_3 \dots p_{k-1} p_k p_{k+1} \dots p_n)$  elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek  $p_1 \in U(p_{k+1} \dots p_n)$  bulunur. Aynı yöntem  $p_2, p_3, \dots, p_k$  elemanları için uygulanırsa  $g = 1, \dots, k$  için  $p_g \in U(p_{k+1} \dots p_n)$  elde edilir. Sonuç olarak  $r \in R$  elemanı için  $U$  - ayrışımı tanımının koşulları sağlandığından ispat biter.

**Tanım 4.2.9**  $R$  bir halka olsun.  $a, b \in R$  için  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  ise  $a$  ve  $b$  elemanlarına ilgilidir denir.

Bir  $R$  halkasında  $r \in R$  elemanının  $r = (p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n)$  şeklindeki bir  $U$  - ayrışımı için  $p_1 \dots p_n$  çarpanını relevant kısım ve  $p'_1 \dots p'_k$  çarpanını da non-relevant kısım olarak adlandırılır

**Teorem 4.2.10**  $R$  bir halka olsun.  $r = (p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n)$ ,  $r \in R$  elemanının  $U$  - ayrışımı ise  $p_1 \dots p_n$  ve  $r$  ilgilidir.

**İspat**  $U$  - ayrışımı tanımından  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $p'_i \in U(p_1 \dots p_n)$  olduğu biliniyor. Teorem 4.2.6(i) den dolayı  $p'_1 \dots p'_k \in U(p_1 \dots p_n)$  olduğu görülür.  $r = (p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n) \Rightarrow p_1 \dots p_n \mid r$

$p'_1 \dots p'_k \in U(p_1 \dots p_n) \Rightarrow \exists t \in R$  öyle ki  $(p'_1 \dots p'_k)t(p_1 \dots p_n) = p_1 \dots p_n \Rightarrow rt = p_1 \dots p_n \Rightarrow r \mid p_1 \dots p_n$  elde edilir.

Sonuç olarak  $p_1 \dots p_n$  ve  $r$  elemanının ilgili olduğu görülür.

**Tanım 4.2.11**  $R$  bir halka olsun. Aşağıdaki iki özelliği sağlayan  $R$  halkasına bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen halka ( TÇH ) denir.

TÇH1:  $R$  halkasının birimselden farklı her elemanının bir  $U$  - ayrışımı vardır.

TÇH2:  $r = (p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n) = (q'_1 \dots q'_l)(q_1 \dots q_m)$   $r \in R$  elemanının iki  $U$  - ayrışımı ise  $m = n$  ve  $q$  elemanlarının uygun bir şekilde düzenlenmesinden sonra  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $p_i$  ve  $q_i$  ilgilidir.

Bir  $r$  elemanının  $R$  halkasında  $U$  - ayrışımı var ve TÇH2 koşulunu sağlıyor ise  $r \in R$  elemanı tek türlü çarpanlara ayrılışa sahiptir denir.

**Teorem 4.2.12**  $R$  bir tamlık bölgesi olsun. Bu taktirde  $R$  bir TÇH dır  $\Leftrightarrow R$  bir TÇB dir.

**İspat**  $R$  bir tamlık bölgesi ve bir TÇH olsun.  $R$  halkasının sıfırdan ve birimselden farklı bütün elemanlarının her birinin  $U$  - sınıfı  $R$  halkasının birimsellerinin kümesine eşit olduğu (Yani  $r \in R$  sıfırdan ve birimselden farklı olmak üzere  $U(r) = U(R)$  olduğu ) kolayca gösterilebilir. TÇH1 ifadesinden TÇB1 sağlanır. Bir elemanın  $U$  - ayrışımı tanımı ve sıfırdan, birimselden farklı her bir  $r \in R$  için  $U(r) = U(R)$  olduğu dikkate alınırsa TÇH2 ifadesinden dolayı TÇB2 sağlanır. Böylece  $R$  bir TÇB dir.

Tersine varsayalım ki  $R$  tamlık bölgesi bir TÇB olsun.  $R$  TÇB1' i sağladığı için Teorem 4.2.8 den dolayı  $R$  halkasının sıfırdan ve birimselden farklı her elemanının bir  $U$  - ayrışımı vardır. TÇB2 ifadesinden dolayı TÇH2' nin sağlandığı açıkça görülür. Eğer sıfır elemanının da tek türlü çarpanlara ayrılışa sahip olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Sıfır her zaman  $0 = (p'_1 \dots p'_n)(0)$  şeklinde bir  $U$  - ayrışımına sahiptir. Gerçekten;  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $p'_i$  elemanlarını  $R$  halkasında indirgenemez olarak alabiliriz ve  $R$  tamlık bölgesi olduğundan 0 elemanının indirgenemez olduğu açıktır.  $U(0) = \{ \alpha \in R \mid \exists \beta \in R \text{ öyle ki } \alpha\beta = 0 \} = R$  olduğu açıkça görülmektedir. Böylece  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $p'_i \in U(0) = R$  sağlanır. Ayrıca sıfırdan farklı  $\forall a \in R$  için  $0 \notin U(a)$  olur. Sonuç olarak sıfır elemanı bir tek türlü çarpanlara ayrılışa sahiptir. Böylece  $R$  halkasının bir TÇH olduğu elde edilir.

**Teorem 4.2.13**  $R_1$  ve  $R_2$  halkaları TÇH iseler  $R_1 \oplus R_2$  direkt toplamı da bir TÇH dir.

**İspat** Önce  $R_1 \oplus R_2$  direkt toplamında indirgenemez elemanların ne şekilde olduğunu belirlemeye çalışalım.  $(p, q) \in R_1 \oplus R_2$  herhangi bir indirgenemez eleman olsun.  $(p, q) = (p, 1)(1, q)$  şeklinde yazabiliriz. Burada indirgenemez eleman ve refinement tanımları dikkate alınırsa  $(p, 1) = (p, q)(s, l)$  veya  $(1, q) = (p, q)(t, k)$  olacak şekilde  $(s, l), (t, k) \in R_1 \oplus R_2$  elemanları bulunabilir. Bu taktirde  $1 = ql$  veya  $1 = pt$  ve böylece  $p$  veya  $q$  elemanlarının birimsel olduğu elde edilir.  $q$  birimsel ise  $q = v \in R_2$  için  $(p, q) = (p, v)$  indirgenemez,  $p$  birimsel ise  $p = u$  için  $(p, q) = (u, q)$  indirgenemez ve böylece  $R_1 \oplus R_2$  direkt toplamının indirgenemez elemanları  $p \in R_1, q \in R_2$  indirgenemez elemanlar ve  $u \in R_1, v \in R_2$  birimseller olmak üzere  $(p, v)$  ve  $(u, q)$  şeklindedir. Ayrıca bu şekildeki ikililerin indirgenemez eleman oldukları da gösterilebilir.

Şimdi  $r_1 \in R_1$  ve  $r_2 \in R_2$  elemanlarının her ikisi birden birimselden farklı olmak üzere keyfi  $(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$  elemanını dikkate alalım. Varsayalım  $r_1$  ve  $r_2$  elemanlarından hiçbiri birimsel olmasın. Diğer durumlarda benzer şekilde düşünülür.  $R_1$  ve  $R_2$  halkaları TÇH olduklarından  $r_1 = (p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n)$  ve  $r_2 = (q'_1 \dots q'_l)(q_1 \dots q_m)$  şeklinde  $U$ -ayrışimleri vardır. Buradan  $(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$  elemanının bir  $U$ -ayrışımını elde ederiz. Gerçekten;

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) &= ((p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n), (q'_1 \dots q'_l)(q_1 \dots q_m)) \\ &= (p'_1, 1) \dots (p'_k, 1)(p_1, 1) \dots (p_n, 1)(1, q'_1) \dots (1, q'_l)(1, q_1) \dots (1, q_m) \end{aligned}$$

Burada  $i = 1, \dots, k$  için  $p'_i, j = 1, \dots, n$  için  $p_j$  elemanları  $R_1$  halkasında indirgenemezler ve  $k = 1, \dots, l$  için  $q'_k, t = 1, \dots, m$  için  $q_t$  elemanları  $R_2$  halkasında indirgenemezlerdir. Bu taktirde  $i = 1, \dots, k$  için  $(p'_i, 1), j = 1, \dots, n$  için  $(p_j, 1)$  ve  $k = 1, \dots, l$  için  $(1, q'_k), t = 1, \dots, m$  için  $(1, q_t)$  elemanları  $R_1 \oplus R_2$  direkt toplamında indirgenemezdirler. Bu durumda  $(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$  elemanının bir indirgenemez ayrışımını ve böylece bir  $U$ -ayrışımını elde ederiz. Yani TÇH1 sağlanır. Şimdi varsayalım  $(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$  elemanının

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) &= ((p'_1, s'_1) \dots (p'_k, s'_k))((p_1, s_1) \dots (p_n, s_n)) \\ &= ((t'_1, q'_1) \dots (t'_l, q'_l))((t_1, q_1) \dots (t_m, q_m)) \end{aligned}$$

şeklinde iki  $U$ -ayrışımı olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) &= ((p'_1, 1) \dots (p'_k, 1)(1, s'_1) \dots (1, s'_k))((p_1, s_1) \dots (p_n, s_n)) \\ &= ((t'_1, 1) \dots (t'_l, 1)(1, q'_1) \dots (1, q'_l))((t_1, q_1) \dots (t_m, q_m)) \end{aligned}$$



$$(r_1, r_2) = ((p'_1 \dots p'_k)(p_1 \dots p_n), (s'_1 \dots s'_k)(s_1 \dots s_n)) \\ = ((t'_1 \dots t'_l)(t_1 \dots t_m), (q'_1 \dots q'_l)(q_1 \dots q_m))$$

Burada  $i=1, \dots, n$  için  $(p_i, s_i)$  ve  $j=1, \dots, m$  için  $(t_j, q_j)$  indirgenemez olduğundan  $i=1, \dots, n$  için  $p_i$  ve  $s_i$  elemanların bazıları ile  $j=1, \dots, m$  için  $t_j$  ve  $q_j$  elemanlarının bazıları birimsel olmalıdırlar. Böylece  $1 \leq g \leq n$  için  $u \in R_1$  ve  $v \in R_2$  birimsel elemanlar olmak üzere  $u = p_1 \dots p_g$  ve  $v = s_{g+1} \dots s_n$  olarak alabiliriz. Benzer şekilde  $1 \leq h \leq m$  için  $\mu \in R_1$  ve  $\omega \in R_2$  birimsel elemanlar olmak üzere  $\mu = t_1 \dots t_h$  ve  $\omega = q_{h+1} \dots q_m$  olarak alabiliriz. Böylece  $1 \leq g \leq n$  ve  $1 \leq h \leq m$  için  $u = p_1 \dots p_g$ ,  $\mu = t_1 \dots t_h$   $R_1$  halkasında ve  $v = s_{g+1} \dots s_n$ ,  $\omega = q_{h+1} \dots q_m$   $R_2$  halkasında birimseller olmak üzere birimselden farklı  $r_1 \in R_1$  ve  $r_2 \in R_2$  elemanlarının

$$r_1 = (p'_1 \dots p'_k)((up_{g+1}) \dots p_n) = (t'_1 \dots t'_l)((\mu t_{h+1}) \dots t_m)$$

$$r_2 = (s'_1 \dots s'_k)(s_1 \dots (s_g v)) = (q'_1 \dots q'_l)(q_1 \dots (q_h \omega))$$

şeklinde her birisi için iki tane yazılış elde edilir. Şimdi bu yazılışların  $r_1 \in R_1$  ve  $r_2 \in R_2$  elemanları için  $U$  - ayrışmaları olduklarını gösterelim.

$(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$  elemanının  $U$  - ayrışımındaki non-relevant kısmında bulunan elemanlar  $R_1 \oplus R_2$  de indirgenemez olduklarından  $i=1, \dots, k$  için  $p'_i$  ve  $j=1, \dots, l$  için  $t'_j$   $R_1$  halkasında, ayrıca  $i=1, \dots, k$  için  $s'_i$  ve  $j=1, \dots, l$  için  $q'_j$   $R_2$  halkasında indirgenemezlerdir.

$(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$  elemanının relevant kısmındaki elemanlar  $R_1 \oplus R_2$  de indirgenemez,  $1 \leq g \leq n$  ve  $1 \leq h \leq m$  için  $u = p_1 \dots p_g$ ,  $\mu = t_1 \dots t_h$   $R_1$  halkasında birimsel,  $v = s_{g+1} \dots s_n$ ,  $\omega = q_{h+1} \dots q_m$   $R_2$  halkasında birimsel olduğu dikkate alınırsa  $1 \leq g \leq n$  ve  $1 \leq h \leq m$  olmak üzere  $k = g+1, \dots, n$  için  $p_k$ ,  $c = h+1, \dots, m$  için  $t_c$   $R_1$  halkasında indirgenemez,  $y = 1, \dots, g$  için  $s_y$ ,  $d = 1, \dots, h$  için  $q_d$   $R_2$  halkasında indirgenemez elde edilir. Son olarak bir birimsel ile bir indirgenemez elemanın çarpımı sonucu elde edilen elemanın da indirgenemez olduğu göz önüne alınırsa  $r_1 \in R_1$  ve  $r_2 \in R_2$  elemanlarının yukarıdaki yazılışındaki bütün elemanların indirgenemez olduğu görülür. Böylece  $U$  - ayrışımı tanımının ilk şartı sağlanır.

Biliyoruz ki  $i = 1, \dots, k$  için  $(p'_i, s'_i) \in U((p_1, s_1) \dots (p_n, s_n))$  ve  $k = 1, \dots, l$  için  $(t'_k, q'_k) \in U((t_1, q_1) \dots (t_m, q_m))$ .  $(p'_i, s'_i) \in U((p_1, s_1) \dots (p_n, s_n)) \Rightarrow \exists (r, t) \in R_1 \oplus R_2$  öyle ki  $(p'_i, s'_i)(r, t)(p_1, s_1) \dots (p_n, s_n) = (p_1, s_1) \dots (p_n, s_n) \Rightarrow p'_i \in U(p_1 \dots p_n)$  ve

$s'_i \in U(s_1 \dots s_n)$  olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde yapılabilir. Böylece  $i=1, \dots, k$  için  $p'_i \in U(p_1 \dots p_n)$  ve  $s'_i \in U(s_1 \dots s_n)$  olduğu görülür. Burada  $1 \leq g \leq n$  için  $u = p_1 \dots p_g$   $R_1$  halkasında,  $v = s_{g+1} \dots s_n$   $R_2$  halkasında birimsel olduğundan  $i=1, \dots, k$  için  $p'_i \in U(up_{g+1} \dots p_n)$  ve  $s'_i \in U(s_1 \dots s_g v)$  elde edilir.  $(t'_k, q'_k) \in U((t_1, q_1) \dots (t_m, q_m))$  ifadesi de benzer şekilde yapılarak  $k=1, \dots, l$  için  $t'_k \in U(\mu t_{h+1} \dots t_m)$  ve  $q'_k \in U(q_1 \dots q_h \omega)$  elde edilir. Böylece  $U$  - ayrışımı tanımındaki ikinci şart gerçekleşir.

Son olarak  $j = g+1, \dots, n$  için  $p_j \notin U((up_{g+1}) \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n)$ ,  $i=1, \dots, g$  için  $s_i \notin U(s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots (s_g v))$  olduğunu görmeye çalışalım. Bunun aksini varsayalım. Burada  $1 \leq g \leq n$  için  $u = p_1 \dots p_g$  ve  $v = s_{g+1} \dots s_n$  olduğunu dikkate alırsak  $j = g+1, \dots, n$  için  $p_j c_j p_1 \dots p_g \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n = p_1 \dots p_g \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n$  ve  $i=1, \dots, g$  için  $s_i d_i s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_g \dots s_n = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_g \dots s_n$  olacak şekilde  $c_j \in R_1$  ve  $d_i \in R_2$  bulunabilir.

$k=1, \dots, g$  için  $p_k$  birimsel olduğundan  $p_k c_k = 1_{R_1}$  olacak şekilde  $c_k \in R_1$  bulunabilir.

$$1_{R_1} p_1 \dots p_g \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n = p_k c_k p_1 \dots p_g \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n \quad (k=1, \dots, g) \Rightarrow$$

$k=1, \dots, g$  için  $p_k \in U(p_1 \dots p_g \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n)$  elde edilir. Benzer şekilde  $r = g+1, \dots, n$  için  $s_r \in U(s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_g \dots s_n)$  olduğu görülür.

Bu ifadelerin hepsini bir arada değerlendirirsek  $j=1, 2, \dots, n$  için  $p_j \in U(p_1 \dots p_g \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n)$  ve  $i=1, 2, \dots, n$  için  $s_i \in U(s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_g \dots s_n)$  elde edilir. Böylece  $j=1, 2, \dots, n$  için  $(p_j, s_j) \in U((p_1, s_1) \dots (p_{j-1}, s_{j-1}) (p_{j+1}, s_{j+1}) \dots (p_n, s_n))$  olur ki bu  $(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$  elemanının  $U$  - ayrışımı tanımı ile çelişir. Bu taktirde aksi varsayımımız yanlıştır. Böylece  $j = g+1, \dots, n$  için  $p_j \notin U((up_{g+1}) \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n)$ ,  $i=1, \dots, g$  için  $s_i \notin U(s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots (s_g v))$  olması gerektiği görülür.  $r_1$  ve  $r_2$  elemanlarının diğer çarpanlarına ayrılışı için benzer yöntem uygulanarak  $k=h+1, \dots, m$  için  $t_k \notin U((\mu t_{h+1}) \dots t_{k-1} t_{k+1} \dots t_m)$  ve  $r=1, \dots, h$  için  $q_r \notin U(q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots (q_h \omega))$  koşulunun sağlandığı elde edilir. Böylece  $U$  - ayrışımı için üçüncü şart sağlanmış olur. Sonuç olarak

$$r_1 = (p'_1 \dots p'_k) ((up_{g+1}) \dots p_n) = (t'_1 \dots t'_l) ((\mu t_{h+1}) \dots t_m)$$

$$r_2 = (s'_1 \dots s'_k) (s_1 \dots (s_g v)) = (q'_1 \dots q'_l) (q_1 \dots (q_h \omega))$$

yazılışları birimselden farklı  $r_1 \in R_1$  ve  $r_2 \in R_2$  elemanlarının iki  $U$  - ayrışımıdır.  $R_1$  ve  $R_2$  TÇH olduklarından  $n - g = m - h$  ve  $g = h$ , yani  $n = m$  ve uygun bir düzenlemeden sonra  $i = g + 1, \dots, n$  için  $p_i$  ve  $t_i$  ilgili,  $j = 1, \dots, g$  için  $s_j$  ve  $q_j$  ilgili oldukları bulunur.

$k = 1, \dots, g$  için  $p_k$  ve  $t_k$  ile  $k' = g + 1, \dots, n$  için  $s_{k'}$  ve  $q_{k'}$  elemanları birimseller olmak üzere  $i = 1, \dots, n$  için  $(p_i, s_i), (t_i, q_i)$  elemanlarının ilgili olduklarını görelim.  $j = 1, \dots, g$  için  $s_j$  ve  $q_j$  ilgili olduklarını biliyoruz.  $s_1 \mid q_1$  ve  $q_1 \mid s_1$  alalım. Bu taktirde  $q_1 = s_1 k_1$  ve  $s_1 = q_1 l_1$  olduğu bulunur.  $p_1$  birimsel olduğundan  $p_1 a_1 = 1$  olacak şekilde  $a_1$  elemanı bulunabilir.  $(1, q_1) = (p_1 a_1, s_1 k_1) = (p_1, s_1) (a_1, k_1)$

$t_1$  birimsel olduğundan  $t_1 b_1 = 1$  olacak şekilde bir  $b_1$  elemanı bulunabilir.

$$(1, q_1) = (t_1 b_1, q_1) = (t_1, q_1) (b_1, 1) \Rightarrow (t_1, q_1) (b_1, 1) = (p_1, s_1) (a_1, k_1) \Rightarrow (p_1, s_1) \mid (t_1, q_1) \quad \text{elde}$$

edilir.  $(t_1, q_1) \mid (p_1, s_1)$  olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Böylece  $(p_1, s_1)$  ve  $(t_1, q_1)$  ilgilidir. Diğerleri de benzer şekilde yapılarak TÇH2' nin sağlandığı görülür.

Sonuç olarak  $R_1 \oplus R_2$  direkt toplamı TÇH olma özelliğini sağlar.

**Sonuç 4.2.14**  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $R_i$  halkaları birer TÇH ise  $R_1 \oplus \dots \oplus R_n$  direkt toplamı da bir TÇH yapısına sahiptir.

**İspat** Bir önceki teoremden yararlanılarak  $n$  üzerine tümevarım uygulanarak kolayca ispatlanır.

### 4.3 Temel İdeal Halkaları

Bu kısımda önce Noetherian halka tanımını verip bu tanıma denk bir kaç özelliği inceleyeceğiz. Bir temel ideal bölgesinin TÇB olduğunu üçüncü bölüm içerisinde görmüştük. Bu bölümde bu özelliğin temel ideal halkası için de doğru olduğunu, yani bir temel ideal halkasının TÇH olduğunu göstereceğiz.

İdeallerin artan zincir koşulunun temel ideal bölgeleri için sağlandığını bir önceki bölümde göstermiştik. Şimdi de temel ideal halkalarının ideallerin artan zincir koşulunu sağladığı zaman ne gibi özelliklere sahip olduğunu inceleyelim.

**Tanım 4.3.1** İdeallerin artan zincir koşulunu sağlayan bir  $R$  halkasına Noetherian halka denir.

**Tanım 4.3.2**  $R$  bir halka olsun.  $R$  halkasının ideallerinin boştan farklı her kümesi bir maximal elemana sahip ise  $R$  halkasına ideallerinin maximum koşulunu sağlar denir.

**Teorem 4.3.3**  $R$  bir halka olsun.  $R$  ideallerin artan zincir koşulunu sağlar  $\Leftrightarrow R$  ideallerin maximum koşulunu sağlar.

**İspat**  $R$  halkası ideallerin maximum koşulunu sağlasın. Varsayalım  $R$  halkası ideallerin artan zincir koşulunu sağlamasın. Bu taktirde  $R$  halkasının ideallerinin  $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$  şeklinde sonsuz bir zinciri vardır. Hipotezden dolayı  $\{I_i \mid i \geq 1\}$  kümesinin bir maximal elemanı vardır. Bu maximal elemanı  $I_n$  ile gösterelim. İdeallerinin artan zincirinden dolayı  $\forall i \geq n$  için  $I_n \subset I_i$  ve  $I_n$  maximal eleman olduğundan  $I_i \subset I_n$  olduğu görülür. Böylece  $\forall i \geq n$  için  $I_i = I_n$  elde edilir ki bu varsayımımız ile çelişir. Sonuç olarak  $R$  halkasının ideallerin artan zincir koşulunu sağladığı görülür.

Tersine, varsayalım ki  $R$  ideallerin artan zincir koşulunu sağlasın ve  $S$   $R$  halkasının ideallerinin boştan farklı bir kümesi olsun.  $S \neq \emptyset$  olduğundan bir  $I_0 \in S$  elemanı vardır. Kabul edelim ki  $S$  maximal elemana sahip olmasın. Bu taktirde  $S$  kümesindeki her bir  $I$  ideali için  $I \subset I'$  olacak şekilde bir  $I' \in S$  elemanı vardır.  $S$  kümesindeki her bir  $I$  ideali için bu özelliği sağlayan bir  $I'$  ideali seçelim. Seçme aksiyomundan

$f: S \rightarrow S$   
 $I \rightarrow f(I) = I'$  şeklinde tanımlanan bir seçme fonksiyonu tanımlanabilir.

$\forall n \in \mathbb{N}$  için  $f = f_n$  dersek Recursion Teoreminden dolayı  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow S$  öyle ki  $\varphi(0) = I_0$  ve  $\varphi(n+1) = f(\varphi(n)) = \varphi(n)'$  şeklinde tanımlanan bir fonksiyon vardır. Böylece eğer  $I_n \in S$  elemanını  $\varphi(n)$  ile gösterirsek  $I_0, I_1, \dots$  ideallerinin bir serisi vardır öyle ki  $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$  sağlanır. Bu ise hipotez ile çelişir. Böylece varsayımımız yanlıştır. Yani boştan farklı  $S$  kümesinin bir maximal elemanı olmalıdır. Bu ise  $R$  halkasının maximum koşulunu sağlaması demektir.

**Sonuç 4.3.4**  $R$  değişmeli bir halka olsun. Bu taktirde  $R$  Noetherian halkadır  $\Leftrightarrow R$  ideallerin maximum koşulunu sağlar.

**İspat** İdeallerin artan zincir koşulu ve yukarıdaki teorem dikkate alındığında elde edilir.

**Teorem 4.3.5**  $R$  değişmeli bir halka olsun. Bu taktirde  $R$  Noetherian halkadır  $\Leftrightarrow R$  halkasının her ideali sonlu üretilmiştir.

**İspat “ $\Rightarrow$ ”:**  $I$   $R$  halkasının bir ideali ve  $S$   $I$  idealinde içeren sonlu üretilmiş ideallerin kümesi olsun.  $I$  ideal olduğundan  $0 \in I$  ve  $(0)$  ideali sonlu üretildiğinden  $(0) \in S$  ve  $S \neq \emptyset$  elde edilir. Bu taktirde hipotezden dolayı  $S$  kümesinin bir  $C$  maximal elemanı vardır ve  $C$  sonlu üretilmiştir. Yani  $c_1, \dots, c_n \in I$  için  $C = (c_1, \dots, c_n)$  dir. Her  $b \in I$  için  $D_b$   $b, c_1, \dots, c_n \in I$  elemanları ile üretilen  $I$  idealinde içeren bir ideal olsun. Bu taktirde  $D_b \in S$  ve  $C = (c_1, \dots, c_n) \subset (b, c_1, \dots, c_n) = D_b$  olur.  $C$  ideali  $S$  kümesinin maximal elemanı ve  $D_b \in S$  olduğundan  $D_b \subset C$  ve böylece  $\forall b \in I$  için  $D_b = C$  elde edilir.  $\forall b \in I$  için  $b \in D_b = C$  olduğundan  $I \subset C$  ve  $C$  ideali  $I$ ’da içerildiğinden  $C \subset I$  dır. Böylece  $I = C$  ve  $I$  idealinin sonlu üretilmiş olduğu elde edilir.

**“ $\Leftarrow$ ”:** Tersine  $R$  halkasının her ideali sonlu üretildiğinde  $R$  halkasının Noetherian olduğunu gösterelim.  $R$  halkasının ideallerinin  $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ , şeklinde keyfi bir artan zincirini dikkate alalım. Eğer bu artan zincirin sonlu olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanır. Şimdi Bu ideallerin birleşimini göz önüne alalım.  $J = \bigcup_{j \geq 1} I_j$  olmak üzere  $J$ ’nin  $R$  halkasının bir ideali olduğu kolayca gösterilebilir. Hipotezden dolayı  $J$  ideali sonlu üretilmiştir.  $J = (a_1, \dots, a_k)$  olsun.  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $a_i$  elemanları bazı  $I_j$  ( $j \geq 1$ ) ideallerinin elemanlarıdır. Böylece  $\exists n \in \mathbb{N}$  öyle ki  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $a_i \in I_n$  elde edilir.  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $a_i \in J \Rightarrow a_i \in I_n \Rightarrow J \subset I_n$  ve  $J = \bigcup_{j \geq 1} I_j$  olduğundan  $n \in \mathbb{N}$  için  $I_n \subset J$  bulunur. Böylece  $J = I_n$  olduğu görülür.  $\forall j \geq n$  için ideallerin artan zincirinden dolayı  $I_n \subset I_j$  ve  $J = \bigcup_{j \geq 1} I_j = I_n$  olduğundan dolayı  $I_j \subset I_n$  elde edilir. Böylece  $\forall j \geq n$  için  $I_j = I_n$  olup ideallerin artan zincirinin sonlu olduğu bulunur. Sonuç olarak  $R$  halkasının Noetherian olduğu görülür.

**Tanım 4.3.6**  $R$  bir temel ideal halkası olsun. Eğer  $R$  halkasının sadece bir tane  $P (\neq R)$  asal ideali var ve bu  $P$  asal ideali nilpotent (yani  $\exists m \in \mathbb{N}^*$  öyle ki  $P^m = (0)$ ) ise  $R$  halkasına

special temel ideal halkası denir.

**Teorem 4.3.7** Her temel ideal halkası temel ideal bölgelerinin ve special temel ideal halkalarının direkt toplamı olarak yazılabilir.

**İspat** Zariski ve Samuel, (1958)

**Teorem 4.3.8** Her temel ideal halkası ideallerin artan zincir koşulunu sağlar.

**İspat** Üçüncü bölümde temel ideal bölgeleri için yapılan ispata (Teorem 3.2.4) benzer şekilde kolayca gösterilebilir.

**Teorem 4.3.9**  $R$  bir special temel ideal halkası ise bir TÇH dır.

**İspat** İndirgenemez ayrışımı olmayan birimselden farklı elemanlar ile üretilmiş temel idealleri dikkate alalım.  $R$  bir temel ideal halkası olduğundan bir Noetherian halkadır. Böylece yukarıda sözü edilen ideallerin kümesinin bir maximal elemanı vardır. Bu maximal elemanı  $a$  indirgenemez olmamak üzere  $(a)$  ile gösterelim.  $a$  indirgenemez olmadığından  $a$  elemanının  $a = a_1 \dots a_n$  şeklindeki bir çarpanlarına ayrılışı için  $a$  hiçbir  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) elemanını bölmez. Buradan  $\forall i=1,2,\dots,n$  için  $(a) \not\subseteq (a_i)$  bulunur.  $(a)$  maximal olduğundan  $\forall i=1,2,\dots,n$  için  $a_i$  elemanlarının indirgenemez ayrışimleri vardır. Böylece  $a$  elemanının da bir indirgenemez ayrışımı bulunur. Fakat bu bir çelişkidir. Buradan birimselden farklı her elemanın bir indirgenemez ayrışımı olduğu görülür.

Şimdi  $P$   $R$  halkasının,  $m > 0$  en küçük tamsayı olmak üzere,  $P^m = (0)$  özelliğini sağlayan tek asal ideali olsun. Eğer  $m=1$  ise  $P=(0)$  ve  $P$  tek olduğundan  $R$  bir cisim olmalıdır. Buradan da bir TÇH olduğu elde edilir ve ispat tamamlanır. Şimdi  $m > 1$  olsun.  $R$  bir temel ideal halkası ve  $P$  ideal olduğundan  $P=(\alpha)$  olacak şekilde  $\alpha \in R$  vardır.  $r \notin (\alpha)$  ise  $r$  birimseldir. Gerçekten; eğer  $r$  birimsel olmasa  $(r)$  bir maximal idealde içerilir.  $(r)$  idealini içeren maximal ideal aynı zamanda asaldır.  $R$  halkasının tek asal ideali  $P$  olduğundan bu asal olan maximal ideal  $P$  olmalıdır. Böylece  $r \in P=(\alpha)$  elde edilir ki bu bir çelişkidir. Ayrıca burada ilgililik hariç  $\alpha \in R$  elemanı  $P=(\alpha)$  özelliğini sağlayan tek indirgenemezdir. Gerçekten;  $\alpha$  ve  $\beta$  ilgili olmamak üzere  $\beta \in R$  bu koşulu sağlayan başka bir indirgenemez olsun.  $\beta$  birimselden farklı olduğundan  $\beta \in (\alpha)$  dır. Bu taktirde  $\beta = r\alpha$  olacak şekilde

$r \in R$  elemanı vardır.  $\beta$  indirgenemez olduğundan  $\beta = r\alpha$  şeklindeki çarpanlarına ayrılışı için  $\beta$  çarpanlardan birini böler.  $\beta$  ve  $\alpha$  ilgili olmadığından  $r = \beta s$  olacak şekilde bir  $s \in R$  vardır. Buradan  $\beta = r\alpha = \beta s\alpha \Rightarrow \beta(1 - s\alpha) = 0$  elde edilir.

$1 = 1 - 0 = 1 - (s\alpha)^m = (1 - s\alpha)(1 + s\alpha + \dots + (s\alpha)^{m-1})$  şeklinde yazabiliriz. Buradan  $1 - s\alpha$  birimsel elde edilir.  $\beta(1 - s\alpha) = 0$  ve  $1 - s\alpha$  birimsel olduğundan  $\beta = 0$  elde edilir.  $\beta$  indirgenemez ve  $\beta = 0$  ise  $R$  bir tamlık bölgesidir. Bu ise  $m > 1$  olduğundan bir çelişkidir.

Böylece birimselden farklı her  $r \in R$  elemanı  $u$  birimsel ve  $0 < k \leq m$  olmak üzere  $r = u\alpha^k$  şeklinde bir yazılışa sahiptir. Burada  $k$  tektir. Gerçekten; eğer  $0 < k < l \leq m$  olmak üzere  $r = u\alpha^k = v\alpha^l$  ise ( $v$  birimsel)  $\alpha^{-l+k+m} = 0$  elde edilir. Bu ise  $-l + k + m < m$  olduğundan  $m$ 'nin en küçük tamsayı olması ile çelişir. Böylece  $u$  birimsel ve  $0 < k \leq m$  olmak üzere her  $r \in R$  elemanı  $r = u\alpha^k$  şeklinde tek türlü yazılışa sahiptir. Buradan birimselden farklı her  $r \in R$  elemanının  $r = ( )((u\alpha)\alpha \dots \alpha) = ( )((u\alpha)\alpha^{k-1})$  şeklinde tek türlü bir  $U$ -ayrışımına sahip olduğu görülür. Ayrıca  $i = 1, 2, \dots, l$  için  $p'_i$  elemanları indirgenemez olmak üzere  $0 = (p'_1 \dots p'_l)(\alpha^m)$  şeklinde bir  $U$ -ayrışımına sahiptir. Sonuç olarak  $\forall 0 \neq r \in R$  elemanının ve sıfır elemanının tek türlü  $U$ -ayrışimleri elde edilir. Buradan  $R$  halkasının TÇH olduğu görülür.

**Sonuç 4.3.10** Her temel ideal halkası TÇH dır.

**İspat** Teorem 4.3.7 Teorem 4.3.9 ve Teorem 4.2.13 den kolayca elde edilir.

### Örnek 4.3.11

1.  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkasının temel ideal halkası olduğu biliniyor. Böylece Sonuç 4.3.10. dan dolayı  $\mathbb{Z}$  bir TÇH dır. Ayrıca  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  direkt toplamı da Teorem 4.2.13 den dolayı bir TÇH dır. Burada  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  bir tamlık bölgesi değildir. Gerçekten;  $(2, 0) \neq (0, 0)$  ve  $(0, 3) \neq (0, 0)$  elemanları  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  direkt toplamının sıfırdan farklı iki elemanı ve  $(2, 0)(0, 3) = (0, 0)$  dır.

2.  $n > 0$  olmak üzere  $\mathbb{Z}_n$  bir temel ideal halkasıdır.

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$x \rightarrow \varphi(x) = \bar{x} = x + \langle n \rangle$$



şeklinde tanımlanan dönüşümün bir örten halka homomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi  $J$ ,  $\mathbb{Z}_n$  halkasında bir ideal olsun.  $\bar{k} \in J$  için  $\varphi$  örten olduğundan  $\varphi(k) = \bar{k}$  olacak şekilde  $k \in \mathbb{Z}$  vardır.  $J$   $\mathbb{Z}_n$  halkasında bir ideal ve  $\varphi$  örten halka homomorfizması olduğundan  $\varphi^{-1}(J)$   $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkasında bir idealdir. Böylece  $\varphi^{-1}(J) = \langle s \rangle$  olacak şekilde  $s \in \mathbb{Z}$  vardır.  $\varphi(k) = \bar{k} \in J \Rightarrow k \in \varphi^{-1}(J) = \langle s \rangle \Rightarrow k = ts$  olacak şekilde  $t \in \mathbb{Z}$  vardır. Bunu  $\varphi$  dönüşümünde yerine yazarsak  $\varphi(k) = \varphi(t)\varphi(s) = \bar{t}\bar{s} \in \bar{s} \Rightarrow J \subset \bar{s}$  ve  $s \in \langle s \rangle = \varphi^{-1}(J) \Rightarrow \varphi(s) = \bar{s} \in J \Rightarrow \bar{s} \subset J$  olduğundan  $J = \bar{s}$  elde edilir. Böylece  $n > 0$  olmak üzere  $\mathbb{Z}_n$  bir temel ideal halkasıdır. Şimdi  $4 > 0$  olduğundan  $\mathbb{Z}_4$  bir temel ideal halkasıdır. Sonuç 4.3.10 dan dolayı  $\mathbb{Z}_4$  bir TÇH dir. Üstelik  $\mathbb{Z}_4$  sıfır bölünli olduğundan tamlık bölgesi değildir.

#### 4.4 Pseudo-Bölgeler

Burada Pseudo-Bölge tanımı verilip bazı özellikleri incelenecektir.

**Tanım 4.4.1**  $R$  bir halka olsun.  $\forall 0 \neq r \in R$  için  $U(r)$  birimsellerin sınıfı (yani  $U(r) = U(R)$ ) ise  $R$  halkasına Pseudo-Bölge denir.

**Teorem 4.4.2** (i)  $p \in R$  indirgenemez eleman olsun. Eğer  $q \mid p$  ise ya  $p$  ve  $q$  ilgilidir ya da  $q \in U(p)$  dir.

(ii) Bir Pseudo-Bölgede bir indirgenemez elemanın ilgilisi de indirgenemezdir.

**İspat** (i)  $p$  indirgenemez eleman olmak üzere  $q \mid p$  olsun. Bu taktirde  $p = qr$  olacak şekilde  $r \in R$  vardır. İndirgenemez eleman tanımına göre ya  $q = pq'$  veya  $r = pr'$  olmalıdır. Eğer  $q = pq'$  ise  $p \mid q$  ve böylece de  $p$  ve  $q$  elemanlarının ilgili olduğu elde edilir. Eğer  $r = pr'$  ise  $p = qpr' \Rightarrow qr'p = p \Rightarrow q \in U(p)$  elde edilir.

(ii)  $R$  Pseudo-Bölge ve  $p \in R$  indirgenemez eleman olmak üzere  $q \mid p$  ve  $p \mid q$  olsun.  $q \mid p \Rightarrow \exists s \in R$  öyle ki  $p = sq$ ,  $p \mid q \Rightarrow \exists t \in R$  öyle ki  $q = tp$  elde edilir.  $q = tp$  ve  $p = sq$  olduğundan  $q$  elemanının indirgenemez eleman tanımını sağladığı görülür.



Not TÇH olan bir Pseudo-Bölgesini TÇPB ile göstereceğiz.

**Teorem 4.4.3 (i)** Her TÇPB ilgililik hariç kesinlikle bir sıfır bölen indirgenemez eleman içerir. ( Sıfır bölen indirgenemez sıfır bölen olan bir indirgenemez elemandır.)

(ii) Tek sıfır bölen indirgenemez elemanı sıfırdan farklı olan her TÇPB bir regular indirgenemez eleman içermez.

**İspat (i)** Varsayalım  $R$  ilgili olmayan iki sıfır bölen indirgenemez eleman içersin. Bunlar  $q \neq 0$  olmak üzere  $p$  ve  $q$  olsun. Bu taktirde  $ap = 0 = bq$  olacak şekilde  $0 \neq a \in R$  ve  $0 \neq b \in R$  elemanları vardır. Eğer  $p = 0$  ise  $R$  bir tamlık bölgesidir ve buradan da  $q = 0$  bulunur. Bu ise çelişkidir. Şimdi  $p \neq 0$  için  $ap = 0 = bq$  olsun.  $R$  TÇH olduğundan  $0 \neq a \in R$  ve  $0 \neq b \in R$  elemanlarının indirgenemez ayrışimleri vardır. Bunlar  $a = a_1 \dots a_l$  ve  $b = b_1 \dots b_k$  şeklinde olsun. Böylece  $ap = a_1 \dots a_l p = 0 = b_1 \dots b_k q = bq$  olduğundan  $0 = (\dots)(a_1 \dots a_l p) = (\dots)(b_1 \dots b_k q)$  alabiliriz. Bu yazılış sıfır elemanın iki tane  $U$ -ayrışımıdır. TÇH2 koşulundan dolayı  $p$  ve  $b_k$  ilgilidir diyebiliriz ve böylece  $u$  birimsel elemanı için  $b_k = pu$  alabiliriz. Bu taktirde  $0 = (\dots)(b_1 \dots b_{k-1} pq)$  elde edilir ( Burada  $u$  birimsel elemanı ilk parantez içerisine alındı.). Şimdi  $p$  ve  $q$ ' nun ilgili elemanlarını bir araya toplayarak yazarsak  $r, s > 0$ ,  $i = 1, \dots, g$  için  $c_i$  elemanları  $p$  ve  $q$ ' nun ilgilileri değil ve  $c_i$  elemanları indirgenemez olmak üzere  $0 = (\dots)(p^r q^s c_1 \dots c_g)$  yazarız. Böylece  $0 = p^r (p - (p - q^s c_1 \dots c_g))$  elde edilir. Bu yazılışta  $p - q^s c_1 \dots c_g$  birimselden farklıdır. Gerçekten; varsayalım  $u$  birimsel olmak üzere  $p - q^s c_1 \dots c_g = u$  olsun.  $0 = p^r (p - (p - q^s c_1 \dots c_g)) \Rightarrow 0 = p^{r+1} - p^r (p - q^s c_1 \dots c_g) \Rightarrow p^{r+1} = p^r u$  bulunur. Buradan  $pu^{-1} p^r = p^r \Rightarrow p \in U(p^r)$  olduğu görülür.  $p^r \neq 0$  ve  $R$ ' nin Pseudo-Bölge olduğu dikkate alınrsa  $p$  elemanının birimsel olduğu bulunur ki bu  $p$ ' nin indirgenemez olması ile çelişir. Böylece  $p - q^s c_1 \dots c_g$  birimselden farklıdır. Bu durumda bir indirgenemez ayrışımı vardır.  $p - q^s c_1 \dots c_g = d_1 \dots d_h$  bu elemanın indirgenemez ayrışımı olsun. Böylece  $0 = p^r (p - (p - q^s c_1 \dots c_g)) \Rightarrow p^{r+1} = p^r d_1 \dots d_h$  elde edilir. Buradan sıfır elemanın iki  $U$ -ayrışımı elde edilir.  $R$  TÇH olduğundan  $p$  ve  $d_1$  ilgilidir. Burada  $R$  halkasının Pseudo-Bölge olduğu dikkate alınrsa  $r$  birimsel olmak üzere  $d_1 = pr$  olduğu görülür.  $p - q^s c_1 \dots c_g = d_1 \dots d_h = prd_2 \dots d_h \Rightarrow q^s c_1 \dots c_g = p(1 - rd_2 \dots d_h)$

$p^{r+1} = p^r d_1 \dots d_h \Rightarrow p^{r+1} = p^r p r d_2 \dots d_h \Rightarrow p^{r+1} = p^{r+1} r d_2 \dots d_h \Rightarrow d_2 \dots d_h \in U(p^{r+1})$  ve  $p^{r+1} \neq 0$  ile  $R$  halkasının Pseudo-Bölge olduğu göz önüne alınırsa  $d_2 \dots d_h$  elemanının birimsel olduğu bulunur. Böylece  $r d_2 \dots d_h$  birimsel elde edilir. Bunu  $v$  ile gösterirsek  $q^s c_1 \dots c_g = p(1-v)$  elde edilir. Burada sol taraf sıfır olmadığından  $1-v \neq 0$  olduğu görülür. Böylece  $p \notin U(1-v)$  olur. Gerçekten; eğer  $p \in U(1-v)$  olsa  $1-v \neq 0$  ve  $R$  Pseudo-Bölge olduğundan  $p$  birimsel elde edilir. Bu ise  $p$  elemanının indirgenemez olması ile çelişir.  $q^s c_1 \dots c_g = p(1-v)$  ifadesini  $U$ - ayrışımında kullanırsak  $p$   $q$ ' nun ilgilisi veya  $\exists i = 1, 2, \dots, n$  öyle ki  $c_i$ ' nin ilgilisidir. Böylece  $R$  halkasında ilgililik hariç en fazla bir sıfır bölen indirgenemez vardır. Sıfır elemanı bir sıfır bölen içermesi zorunlu olan bir indirgenemez ayrışımına sahip olduğundan ispat biter.

(ii) (i)' den dolayı bir TÇPB de sıfır elemanının  $\alpha$  tek sıfır bölen indirgenemez olmak üzere  $0 = (p'_1 \dots p'_k)(\alpha^m)$  şeklinde bir  $U$ - ayrışımına sahip olduğu görülmektedir. Şimdi varsayalım  $p \in R$  regular ( Bir  $R$  halkasında sıfır bölen olmayan bir elemana regular eleman denir.) indirgenemez eleman olsun. Burada  $p + \alpha$  birimselden farklıdır. Gerçekten; hipotezden dolayı  $\alpha \neq 0$  ve  $p \neq 0$  dır. Eğer  $u$  birimsel olmak üzere  $p + \alpha = u$  ise  $(p + \alpha)\alpha^{m-1} = u\alpha^{m-1} \Rightarrow p\alpha^{m-1} + \alpha^m = u\alpha^{m-1} \Rightarrow p\alpha^{m-1} = u\alpha^{m-1} \Rightarrow pu^{-1}\alpha^{m-1} = \alpha^{m-1} \Rightarrow p \in U(\alpha^{m-1})$  elde edilir.  $\alpha^{m-1} \neq 0$  ve  $R$  Pseudo-Bölge olduğundan  $p$  birimsel olur ki bu bir çelişkidir. Böylece  $p + \alpha$  birimselden farklıdır. Bu taktirde  $p + \alpha$  elemanının bir indirgenemez ayrışımı vardır.  $p + \alpha = q_1 \dots q_l$  indirgenemez ayrışım olsun. Buradan  $(p + \alpha)\alpha^{m-1} = q_1 \dots q_l \alpha^{m-1} \Rightarrow p\alpha^{m-1} = q_1 \dots q_l \alpha^{m-1}$  elde edilir. Şimdi her iki tarafın  $U$ - ayrışımını dikkate alırsak  $p$  ve  $q_1$  elemanlarının ilgili olduklarını söyleyebiliriz. Buradan  $q_1 \mid p$  ve  $p \mid q_1$  olduğunu söyleriz.  $q_1 \mid p \Rightarrow p = q_1 t$  ve  $p \mid q_1 \Rightarrow q_1 = ps$  olur. Böylece  $q_1 = q_1 ts \Rightarrow s \in U(q_1)$  bulunur.  $R$  Pseudo-Bölge ve  $q_1 \neq 0$  olduğu dikkate alınırsa  $s \in U(R)$  elde edilir.  $s$  birimsel olmak üzere  $q_1 = ps$  yazabiliriz. Böylece  $p + \alpha = q_1 \dots q_l \Rightarrow p + \alpha = psq_2 \dots q_l \Rightarrow p \mid psq_2 \dots q_l = p + \alpha$   
 $p \mid -p \Rightarrow p \mid p + \alpha - p \Rightarrow p \mid \alpha$  elde edilir. Teorem 4.4.2(i) den dolayı  $p$  ve  $\alpha$  ilgilidir.  $\alpha$  sıfır bölen olduğundan dolayı  $p$  elemanı da sıfır bölen olur. Bu ise  $p$  elemanının regular indirgenemez olması ile çelişir.

**Tanım 4.4.4**  $R$  bir halka ve  $p \in R$  birimselden farklı bir eleman olsun.  $a, b \in R$  için  $p \mid ab$  olduğunda  $p \mid a$  veya  $p \mid b$  elde ediliyorsa  $p \in R$  elemanına asaldır denir.

**Teorem 4.4.5**  $R$  bir halka olsun.  $R$  halkasında her asal eleman indirgenemezdir.

**İspat**  $p \in R$  birimselden farklı eleman ve  $a, b \in R$  için  $p = ab$ ,  $p \in R$  elemanının bir çarpanlarına ayrılışı olsun.  $p \mid p = ab$  ve  $p$  asal olduğundan  $p \mid a$  veya  $p \mid b$  dir.  $p \mid a \Rightarrow a = pk$ ,  $p \mid b \Rightarrow b = pt$  bulunur. Böylece  $p = ab$  şeklindeki bir çarpanlarına ayrılışı için  $p$  elemanını içeren bir refinement' e sahip olduğu görülür. Bu durumda  $p \in R$  asal elemanının indirgenemez olduğu elde edilir.

**Teorem 4.4.6**  $R$  bir halka olsun.  $R$  halkasında bir asal elemanın ilgilisi de asal elemandır.

**İspat**  $p \in R$  birimselden farklı elemanı asal ve  $q \in R$ ,  $p$  elemanının bir ilgilisi olsun. Bu taktirde  $q \mid p$  ve  $p \mid q$  olur. Varsayalım  $a, b \in R$  için  $q \mid ab$  olsun.  $p \mid q$  ve  $q \mid ab$  olduğundan  $p \mid ab$  olduğu görülür.  $p$  asal eleman olduğundan  $p \mid a$  veya  $p \mid b$  elde edilir. Burada  $q \mid p$  olduğu dikkate alınırsa  $q \mid a$  veya  $q \mid b$  olduğu bulunur. Böylece  $q \in R$  elemanının asal olduğu elde edilir.

Teorem 4.4.3 TÇH2 koşulu yerine her indirgenemez elemanın asal olduğu ifadesi kullanılarak verilebilir. İspatı Teorem 4.4.3' e benzer şekilde yapılabilir.

**Teorem 4.4.7** Varsayalım  $R$  halkası, birimselden farklı her elemanın bir indirgenemez ayrışımı mevcut ve her indirgenemezin asal olduğu bir Pseudo-Bölge olsun. Bu taktirde  $R$  ilgililik hariç kesinlikle bir sıfır bölen indirgenemez içerir. Eğer bu eleman sıfırdan farklı ise  $R$  halkası bir regular indirgenemez eleman içermez.

**İspat** Teorem 4.4.3 de TÇH2 koşulu yerine her indirgenemez elemanın asal olma hipotezi kullanılarak benzer şekilde elde edilir.

**Teorem 4.4.8**  $R$  halkası, birimselden farklı her elemanın bir indirgenemez ayrışımı bulunan bir Pseudo-Bölge olsun. Bu taktirde  $R$  bir TÇH dır  $\Leftrightarrow R$  halkasında her indirgenemez eleman asaldır.

**İspat** Varsayalım  $R$  bir TÇH olsun. Teorem 4.4.3(i) den dolayı  $R$  kesinlikle bir sıfır bölen indirgenemez  $\alpha$  elemanını içerir. Eğer  $\alpha = 0$  ise  $R$  bir tamlık bölgesidir ve buradan bir TÇB dir. Bu taktirde de her indirgenemez eleman asaldir. Şimdi varsayalım  $\alpha \neq 0$  olsun. Bu taktirde Teorem 4.4.3(ii) den dolayı  $R$  halkasında olan her regular eleman birimseldir. Böylece  $\alpha$  elemanı  $R$  halkasının birimselden farklı her elemanını böler. Yani  $\forall r \in R$  birimselden farklı olmak üzere  $(r) \subset (\alpha)$  dır. Aksi olsa, yani  $s \in R$  birimselden farklı elemanı için  $(\alpha) \subset (s)$  olsa idi  $s \mid \alpha$  ve  $\alpha$  sıfır bölen olduğundan  $s$  regular eleman, böylece  $s$  birimsel elde edilir. Bu ise  $s \in R$  elemanının birimselden farklı olması ile çelişir. Böylece  $(\alpha)$  maximal idealdir. Her maximal ideal asal olduğundan  $(\alpha)$  asal idealdir. Böylece  $\alpha$  asal elemandır.

Tersine varsayalım her indirgenemez eleman asal olsun. Teorem 4.4.7 den dolayı  $R$  kesinlikle bir sıfır bölen indirgenemez  $\alpha$  elemanını içerir. Eğer  $\alpha = 0$  ise  $R$  bir tamlık bölgesidir ve böylece  $R$  halkasının bir TÇH olduğu görülür. Eğer  $\alpha \neq 0$  ise  $R$  halkasının her elemanı  $u$  birimsel olmak üzere  $u\alpha^k$  şeklinde ifade edilebilir. Çünkü  $\alpha$  tek sıfır bölen indirgenemezdir. Sıfır elemanının bir tek türlü çarpanlarına ayrılışa sahip olduğu açıktır. Varsayalım sıfırdan farklı  $r \in R$  elemanının  $u, v$  birimseller ve  $k > l$  olmak üzere  $r = u\alpha^k = v\alpha^l$  şeklinde iki tane çarpanlarına ayrılışı olsun.  $k = l + (k - l)$  dır.  $s \in R$  elemanı  $v$ ' nin tersi olmak üzere  $\alpha u s \alpha^{k-l} = \alpha^l \Rightarrow \alpha u s \alpha^{k-l-1} \alpha^l = \alpha^l \Rightarrow \alpha \in U(\alpha^l)$  ve  $\alpha^l \neq 0$  olduğundan  $\alpha$  birimsel olur. Bu ise  $\alpha$  elemanının indirgenemez olması ile çelişir. Benzer şekilde  $k < l$  içinde yapılabilir. Böylece  $k = l$  ve  $r \in R$  elemanının tek türlü çarpanlarına ayrılışa sahip olduğu bulunur ve  $R$  halkasının bir TÇH olduğu görülür.

## 5 SIFIR BÖLENLİ, DEĞİŞMELİ ve BİRİMLİ HALKALARDA İLGİLİLİK ve İNDİRGENEMEZLİK KAVRAMLARI

### 5.1 Giriş

Bu bölümde iki elemanın ilgili olması tanımları, bu tanımları kullanarak elde edilen indirgenemez eleman kavramlarını ve bunlar arasındaki bağıntıları inceleyeceğiz. Daha ileri olarak indirgenemez eleman kavramı temel idealler kullanılarak ifade edilmeye çalışılacaktır. En son olarak indirgenemez eleman kavramlarının değişmeli, birimli ve sıfır bölenli halkaların direkt çarpımlarında ne gibi özelliklere sahip olduğu incelenecektir.

### 5.2 İlgililik Tanımları

$D$  bir tamlık bölgesi olmak üzere  $a, b \in D$  için  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  ise  $a$  ve  $b$  elemanlarına ilgili denildiğini ve bunun  $U(D)$ ,  $D$  tamlık bölgesinin birimsel elemanlarının kümesi olmak üzere  $u \in U(D)$  için  $a = ub$  ifadesine denk olduğunu ikinci bölümde söylemiştik. Bu ifadelere denk olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.2.1**  $D$  tamlık bölgesi ve  $a, b \in D$  olsun.  $a \mid b$  ve  $b \mid a \Leftrightarrow (a) = (b)$  dir.

**İspat** İkinci bölümde verilen tanım ve teoremler kullanılarak kolayca yapılır.

Ayrıca sıfırdan ve birimselden farklı  $a \in D$  elemanı için  $a = bc$  olduğunda  $b$  veya  $c$  birimsel oluyor ise  $a$  elemanına indirgenemez eleman (veya atom) denildiğini yine ikinci bölümde belirtmiştik. Şimdi bu tanıma denk olan bir ifade verelim.

**Teorem 5.2.2**  $D$  tamlık bölgesi ve  $a \in D$  sıfırdan ve birimselden farklı bir eleman olsun. Bu taktirde  $a \in D$  indirgenemezdir  $\Leftrightarrow a = bc$  olduğunda  $b$  veya  $c$  elemanları  $a$  elemanının ilgilisidir.

**İspat “ $\Rightarrow$ ”:** Sıfırdan ve birimselden farklı  $a \in D$  için  $a = bc$  olsun. Hipotezden dolayı  $b$  veya  $c$  birimseldir.  $b \in D$  birimsel olsun.  $a = bc \Rightarrow c \mid a$  olur.  $b$  birimsel olduğundan  $bt = 1_D$  olacak şekilde  $t \in D$  vardır.  $a = bc \Rightarrow ta = tbc \Rightarrow ta = c \Rightarrow a \mid c$  elde edilir. Böylece

$b$  birimsel olduğunda  $a$  ve  $c$  elemanlarının ilgili olduğu bulunur.  $c$  birimsel alınırsa benzer şekilde yapılarak  $a$  ve  $b$  elemanlarının ilgili olduğu elde edilir.

“ $\Leftarrow$ ”: Birimselden ve sıfırdan farklı  $a \in D$  için  $a = bc$  olsun. Hipotezden dolayı  $(a \mid b$  ve  $b \mid a)$  veya  $(a \mid c$  ve  $c \mid a)$  olduğu görülür. Buradan  $(a) = (b)$  veya  $(a) = (c)$  elde edilir. Eğer  $(a) = (b)$  ise  $c \in D$  birimseldir. Gerçekten; aksini varsayalım, yani  $c$  birimsel olmasın. Bu taktirde  $(a) = (bc) = (b)(c) \subset (b) \Rightarrow (a) \subset (b)$  olur ki bu bir çelişkidir. Böylece  $(a) = (b)$  olduğunda  $c$  elemanının birimsel olduğu elde edilir. Eğer  $(a) = (c)$  ise benzer işlemler yapılarak  $b$  elemanının birimsel olduğu bulunur. Bu taktirde  $a \in D$  elemanının indirgenemez (veya atom) olduğu görülür.

Şimdi indirgenemez eleman tanımını temel ideal kavramından yararlanarak açıklamaya çalışalım. Bunun için aşağıdaki teoremi verelim

**Teorem 5.2.3**  $D$  tamlık bölgesi ve  $a \in D$  sıfırdan, birimselden farklı bir eleman olsun. Bu taktirde  $a \in D$  indirgenemezdir  $\Leftrightarrow (a)$  temel ideali  $D$  tamlık bölgesinin öz temel idealler kümesinin maximal elemanıdır.

**İspat “ $\Rightarrow$ ”:** Aksini varsayalım. Yani  $(a) \subsetneq (b) \subsetneq D$  olacak şekilde bir  $(b)$  öz temel ideali bulunsun.  $a \in (a) \subset (b) \Rightarrow a = bc$  olacak şekilde bir  $c \in D$  vardır. Hipotezden dolayı  $b$  veya  $c$  birimseldir.  $b$  birimsel ise  $(b) = D$  elde edilir.  $c$  birimsel ise  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  bulunur ki buradan  $(a) = (b)$  olduğu görülür. Her iki durumda da bir çelişki elde edilir. Aksi varsayımımız yanlıştır. Böylece  $(a)$   $D$  tamlık bölgesinin öz temel idealler kümesinin maximal elemanıdır.

“ $\Leftarrow$ ”: Sıfırdan ve birimselden farklı  $a \in D$  için  $a = bc$  olsun.  $(a) = (bc) = (b)(c) \subseteq (b)$  olduğu görülür. Hipotezden dolayı  $(a) = (b)$  veya  $(b) = D$  olduğu görülür.  $(a) = (b)$  ise  $c$  birimsel,  $(b) = D$  ise  $b$  birimseldir. Böylece  $a = bc$  olduğunda  $b$  veya  $c$  birimseldir. Buradan  $a \in D$  elemanının indirgenemez olduğu elde edilir.

Buraya kadar tamlık bölgeleri ile ilgili bazı özellikleri ele aldık. Şimdi  $R$  değişmeli ve birimli bir halka,  $R^* = R \setminus \{0\}$  ve  $R^*$ ’nin birimsellerinin kümesi  $U(R)$  olsun. Esas tanımımıza

geçmeden önce bazı hatırlatmalarda bulunalım.

**Tanım 5.2.4**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka olsun.

- (i)  $a, b, c \in R$  için  $b = ac$  oluyor ise  $a, b$  elemanını böler denir ve  $a \mid b$  ile gösterilir.
- (ii)  $a \mid b \Rightarrow (b) \subset (a)$  dır.
- (iii)  $a \in R$  için  $(a)$  ideali asal ise  $a$  asal elemandır yada  $a, b, c \in R$  için  $a \mid bc$  olduğunda  $a \mid b$  veya  $a \mid c$  sağlanıyor ise  $a$ ' ya asaldır denir.

**Tanım 5.2.5**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka ve  $a, b \in R$  olsun.

- (i)  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  ise (yani  $(a) = (b)$  ise)  $a$  ve  $b$  elemanlarına ilgilidir denir ve  $a \sim b$  ile gösterilir.
- (ii) Bir  $u \in U(R)$  için  $a = ub$  şeklinde yazılabiliyor ise  $a$  ve  $b$  elemanlarına kuvvetli ilgilidir denir ve  $a \approx b$  ile gösterilir.
- (iii) 1)  $a \sim b$  dir.  
2) ya  $a = b = 0$  dır ya da  $a \neq 0$  ve  $a = rb \Rightarrow r \in U(R)$  dır.  
1) ve 2) koşulları sağlanıyor ise  $a$  ve  $b$  elemanlarına çok kuvvetli ilgilidir denir ve  $a \cong b$  ile gösterilir.

**Teorem 5.2.6**  $R$  değişmeli, birimli bir halka ve  $a, b \in R$  olsun. Bu taktirde  $a \cong b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow a \sim b$  dır.

**İspat**  $a \cong b$  olsun.  $a = 0 \Rightarrow u \in U(R)$  için  $0 = u0$  yazabiliriz.  $a \neq 0$  ve  $a = rb$  olsun. Hipotezden dolayı  $r \in U(R)$  olduğundan  $a \approx b$  elde edilir.

Şimdi  $a \approx b$  olsun. Bu taktirde  $a = ub$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  vardır. Böylece  $b \mid a$  bulunur.  $u \in U(R)$  olduğundan  $uv = 1_R$  olacak şekilde bir  $v \in R$  vardır.  $a = ub \Rightarrow va = vub \Rightarrow va = b \Rightarrow a \mid b$  elde edilir. Sonuç olarak  $a \sim b$  olduğu görülür.

**Teorem 5.2.7** Değişmeli ve birimli bir  $R$  halkasında tanımlanan ilgililik ve kuvvetli ilgililik bağıntıları birer denklik bağıntılarıdır.

**İspat** İlk önce ilgililik bağıntısını ele alalım.



(i)  $a \mid a$  ve  $a \mid a$  sağlandığından  $a \sim a$  olduğu görülür. Yani “ $\sim$ ” yansıma özelliğini gerçekler.

(ii)  $a \sim b$  olsun. Bu taktirde  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  dır. Buradan  $b \mid a$  ve  $a \mid b$  olduğu görülür. Böylece  $b \sim a$  elde edilir. “ $\sim$ ” simetri özelliğini sağlar.

(iii)  $a \sim b$  ve  $b \sim c$  olsun. Bu taktirde  $(a \mid b \text{ ve } b \mid a)$  ve  $(b \mid c \text{ ve } c \mid b)$  dır. Buradan  $a \mid c$  ve  $c \mid a$  elde edilir. Yani  $a \sim c$  olur. “ $\sim$ ” geçişme özelliğini sağlar.

(i),(ii),(iii) den dolayı “ $\sim$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Şimdide kuvvetli ilgililik bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu görelim.

(i)  $a = 1_R a$  ve  $1_R \in U(R)$  olduğundan  $a \approx a$  dır. “ $\approx$ ” bağıntısı yansıma özelliğini sağlar.

(ii)  $a \approx b$  olsun. Bu taktirde  $a = ub$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  elemanı vardır.  $u^{-1}a = b$  ve  $u^{-1} \in U(R)$  olduğundan  $b \approx a$  elde edilir. “ $\approx$ ” bağıntısının simetrik olduğu görülür.

(iii)  $a \approx b$  ve  $b \approx c$  olsun. Bu taktirde  $a = ub$  ve  $b = vc$  olacak şekilde  $u, v \in U(R)$  elemanları vardır.  $a = ub = u(vc) = (uv)c$  ve  $uv \in U(R)$  olduğundan  $a \approx c$  elde edilir. “ $\approx$ ” geçişme özelliğini gerçekler.

(i),(ii),(iii) den dolayı “ $\approx$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

**Tanım 5.2.8**  $(R, .)$  monoid ve “ $\sim$ ”  $R$  halkasında bir bağıntı olsun. “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısı ve  $0 \neq c \in R$  için  $a \sim b \Rightarrow ca \sim cb$  özelliği sağlanıyor ise “ $\sim$ ” bağıntısına  $(R, .)$  monoidi üzerinde kongrüanstır denir.

**Teorem 5.2.9**  $(R, .)$  monoidi üzerinde ilgililik ve kuvvetli ilgililik bağıntıları birer kongrüanstırlar.

**İspat** Teorem 5.2.7 de ilgililik ve kuvvetli ilgililik bağıntılarının denklik bağıntıları olduğunu gösterdik. Şimdi  $a \sim b$  olsun. Böylece  $a \mid b$  ve  $b \mid a$  dır. Buradan  $b = ad$  ve  $a = bs$  olacak şekilde  $d, s \in R$  elemanları vardır. Buradan  $b - ad = 0$  ve  $a - bs = 0$  elde edilir. İki eşitliğin her iki tarafını  $0 \neq c \in R$  ile çarpalım. Bu taktirde  $cb - cad = 0 \Rightarrow cb = cad \Rightarrow ca \mid cb$  ve  $ca - cbs = 0 \Rightarrow ca = cbs \Rightarrow cb \mid ca$  elde edilir. Böylece  $a \sim b \Rightarrow ca \sim cb$  olduğu görülür. Şimdi  $a \approx b$  olsun. Böylece  $a = ub$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  elemanı vardır. Buradan  $a - ub = 0$  elde edilir.



Her iki tarafı  $0 \neq c \in R$  ile çarpalım. Bu taktirde  $ca - cub = 0 \Rightarrow ca = uc b \Rightarrow ca \approx cb$  elde edilir.

Böylece “ $\sim$ ” ve “ $\approx$ ” bağıntıları  $(R, \cdot)$  monoidi üzerinde kongrüans olma özelliğini sağlarlar.

**Not (i)** Çok kuvvetli ilgililik bağıntısı  $R$  halkasında bir denklik bağıntısı değildir. Gerçekten;  $e \neq 0, 1$  olmak üzere  $R$  halkasında bir idempotent eleman (yani  $e^2 = e$ ) ise  $e \neq 0$  ve  $e = ee$  fakat  $e \notin U(R)$  olduğundan  $e \not\approx e$  elde edilir. Böylece çok kuvvetli ilgililik bağıntısı yansıma özelliğin sağlamaz. Bu taktirde “ $\approx$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısı değildir.

(ii)  $a \approx a$  ise  $a = 0$  veya  $a \neq 0$  ve  $a = ra \Rightarrow r \in U(R)$  dır. Burada  $a \sim a$  olduğu açıktır.

**Teorem 5.2.10**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka olsun.  $R$  halkasında “ $\approx$ ” bağıntısı yansımalıdır  $\Leftrightarrow x, y \in R$  için  $x = xy \Rightarrow x = 0$  veya  $y \in U(R)$  dır.

**İspat “ $\Rightarrow$ ”:**  $x, y \in R$  için  $x = xy$  olsun Hipotezden “ $\approx$ ” bağıntısı yansımali olduğundan  $x = 0$  veya  $x \neq 0$  ve  $x = xy \Rightarrow y \in U(R)$  elde edilir.  $x = 0$  ise ispat tamam. Şimdi  $x \neq 0$  ve  $x = xy \Rightarrow y \in U(R)$  elde edilir.

“ $\Leftarrow$ ”: “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısı olduğundan  $x \sim x$  olduğu açıktır. Eğer  $x = 0$  ise ispat tamamdır. Şimdi  $x \neq 0$  ve  $x = xy$  olsun. Hipotezden dolayı  $y \in U(R)$  dır. Böylece  $x \approx x$  elde edilir. Yani “ $\approx$ ” bağıntısı yansımalıdır.

**Tanım 5.2.11**  $R$  değişmeli, birimli bir halka ve  $x, y \in R$  için  $x = xy \Rightarrow x = 0$  veya  $y \in U(R)$  olsun. Bu özelliği sağlayan  $R$  halkasına présimplifiable denir.

Dördüncü bölümde Fletcher’ın değişmeli ve birimli halkalar için verdiği tanımların bazılarını incelemiştik. Ayrıca Fletcher değişmeli ve birimli halkalarda présimplifiable olma özelliğine denk bir koşulu sağlayan halkalarla da ilgilenmiştir. Yine dördüncü bölümden biliyoruz ki  $0 \neq r \in R$  elemanının  $U$ - sınıfı  $U(r) = \{ \beta \in R \mid \exists \gamma \in R \text{ öyle ki } \beta \gamma r = r \}$  şeklindedir. Bunu şu şekilde ifade edebiliriz  $U(r) = \{ \beta \in R \mid \beta(r) = (r) \}$ . Her zaman  $U(R) \subset U(r)$  olduğu gösterilebilir. Ayrıca dördüncü bölüm içerisinde gördük ki; birimli ve değişmeli bir  $R$  halkasında  $\forall 0 \neq r \in R$  için  $U(R) = U(r)$  oluyorsa  $R$  halkasına Pseudo-Bölge denir.

**Teorem 5.2.12**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka olsun.  $0 \neq r \in R$  için  $r \cong r \Leftrightarrow U(R) = U(r)$  dır.

**İspat** “ $\Rightarrow$ ”:  $U(R) \subset U(r)$  her zaman sağlanır. şimdi  $x \in U(r)$  olsun. Bu taktirde  $xyr = r$  olacak şekilde  $y \in R$  elemanı vardır.  $r \neq 0$  olduğundan hipotezden dolayı  $xy \in U(R)$  olduğu görülür. Böylece  $x \in U(R)$  elde edilir. Yani  $U(r) \subset U(R)$  dır. Sonuç olarak  $U(R) = U(r)$  olduğu elde edilir.

“ $\Leftarrow$ ”:  $r \sim r$  olduğu açıktır.  $0 \neq r$  için  $r = ar$  olsun.  $r = a1_r r$  şeklinde yazabiliriz. Buradan  $a \in U(r) = U(R)$  olduğu görülür. Böylece  $r \cong r$  elde edilir.

**Sonuç 5.2.13**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka olsun. Bu taktirde  $R$  Pseudo-Bölgedir  $\Leftrightarrow R$  prsimplifiable dır.

**İspat**  $R$  Pseudo-Bölge olsun. Bu taktirde  $U(R) = U(r)$  dir. Yukarıdaki teoremden dolayı  $0 \neq r$  için  $r \cong r$  olur. Buradan  $r \neq 0$  ve  $r = ar$  olduğunda  $a \in U(R)$  olduğu yani  $R$  halkasının prsimplifiable olduğu elde edilir.

Tersine  $R$  prsimplifiable olsun. Bu taktirde  $0 \neq r$  için  $r \cong r \Rightarrow U(R) = U(r)$  olduğundan  $R$  halkası bir Pseudo-Bölgedir.

şimdi “ $\cong$ ” bağıntısının hangi koşullar altında bir denklik bağıntısı olduğunu inceleyelim.

**Teorem 5.2.14**  $R$  değişmeli ve birimli bir halka olsun.

- (1)  $a, b \in R$  için  $a \cong b \Rightarrow b \cong a$  dır. Yani “ $\cong$ ” simetriktir.
- (2)  $a, b, c \in R$  için  $a \cong b$  ve  $b \sim c \Rightarrow a \cong c$  dır. Yani “ $\cong$ ” geçişlidir. Eğer  $a \cong a$  ve  $a \sim b \Rightarrow a \cong b$  sağlanır.
- (3) Aşağıdaki koşullar denktir.
  - (i) “ $\cong$ ” bağıntısı  $(R, .)$  monoidinde bir kongransdır.
  - (ii) “ $\cong$ ” bağıntısı  $R$  halkasında bir denklik bağıntısıdır.
  - (iii) “ $\cong$ ” bağıntısı  $R$  halkasında yansımalıdır.
  - (iv) “ $\sim$ ”, “ $\approx$ ”, “ $\cong$ ” bağıntıları  $R$  halkasında çakışırlar.
  - (v)  $R$  halkası prsimplifiabledır.

**İspat (1)** Varsayalım  $a \cong b$  olsun. Bu taktirde  $a$  ile  $b$  ilgilidir ve böylece  $b \sim a$  elde edilir.  $a = 0$  ise  $a = b = 0$  olduğundan  $b \cong a$  bulunur. Şimdi varsayalım  $a \neq 0$  ve  $b = sa$  olsun.  $s \in U(R)$  olduğunu gösterirsek ispat biter.  $a \sim b \Rightarrow a \mid b$  ve  $b \mid a$  dır.  $b \mid a \Rightarrow a = tb$  olacak şekilde  $t \in R$  vardır. Buradan  $a = tb = t(sa) = (ts)a = (ts)tb \Rightarrow a = (tst)b$  elde edilir.  $a \neq 0$  ve  $a \cong b$  olduğundan  $tst \in U(R)$  olmalıdır. Buradan  $s \in U(R)$  elde edilir. Böylece  $b \cong a$  olup “ $\cong$ ” simetriktir.

(2) Varsayalım  $a \cong b$  ve  $b \sim c$  olsun. Buradan  $a \sim b$ ,  $b \sim c$  ve “ $\sim$ ” geçişli olduğundan  $a \sim c$  elde edilir.  $a = 0$  ise  $a = b = c = 0$  olur ve ispat tamamlanır. Şimdi  $a \neq 0$  ve  $a = rc$  olsun.  $b \sim c \Rightarrow b \mid c$  ve  $c \mid b$  olduğu biliniyor.  $b \mid c \Rightarrow c = sb$  olacak şekilde  $s \in R$  vardır. Buradan  $a = rc = (rs)b$  olduğu görülür.  $a \neq 0$  ve  $a \cong b$  olduğundan  $rs \in U(R)$  olmalıdır. Böylece  $r \in U(R)$  elde edilir. Buradan  $a \cong c$  olduğu yani “ $\cong$ ” bağıntısının geçişmeli olduğu görülür. Eğer  $a \cong a$  ve  $a \sim b$  ise ispatın birinci kısmından dolayı  $a \cong b$  elde edilir.

(3) “ $\cong$ ” bağıntısı  $(R, .)$  monoidi üzerinde bir kongrüans ise bir denklik bağıntısıdır. Bu taktirde “ $\cong$ ” bağıntısı yansıma özelliğini sağlar. Böylece  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$  sağlanır.

$(iii) \Rightarrow (iv)$  “ $\cong$ ” bağıntısı  $R$  üzerinde yansıma özelliğini sağlasın.  $a \cong b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow a \sim b$  olduğunu biliyoruz. Şimdi  $a \sim b \Rightarrow a \cong b$  olduğunu gösterirsek ispat biter. Varsayalım  $a \sim b$  olsun. “ $\cong$ ” yansımali olduğundan (2)’nin son ifadesinden dolayı  $a \cong b$  olduğu görülür.

$(iv) \Rightarrow (iii)$  “ $\sim$ ” bir denklik bağıntısı olduğundan  $a \sim a$  olduğu görülür. Hipotezden dolayı  $a \cong a$  ve dolayısıyla “ $\cong$ ” bağıntısının yansımali olduğu elde edilir.

$(iii) \Leftrightarrow (v)$  Teorem 5.2.10 ve Tanım 5.2.11 birlikte dikkate alındığında kolayca elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$  Varsayalım “ $\cong$ ” bağıntısı yansımali olsun. Burada (1) ve (2) koşullarını dikkate alırsak “ $\cong$ ” bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu elde edilir. Eğer  $c \in R$  için  $a \cong b \Rightarrow ca \cong cb$  olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.  $a \cong b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow a \mid b$  ve  $b \mid a \Rightarrow ca \mid cb$  ve  $cb \mid ca$  olduğu gösterilebilir. Böylece  $ca \sim cb$  sağlanır.  $ca = 0 \Rightarrow cb = 0$  olur ve  $ca \cong cb$  bulunur. Şimdi varsayalım  $ca \neq 0$  ve  $ca = r(cb)$  olsun.  $a \cong b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow a = ub$  olacak şekilde  $u \in U(R)$  vardır. Buradan

$ca = r(cb) = r(cu^{-1}a) = (ru^{-1})ca$  yazabiliriz.  $ca \neq 0$  ve “ $\cong$ ” bağıntısı yansımali olduğundan  $ru^{-1} \in U(R)$  ve buradan  $r \in U(R)$  elde edilir. Böylece  $ca \cong cb$  olduğu görülür.

**Teorem 5.2.15**  $R$  bir tamlık bölgesi ise présimplifiable özelliğini gerçektir.

**İspat**  $x, y \in R$  için  $x = xy$  olsun. Buradan  $x(1 - y) = 0$  olduğu görülür. Hipotezden  $x = 0$  veya  $1 - y = 0$  elde edilir. Böylece  $x = xy$  olduğunda  $x = 0$  veya  $y \in U(R)$  bulunur. Böylece  $R$  halkasının présimplifiable olduğu görülür.

**Sonuç 5.2.16**  $R$  tamlık bölgesi ise ilgililik, kuvvetli ilgililik, çok kuvvetli ilgililik bağıntıları çakışır.

**İspat** Teorem 5.2.14 dikkate alındığında kolayca yapılır.

**Teorem 5.2.17** Eğer  $a \in R$  regular (yani sıfır bölen olmayan bir eleman) ise  $a \cong a$  dır ve böylece herhangi bir  $b \in R$  için  $a \sim b \Rightarrow a \cong b$  dır.

**İspat**  $a \sim a$  olduğu açıktır.  $a = 0$  ise ispat biter. Varsayalım  $a \neq 0$  ve  $a = ra$  olsun. Buradan  $a(1 - r) = 0$  ve  $a$  regular olduğundan  $1 - r = 0 \Rightarrow r \in U(R)$  elde edilir. Böylece  $a \cong a$  bulunur. Şimdi herhangi bir  $b \in R$  için  $a \sim b$  olsun.  $a \cong a$  olduğundan Teorem 5.2.14(ii)’den dolayı  $a \cong b$  olduğu görülür.

Daha önce belirttiğimiz gibi  $e \neq 0, 1$  idempotent elemanı için  $e \approx e$  olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten;  $e = 1_R e$  ve  $1_R \in U(R)$  olduğundan doğrudur. Fakat önceden söylediğimize göre  $e \not\approx e$  dir. Benzer şekilde  $a \sim b$  fakat  $a \not\approx b$  olan bir örnek bulunabilir. Bunun için Fletcher (1969) bir örnek vermiştir.

### 5.3 İndirgenemez Elemanlar

Vermiş olduğumuz üç değişik ilgililik tanımı kullanılarak üç farklı indirgenemez eleman tanımı verilebilir.

**Tanım 5.3.1**  $R$  birimli, değişmeli bir halka ve  $a \in R$  birimselden farklı bir eleman olsun.  $a = bc$  olduğunda  $a \in R$ ,  $b$  veya  $c$  ile ilgili ( ya da sırasıyla kuvvetli ilgili, çok kuvvetli ilgili) ise  $a$ ' ya indirgenemez (ya da sırasıyla kuvvetli indirgenemez, çok kuvvetli indirgenemez ) eleman denir.

**Teorem 5.3.2** Bir önceki tanımda  $a = 0$  alırsak aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i)  $R$  bir tamlık bölgesidir.
- (ii)  $0$  çok kuvvetli indirgenemezdir.
- (iii)  $0$  kuvvetli indirgenemezdir.
- (iv)  $0$  indirgenemezdir.

**İspat** (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $a = 0$  için  $a = bc$  olsun. Hipotezden  $b = 0$  veya  $c = 0$  olduğu görülür. Böylece  $a \cong b$  veya  $a \cong c$  elde edilir. Buradan  $a = 0$  çok kuvvetli indirgenemezdir.

$a \cong b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow a \sim b$  olduğu dikkate alınırsa (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv) sağlanır.

(iv)  $\Rightarrow$  (i)  $0 \neq b, 0 \neq c \in R$  için  $bc = 0$  olsun. Hipotezden dolayı  $0 \sim b$  veya  $0 \sim c$  olur. Buradan  $b = 0$  veya  $c = 0$  olup  $R$  halkasının bir tamlık bölgesi olduğu elde edilir.

**Teorem 5.3.3**  $a$  çok kuvvetli indirgenemez  $\Rightarrow a$  kuvvetli indirgenemez  $\Rightarrow a$  indirgenemezdir. Fakat bu ifadelerin tersleri doğru değildir.

**İspat** Tanımlar ve  $a \cong b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow a \sim b$  olduğu kullanıldığı zaman kolayca elde edilir.

Teorem 5.2.14 de  $R$  présimplifiable ( örneğin bir tamlık bölgesi ) ise “ $\sim$ ”, “ $\approx$ ”, “ $\cong$ ” bağıntılarının çakıştıklarını gördük. Bundan yararlanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

**Sonuç 5.3.4**  $R$  présimplifiable ise çok kuvvetli indirgenemez, kuvvetli indirgenemez, indirgenemez eleman kavramları çakışırlar.

**Teorem 5.3.5**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka olsun. Sıfırdan ve birimselden farklı bir  $a \in R$  elemanı için aşağıdaki koşullar denktir.

- (1)  $a$  çok kuvvetli indirgenemezdir. Yani  $a = bc \Rightarrow a \cong b$  veya  $a \cong c$  dir.

- (2)  $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i = 1, 2, \dots, n$  öyle ki  $a \cong a_i$  dir.
- (3)  $a = bc \Rightarrow b$  veya  $c$  birimseldir.
- (4)  $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow i = 1, 2, \dots, n$  için biri hariç her  $a_i$  birimseldir.
- (5)  $a \cong a$  ve  $a \cong bc \Rightarrow a \cong b$  veya  $a \cong c$  dir.
- (6)  $a \cong a$  ve  $a \cong a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i = 1, 2, \dots, n$  öyle ki  $a \cong a_i$  dir.

**İspat** (1)  $\Rightarrow$  (3) Varsayalım  $a = bc$  olsun. Hipotezden dolayı  $a \cong b$  veya  $a \cong c$  dir.  $a \cong b$  olsun.  $a \cong b$  ve  $a = bc$  olduğundan  $c$  birimsel elde edilir. Eğer  $a \cong c$  ise benzer şekilde  $b$  birimsel elde edilir.

(3)  $\Rightarrow$  (5) Öncelikle  $a \cong a$  olduğunu gösterelim.  $a \sim a$  olduğu açıktır.  $a = ra$  olsun. Hipotezden  $r$  veya  $a$  birimsel olmalıdır.  $a$  birimselden farklı verildiğinden  $r \in R$  birimsel olmalıdır. Böylece  $a \cong a$  olduğu elde edilir. Şimdi varsayalım  $a \cong bc$  olsun. Buradan  $a \approx bc$  olduğu bulunur. Böylece  $a = u(bc)$  olacak şekilde  $u$  birimsel elemanı vardır. Hipotezden dolayı  $ub$  veya  $c$  birimseldir. Eğer  $ub$  birimsel ise  $a \mid c$  ve  $c \mid a \Rightarrow a \sim c$ , eğer  $c$  birimsel ise  $a \mid b$  ve  $b \mid a \Rightarrow a \sim b$  olduğu görülür. Şimdi  $a \cong a$  olduğundan Teorem 5.2.14 (2)' den dolayı  $a \cong c$  veya  $a \cong b$  elde edilir.

(5)  $\Rightarrow$  (1) Varsayalım  $a = bc$  olsun.  $a \cong a \Rightarrow a \cong a = bc \Rightarrow a \cong b$  veya  $a \cong c$  bulunur.

(2)  $\Rightarrow$  (4) Varsayalım  $a = a_1 \dots a_n$  olsun. Hipotezden  $\exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \cong a_i$  dir. Varsayalım  $a \cong a_1$  olsun. Bu taktirde  $a = a_1 \dots a_n$  olduğu için çok kuvvetli ilgililik tanımından  $a_2 \dots a_n$  birimseldir. Bu  $\forall i = 1, \dots, n$  için yapılabileceğinden ispat tamamlanır.

(4)  $\Rightarrow$  (6)  $a \cong a$  olduğu (3)  $\Rightarrow$  (5) ispatlanırken yapıldığı gibi elde edilebilir. Şimdi varsayalım  $a \cong a_1 \dots a_n$  olsun. Buradan  $a \approx a_1 \dots a_n$  olduğu görülür. Bu taktirde  $a = u(a_1 \dots a_n)$  olacak şekilde bir  $u$  birimsel elemanı vardır. Böylece  $a = (ua_1 \dots a_{n-1})a_n$  şeklinde yazabiliriz. Hipotezden biri hariç her  $a_i$  birimseldir. Varsayalım  $a_n$  birimsel olmasın. Bu taktirde  $a_n \mid a$  ve  $a \mid a_n$  yani  $a \sim a_n$  bulunur.  $a \cong a$  olduğundan Teorem 5.2.14(2)'den dolayı  $a \cong a_n$  bulunur. Bu  $\forall i = 1, \dots, n$  için benzer şekilde yapılabilir. Böylece  $\exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \cong a_i$  elde edilir.

(6)  $\Rightarrow$  (2) Varsayalım  $a = a_1 \dots a_n$  olsun. Hipotezden  $a \cong a_1 \dots a_n$  ve böylece  $\exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \cong a_i$  elde edilir.

(6)  $\Rightarrow$  (5)  $n = 2$  alırsak kolayca elde edilir.

(5)  $\Rightarrow$  (6) Tümevarım yöntemi kullanılarak elde edilir.

**Teorem 5.3.6** Eğer  $a \in R$  çok kuvvetli indirgenemez ve  $a \sim b$  ise  $a \cong b$  dir ve  $b \in R$  elemanı da çok kuvvetli indirgenemezdir.

**İspat**  $a = 0$  ise  $a \sim b$  olduğundan  $b = 0$  elde edilir.  $a = 0$  çok kuvvetli indirgenemez olduğundan  $R$  bir tamlık bölgesi ve buradan présimplifiable olur. Bu taktirde “ $\sim$ ” ve “ $\cong$ ” çakıştığı için  $a \cong b$  elde edilir. Şimdi  $b = 0 = cd$  olsun.  $R$  tamlık bölgesi olduğundan  $c = 0$  veya  $d = 0$  elde edilir. Böylece  $b = c = 0$  veya  $b = d = 0$  olduğu için  $b \in R$  çok kuvvetli indirgenemez elde edilir.

Şimdi  $a \neq 0$  olsun. Bir önceki teoremde yapıldığı gibi  $a \cong a$  olduğu gösterilebilir. Böylece  $a \sim b$  ve  $a \cong a$  olduğundan Teorem 5.2.14(2)’ den  $a \cong b$  olduğu görülür. Şimdi  $b = cd$  olsun.  $a \cong b = cd \Rightarrow a \cong c$  veya  $a \cong d$  olduğunu söyleyebiliriz.  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$  olduğu açıktır. Teorem 5.2.14’den “ $\cong$ ” bağıntısının simetrik ve  $a \cong a$  olduğunda geçişme özelliğini sağladığını biliyoruz. Bu taktirde  $a \cong b \Rightarrow b \cong a$  olduğundan  $b \cong c$  veya  $b \cong d$  elde edilir. Böylece  $b \in R$  çok kuvvetli indirgenemezdir.

**Not** Teorem 5.3.5’ e  $a \cong bc \Rightarrow a \cong b$  veya  $a \cong c$  ya da  $a \cong a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \cong a_i$  koşulları eklenemez. Gerçekten;  $e = (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  elemanını ele alalım.  $e$  birimselden ve sıfırdan farklıdır.  $e \sim e$  olduğu açıktır.  $(1, 0) = (1, 1)(1, 0)$  şeklinde yazabiliriz. Böylece  $e \cong e$  olduğu görülür.  $e \cong e = ee \Rightarrow e \cong e$  bulunur. Fakat  $e \neq 0$  çok kuvvetli indirgenemez değildir.  $e = ee$  fakat  $e \notin U(R)$  dir. Sonuç olarak Teorem 5.3.5(5) ve (6) için  $a \cong a$  koşulu gereklidir.

Galovich (1978) tek türlü çarpanlara ayrılabilen halkalar çalışmasında kendi indirgenemez eleman tanımının bizim 5.3.5(3)’ de kullandığımız ifadeyi almıştır. Fletcher (1969) kendi indirgenemez eleman tanımını başka şekilde kullanmıştır. Biz Fletcher tarafından verilen

tanımları dördüncü bölüm içerisinde görmüştük. Bu tanımlara ek olarak aşağıdaki tanımı da verebiliriz.

**Tanım 5.3.7**  $a \in R$  birimselden farklı olmak üzere  $a = a_1 \dots a_n$  şeklindeki bir çarpanlarına ayrılışı için  $\exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a_i = aa'_i$  sağlanıyorsa  $a \in R$  elemanına indirgenemezdir denir. Burada  $(a_i) = (a)$  olduğu kolayca görülür.

**Sonuç 5.3.8** Böylece Fletcher' ın indirgenemez eleman tanımı  $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \sim a_i$  ifadesine denk olur.

**İspat** Dördüncü bölümdeki tanımlar ve yukarıdaki tanım kullanılarak kolayca yapılabilir.

Bizim kullandığımız indirgenemez eleman tanımı Fletcher' ın tanımının  $n = 2$  için yapılmış halidir. Şimdi bu tanımların denk olduklarını gösterelim.

**Teorem 5.3.9**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka olsun. Birimselden farklı bir  $a \in R$  için aşağıdaki koşullar denktir.

- (1)  $a$  indirgenemezdir, yani  $a = bc \Rightarrow a \sim b$  veya  $a \sim c$  dir.
- (2)  $a$  Fletcher' ın tanımı anlamında indirgenemezdir, yani  $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \sim a_i$  dir.
- (3)  $(a) = (b)(c) \Rightarrow (a) = (b)$  veya  $(a) = (c)$  dir.
- (4)  $(a) = (a_1) \dots (a_n) \Rightarrow \exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $(a) = (a_i)$  dir.
- (5)  $a \sim bc \Rightarrow a \sim b$  veya  $a \sim c$  dir.
- (6)  $a \sim a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \sim a_i$  dir.

**İspat**  $(2) \Rightarrow (1), (4) \Rightarrow (3), (6) \Rightarrow (5)$   $n = 2$  alınırsa görülür.

$(3) \Rightarrow (4), (5) \Rightarrow (6)$  Tümevarımla kolayca ispatlanır.

$(4) \Rightarrow (2)$  Kabul edelim ki  $a = a_1 \dots a_n$  olsun.  $(a) = (a_1 \dots a_n) = (a_1) \dots (a_n)$  elde edilir. Hipotezden dolayı  $\exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $(a) = (a_i)$  dir. Buradan da  $\exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \sim a_i$  olduğu görülür.



(3)  $\Leftrightarrow$  (5) Kabul edelim ki  $a \sim bc$  olsun.  $(a) = (bc) = (b)(c) \Rightarrow (a) = (b)$  veya  $(a) = (c)$  dir. Böylece  $a \sim b$  veya  $a \sim c$  elde edilir. Şimdi varsayalım  $(a) = (b)(c)$  olsun. Bu taktirde  $(a) = (bc) \Rightarrow a \sim bc \Rightarrow a \sim b$  veya  $a \sim c \Rightarrow (a) = (b)$  veya  $(a) = (c)$  elde edilir.

(1)  $\Rightarrow$  (3) Kabul edelim ki  $(a) = (b)(c)$  olsun. Bu taktirde  $a = rbc$  olacak şekilde  $r \in R$  vardır. Buradan  $a = (rb)c = b(rc) \Rightarrow a \sim rb$  veya  $a \sim c$  ve  $a \sim b$  veya  $a \sim rc \Rightarrow (a) = (rb)$  veya  $(a) = (c)$  ve  $(a) = (b)$  veya  $(a) = (rc)$  elde edilir.  $(a) = (c)$  ve  $(a) = (b)$  için ispat tamamdır. Şimdi varsayalım  $(a) = (rb)$  ve  $(a) = (rc)$  olsun. Bu taktirde  $(a) = (rb) \Rightarrow (ac) = (rbc) = (a)$  ve  $(a) = (rc) \Rightarrow (ab) = (rcb) = (a)$  olduğu görülür. Buradan  $(a) = (ab) = (a)(b) = (ac)(b) = (abc) = (a)(b)(c) = (a)^2 \Rightarrow (a) = (a)^2$  elde edilir. Bu taktirde  $a = sa^2$  olacak şekilde bir  $s \in R$  vardır.  $(sa)^2 = (sa)(sa) = ssa^2 = sa \Rightarrow sa = e$  idempotent elde edilir.  $a \mid sa$  ve  $sa \mid a \Rightarrow (sa) = (e) = (a)$  bulunur.  $e = (1, 0)$  olmak üzere  $R_1 = eR$  ve  $R_2 = (1 - e)R$  olduğunda  $R = R_1 \times R_2$  şeklinde yazabiliriz.  $a = (\alpha, \beta)$  olsun.  $(a) = (e) \Rightarrow \langle (\alpha, \beta) \rangle = \langle (1, 0) \rangle \Rightarrow (1, 0) \in \langle (\alpha, \beta) \rangle \Rightarrow (1, 0) = (\alpha, \beta)(r, s)$  olacak şekilde bir  $(r, s) \in R$  vardır ve  $(\alpha, \beta) \in \langle (1, 0) \rangle \Rightarrow (\alpha, \beta) = (1, 0)(r', s')$  olacak şekilde  $(r', s') \in R$  vardır. Buradan  $(1, 0) = (\alpha r, \beta s)$  ve  $(\alpha, \beta) = (r', 0)$  ve böylece  $\alpha r = 1_{R_1}$  ve  $\beta = 0$  elde edilir. Yani  $\alpha \in U(R_1)$  ve  $\beta = 0$  dir. Böylece  $a = (\alpha, 0)$  ve  $\alpha \in U(R_1)$  olduğundan  $a = ue$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  bulunabilir. Şimdi  $a$  indirgenemez olduğundan  $\beta = 0$   $R_2$  de indirgenemez bulunur. Aksi olsa idi, yani  $\beta = 0$   $R_2$  de indirgenemez eleman olmasa  $b, c \in R_2$  için  $0 = bc$  yazılışında  $b \neq 0$  ve  $c \neq 0$  olmalıdır. Bu taktirde  $a = (\alpha, 0) = (\alpha, bc) = (\alpha, b)(1, c)$  yazılışı elde edilir. Fakat burada  $a$  elemanı ne  $(\alpha, b)$  ile ne de  $(1, c)$  ile ilgilidir. Bu ise  $a$  elemanının indirgenemez olması ile çelişir. Böylece  $\beta = 0$   $R_2$  de indirgenemez eleman olmalıdır. Buradan  $R_2$  bir tamlık bölgesidir.

$f: R \rightarrow R_2$   
 $(\alpha, \beta) \rightarrow f((\alpha, \beta)) = \beta$  şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım.  $f$  dönüşümünün örten bir

halka homomorfizması olduğu kolayca görülür.

$$\text{Ker } f = \{ (\alpha, \beta) \in R \mid f((\alpha, \beta)) = \beta = 0_{R_2} \} \Rightarrow \text{Ker } f = \{ (\alpha, 0) \in R \mid \alpha \in U(R_1) \}$$

$\Rightarrow \text{Ker } f = (a)$  olduğu görülür. Birinci izomorfizma teoreminden  $R / (a) \cong R_2$  olduğu elde edilir.  $R_2$  bir tamlık bölgesi olduğundan  $R / (a)$  bir tamlık bölgesi ve  $(a)$  idealinin asal

olduğu bulunur. Böylece  $(a) = (b)(c) \Rightarrow (a) = (b)$  veya  $(a) = (c)$  elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 5.3.10** Eğer  $a \in R$  indirgenemez ve  $a \sim a'$  ise  $a'$  elemanı da indirgenemezdir.  $e \in R$  idempotent elemanı için  $e$  indirgenemezdir  $\Leftrightarrow e$  kuvvetli indirgenemezdir  $\Leftrightarrow e$  asaldır. Ayrıca  $e$  çok kuvvetli indirgenemezdir  $\Leftrightarrow e = 0$  asaldır.

**İspat**  $a' = bc$  olsun.  $a \sim a' = bc \Rightarrow a \sim b$  veya  $a \sim c$  dir.  $a \sim a' \Rightarrow a' \sim a$  dir. Böylece  $a' \sim b$  veya  $a' \sim c$  elde edilir. Yani  $a'$  indirgenemezdir.

$e$  indirgenemez olsun. Bir önceki teoremden  $(1) \Rightarrow (3)$  ispatlanırken  $a = e$  alırsak benzer şekilde  $e$  elemanının asal olduğu bulunur. Tersine her asal eleman indirgenemez olduğundan  $e$  indirgenemez elde edilir.

Şimdi  $e$  indirgenemez ve  $e = ab$  olsun. Buradan  $e \sim a$  veya  $e \sim b$  ve  $(e) = (a)$  veya  $(e) = (b)$  olduğu görülür. Varsayalım  $(e) = (a)$  olsun. Yine bir önceki teoremin  $(1) \Rightarrow (3)$  ifadesindeki koşullar sağlanır. İspata benzer şekilde devam edersek  $a = ue$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  bulunabilir. Böylece  $a \approx e$  ve “ $\approx$ ” denklik bağıntısı olduğundan  $e \approx a$  elde edilir.  $(e) = (b)$  alınırse benzer yöntem uygulanarak  $e \approx b$  olduğu görülür. Sonuç olarak  $e$  kuvvetli indirgenemezdir. Tersine  $e$  kuvvetli indirgenemez ise indirgenemez olduğundan  $e$  indirgenemezdir  $\Leftrightarrow e$  kuvvetli indirgenemezdir elde edilir.

$e$  kuvvetli indirgenemezdir  $\Rightarrow e$  indirgenemez  $\Rightarrow e$  ispatın ikinci adımından dolayı asal olur. Şimdi  $e$  asal olsun. Buradan  $e$  indirgenemez olur ve böylece  $e$  kuvvetli indirgenemez elde edilir. Sonuç olarak  $e$  kuvvetli indirgenemezdir  $\Leftrightarrow e$  asaldır elde edilir.

Son olarak  $e$  çok kuvvetli indirgenemez olsun.  $e \neq 0$  alalım.  $e = e^2 = ee$  yazılabilir. Hipotezden dolayı  $e \in U(R)$  olur ki bu bir çelişkidir. Yani  $e = 0$  olmalıdır. Ayrıca  $e$  çok kuvvetli indirgenemez ise kuvvetli indirgenemezdir ve böylece  $e = 0$  asal elde edilir. Tersine  $e = 0$  asal olsun. Bu taktirde  $e = 0$  indirgenemezdir. Teorem 5.3.2 den  $e = 0$  çok kuvvetli indirgenemez elde edilir.

**Teorem 5.3.11**  $R$  birimli, değişmeli bir halka ve  $a \in R$  birimselden farklı bir eleman olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1)  $a$  indirgenemezdir.
- (2)  $(a) \subset (b), (c) \Rightarrow (a) \subset (b)(c)$  dir.

(3)  $S = \{ b \in R \mid (a) \subset (b) \}$  kümesi  $R$  halkasının saturated ve çarpımsal kapalı bir alt kümesidir.

**İspat** (1)  $\Rightarrow$  (2) Varsayalım  $a$  indirgenemez ve  $(a) \subset (b), (c)$  olsun.  $a \in (a) \subseteq (b)$  olduğundan  $a = db$  olacak şekilde  $d \in R$  vardır.  $(a) = (db) = (d)(b)$ ,  $a$  indirgenemez ve  $(a) \subset (b)$  olduğundan  $(a) = (d)$  olmalıdır. Buradan  $(a) = (d)(b) \Rightarrow (a) = (a)(b)$  elde edilir. Benzer şekilde yapılarak  $(a) = (a)(c)$  olacak şekilde bir  $c \in R$  bulunabilir. Böylece  $(a) = (a)(c) = (a)(b)(c) = (abc) \subseteq (bc) = (b)(c) \Rightarrow (a) \subseteq (b)(c)$  olduğu görülür. Eğer  $(a) = (b)(c)$  ise  $a$  indirgenemez olduğundan  $(a) = (b)$  veya  $(a) = (c)$  olur ki bu bir çelişkidir. Böylece  $(a) \subset (b)(c)$  olmalıdır.

(2)  $\Rightarrow$  (3)  $b, c \in S$  olsun. Bu taktirde  $(a) \subset (b)$  ve  $(a) \subset (c)$  dir. Böylece hipotezden  $(a) \subset (b)(c) = (bc)$  olup  $bc \in S$  elde edilir ve  $S$  kümesinin çarpımsal kapalı olduğu görülür. Şimdi  $xy \in S$  olsun. Bu taktirde  $(a) \subset (xy) \subseteq (x), (y)$  olduğundan  $x \in S$  ve  $y \in S$  bulunur. Böylece  $S$  saturated bir kümedir.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Varsayalım  $a$  indirgenemez olmasın. Yani  $(a) \neq (b)$  ve  $(a) \neq (c)$  olduğunda  $(a) = (b)(c)$  olsun. Bu taktirde  $(a) \subset (b), (c)$  bulunur. Hipotezden  $b, c \in S$  ve  $S$  kümesi çarpımsal kapalı olduğundan  $bc \in S$  ve buradan  $(a) \subset (bc) = (b)(c)$  bulunur ki bu bir çelişkidir.

**Teorem 5.3.12** Bir idempotent  $(x)$  temel ideali için  $x$  indirgenemezdir  $\Leftrightarrow (x)$  asaldir.

**İspat** Sonuç 5.3.10' dan kolayca elde görülür.

Aşağıdaki teorem  $x \in R$  elemanı için  $(x) = (x)^2$  ve  $x$  elemanının indirgenemez olmasının yakından ilgili olduğunu gösterir.

**Teorem 5.3.13**  $R$  birimli, değişmeli bir halka ve  $x \in R$  olsun.

- (1)  $(x) = (x)^2$  olması için gerek ve yeter şart  $(x) \subseteq (y) \Rightarrow (x) = (x)(y)$  olmasıdır.
- (2) Eğer  $x$  indirgenemez ise  $(x) \subset (y) \Rightarrow (x) = (x)(y)$  dır.
- (3) Eğer  $(x) \subset (y) \Rightarrow (x) = (x)(y)$  ise ya  $x$  indirgenemezdir ya da  $(x) = (x)^2$  dır.

**İspat (1) “ $\Rightarrow$ ”:**  $(x) \subseteq (y)$  olsun.  $(x) = (x)^2 = (x)(x) \Rightarrow (x) \subseteq (x)(y) = (xy) \subset (x) \Rightarrow (x) = (x)(y)$  elde edilir.

“ $\Leftarrow$ ”:

 $(x) \subseteq (x)$  olduğu biliniyor. Hipotezden  $(x) = (x)(x) = (x)^2$  olduğu elde edilir.

(2) Varsayalım  $(x) \subset (y)$  olsun. Bu taktirde  $(x) = (y)(z)$  olacak şekilde  $z \in R$  vardır.  $x$  indirgenemez ve  $(x) \subset (y)$  olduğundan  $(x) = (z)$  elde edilir. Böylece  $(x) = (y)(z) = (x)(y)$  olduğu görülür.

(3) Varsayalım  $(x) \subset (y), (z)$  olsun. Hipotezden  $(x) = (x)(y)$  ve  $(x) = (x)(z)$  elde edilir. Böylece  $(x) = (x)(y) = (x)(y)(z) = (xy)(z) = (xyz) \subseteq (yz)$  olduğu görülür. Eğer  $(x) \subset (yz)$  ise  $x$  indirgenemezdir. Eğer  $x$  indirgenemez değilse  $y, z \in R$  için  $(x) = (y)(z)$  dir. Buradan  $(x)^2 = (x)(x) = (x)((y)(z)) = ((x)(y))(z) = (x)(z) = (x)$  elde edilir.

Şimdi bir elemanın kuvvetli indirgenemez olmasına denk bazı koşullar verelim.

**Teorem 5.3.14**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka olsun. Birimselden farklı bir  $a \in R$  elemanı için aşağıdaki koşullar denktir.

(1)  $a$  kuvvetli indirgenemezdir. Yani  $a = bc \Rightarrow a \approx b$  veya  $a \approx c$  dir.

(2)  $a = a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \approx a_i$  dir.

(3)  $a \approx bc \Rightarrow a \approx b$  veya  $a \approx c$  dir.

(4)  $a \approx a_1 \dots a_n \Rightarrow \exists i = 1, \dots, n$  öyle ki  $a \approx a_i$  dir.

Eğer  $a$  kuvvetli indirgenemez ve  $b \sim a$  ise  $b \approx a$  ve buradan  $b$  elemanı da kuvvetli indirgenemezdir.

**İspat** (2)  $\Rightarrow$  (1) ve (4)  $\Rightarrow$  (3)  $n = 2$  için sağlanır.

(1)  $\Rightarrow$  (2) ve (3)  $\Rightarrow$  (4) tümevarımla kolayca yapılır.

(3)  $\Rightarrow$  (1)  $a = bc$  olsun.  $a \approx a$  olduğunu söyleyebiliriz. Bu ikisini kullanırsak  $a \approx a = bc$  ve hipotezden  $a \approx b$  veya  $a \approx c$  elde edilir.

(1)  $\Rightarrow$  (3)  $a \approx bc$  olsun. Bu taktirde  $a = u(bc) = (ub)c$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  elemanı vardır. Hipotezden  $a \approx ub$  veya  $a \approx c$  dir. Buradan da  $a \approx b$  veya  $a \approx c$  elde edilir.

Şimdide son ifadeyi görmeye çalışalım. Varsayalım  $a$  kuvvetli indirgenemez ve  $b \sim a$  olsun.  $b \sim a \Rightarrow a \sim b \Rightarrow (a) = (b)$  bulunur.  $a \in (a) = (b) \Rightarrow a = bc$  olacak şekilde bir  $c \in R$  vardır. Hipotezden  $a \approx b$  veya  $a \approx c$  olduğu görülür.  $a \approx b$  ise  $b \approx a$  sağlanır. Şimdi  $b = rs$  olsun.  $a \approx b = rs \Rightarrow a \approx r$  veya  $a \approx s$  elde edilir. Burada  $b \approx a$  olduğu dikkate alınır  $b \approx r$  veya  $b \approx s$  olup  $b$  elemanının kuvvetli indirgenemez olduğu görülür. Eğer  $a \approx c$  ise  $a = uc$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  vardır. Böylece  $a \mid c$  ve  $c \mid a \Rightarrow (a) = (c)$  elde edilir. Şu halde  $(a) = (bc) = (b)(c) = (a)(a) = (a)^2$  olduğunu söyleyebiliriz. Burada Teorem 5.3.9(1)  $\Rightarrow$  (3)' de yapıldığı gibi hareket edilirse  $a = ue$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  bulunabilir.  $(b) = (a) = (e)$  olduğundan bir  $v \in U(R)$  için  $b = ve$  yazabiliriz. Buradan  $b = ve = vu^{-1}a \Rightarrow b \approx a$  bulunur. Yukarıdakine benzer şekilde  $b$  elemanının kuvvetli indirgenemez olduğu gösterilir.

$R$  bir tamlık bölgesi,  $a \in R$  sıfırdan ve birimselden farklı bir eleman olmak üzere  $a$  indirgenemezdir  $\Leftrightarrow (a)$   $R$ ' nin öz temel idealler kümesinin maximal elemanıdır ifadesini Teorem 5.2.3 de ispatlamıştık. Şimdi bu ifadeyi kullanarak başka bir indirgenemez eleman tanımı verebiliriz.

**Tanım 5.3.15**  $R$  değişmeli, birimli bir halka ve  $a \in R$  birimselden farklı olsun. Eğer  $(a)$   $R$  halkasının öz temel idealler kümesinin maximal elemanı ise  $a$  elemanına  $m$ -indirgenemezdir denir.

**Teorem 5.3.16**  $R$  değişmeli, birimli bir halka ve  $a \in R$  birimselden farklı olsun.

- (1)  $a \in R$   $m$ -indirgenemezdir  $\Leftrightarrow a = bc \Rightarrow b \in U(R)$  veya  $a \sim b$  dir.
- (2) Eğer  $0 \neq a$  elemanı çok kuvvetli indirgenemez ise  $m$ -indirgenemezdir.
- (3) Eğer  $a$   $m$ -indirgenemez ise kuvvetli indirgenemezdir.
- (4) Eğer  $a$   $m$ -indirgenemez ve  $a \sim b$  ise  $a \approx b$  ve  $b$   $m$ -indirgenemezdir.
- (5)  $a$  indirgenemez ve  $S = \{b \mid (a) \subset (b)\}$  kümesi çarpımsal kapalı olsun. Bu taktirde  $a/1 \in S^{-1}R$   $m$ -indirgenemezdir.

**İspat** (1) “ $\Rightarrow$ ”: Varsayalım  $a = bc$  olsun.  $(a) = (bc) \subseteq (b)$  olduğu görülür.  $a \in R$   $m$ -indirgenemez olduğundan ya  $(b) = R$  ya da  $(b) = (a)$  dır. Buradan  $b \in U(R)$  veya  $a \sim b$  olduğu elde edilir.

“ $\Leftarrow$ ”: Varsayalım  $a \in R$   $m$ -indirgenemez olmasın. Bu taktirde  $(a) \subset (b) \subset R$  olacak şekilde bir  $(b)$  ideali vardır. Buradan  $a = bc$  olacak şekilde bir  $c \in R$  bulunabilir. Hipotezden dolayı  $b \in U(R)$  veya  $a \sim b$  dır. Buradan da  $(b) = R$  ya da  $(b) = (a)$  elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani  $a \in R$   $m$ -indirgenemez olmalıdır.

(2) Varsayalım  $0 \neq a$  elemanı çok kuvvetli indirgenemez olsun. Kabul edelim ki  $a \in R$   $m$ -indirgenemez olmasın. Bu taktirde  $(a) \subset (b) \subset R$  olacak şekilde bir  $(b)$  ideali vardır. Buradan  $a = bc$  olacak şekilde bir  $c \in R$  bulunabilir. Hipotezden  $a \cong b$  veya  $a \cong c$  dir.  $a \cong b \Rightarrow a \sim b$  ve  $(a) = (b)$  bulunur. Eğer  $a \cong c$  ise  $a \approx c$  dir ve  $c = ua$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  elemanı olduğu görülür. Buradan  $a = bc = bua$  elde edilir.  $0 \neq a$  çok kuvvetli indirgenemez olduğundan  $bu \in U(R)$  ve böylece  $b \in U(R)$  elde edilir. Buradan  $(b) = R$  olduğu bulunur. Her iki durumda da bir çelişki ortaya çıkar. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani  $a \in R$   $m$ -indirgenemez olmalıdır.

(3) Varsayalım  $a \in R$   $m$ -indirgenemez ve  $a = bc$  olsun. Buradan  $(a) \subseteq (b), (c)$  dır. Böylece  $((b) = R$  veya  $(b) = (a))$  ya da  $((c) = R$  veya  $(c) = (a))$  elde edilir. Eğer  $(b) = R$  veya  $(c) = R$  ise  $b$  veya  $c$  birimsel olup  $a \approx c$  veya  $a \approx b$  olduğu elde edilir. Şimdi varsayalım  $(a) = (b) = (c)$  olsun.  $(a) = (bc) = (b)(c) = (a)(a) = (a)^2$  olduğundan  $(a)$  idempotenttir. Böylece  $(a)$  maximal idealdir. Gerçekten; aksi olsa  $(a) \subset J \subset R$  olacak şekilde bir  $J$  ideali vardır.  $(a) \subset J \subset R \Rightarrow (a)(a) \subset J(a) \subset R(a) \Rightarrow (a) = (a)^2 \subset J(a) \subseteq J \subset (a) \Rightarrow (a) = J$  elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece  $(a)$  maximal ideal olmalıdır. Buradan  $(a)$  asal ideal olup  $a$  asal elemandır. Sonuç 5.3.10 dan dolayı  $a$  kuvvetli indirgenemezdir.

(4) Varsayalım  $a \in R$   $m$ -indirgenemez olsun. (3) ifadesinden  $a \in R$  kuvvetli indirgenemezdir. Teorem 5.3.14 den dolayı  $a$  kuvvetli indirgenemez ve  $b \sim a$  ise  $b \approx a$  ve böylece  $a \approx b$  elde edilir. Şimdi  $b$  elemanının  $m$ -indirgenemez olduğunu gösterelim. Varsayalım  $(b) \subset (c) \subset R$  olacak şekilde bir  $(c)$  temel ideali olsun.  $b \in (b) \subseteq (c) \Rightarrow b = cd$  olacak şekilde bir  $d \in R$  vardır.  $a \approx b$  ve  $b = cd$  olduğundan  $a \approx cd \Rightarrow a \approx c$  veya  $a \approx d$  ve

böylece  $b \approx c$  veya  $b \approx d$  elde edilir.  $b \approx c$  ve  $b = cd$  ifadesinden  $d \in U(R)$  ve buradan  $(b) = (c)$  bulunur.  $b \approx d$  ve  $b = cd$  ifadesinden  $c \in U(R)$  ve  $(c) = R$  olduğu görülür. Her iki durumda da bir çelişki vardır. Varsayımımız yanlıştır.  $b$  elemanı  $m$  - indirgenemez olmalıdır.

(5) Teorem 5.3.11' den  $S$  kümesi çarpımsal kapalıdır.  $(a) \cap S = \emptyset$  ve böylece  $(a)_S = S^{-1}R$  kesir halkasının bir öz temel idealidir. Şimdi varsayalım  $(a)_S \subseteq (c)_S$  olsun. Buradan  $r \in R$  ve  $s \in S$  olmak üzere  $a/1 = (r/s)(c/1)$  yazabiliriz. Bu taktirde  $tsa = trc$  olacak şekilde bir  $t \in S$  vardır.  $ts \in S$  olduğundan  $(a) \subset (ts)$  ve  $a$  indirgenemez olduğundan Teorem 5.3.13 den  $(a) = (a)(ts) = (tsa) \Rightarrow (a) = (tsa) = (trc) \subseteq (c)$  elde edilir. Eğer  $(a) = (c) \Rightarrow (a)_S = (c)_S$  bulunur. Eğer  $(a) \subset (c)$  ise  $c \in S$  olur ki buradan  $(c)_S = S^{-1}R$  elde edilir. Böylece  $a/1 \in S^{-1}R$  kesir halkasında  $m$  - indirgenemezdir.

Not  $a = 0$  indirgenemezdir  $\Leftrightarrow$  kuvvetli indirgenemezdir  $\Leftrightarrow$  çok kuvvetli indirgenemezdir ifadelerini Teorem 5.3.2 de verdik. Ayrıca  $a = 0$  çok kuvvetli indirgenemezdir  $\Leftrightarrow a$  elemanı asaldır ifadesini de sonuç 5.3.10 da söylemiştik.

**Teorem 5.3.17**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka olsun.  $a = 0$   $m$  - indirgenemezdir  $\Leftrightarrow 0$  maximal idealdir. Yani  $R$  halkası bir cisimdir.

**İspat**  $a = 0$   $m$  - indirgenemez olsun. Varsayalım  $(a) \subsetneq I \subsetneq R$  olacak şekilde bir  $I$  ideali mevcut olsun.  $0 \neq b \in I$  keyfi olsun. Buradan  $(b) \subset I$  dır.  $(0) \subset (b)$  olduğu biliniyor. Ayrıca  $0$   $m$  - indirgenemez olduğundan  $(b) \subset (0)$  elde edilir. Böylece  $(b) = (0)$  dır. Buradan  $b \in (0)$  olup  $I \subset (0)$  elde edilir. Böylece  $I = (0)$  olduğu bulunur ki bu varsayım ile çelişir. O halde  $0$  maximal ideal olmalıdır. Böylece  $R$  halkasının cisim olduğu elde edilir.

Tersine  $0$  maximal ideal olsun. Bu taktirde  $0$ ,  $R$  halkasının öz temel idealler kümesinin de maximal elemanıdır ve böylece  $m$  - indirgenemezdir.

**Sonuç 5.3.18**  $R$  birimli, değişmeli bir halka ve  $0 \neq a \in R$  olsun. Bu taktirde  $a$  çok kuvvetli indirgenemezdir  $\Rightarrow a$   $m$  - indirgenemezdir  $\Rightarrow a$  kuvvetli indirgenemezdir  $\Rightarrow a$  indirgenemezdir. Fakat bu ifadelerin hiç biri ters çevrilemez.

Aşağıdaki teorem indirgenemez ve  $m$  - indirgenemez elemanlar arasındaki kesin ilişkiyi verir.



Bir  $m$  - indirgenemez eleman, ürettiği ideal  $R$  halkasının öz temel idealler kümesinin maximal elemanı olan bir elemandır. Bir indirgenemez eleman ise ürettiği ideal, belirli bir asal ideal tarafından içerilen temel idealler kümesinin maximal elemanı olan bir elemandır.

**Teorem 5.3.20**  $R$  değişmeli, birimli bir halka ve  $P$   $R$  halkasının bir asal ideali olsun. Varsayalım  $a \in P$  elemanı  $(a) \subseteq (b) \subseteq P \Rightarrow (a) = (b)$  özelliğini sağlasın. Bu taktirde  $a \in R$  indirgenemezdir. Tersine varsayalım  $a \in R$  indirgenemez olsun. Bu taktirde  $a \in P$  olan bir asal ideal vardır öyle ki  $(a) \subseteq (b) \subseteq P \Rightarrow (a) = (b)$  dır.

**İspat** Varsayalım  $(a)$ ,  $P$  asal idealinde içerilen temel idealler kümesinin maximal elemanı ve  $a = bc$  olsun. Böylece  $bc = a \in P \Rightarrow b \in P$  veya  $c \in P$  dir. Varsayalım  $b \in P$  olsun. Bu taktirde  $(a) = (bc) \subseteq (b) \subseteq P$  elde edilir. Hipotezden  $(a) = (b)$  olduğu görülür. Eğer  $c \in P$  ise benzer şekilde  $(a) = (c)$  elde edilir. Böylece  $a \in R$  indirgenemez eleman olur.

Tersine, varsayalım  $a \in R$  indirgenemez olsun. Teorem 5.3.11 den  $S = \{ b \in R \mid (a) \subset (b) \}$  kümesinin saturated ve çarpımsal kapalı bir küme olduğunu biliyoruz.  $a \notin S$  olduğundan  $a \in P$  ve  $P \cap S = \emptyset$  olacak şekilde bir  $P$  asal ideali vardır. Eğer  $(a) \subset (b) \subseteq P$  ise  $b \in P \cap S$  olur ki bu bir çelişkidir. Böylece  $(a) = (b)$  olmalıdır.

Bu bölümde son olarak verdiğimiz ilgililik ve indirgenemez eleman kavramlarının değişmeli ve birimli halkaların direkt çarpımı üzerinde ne şekilde olduklarını inceleyelim.

**Teorem 5.3.21**  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  değişmeli ve birimli halkaların bir ailesi ve  $R = \prod R_\alpha$  olsun.  $a = (a_\alpha), b = (b_\alpha) \in R$  herhangi iki eleman olsun.

- (1)  $a \sim b \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \sim b_\alpha$ ,  $a \approx b \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \approx b_\alpha$ ,  $a \cong b \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \cong b_\alpha$  ve  $\exists \alpha_0 \in \Delta$  öyle ki  $a_{\alpha_0} = 0$  ise  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha = 0$  dır.
- (2)  $a$  ( sırasıyla ) indirgenemezdir, kuvvetli indirgenemezdir,  $m$  - indirgenemezdir, asaldır  $\Leftrightarrow$  bir  $\alpha_0 \in \Delta$  hariç her bir  $a_\alpha \in U(R_\alpha)$  dır, üstelik bu  $\alpha_0 \in \Delta$  için olan  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  elemanı (sırasıyla ) indirgenemezdir, kuvvetli indirgenemezdir,  $m$  - indirgenemezdir, asaldır.
- (3)  $a$  çok kuvvetli indirgenemezdir  $\Leftrightarrow$  bir  $\alpha_0 \in \Delta$  hariç her bir  $a_\alpha \in U(R_\alpha)$  ve bu  $\alpha_0 \in \Delta$  için olan  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  elemanı çok kuvvetli indirgenemezdir, fakat  $|\Delta| = 1$  olmadıkça  $a_{\alpha_0} \neq 0$  dır ve  $R_{\alpha_0}$  bir tamlık bölgesidir.



**İspat (1)**  $a \sim b$  olsun  $\Leftrightarrow (a_\alpha) \sim (b_\alpha) \Leftrightarrow (a_\alpha) \mid (b_\alpha)$  ve  $(b_\alpha) \mid (a_\alpha) \Leftrightarrow (b_\alpha) = (a_\alpha)(c_\alpha)$  ve  $(a_\alpha) = (b_\alpha)(d_\alpha)$  olacak şekilde  $(c_\alpha), (d_\alpha) \in R$  vardır  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $b_\alpha = a_\alpha c_\alpha$  ve  $a_\alpha = b_\alpha d_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \mid b_\alpha$  ve  $b_\alpha \mid a_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \sim b_\alpha$  elde edilir.

Şimdi  $a \approx b$  olsun  $\Leftrightarrow (a_\alpha) \approx (b_\alpha) \Leftrightarrow (a_\alpha) = (u_\alpha)(b_\alpha)$  olacak şekilde  $(u_\alpha) \in U(R)$  vardır  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha = u_\alpha b_\alpha$  olacak şekilde  $u_\alpha \in U(R_\alpha)$  vardır  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \approx b_\alpha$  elde edilir.

Varsayalım  $a \cong b$  olsun  $\Leftrightarrow (a_\alpha) \cong (b_\alpha) \Leftrightarrow (a_\alpha) \sim (b_\alpha)$  ,  $(a_\alpha) = (b_\alpha) = (0_\alpha)$  veya  $(a_\alpha) \neq (0_\alpha)$  ve  $(a_\alpha) = (r_\alpha)(b_\alpha) \Rightarrow (r_\alpha) \in U(R)$  dir  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \sim b_\alpha$  ,  $a_\alpha = b_\alpha = 0_\alpha$  veya  $a_\alpha \neq 0_\alpha$  ve  $a_\alpha = r_\alpha b_\alpha \Rightarrow r_\alpha \in U(R_\alpha)$  dir  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \cong b_\alpha$  elde edilir.

Şimdi  $\exists \alpha_0 \in \Delta$  öyle ki  $a_{\alpha_0} = 0$  ve varsayalım bir  $\alpha_1 \in \Delta$  için  $a_{\alpha_1} \neq 0$  olsun. Böylece  $(a_\alpha) \neq 0$  dir.  $a = (a_\alpha) = (0, a_{\alpha_1}, 0, \dots, 0, \dots) = (0, 1, \dots, 0, \dots)(0, a_{\alpha_1}, 0, \dots, 0, \dots)$  yazabiliriz. Burada  $(0, 1, \dots, 0, \dots) \notin U(R)$  ve  $(0, a_{\alpha_1}, 0, \dots, 0, \dots) \notin U(R)$  olduğundan bir çelişki elde edilir. Böylece  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha = 0$  olmalıdır.

(2)  $a = (a_\alpha) \in R$  indirgenemez olsun.

$a = (a_{\alpha_0}, a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n}, \dots) = (a_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)(1, a_{\alpha_1}, 1, \dots, 1, \dots) \dots \dots (1, 1, \dots, a_{\alpha_n}, \dots) \dots \dots$  şeklinde yazılabilir.  $a = (a_\alpha) \in R$  indirgenemez olduğundan  $\exists \alpha_i \in \Delta$  ( $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ ) öyle ki  $(a_{\alpha_0}, a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n}, \dots) \sim (1, 1, \dots, a_{\alpha_i}, \dots)$  olduğu elde edilir. Varsayalım  $(a_{\alpha_0}, a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n}, \dots) \sim (a_{\alpha_0}, 1, 1, \dots, 1, \dots)$  olsun. (1) den dolayı  $\forall \alpha_j \in \Delta$  ( $j = 1, 2, \dots, n, \dots$ ) için  $a_{\alpha_j} \sim 1$  ve  $a_{\alpha_0} \sim a_{\alpha_0}$  bulunur. Böylece  $\alpha_0 \in \Delta$  için olan  $a_{\alpha_0}$  hariç  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \in U(R_\alpha)$  elde edilir. Şimdi  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  elemanının indirgenemez olduğunu gösterelim. Varsayalım  $a_{\alpha_0} = b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}$  olsun.  $(a_\alpha) = (a_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots) = (b_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)(c_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)$  şeklinde yazabiliriz.  $(a_\alpha)$  indirgenemez olduğundan ve (1) den dolayı  $a_{\alpha_0} \sim b_{\alpha_0}$  veya  $a_{\alpha_0} \sim c_{\alpha_0}$  elde edilir. Böylece  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  indirgenemezdir.

Şimdi  $a = (a_\alpha)$  kuvvetli indirgenemez olsun. Bu taktirde  $a = (a_\alpha)$  indirgenemezdir ve ispatın birinci adımından dolayı bir  $\alpha_0 \in \Delta$  için olan  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  elemanı hariç  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \in U(R_\alpha)$  elde edilir. Varsayalım  $a_{\alpha_0} = b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}$  olsun.

$(a_\alpha) = (a_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots) = (b_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)(c_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)$  ,  $(a_\alpha)$  kuvvetli indirgenemez ve (1) den dolayı  $a_{\alpha_0} \approx b_{\alpha_0}$  veya  $a_{\alpha_0} \approx c_{\alpha_0}$  olup  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  kuvvetli indirgenemezdir.

Şimdi de  $a = (a_\alpha)$   $m$  - indirgenemez olsun. Bu taktirde  $a = (a_\alpha)$  indirgenemezdir ve ispatın birinci adımından dolayı bir  $\alpha_0 \in \Delta$  için olan  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  elemanı hariç  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \in U(R_\alpha)$  elde edilir.  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  elemanının  $m$  - indirgenemez olduğu açıktır.

$a = (a_\alpha) \in R$  asal ise indirgenemez ve ispatın birinci adımından dolayı bir  $\alpha_0 \in \Delta$  için olan  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  elemanı hariç  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \in U(R_\alpha)$  elde edilir. Şimdi  $a_{\alpha_0} \mid b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}$  olsun.

Buradan  $b_{\alpha_0} c_{\alpha_0} = a_{\alpha_0} t_{\alpha_0}$  olacak şekilde bir  $t_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  vardır.

$$(b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots) = (b_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)(c_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots) = (a_{\alpha_0} t_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots) = (a_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)$$

$(t_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots) \Rightarrow (a_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots) \mid (b_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)(c_{\alpha_0}, 1, \dots, 1, \dots)$  elde edilir.  $a = (a_\alpha) \in R$  asal olduğu dikkate alınırsa  $a_{\alpha_0} \mid b_{\alpha_0}$  veya  $a_{\alpha_0} \mid c_{\alpha_0}$  olduğu kolayca görülür ve  $a_{\alpha_0}$  asal elde edilir.

(3)  $a = (a_\alpha) \in R$  çok kuvvetli indirgenemez olsun. Buradan  $(a_\alpha)$  indirgenemez ve (2) den bir  $\alpha_0 \in \Delta$  için olan  $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0}$  elemanı hariç  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha \in U(R_\alpha)$  elde edilir. Şimdi  $a_{\alpha_0} = b_{\alpha_0} c_{\alpha_0}$  olsun. (1) den ve hipotezden dolayı  $a_{\alpha_0} \cong b_{\alpha_0}$  veya  $a_{\alpha_0} \cong c_{\alpha_0}$  olduğu görülür. Buradan  $a_{\alpha_0}$  çok kuvvetli indirgenemez elde edilir. Varsayalım  $a_{\alpha_0} = 0$  olsun. Bu taktirde  $R_{\alpha_0}$  bir tamlık bölgesidir.  $a = (a_\alpha)$  çok kuvvetli indirgenemez olduğundan Teorem 5.3.5 den  $a \cong a$  ve böylece (1) den dolayı  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha = 0$  elde edilir. Bu durum sadece  $|\Delta| = 1$  olması halinde elde edilir.

Tersine,  $|\Delta| = 1$  ise aşıkardır. Şimdi  $|\Delta| > 1$  kabul edelim. Böylece  $a_{\alpha_0} \neq 0$  çok kuvvetli indirgenemez ve  $\alpha \neq \alpha_0$  için  $a_\alpha \in U(R_\alpha)$  dır.  $b = (b_\alpha), c = (c_\alpha) \in R$  için  $a = bc$  olsun. Buradan  $\alpha \neq \alpha_0$  için  $b_\alpha, c_\alpha \in U(R_\alpha)$  ve  $a_{\alpha_0} \cong b_{\alpha_0}$  veya  $a_{\alpha_0} \cong c_{\alpha_0}$  olduğu görülür. Böylece (1) den dolayı  $a \cong b$  veya  $a \cong c$  olup  $a \in R$  çok kuvvetli indirgenemez elde edilir.

**KAYNAKLAR**

Anderson, D.D. ve Markanda, R., (1985a), "Unique Factorization Rings with Zero Divisors", Houston J. Math., 11:15-30.

Anderson, D.D. ve Markanda, R., (1985b), "Unique Factorization Rings with Zero Divisors: Corrigendum", Houston J. Math., 11:423-426.

Anderson, D.D. ve Valdes-Leon, S., (1996), "Factorization in Commutative Rings with Zero Divisors", Rocky Mountain Journal of Mathematics, 26(2):439-480.

Burton, D.M., (1970), A First Course in Rings and Ideals, Addison-Wesley Pub. Co., London.

Bouvier, A., (1971), "Anneaux Présimplifiables et Anneaux Atomiques", C. R. Acad. Sci. Paris, 272:992-994.

Cohn, P.M., (1989), Algebra, Volume I-II, John Willey & Sons, London.

Fletcher, C. R., (1969), "Unique Factorization Rings", Proc. Camb. Phil. Soc., 65:579-583.

Fletcher, C. R., (1970), "The Structure of Unique Factorization Rings", Proc. Camb. Phil. Soc., 67:535-540.

Galovich, S., (1978), "Unique Factorization Rings with Zero Divisors", Math. Magazine, 51:276-283.

Hungerford, T. W., (1974), Algebra, Springer-Verlag, New York.

Samuel, P., (1961), "On Unique Factorization Domains", Journal of Math., Volume V, 1-17.

Zariski, O. ve Samuel, P., (1958), Commutative Algebra, Volume I, Princeton.

**ÖZGEÇMİŞ**

|               |            |                                                                               |
|---------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Doğum tarihi  | 16.08.1975 |                                                                               |
| Doğum yeri    | İstanbul   |                                                                               |
| İlkokul       | 1981-1986  | Muallim Cevdet İlkokulu                                                       |
| Ortaokul      | 1986-1989  | Hasköy Lisesi                                                                 |
| Lise          | 1989-1993  | İ.T.O Anadolu Ticaret Lisesi Bilgisayar Bölümü                                |
| Lisans        | 1993-1998  | Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat<br>Fakültesi Matematik Bölümü      |
| Yüksek Lisans | 1998- ?    | Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü<br>Matematik Anabilim Dalı |

